الهندسة وعلم المناظر في ضحى الإسلام

رشدي راشد

مؤسسة الملك عبد العزيز - الدار البيضاء
Fondation du Roi Abdul-Aziz - Casablanca

الناشر الالكتروني

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

الهندسة وعلم المناظر

في

ضحى الإسلام

رشدي راشد

ترجمة الأستاذ الدكتور محمد البغدادي

مؤسسة الملك عبد العزيز - الدار البيضاء
Fondation du Roi Abdul-Aziz - Casablanca

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

شكر و عرفان

تتقدم "منظمة المجتمع العلمي العربي" بالشكر و التقدير لمؤسسة الملك عبدالعزيز آل سعود للدراسات الإسلامية و العلوم الإنسانية في الدار البيضاء، ولسعادة المدير العام السيد/ أحمد التوفيق، وسعادة نائب المدير العام السيد/ محمد الصغير جنجار، على تشجيعهما لمساهمة المنظمة في الجهد العالمي في فعاليات **السنة الدولية للضوء والتكنولوجيات القائمة على الضوء 2015.**

وقد تفضلت المؤسسة مشكورة بتوفير المحتوى العلمي لكتاب " **الهندسة و علم المناظر في ضحى الإسلام"** وأذنت لمنظمة المجتمع العلمي العربي بالنشر الالكتروني لإتاحته للقارئ العربي، بمناسبة مرور ألف سنة على تأسيس علم الضوء على يد العالم العربي المسلم الحسن ابن الهيثم و كوكبة من العلماء العرب و المسلمين في عصره.

ونأمل أن يوقظ نشر الكتاب وعي العرب والمسلمين بأهمية الصرح الذي أسسه هذا العالم، عبر الثورة التي أحدثتها تكنولوجيات علم الضوء في شتى المجتمعات و شتى مناحي الحياة من خلال تطبيقاتها التي أنقذت الأرواح في الطب، و حسنت نوعية الحياة في الطاقة والمعلومات والاتصالات والألياف الضوئية والزراعة والتعدين وعلم الفلك والهندسة المعمارية و الحفريات الأثرية والترفيه والفن والثقافة، وكذلك في العديد من الصناعات والخدمات الأخرى، فغدت محركات اقتصادية لا بديل لها للتنمية المستدامة للمجتمعات حاضراً و مستقبلاً..

كما أننا نتقدم بالشكر و التقدير للعالمين الفاضلين مؤلف الكتاب، الأستاذ الدكتور رشدي راشد و مترجمه الأستاذ الدكتور محمد البغدادي، لسماحهما و مساعدتهما.

كما نشكر شيخاني فتىً و مصطفى الهباش على جهودهما، و كذلك نشكر كل من ساهم في تحقيق هذا العمل، نسأل الله أن يتقبله و يجعله في موازين أعمالهم جميعاً.

مؤسسة الملك عبد العزيز
Fondation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

رشدي راشد، **الهندسة وعلم المناظر في ضحى الإسلام** ترجمة: د. محمد البغدادي، منشورات مؤسسة الملك
عبد العزيز آل سعود للدراسات الإسلامية والعلوم الإنسانية، الدار البيضاء، 2012، 836 صفحة.

Roshdi Rashed

Geometry and Dioptrics in Classical Islam

© Al-Furqan Islamic Heritage Foundation

Eagle House, High Street,
Wimbledon,
London SW19 5EF,
United Kingdom

حقوق الترجمة العربية ونشرها وتوزيعها

© مؤسسة الملك عبد العزيز آل سعود
للدراسات الإسلامية والعلوم الإنسانية، الدار البيضاء، 2012

زنقة المرجان، عين الذياب، أنفا – الدار البيضاء 20050
الهاتف: 30/27 10 39 22 05 (212) – الفاكس: 31 10 39 22 05 (212)
secretariat@fondation.org.ma – http://www.fondation.org.ma

المحتويات

مقدمة المترجم I

مقدمة المؤلف VII

الفصل الأول

الرياضيون: وسطهم العلمي وأعمالهم

1. ابن سهل 1

1.1 ابن سهل وزمانه 1

2.1 أعمال ابن سهل العلمية 5

1.2.1 في تربيع القطع المكافئ 5

2.2.1 في مراكز الثقل 6

3.2.1 مسائل هندسية أوردها السجزي 6

4.2.1 في خطوط التحديد 7

5.2.1 كتاب الشني عن تركيب مسائل حللها أبو سعد العلاء بن سهل 7

6.2.1 في خواص القطوع المخروطية الثلاثة 11

7.2.1 رسالة في الأصطرلاب بالبرهان للقوهي وشرح ابن سهل 11

8.2.1 الحراقات 12

9.2.1 البرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء 15

2. القوهي 17

1.2 الرياضي والصانع 17

2.2 أعمال القوهي العلمية 20

1.2.2 كتاب صنعة الأصطرلاب بالبرهان 20

2.2.2 في البركار التام 21

3.2.2 مقدمة لتقسيم الخط المستقيم بقسمين على نسبة مفروضة لأرشميدس 24

4.2.2 في عمل مخمس متساوي الأضلاع في مربع معلوم 25
5.2.2 في استخراج قسمة الزاوية المعلومة بثلاثة أقسام متساوية 27
6.2.2 في قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية 28
7.2.2 في استخراج خطين بين خطين حتى تتوالى الأربعة على نسبة وقسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية ... 28
8.2.2 في تثليث الزاوية وعمل المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة 29
9.2.2 في معرفة مقدار البعد بين مركز الأرض ومكان الكوكب المنقض في الليل 30
10.2.2 في معرفة مقدار ما يرى من السماء والبحر من رأس شيء مرتفع 30
11.2.2 في الزمان المنتهي حركة غير متناهية 31
3. أسلاف القوهي: في تثليث الزاوية 31
1.3 أحمد بن شاكر: في تثليث الزاوية المستقيمة الخطين 31
2.1.3 في عمل الوسطين وقسمة زاوية معلومة بثلاثة أقسام متساوية 32
2.2.3 قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية 32
3.3 أبو جعفر محمد بن الحسين الخازن 32
1.3.3 قسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية واستخراج خطين بين خطين تتوالى متناسبة 32
2.3.3 في استخراج خطين بين خطين تتوالي متناسبة من طريق الهندسة الثابتة 33
4. السجزي 33
1.4 رسالة في عمل البركار التام 33
2.4 في خواص القبة الزائدة والمكافئة 34
3.4 في خواص المجسم الناقص والزائد والمكافئ 34
5. ابن الهيثم 35
1.5 المقالة السابعة من "كتاب المناظر" 35
2.5 رسالة في الكرة المحرقة 39
6. الفارسي: شرح الكرة المحرقة 39

الفصل الثاني

ابن سهل وبداية علم الانكساريات

1. مقدمة 43

2. المرآة المكافئية 47
3. مرآة مجسم القطع الناقص (أو الإهليلجية) 55
4. الانكسار وقانون سنيلليوس 60
5. العدسة المستوية–المحدبة والعدسة محدبة الوجهين 65
6. خاتمة 75

الفصل الثالث

البحوث الانكسارية عند ابن الهيثم والفارسي

1. الكاسر الكروي 117
2. العدسة الكرويـــة 124
3. الكرة المحرقـــة 126
4. الكرة المحرقة ودراسة الفارسي الكمية لها 135
5. ابن سهل وابن الهيثم وقانون سنيلليوس 143

الفصل الرابع

القطوع المخروطية وتطبيقاتها

1. القطوع المخروطية والتقسيم التوافقي 207
1.1. بحث ابن سهل في القسمة التوافقية 207
2.1. التفسير الإسقاطي لدراسة ابن سهل 213
2. أعمال ابن سهل في القطوع المخروطية والإنشاءات الهندسية 216
1.2. تركيب الشني لتحليل ابن سهل لمسائل هندسية 216
2.2 ابن سهل في إنشاء مثلث بالاستعانة بالقطع الناقص والدائرة 247
3. القطوع المخروطية والإنشاء الهندسي : القوهي وأسلافه 249
1.3 مدخل 249
2.3 متوسطي التناسب 252

1.2.3 تركة الأقدمين 252
2.2.3 التقليد الجديد: ثابت بن قرة والخازن 255
3.2.3 القوهي 267
3.3 تثليث الزاوية 270
1.3.3 مدخل 270
2.3.3 تثليثات الزاوية الأكثر قدما: بابوس، أحمد بن شاكر وثابت بن قرة 271
3.3.3 الخازن: تقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام والانشقاق بين القدامى والمحدثين 282
4.3 القوهي: تقاسيم على تثليث الزاوية 286
5.3 مقدمة أرشميدس في قسمة المستقيم 300
6.3. عمل مخمس متساوي الأضلاع في مربع معلوم 307
7.3 الخلاصة 321
4. التوجه الجديد في هندسة القطوع: السطوح التربيعية 323
1.4 في خواص القبة الزائدة والمكافئة 324
2.4 التفسير الإسقاطي لمسألة القطوع المستوية للسطوح التربيعية 337
3.4 في خواص المجسم الناقص والزائد والمكافئ 338
1.3.4 القطوع المستوية 339
2.3.4 القطوع المستوية في المجسمات الزائدة والمكافئة 345
4.4 التفسير الإسقاطي للبحث عن القطوع المستوية للأسطوانة 350

الفصل الخامس

نشوء تقليد بحثي جديد: الرسم المتصل للمنحنيات القطعية والبركار التام

تمهيـــــد 461
1. الرسم المتصل للقطوع: ابن سهل 464
1.1. القطع المكافئ 464
2.1. القطع الناقص 465
3.1. القطع الزائد 466
2. اختراع البركار التام: أبو سهل القوهي 468

1.2. كتاب القوهي الأول 468
2.2. مقالة القوهي الثانية 474
3.2. المقابلة بين القضايا 4، 5 ، 6 عند القوهي والقضايا 59-I.52 عند أبلونيوس في المخروطات 492
3. السجزي والرسم المتصل للقطوع المتشابهة بواسطة البركار التام 493
4. الرسم المتصل وتصنيف المنحنيات 503
5. جيمينوس والسجزي: في تصنيف المنحنيات 506
6. ابن عراق والبيروني في البركار التام 513
1.6. ابن عراق: في مقدمات القوهي 513
2.6. البيروني: نظرية القوهي في البركار التام 518
1.2.6. القطع المكافئ 518
2.2.6. القطع الزائد 520
3.2.6. القطع الناقص 523
7. كمال الدين بن يونس وتلامذته: في البركار التام 527
1.7. مدخل 527
2.7. الأبهري والبركار التام 530
8. الخلاصة: رسم القطوع المخروطية: مجال بحث جديد في الهندسة 562

الفصل السادس

الإسقاطات المخروطية والاسطوانية والأصطرلابات

1. الأصطرلاب وطرق الإسقاط 629
2. ابن سهل والإسقاط التسطيحي 652
الملحق الأول: الهندسة والميكانيك القوهي مقابل أرسطو: في الحركة 709
الملحق الثاني: القوهي: من الآثار العلوية إلى الفلك 725
ملاحظات إضافية 759
ملاحظات حول كتابي ابن سهل، كتاب الحراقات والبرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء 759
1. حول أقسام "الآلة" 759
2. التجريب 761
3. ترجمة مناظر بطلميوس 767

ملاحظات حول خطوط الساعات لابن الهيثم 767
ملاحظات حول كتاب الشني في التراكيب 775
ملاحظات حول الأصطرلاب 777
1. رسالة القوهي 777
2. شرح ابن سهل لكتاب القوهي 782
مذكرة رياضية 791

مؤسسة الملك عبد العزيز - الدار البيضاء
Fondation du Roi Abdul-Aziz - Casablanca

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

مقدمة المترجـــم

ألف رشدي راشد في فترة زمنية قصيرة نسبياً، امتدت من عام 1993 إلى يومنا هذا، موسوعة ضخمة في تاريخ الرياضيات خصصها للرياضيات المتناهية في الصغر بين القرنين التاسع والحادي عشر، أي للمؤسسين والمبدعين في هذا الفرع من الرياضيات العربية–الإسلامية أثناء هذه الحقبة الغنية بالترجمة والشرح والإبداع على مدى ثلاثة قرون. وقد صدر من هذه الموسوعة حتى الآن خمسة أجزاء باللغة الإنكليزية تقع في حوالي خمسة آلاف صفحة، ولم يبق قيد الإعداد إلا الجزئين الأخيرين، السادس والسابع. تناول المؤلف في هذه الأجزاء الخمسة دراسة أعمال الأخوة "بنو موسى" وثابت بن قرة وابن سنان والخازن والقوهي وابن السمح وابن هود، وخصص جزئين بكاملهما لابن الهيثم وأعماله في نظرية المخروطات والإنشاء الهندسي والهندسة العملية، كما خصص جزءاً آخر للطرق الهندسية والتحولات النقطية وفلسفة الرياضيات؛ والجزء الأخير، الخامس، الذي نشر قبل عامين للفلك والهندسة الكروية والمثلثات. ولرشدي راشد مؤلفات عديدة أخرى باللغات الأوربية المختلفة نذكر منها على سبيل المثال كتابه الصادر بالفرنسية في العام الماضي عن الخوارزمي وبداية الجبر. ونحن لا نرمي هنا إلى إعطاء لمحة، ولو كانت في غاية الإيجاز، عن أعمال هذا المؤرخ الكبير في تاريخ العلوم، الهيللنية ومدرسة الإسكندرية والعربية–الإسلامية على وجه الخصوص. والكتاب الذي نضعه بين يدي القارئ هو كتاب المناظر والهندسة في الإسلام. وقد صدر هذا الكتاب أولاً بالفرنسية ثم ظهرت له طبعة إنجليزية منقحة ضاعف فيها المؤلف حجم الكتاب بالجديد من الفصول. إن ما نرمي إليه هو تبيان ما يتميز به هذا الكتاب الذي نقلناه إلى العربية.

إن الخاصة المميزة الأولى لهذا الكتاب هي اكتشاف رشدي راشد لأعمال عالم كبير، مهندس من الطراز الأول كما يقول عنه، هو ابن سهل الذي سبق ابن الهيثم بجيل واحد وكان الحلقة المفقودة بين ابن الهيثم وسابقيه في المدرسة الانعكاسية اليونانية والعربية. فقد انتمى هو أيضاً إلى هذه المدرسة من جهة وانفصم عنها من جهة أخرى بإدخاله الانكسار: درس في رسالته الحراقات الإحراق بالانعكاس والانكسار مستعملاً القطوع المخروطية الثلاثة. كما درس العدسات المستوية–المحدبة والعدسات محدبة الوجهين. وقد دفعته هذه الدراسة إلى تصور طرق ميكانيكية لرسم القطوع المخروطية رسماً متصلاً. وهو الذي وضع قانون الانكسار المنسوب إلى سنيلليوس وديكارت قبل هذين الأخيرين بستة قرون. لقد جاءت هذه الأعمال لتفرض على مؤرخي العلوم مراجعة معرفتهم بعلم الانكسار مراجعة تامة عشية مساهمة ابن الهيثم فيه؛ وهذا ما فعله رشدي راشد ونال على ذلك جائزة أكاديمية العلوم للعالم الثالث (TWAS).

كان مؤسس ورئيس الــ TWAS الباكستاني أحمد عبد السلام، حامل جائزة نوبل عن أعماله في توحيد القوى الكهرطيسية والضعيفة، ممن يفخرون بانتمائهم العلمي إلى التقاليد العربية–الإسلامية وكان يقول عن ابن الهيثم لإعجابه الشديد به "أخي في الفيزياء". كُلفت بتقديم أعمال رشدي راشد يوم منحه جائزة الــ TWAS في خريف عام 1990 في كاراكاس فقلت، إيماناً مني بأهمية اكتشافه لهذه الحلقة المفقودة بين ابن الهيثم وسابقيه، إنه من وجد أباً لابن الهيثم ولأخيه في الفيزياء عبد السلام!

إن الخاصة المميزة الثانية لهذا الكتاب هي بحثه في موضوع إدخال مفهوم الحركة في الهندسة بغية الرسم المتصل للقطوع وبناء النظرية الرياضية ذات الصلة وتصنيف المنحنيات بدليل أنواع وعدد الحركات المستخدمة لرسمها. فهناك الخطوط القياسية عند القوهي، أي تلك التي تخضع لنظرية التناسب. وهي نفس الخطوط القياسية عند السجزي الذي يضيف إليها الخطوط غير القياسية التي فيها نظام وترتيب كالخط اللولبي مثلاً، والتي نعبر عنها اليوم بقولنا بوجود زمرة متعدية للانتقالات على المنحني (أو فعل متعد للزمرة)، كما يضيف الخطوط القياسية التي ليس فيها نظام وترتيب بدون أن يعطي مثلاً عليها.

لقد ابتكر القوهي البركار التام لإنشاء الخطوط القياسية ووضع نظريته. وبين رشدي راشد بشكل قاطع بالعودة إلى النصوص اليونانية، لغة ومضموناً، عدم وجود أي علاقة بين بركار القوهي التام وبين ما تصوره أو وصفه سابقوه. لقد ربط هذا الابتكار التقنية بالنظرية ربطا وثيقاً اتضح فيه مفهوم العلم النافع الذي أخذ به العلماء المسلمون، وهو مفهوم أساسي في الثقافة الإسلامية. صحيح أن ضرورات الرياضيات التطبيقية من دراسة الخواص الانكسارية للقطوع إلى الإصطرلاب والمزولة لم تكن خافية عن أعين ابن سهل أو القوهي. ولكنه جرى في الوقت ذاته تأسيس فصل جديد في الهندسة مكرس بكامله للإنشاء الهندسي بواسطة القطوع وحل المسائل المجسمة بهذه الواسطة. وهذا ما أدى بدوره إلى نشوء بحث جديد صنفت فيه هذه المسائل وصنفت المنحنيات. فقد صنف السجزي السطوح وفق دليل أطلق عليه اسم المرتبة، وهي تابع لعدد القطوع المستوية، أيا كان نوعها، التي يمكن الحصول عليها من المجسمات وحسب عدد القطوع غير المحدودة: إنهما العددان اللذان يعينان مرتبة المجسم.

يمكن للإنشاء الهندسي أن يتم بطرق عديدة، بحركات عديدة: بالتلمس، بالآلة، أو بالإمالات neusis، إلا أن الهندسة وحدها – التعاليم – هي التي تضفي الشرعية على أي إجراء يستعمل الحركة؛ "وإذا لم نرد إقامة البرهان" كما يقول الخازن فيمكن إعطاء حل يستعمل الآلة.

وكما استعملت الحركة في الهندسة فقد لجأ القوهي، على العكس، إلى حل المسائل الحركية هندسياً والقيام بتجارب ذهنية رائعة في هذا السبيل. فقد حبك في نص لا يتجاوز نصف الصفحة خيوط الرياضيات والفيزياء معاً لإقامة الحجة ضد أرسطو وضد الرأي السائد بين الفلاسفة آنذاك ووقف مباشرة ضد مبدأ الاختلاف القوي بين الأضداد وبالتالي ضد لزوم السكون بين حركتين متعاكستين. كما حاول في تجربة ذهنية أخرى يسقط فيها ظل نقطة ضوئية متحركة على نصف دائرة على فرع قطع زائد أن يبرهن على إمكانية اجتياز مسافة لامنتهية في زمن منته خلافاً لما يقول به أرسطو. وهي بالفعل محاولة بارعة لا مأخذ عليها سوى أنها لم تأخذ بعين الاعتبار أن سرعة الضوء منتهية، وهو أمر لم يكن معروفاً آنئذ.

لنقل عابرين أن لهاتين التجربتين الذهنيتين، إضافة إلى محاولة حلهما المسائل الحركية هندسياً، أهميتهما لأن القوهي يعارض فيهما الفلسفة بالعلم القائم على التعاليم – الهندسة – لأنه لا يؤمن إلا ببراهينها ولأنه، كما يقول التوحيدي عنه وعن آخرين على شاكلته، "وليس فيهم من يذكر كلمةً في النفس والعقل والإله حتى كأنه محظور عليهم أو قبيح عندهم".

أما الخاصة المميزة الثالثة فهي الدراسة الهندسية للإسقاطات. إنها دراسة التحولات الهندسية أولاً ودراسة الإسقاطات على وجه الخصوص ثانياً. أو إنها، إذا شئنا استعمال اللغة الحديثة، دراسة الزمر بصورة عامة ودراسة المقادير المنحفظة فيها أولاً، ثم دراسة زمرة الإسقاطات والقسمة التوافقية المنحفظة فيها ثانياً. يتعلق الأمر هنا بنشوء فرع جديد آخر في الهندسة، لا ينتمي إلى الهيلينية، ندين به إلى القوهي وابن سهل وغيرهما. يقول رشدي راشد "إنها المرة الأولى التي يظهر فيها مفهوم تعبير الإسقاطات المخروطية من رأس واقع على المحور أو غير واقع عليه". كما إنها المرة الأولى التي تنشأ فيها نظرية في الهندسة الإسقاطية الموضعية للكرة على سطح دوراني أو غير دوراني يمكن فيها تحويل كل ما في الكرة إلى السطح.

لقد أوضحت دراسة رشدي راشد للإسقاطات، كما أوضحت أبحاثه الأخرى التي بين فيها كيف انضم الجبريون إلى المهندسين للعمل في مسائل الإنشاء الهندسي وترجمتها إلى معادلات تكعيبية تجد حلولها بتقاطع المخروطات وكيف نشأت الهندسة الجبرية على يد عمر الخيام وتطورت على يد شرف الدين الطوسي، لقد أوضح هذا كله بطلان النظرية الشمولية للهندسة والشائعة مع الأسف، التي ترى في أعمال المهندسين العرب امتداداً للهندسة الإغريقية.

إن ما يسمح لرشدي راشد إطلاق أحكامه، التي تكاد لا تجد من يعترض عليها، هو أولاً وقبل كل شيء هذه المعرفة العميقة والواسعة بتاريخ العلم وبفلسفته، معرفة الكتابات الإغريقية والإسهام في كشفها وتحقيقها وشرحها، كما فعل في كتابه عن الانعكاسيين الإغريق والمرايا المحرقة أو في كتابه عن ديوفانتوس (الاسكندراني)، أو ترجمتها والتعليق عليها كما هو الحال في كتاب المخروطات لأبلونيوس الذي نُشر أول أجزائه العام الماضي (2007). ثم معرفته بأعلام مؤرخي العلوم في الغرب والمفهرسين العرب، وأخيراً جريه الذي لا يكل وراء المخطوطات العربية متجشماً عناء السفر عبر القارات لكشفها وتحقيقها وترجمتها ونشرها (للمرة الأولى في الكتاب الذي بين أيدينا أو في كتبه الأخرى) ووضعها في مكانها الملائم كإحدى لبنات صرح الكشف العلمي.

إن معرفته بالرياضيات الحديثة، كما تدرس في مختلف المراحل الجامعية، وباتجاهات البحث فيها هي التي تتيح له اختيار المكان الملائم للبنة، النظر إلى "الرياضيات الأولية (القديمة) من وجهة نظر عليا" حسب تعبير فيلكس كلاين[1]. فهو لا يكتفي انطلاقاً من هذه المعرفة بإظهار دوافع عمل الرياضي ومقاصده – بدراسة الوسط العلمي الذي عاش فيه أو باللجوء إلى نموذج تقدمه رياضيات أخرى –، والكشف عما أتى به من جديد في أبحاثه، وإنما يخضع هذا العمل إلى نظرياتنا ومفاهيمنا الحالية ليستشف منه ما استشعره المؤلف دون أن يستطيع برهانه، وما غاب عن أنظاره رغم تمكنه من الوسائل التي كانت ستتيح له اكتشافه لو استعملت، وليحدد ما سيأخذه الخلف عنه. إن المعرفة الديناميكية للرياضيات هي التي تتيح للمؤرخ تقييم عمل الرياضي بالقوة وليس بالفعل كما يقول الفلاسفة. كل هذا دون أن يحمّل النص أكثر مما يحتمل كما يفعل البعض عندما يبلغ بهم الإعجاب المدى.

---

[1] F. Klein "Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" Berlin Springer Verlag 1968.

وهو كتاب بثلاثة أجزاء خصص لطلاب المدارس النظامية (مدارس تكوين أساتذة الثانوي) حبذا لو ترجم إلى العربية.

حدثت رشدي راشد عما كتبته في هذه المقدمة فأعطاني مقالة بعنوان "قراءة النصوص الرياضية القديمة، كتاب المخروطات الخامس لأبلونيوس"[2] يقول في آخرها "لا خيار أمام مؤرخ الرياضيات لقراءة نص قديم سوى تعبئة كل هذه الطرق والعدول عن الادعاء بأمانة وهمية. يجب عليه أن يقتنع وبشكل نهائي أن الخضوع لسلطة الكلمات وحده لا يضمن بالضرورة الأمانة للمفاهيم وأن تاريخ الرياضيات لم ولن ينجز. يجب على الدوام إعادة بنائه وإخضاعه إلى ما تتوصل إليه الرياضيات المستقبلية".

لا يخفى على أحد أن الإيديولوجية السائدة في الغرب، وفي فرنسا ذات التاريخ الاستعماري الطويل التي تعنينا على وجه الخصوص هنا، تقوم على رفض الآخر، على الانتقاص من حضارته وعلى إرجاع كل ما حققته الإنسانية من تقدم ورقي للغرب والغرب وحده. لقد نشأ العلم، حسبما تروج هذه الإيدلوجية ونشأت معه الفلسفة والقيم الإنسانية الحقة والديموقراطية، أو بكلمة واحدة الحضارة بأسمى معانيها، في اليونان ونمت وترعرعت فيه ثم خمدت وغرقت في سبات عميق دام قروناً عديدة لتبعث من جديد، كأهل الكهف، في إيطاليا ومن بعدها في كل أوربا وتحيا إلى اليوم. أما قبل اليونان فلا شيء، لقد انبثقوا من العدم، ولا شيء كذلك في مرحلة السبات الطويل، اللهم بعض العرب الذين ترجموا وشرحوا أعمال أسلافهم الإغريق فحافظوا على التراث ليسلموه بأمانة تستحق التقدير إلى ورثته الشرعيين، لكنهم لم يبدعوا شيئاً لأن الساميين غير قادرين على الإبداع كما علمنا أرنست رنان! لا تخشى الإيدلوجية التناقض مع أبسط قواعد الحس السليم ولا تخشى كذلك أن تتعارض مع أسس الفيزياء الحديثة التي ترفض مفهوم المكان المتميز أو الزمان المفضل ولا يشعر حاملوها بأي حرج في ذلك.

يبقى أن نتساءل والحال هذه عما حدا بفرنسا أن تمول أبحاث رشدي راشد وترعى المدرسة التي أنشأها، وتبوءه أرفع المناصب العلمية، وتكرمه على سبيل المثال بوسام يمنحه له رئيس الجمهورية مخاطباً له بالقول "آمل أنك تحب البلد الذي تبناك بقدر ما أحب بلدك الأصلي (مصر)"، وتشرفه بضمه إلى الوفد الرسمي المرافق لرئيس جمهورية آخر بدون أن تكون له أي صفة تبرر ذلك ما عدا صفته العلمية؟ يفرض تساؤل آخر نظير للأول نفسه علينا: هل كان رشدي راشد سينتج ما أنتج ويلقى الرعاية والتقدير اللذين لقياهما ويكتسب السمعة العالمية التي اكتسبها لو بقي في بلده مصر حيث الإيدلوجية مختلفة اختلافاً كلياً عن الإيدلوجية الغربية إن لم نقل إنهما تقعا على طرفي نقيض؟

مما لا شك فيه أن الإجابة عن هذا التساؤل بشقيه ليست بالأمر السهل، ومما لا شك فيه أيضاً أن هذه المفارقة تعود لأسباب عديدة، ولكننا سنعطي هنا ما نرى فيه السبب الأول: إنه المكانة العالية التي يحتلها البحث العلمي وما يتصل به من تقاليد راسخة في المجتمعات الغربية، خلافاً لما هو عليه الحال في مجتمعاتنا. فرشدي راشد ليس أول مؤرخ للعلوم في الغرب يحاول أن يعطي بالوثيقة والبرهان صاحب الحق حقه وما يكتبه يجد أذاناً صاغية ويحدث صدى واسعاً في أوساط المختصين نظراً لسعة معرفته وقوة حجته وسمعته الكبيرة: قدم لي في أوائل الصيف الماضي (2007) كتابه[3] الصادر للتو عن الخوارزمي وبداية الجبر، بمساعدة من وزارة التعليم العالي والبحث. قلت له: أعدتني عقوداً إلى الوراء، فقد اشتريت عندما كنت طالبا كتاباً في الجبر مطلعه "ليس حقيقة أن منشأ الجبر عربي" فعدت

---

[2] Bolletino di storia delle scienze mathematiche Vol. XXVII. 2007 Fasc. 2.

[3] Al-Khawārizmi, le Commencement de l'Algèbre. Texte établi, traduit et commenté par R. Rashed. Editions Albert Blanchard 2007.

مستغرباً إلى الموسوعة الفرنسية لأجد نفس العبارة. أجابني بلغة الواثق بما يقول: لن يستطيع أحد أن يكتب هذا بعد الآن. وأعتقد أنه محق.

إن احترام العلم والعلماء في الغرب هو الذي فتح المجال لرشدي راشد للقيام بما قام من أبحاث في تاريخ وفلسفة العلوم؛ وهو الذي أتاح الشيء نفسه لأبحاث إدوار سعيد، أستاذ الأدب المقارن، في العلوم الإنسانية ولكتاباته في الثقافة والأمبريالية وفي الاستشراق على وجه التحديد، رغم الدور البارز الذي تلعبه الأيدلوجيا والأفكار المسبقة في هذا الميدان؛ وهو أخيراً – وأنا أضع هذا المثل على مستوى المثالين السابقين – الذي جعل بابا الكنيسة الكاثوليكية يعتذر متبرأ من محاكمة غاليله الشهيرة بعد ثلاثة قرون من وقوعها ومن الحكم الذي صدر ضده لوقوفه في وجه معتقدات الكنيسة – المتعارضة مع العلم– السائدة آنذاك.

إلا أنه من السذاجة بمكان الظن أن العلم قد تغلب على الأفكار المسبقة المؤسسة للإيديولوجيات وكسب المعركة ضد اللاعقلانية. فالأمثلة، مع الأسف الشديد، التي تدحض هذا الظن أكثر من أن تحصى، وهي عديدة جداً في الأوساط العلمية نفسها، يحضرني عدد لا يستهان به منها. إلا أن عرضها ولو باختصار يخرجنا عما نحن بصدده في هذه المقدمة. لذا سنكتفي بإشارة عابرة إلى مثل واحد هو عدم حصول رشدي راشد على كرسي أستاذ في كوليج دو فرانس، وهو أعلى منصب علمي في فرنسا.

أود أخيراً أن أعبر عن شكري وامتناني لمؤسسة الملك عبد العزيز آل سعود للدراسات الإسلامية والعلوم الإنسانية، ومديرها العام الأستاذ أحمد التوفيق، لتبنيها مشروع ترجمة هذا الكتاب ووضعه مع مخطوطاته العربية في متناول مؤرخي العلوم والباحثين العلميين والمثقفين العرب "لأن أكثر ما يحتاج له رجل العلم هو تاريخ الاكتشاف ومنطقه" على قول لورد أكتون. وأنا كبير الأمل أن يكون إنجاز هذا المشروع أول الغيث في هذا الاتجاه من نشاط المؤسسة، حتى لا يقال "إن الأمة تركت بعيدة عن المعرفة" كما كتب الفيلسوف لايبنيز، مؤسس حساب التفاضل، في دفاعه عن اللغة الألمانية عام 1700: "لم يبد علماؤنا رغبةً قويةً لحماية اللغة الألمانية، بعضهم لأنهم يظنون فعلاً أنه لا يمكن لباس الحكمة إلا بلباس لاتيني أو يوناني والبعض الآخر لأنهم يخشون أن يكتشف العالم جهلهم الذي يخبئونه الآن خلف قناع من الكلمات الكبيرة ... لقد تركت الأمة بعيدة عن المعرفة".

خالص الشكر كذلك لزميلي في مختبر الفيزياء النظرية، ذي الخبرة العالية في الإعلاميات، الدكتور مراد الباز على العون الذي قدمه لي وللسيدة بشرى حسني – وكانت قد عملت في مختبر الفيزياء النظرية – في إنجازها طباعة المخطوط. أخص السيدة بشرى حسني بالشكر للمجهود التي بذلته لفك رموز كتابتي ولعلو باعها المهني في التنقل بين اللغة العربية واللغات الأوربية والنصوص اليونانية المشكلة وبين العلاقات الرياضية أياً كانت درجة تعقيد رموزها. لا أعرف غيرها قادراً على القيام بهذا العمل بنفس الهدوء والصبر اللذين تتمتع بهما.

ملاحظة: صححت بعض الأخطاء الطفيفة في العلاقات الرياضية، منشأ أغلبها مطبعي، وأشرت إليها في النص الأصلي لتصحيحها في حالة إعادة الطباعة الأجنبية؛ آمل ألا نكون قد وقعنا في أخطاء أخرى تتجاوزها عددا. كما أني أدخلت بعض التعديل في عدد جد محدود من العلاقات وبعض الأشكال، بعد استئذان المؤلف، تسهيلاً للقراءة بدون الإشارة إلى

هذا التعديل مكتفياً بالتنويه. كما أني بدأت بوضع هوامش في النص لشرح بعض الأمور الرياضية ثم وجدت أنها تثقل النص فعدلت عن ذلك مفضلاً إضافة مذكرة رياضية مختصرة قد تعفي القارئ من العودة إلى كتب الرياضيات.

محمد البغـــــدادي

الرباط 22 غشت (آب) 2008

مؤسسة الملك عبد العزيز - الدار البيضاء
Fondation du Roi Abdul-Aziz - Casablanca

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

مقدمة المؤلف

يبحث هذا الكتاب في تاريخ الهندسة وعلم المناظر في حقبة تمتد من منتصف القرن العاشر الميلادي (الرابع الهجري) إلى منتصف القرن الذي يليه. وهذه الحقبة، كما هو معروف، من أزهر العصور للحضارة الإسلامية بلا مراء. ويتضمن العديد من رسائل العلماء والرياضيين من أمثال القوهي وابن سهل والسجزي وأبي الجود بن الليث، وابن عراق وابن الهيثم والبيروني وغيرهم. كل هذه الرسائل يجدها القارئ هنا محققة لأول مرة مع التحليل الرياضي والتأريخ لها وبيان ما أتت به من جديد ومكانها في تاريخ الرياضيات والعلوم. وهي تكشف لنا عن أبعاد للبحث الهندسي المتقدم وعلاقته الحميمة بتطبيق الرياضيات سواء في علم المناظر أو في علم الهيئة وكذلك في علم الميكانيكا. فسيرى القارئ كيف كان البحث في العدسات باعثاً على مواصلة البحث وتجديده في هندسة المخروطات، كما كان البحث في الأصطرلاب باعثاً على اكتشاف وجهة النظر الإسقاطية في الهندسة. سيرى أيضاً النهج الجديد الذي أتى به الحسن بن الهيثم في علم الطبيعة جملة وفي علم المناظر خاصة، وسيرى كذلك كيف وصل البحث الرياضي إلى نتائج كان يظن حتى عهد قريب أنها من اكتشافات القرن السابع عشر في أوروبا.

كلّ هذا يبين – كما يمكن أن يُتحقق منه عند قراءة هذا الكتاب – أن التأريخ للعلم الذي كتب بالعربية في الحضارة الإسلامية، ليس فقط ضرورياً في ذاته ولذاته ولكنه أيضاً لازم لكتابة تاريخ العلم الإنساني وتجديد كتابة تاريخ الرياضيات والعلوم. فجلّ النتائج التي يتضمنها هذا الكتاب لم تكن معروفة من قبل. وهذه النتائج هي بعض من الكثير الذي لم يكتشف بعد، فلم يزل البحث في تاريخ العلم العربي في بدايته، ولم يبدأ حقاً إلا منذ عقود قليلة، ولم يدرس من المخطوطات العلمية بما تستحقه من عناية واهتمام إلا القليل. ستؤدي إذن المعرفة بتاريخ العلم العربي إلى التخلص من كثير من الأوهام التي وقع فيها جلّ المؤرخين عند كتاباتهم عن العصر الوسيط وبداية العلم الحديث، وباختصار إلى تجديد تاريخ العلم الإنساني.

وهناك نتائج أخرى لا تقل أهمية لكتابة تاريخ العلم العربي بنهج موضوعي مستتب تتعلق بالمجتمع المعاصر وحياته. فالبحث في هذا التاريخ وإعادة كتابته لا غنى عنه في تكوين ثقافة علمية. فالثقافة العلمية لأي مجتمع لا يمكن أن تكون إلا مرتبطة بتاريخ الفكر العلمي لهذا المجتمع وبلغته. وهذه الثقافة نفسها هي من أحد شروط توطين العلم المعاصر في هذا المجتمع، فالعلم ليس مجموعة من النتائج والتقنيات يمكن استيرادها، ولكنه نهج في التفكير وروح علمية. ولعل توطين العلم المعاصر هو من أكبر تحديات الكثير من المجتمعات العربية والإسلامية اليوم. وسيؤدي البحث في تاريخ العلوم أيضاً إلى الكشف عن بعد أساسي من أبعاد الحضارة الإسلامية والمدينة الإسلامية، بل كان

أساسياً في مدارسها ومساجدها ومشافيها ومراصدها ودواوينها. ولم تكن اللغة العربية لغة دين وأدب فحسب، بل كانت أيضاً لغة علم وفلسفة وكلام وفكر.

وأود هنا أن أشكر الأستاذ الدكتور محمد البغدادي على ما بذله من علم وجهد لوضع هذا الكتاب في متناول القارئ العربي، وأن أشكر الأستاذ الدكتور أحمد التوفيق، المدير العام لمؤسسة الملك عبد العزيز آل سعود للدراسات الإسلامية والعلوم الإنسانية على التوجيه والمبادرة بنشر هذا الكتاب تحت اسم المؤسسة. وإن كان لي رجاء فهو أن يكون هذا الكتاب بداية لمجموعة من أمثاله تعيد قراءة الفكر العلمي وتساعد على تكوين ثقافة علمية، وعلى رجوع الروح العلمية بعد غياب.

رشـــــدي راشـــــــد

باريس 2008

مؤسسة الملك عبد العزيز - الدار البيضاء
Fondation du Roi Abdul-Aziz - Casablanca

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

الهندسة وعلم المناظر
في
ضحى الإسلام

الفصـــل الأول

الرياضـــيون : وسطهم العلمي وأعمالهم

رشدي راشد

مؤسســـة الملـــك عبـد العـــزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

الفصل الأول

الرياضيون: وسطهم العلمي وأعمالهم

1. ابن سهل

1.1 ابن سهل وزمانه

أبو سعد العلاء بن سهل هو أحد رياضيي النصف الثاني من القرن العاشر، ارتبطت حياته بشكل وثيق بأسرة البويهيين. فقد عاش في ظل حكمهم وأهدى، كما سنرى، عمله الرئيسي – كتاب *الحراقات* – إلى صمصام الدولة، ابن وخليفة عضد الدولة الشهير.

لقد تابعت العلوم والآداب في عهد البويهيين تقدمها وازدهارها، على الرغم من النزاع المستمر على السلطة. إلا أن الكتاب الذي يوصف تنظيم هذا النشاط الأدبي–العلمي الكثيف ويكشف الغطاء عن مسبباته الاجتماعية لم يكتب بعد. سيقع على هذا الكتاب، فيما سيشرح، شرح أمرين فريدين مترافقين: لم يبق من السلطة المركزية، سلطة الخلفاء، سوى ظلها لوقوعها تحت هيمنة الحرس؛ وفي الوقت نفسه نجد العلماء يكرسون أنفسهم لمواظبة دراسة الآداب والفلسفة والعلوم والرياضيات.

أضف إلى ذلك أن الدول التي قامت على أنقاض الخلافة نمت ما تحقق في عهد الخلفاء العباسيين الأوائل في القرن التاسع بدلاً عن تدميره وذهبت به بعيداً على الرغم من المعارك السياسية والنزاعات المسلحة. فقد تابع الأمراء والوزراء رعايتهم للنشاط الفكري والعلمي. فدُعمت المؤسسات التي كانت قائمة وصُرفت الأموال على المكتبات والمستشفيات والمراصد وجرى تشجيع إنشاء الجمعيات والمدارس، المتنافسة في أغلب الأحيان، في مختلف الاختصاصات[1]. وتطور شكل مبتكر لتواصل العلماء والأدباء وإتاحة التبادل فيما بينهم، ونعني بذلك المجالس التي أقامها الخلفاء والوزراء والأعيان بمن فيهم العلماء أنفسهم[2]. لقد تدعمت هذه النشاطات (التي لا نستطيع الدخول في

---

[1] انظر فيما يخص هذا الانتشار الثقافي

A. Mez, *Die Renaissance des Islams*, 2 vols. (Heidelberg, 1922)، وكذا (J. L. Kraemer, *Humanism in the Renaissance of Islam* (Leiden, 1986) .

[2] اكتسبت بعض هذه المجالس شهرة واسعة، على سبيل المثال مجالس الوزراء: ابن العميد وزير والد عضد الدولة، الصاحب ابن العباد، وزير أخوي عضد الدولة على التوالي – مؤيد الدولة ومن بعده فخر الدولة –، وابن سعدان، وزير صمصام الدولة. كما يمكن ذكر مجالس أخرى إذ يعطينا الأديب أبو حيان التوحيدي لمحة عن بعض ما يدور في هذه المجالس ويروي المناقشات الشهيرة في كتاب *الإمتاع والمؤانسة* الذي نشره أحمد أمين وأحمد الزين (القاهرة مستعاد من بولاق n.d). انظر M. Bergé, *Pour un humanisme vécu* : Abū Hayyān al-Tawḥīdī, Institut Français de Damas (Damascus, 1979), pp. 52 ff. وكان للعلماء أيضاً

تفاصيلها هنا) وكثرت، عوضا عن أن تضعف مع انهيار الخلافة، – على الأقل في الفترة التي حافظت فيها الطبقات الوسطى المدنية والريفية على ازدهارها، وهي الطبقات التي يقر الجميع بأهميتها في المجتمع الإسلامي. يمكننا أن نشير هنا إلى أن أحد أسباب هذا الازدهار حرص السلالات والقوى التي مزقت العالم الإسلامي على إضفاء هيبة الأدباء والعلماء الذين يحيطون بهم على أنفسهم. ولم يكن هذا الحرص شكلياً بحتاً بل كان يعبر عن حاجة أقوى لإضفاء الشرعية عليهم، وعلى وجه الخصوص عندما كانت هذه السلالات تنتمي إلى أقليات سياسية–دينية، كما هو عليه حال البويهيين الذين كانوا من الشيعة.

كان عضد الدولة أول من نجح في بسط سلطانه على بلدان شاسعة تشمل على وجه التقريب العراق وغرب إيران. وكان أول حاكم في تاريخ الإسلام يضفي عليه الخليفة لقب ملك. وتظهر قراءة متأنية لحكمه سعيه إلى إعطاء بعد إمبراطوري حقيقي لسلطة عائلة البويهيين – وهو ما لم يكن إلا للخليفة – وذلك بدون أن يحط من شأن الخليفة أو أن يقطع صلته بنظام الخلافة. وقد ارتبط هذا المسعى الهام بسياسة شاملة للإصلاحات العمرانية والنقدية وغيرها، على ما تناقله مؤرخو تلك الحقبة[3]. كما يتفق المؤرخون على اهتمامه بالثقافة والعلوم وعلى دعمه للعلماء[4]. ولم يقف الأمر في مجالسه على مناقشة الأدباء بل تعداها إلى الهندسة[5]. وألفت كتب عديدة في ظل حكمه والبعض منها – في اللسانيات والطب والرياضيات – بطلب منه. ولم ينفرد بهذه السمة وحده فقد كانت شائعة في ذلك العهد؛ وابن العميد، كبير وزراء والد عضد الدولة، أفضل دليل على ذلك، وكذا أبناء عضد الدولة، صمصام الدولة وشرف الدولة، ومعهم وزرائهم. وعلى سبيل المثال، فمن المعلوم أن من بين من كانوا يترددون على مجلس وزير صمصام الدولة، ابن سعدان،

مجالسهم، وهكذا فقد كان، كما يروي التوحيدي، لعيسى بن علي، صانع الأصطرلاب، مجلسه الذي ضم إليه فيمن ضم المفهرس وكاتب السير ابن النديم والفيلسوف يحيى بن عدي وغيرهم. انظر نفس المصدر (ص. 55، n.1).

[3] انظر مثلاً أبو شجاع الروذراوري *ذيل كتاب تجارب الأمم* نشره H. F. Amedroz (1916), pp. 67 ff. ؛ ابن الجوزي *المنتظم في تاريخ الملوك والأمم* 10 vols. (Hyderabad, 1357-59/1938-40), vol. 7, pp. 98 ff.، وعلى وجه الخصوص ص. 113–118. ابن الأثير *الكامل في التاريخ*

C. J. Tornberg, 12 vols. (Leinden, 1851-76), vol. 9, p. 22.

[4] كذلك، يذكر الروذرواري ص. 68 كيف إن عضد الدولة جذب العلماء وناقشهم في جميع الأمور المختلفة مشجعا على تأليف الكتب في العلوم المختلفة كالقواعد اللغوية والطب والرياضيات. يذكر أيضا بأنهم ألفوا تحت سلطته في العلوم مؤلفات عدة منها الكتاب الذي يحمل اسمه في الطب – *الكتاب العضدي* – لأبي علي المجوسي، وكذلك نصوص في الرياضيات. يؤكد ابن الجوزي في (المنتظم، ص. 115) بأن عضد الدولة درس نفسه الرياضيات والقواعد اللغوية.

يذهب ابن الأثير في الاتجاه نفسه، راوياً أنهم ألفوا كتباً عدة له وبأنه مؤسس المستشفى الشهير. انظر: ابن الأثير، المصدر نفسه، ص. 21–22. كتب شاهد العصر المقدسي: "عرف علوما عدة وتعمق في التنجيم"، انظر محمد بن أحمد المقدسي كتاب أحسن *التقاسيم في معرفة الأقاليم* edited by Gœje, 2nd ed. (Leiden/Leipzig ; [1906]), p. 350.

وهو يعطي وصفاً مفصلاً للإنشاء، والتنظيم الإداري، وجداول لمكتبته، عندما كان لا يزال في شيراز.

[5] انظر مقدمة كتيب القوهي رسالة في *عمل المسبع المتساوي الأضلاع في دائرة معلومة* في

R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3 : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique* (London, 2000), Appendix I.

الفيلسوف الهلينستي ابن زرعة والفيلسوف المسيحي يحيى بن عدي والرياضي أبو الوفا البوزجاني وكاتب الرسائل الأديب أبو حيان التوحيدي[6].

لقد اتسم النشاط الفكري في تلك الحقبة بسمتين هامتين – تعبران عن تعدد قصور الحكام وتعدد المراكز العلمية – هما تنقل الأدباء والعلماء، والمراسلة الأدبية والعلمية. وأصبحت هذه المراسلة نوعاً أدبياً جديداً، فقد ألفت مقالات عديدة – بما في ذلك في الرياضيات – كرد على أسئلة طرحها علماء من مراكز مختلفة.

عاش ابن سهل وكتب وراسل في هذا الوسط. لكننا نصاب بخيبة الأمل حالما نأتي إلى تاريخ حياته، فالمعلومات شحيحة إن لم تكن غير متوفرة إطلاقاً. ثم إن المدهش هو أن المفهرس الشهير ابن النديم، معاصر ابن سهل، الذي كان يتردد بانتظام على مجلس ابن سعدان، حيث كان ابن سهل معروفاً بدون شك، لم يعلمنا شيئاً عن الرجل أو عن أعماله؛ كما لم يرد في أعمال المؤرخين وكتاب السيرة ما يمكن أن يلقي ضوءاً على الموضوع. وهكذا فإننا لا نملك إلا بعض الأدلة غير المباشرة من بعض الرياضيين المعاصرين له.

تتفق كل هذه الشهادات مع مخطوطات ما وصلنا من أعماله باسمه وكنيته: أبو سعد العلاء بن سهل. وليس في هذا الاسم ما يلمح إلى بلد منشأه أو إلى انتمائه الاجتماعي أو الديني، اللهم إلا إذا استطعنا ربط اسمه باسم ابن سهل آخر، معاصر له، كان منجماً يعنى بالرياضيات. إلا أنه لا قيمة تاريخية في الوقت الحاضر لهذه الصلة[7]. يتبين لنا من إهداء كتابه *الحراقات* أن ابن سهل كتبه عام 985، في بغداد على أغلب الظن، أو في العراق على الأقل. فقد تربع الملك صمصام الدولة، صاحب الإهداء، العرش في بغداد وحكم بين سنتي 983/372 و986/376 أي على وجه التحديد لمدة ثلاث سنوات وأحد عشر شهراً تماماً، كما يبين ذلك المؤرخ ابن الأثير[8]. وهكذا فقد كان صمصام الدولة في منتصف فترة حكمه المزدهر والذي لم ينقطع فيه، حاذياً في ذلك حذو أبيه، عن تشجيع العلوم، على غرار وزيره ابن سعدان. نحي عن العرش من قبل أخيه شرف الدولة عام 986 ثم سجن وكف بصره بعد خلعه؛ إلا أنه عاود بعد خروجه من السجن الحرب ضد ابن أخيه رغم كفاف بصره دون أن تطأ قدماه بغداد ومات مقتولاً عام 998/388. وقد ندب المؤرخون المعاصرون تقلبات هذا القدر[9]. وبما أن ابن سهل وجه خطابه للملك وأن صمصام الدولة لم يعد في الملك بعد عام 986/376 فما من شك أن كتاب الحراقات قدم له عندما كان في سدة الحكم وأن ابن سهل كان يمارس نشاطه أثناء هذه السنين في بغداد أو في مدينة عراقية أخرى. إلا أن احتمال وجوده في بغداد لا يعلمنا شيئا عن منشأه، قد

---

[6] انظر خاصة رواية السهرات الأولى لأبي حيان التوحيدي، في *الإمتاع والمؤانسة*.

[7] المقصود هو أبو الحسن بن سهل، من العائلة الفارسية الشهيرة بنو نوبخت. عرب أبو الحسن عن الفارسية *زج شهرياري* كما كتب في التنجيم. وجه أبو الحسن نفسه سؤالاً إلى أبي الوفاء البوزجاني يتعلق بنشر ثنائي الحد. وهاك ما كتبه البوزجاني: "طلب أبو بشر الحسن بن سهل المنجم برهانا في جمع أضلاع المربعات والمكعبات وفروقاتها..."، انظر أبو الوفاء البوزجاني، *رسالة في جمع أضلاع المربعات* (مشهد اسطان قدس، 393)، ص. ١٧. فإذا توصلنا يوماً لتبيان أن العائلة هي نفسها يكون مؤلفنا حينئذ سليل بني نوبخت العائلة الشيعية المثقفة منذ أجيال عدة. لكننا نشدد، أنه حتى الساعة لا شيء يجيز تأكيداً كهذا. انظر أيضاً أبو الفرج بن اسحق بن النديم، *الفهرست*، تحقيق رضا تجدد (طهران، 1971)، ص. 305 و 334.

[8] ابن الأثير، *الكامل*، الجزء 9 ص. 49.

[9] الروذراوري، *ذيل كتاب تجارب الأمم*، ص. 315.

يكون في العراق أو في إقليم آخر من المشرق الإسلامي، وقد يكون جاء إلى بغداد مثله في ذلك مثل كثير من العلماء (البوزجاني والقوهي والكرجي وغيرهم من العلماء) ومن الفلاسفة (السجستاني، يحيى بن عدي...) ومن الأدباء كأبي حيان التوحيدي وحتى الشاعر أبو العلاء المعري. لقد كان العلماء والمفكرون الذين يطمحون إلى المعرفة وإلى الشهرة أيضاً يتطلعون على ما يبدو إلى المجيء إلى بغداد، التي كانت تعتبر مركز العالم العلمي والفكري.

نعلم من ناحية أخرى عن طريق الرياضي السجزي، المعاصر لابن سهل، أنه كتب مؤلفه *خواص القطوع* <*المخروطية*> *الثلاثة* قبل عام 972، تاريخ نسخ السجزي بيده لهذا المؤلف[10]. ثم إن تاريخ مسألة إنشاء مسبع منتظم يعلمنا أن ابن سهل كان عالماً رياضياً نشيطاً ومعترفاً به قبيل هذا التاريخ. وكما يروي الرياضي الشني، فقد أعطى أبو الجود بن الليث حلاً مموهاً لمسألة المسبع واكتشف السجزي هذا الخطأ فحاول بدوره حل المسألة إلا أن الحل كان صعباً عليه[11].

لقد اعترف السجزي فيما بعد بفضل ابن سهل، وهو ما سنرجع إليه لاحقاً[12] مكتفين هنا بالإشارة إلى أن الوقائع التي يذكرها الشني قد حدثت قبل عام 968/359. ثم إنه يعلمنا (انظر أدناه) أن ابن سهل كان لا يزال شاباً أيام مراسلاته مع السجزي مما يدل أنه كان منتجاً على الرغم من صغر سنه عام 970. كل هذا يلمح أن ابن سهل المولود في العقد الأخير من النصف الأول من القرن العاشر كان في أوج نشاطه العلمي بين منتصف الستينيات ومنتصف الثمانينيات. ولعله بقي كذلك بعد هذه الحقبة وإن كنا لا نعلم شيئاً عنه فيها. كما أننا لا نعرف شيئاً عن الأساتذة الذين تتلمذ عليهم في الرياضيات. ولكننا نعلم يقيناً – كما يتضح من قراءة أعماله ومن روايات المعاصرين له التي وصلت إلينا – أنه درس الترجمات العربية لنصوص أقليدس، أبلونيوس، أرشميدس، بطلميوس ومنيلاوس وغيرهم من علماء المناظر اليونان والروم، كما درس مؤلفات ثابت بن قرة وإبراهيم بن سنان وبعض المعاصرين كالقوهي. تظهر هذه الأسماء عرضاً في مؤلفاته مما يوحي بسعة معرفته وعدم اقتصارها على المؤلفين المذكورين. فمن المستغرب على سبيل المثال ألا يكون ابن سهل على علم بدراسة الماهاني في *قياس القطع المكافئ* عندما عمل هو نفسه في هذه المسألة.

---

[10] بدأ السجزي بنسخ مجموعة شيراز عام 969، وهي التي تشكل القسم الرئيسي من المخطوط 2457 في المكتبة الوطنية في باريز. وضع تاريخ الاثنين 21 رام – روز سنة 342 من يزدا جريد، أي 12 فبراير/ شباط 972 (انظر أسفله الفقرة 2.4) على النص السابق مباشرة لهذا الكتيب (fols 137^{v}-139^{r}). أما النص السابق لهذا الأخير (fols 136^{v}-137^{r}) فقد نسخ يوم الخميس 10 من شهر أبان سنة 339 أي أكتوبر – نوفمبر/ تشرين أول – تشرين ثاني 970.

[11] الشني *كتاب كشف تمويه أبي الجود* في R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX*^{e} *au XI*^{e} *siècle*, vol. 3, p. 842؛ انظر أيضاً مقال عادل أنبوبا "*تسبيع الدائرة* من قبل مهندس من الشرق الأوسط في القرن الرابع الهجري" في *Journal for the History of Arabic Science*, 1, 2 (1977), pp. 352-384, on p. 374. انظر أدناه الهامش 23 والصفحتين 7 و 8.

[12] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX*^{e} *au XI*^{e} *siècle*, vol. 3, p. 740 انظر أدناه ص. 7 و8.

2.1 *أعمال ابن سهل العلمية*

لقد تبين منذ اكتشاف *الحراقات* أن أعمال ابن سهل في الرياضيات والمناظر أوسع بكثير مما كان يظن. إنها لم تقتصر على المؤلفات التي وصلت إلينا: تشير دلائل عديدة أن أعماله كانت أكثر عددا وشملت، كما قلنا، مجالات البحث الأكثر تقدماً في ذلك الحين. يلمح الرياضي القوهي في مراسلة مشهورة له إلى بحثين لا زالا مفقودين، كما يذكر السجزي عنوان كتاب مفقود عن "الحدود" وبعض المسائل من كتاب آخر لابن سهل لم يصلنا. ونقل الشني في النص الذي ركب فيه المسائل التي حللها ابن سهل بعض أقواله ومقطعاً من كتاب أرسله ابن سهل إلى أحد مشاهير الأدباء آنذاك. فلا غرابة والحال هذه أن نتوقع إغناء هذه القائمة في المستقبل. ونضيف هنا إلى هذه المجموعة الأعمال المحققة فيما يلي وكذا تعليقاً على رسالة القوهي في الأصطرلاب، متفحصين تباعاً هذه الأعمال.

1.2.1 *في تربيع القطع المكافئ*

كتب القوهي في مراسلة مع أبي اسحق الصابئي:

> "ومع هذا وجدنا قطعاً مكافئاً مساوياً لمربع ببرهان حقيقي، وكان أول من ذكره أرشميدس – في صدر كتاب *الكرة والأسطوانة* – بأنه وجده، ثم جاء بعد ذلك برهان ثابت بن قرة وبرهان إبراهيم بن سنان وبرهان أبي سعد العلاء بن سهل وغيرهم من أصحاب التعاليم، الذين اعتمدوا على البراهين الحقيقية"[13].

يعطينا القوهي هنا سرداً لقصة تربيع القطع المكافئ، تبين أن ابن سهل قد خصص – إضافة إلى ابن قرة، وحفيده ابن سنان، وغيرهما ممن نعرف كالماهاني مثلاً – مذكرة لهذا التربيع. ونعلم أن ابن قرة قد استعان لهذا التربيع بعشرين مقدمة توصل بعدها حفيده لاختصارها بمقدمتين فقط[14]. لم يسبق ابن سنان ابن سهل إلا بجيل واحد (فقد توفي سنة 946 عن 37 عاماً) وهذا ما يعيدنا إلى التساؤل عن الأسباب التي دفعت ابن سهل إلى معالجة جديدة للتربيع. ومهما يكن، فمن المؤكد أن برهانه يختلف عن البراهين السابقة، كما يستدل من القوهي، وهو الخبير بالموضوع لاشتغاله، من بين أشياء أخرى، بقياس المجسم المكافئ. فهل هو من طور طريقة المجاميع التكاملية، التي سبق لثابت بن قرة أن طبقها، تطويراً نجده لاحقاً عند ابن الهيثم في أعماله حول *قياس المجسم المكافئ* و *قياس الكرة*؟ ويبقى الجواب عن هذا السؤال مستحيلاً في الوقت الحاضر وإلا فهو مراهنة محضة.

---

[13] انظر النص العربي المحقق لهذه المراسلة من قبل: J. L. Berggren, 'The Correspondence of Abū Sahl al-Kūhī and Abū Isḥāq al-Sābī : A Translation with Commentaries', *Journal for the History of Arabic Science*, 7, 1-2 (1983), pp. 39-124, at pp. 114-115 p. 55 : اقرأ "أول" بدل "أولاً".

[14] انظر

R. Rashed, 'Ibrāhim ibn Sinān ibn Thābit ibn Qurra', *Dictionary of Scientific Biography* (1973), vol. 7, pp. 2-3 and R. Rashed - H. Bellosta, *Ibrāhim ibn Sinān. Logique et géométrie au Xᵉ siècle* (Leiden, 2000). See also R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IXᵉ au XIᵉ siècle, vol. 1 : Fondateurs et commentateurs : Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd* (London, 1996), chap. III.

2.2.1 في مراكز الثقل

كتب القوهي في الرسالة نفسها لأبي اسحق الصابئي:

"ولعمري أن نسبة الثقل إلى الثقل كنسبة البعد إلى البعد على المكافأة (المقصود عكس نسبة البعد إلى البعد المترجم). كانت مقدمة للأوائل، وكانت كواحدة من العلوم الضرورية عندهم، وعند الذين ينظرون في علم مراكز الأثقال، كأرشميدس وإقليدس وغيرهما من أصحاب التعاليم، حتى انتهى إلى ثابت بن قرة وإلى زماننا هذا، ولم يشكوا فيها. ولسنا ندري كم كانت صحة ذلك عندهم بالتجربة، ومأخوذة من الحس كما ظن أبو سعد العلاء بن سهل ذلك، أو كان عليها برهان، ولكن قد درس مع طول الزمان"[15].

إن هذه الشهادة من القوهي تثبت أن ابن سهل كان ينتمي حينئذ إلى هذه المدرسة الأرخميدسية، وأنه أسهم في بناء هذا العلم وناقش الأسس التي يقوم عليها. ولنذكر بأن القوهي نفسه، وكذلك ابن الهيثم لاحقاً، قد اشتغلا أيضاً في هذا المجال.

3.2.1 مسائل هندسية أوردها السجزي

نجد أيضاً آثار كتابات رياضية لابن سهل في مذكرة كان السجزي[16] قد جمع فيها مسائل هندسية مختارة بغية مناقشتها مع المهندسين في شيراز وخراسان، وهي مسائل انتقاها من كتابات أبلونيوس، وابن قرة وابن سهل. لكن السجزي لا يشير إلى عناوين مصادره. فهل نحن هنا أمام تأليف شاع في ذلك العصر، يجمع فيه المؤلف مسائل هندسية يطرحها على نفسه بغية حلها؟

لقد قمنا بنشر مسائل ابن سهل المذكورة في معالجة السجزي: كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي *في المسائل المختارة التي جرت بينه وبين مهندسي شيراز وخراسان* وتعليقاته، انطلاقاً من مخطوطتين، وجدت الأولى في دبلن، في مكتبة تشستر بيتي رقم 3652، الورقات 35^{r}–52^{v} ونرمز لها بـــ A. نسخت هذه المخطوطة في بغداد في أواخر سنة 1214، ذلك أن المجموعة التي تضمها انتهت كتابتها نهار الجمعة 10 حزيران/يونيو 1215. نسخ هذا النص يحيى بن الحسن بن محمد بن علي بن أحمد بن نظام الملك، ومن المحتمل جداً أنه نقلها عن نسخة السجزي، إذ أن الناسخ ذكر ذلك بخصوص نصوص أخرى من المجموعة نفسها. أما المخطوطة الثانية فتوجد في مكتبة السليمانية

---

[15] Berggren, 'The Correspondence of Abū Sahl al-Kūhī and Abū Isḥaq al-Ṣābī', Arabic text p. 112. نرى أن التعبير "العلوم الضرورية" يعني الموضوعات (axioms)؛ وهي طريقة أخرى لقول العلوم المتعارفة التي تقابل في الترجمات العربية لإقليدس التعبير، κοιναι ἔννοιαι. انظر الطبعة الجديدة النقدية والترجمة الفرنسية لـــ Ph. Abgrall, *Le Développement de la géométrie aux IXᵉ -XIᵉ siècles - Abū Sahl al-Kūhī*, coll. 'Sciences dans l'histoire', Paris, Librairie A. Blanchard, 2004.

[16] هناك إضافة إلى المقتطفات المنشورة هنا مسألة طرحها وحلها ابن سهل: خطا $\overline{\text{ا ب}}$ و $\overline{\text{ب جـ}}$ أحاطا بزاوية كيف اتفق. نريد أن نخرج من نقطة جـ خطا إلى $\overline{\text{ا ب}}$ يكون نسبته إلى ما يفصله منه في جهة $\overline{\text{ا}}$ أو في جهة $\overline{\text{ب}}$ كنسبة مفروضة (*جواب أحمد بن محمد بن عبد الجليل عن مسائل هندسية*، MS Reshit 1191, fols. 110^{v}-111^{r}). وهناك عمل آخر أشار إليه نظيف بن يمن *في إنشاء مثلث حاد الزوايا على خطين مختلفين*" (انظر الهامش 28).

في استنابول، مجموعة رشيد، رقم 1191، الورقات 62^r-31^v ونرمز إليها بحرف B. وقد بينا في مكان آخر[17] أن لهذه المجموعة نموذج واحد هو المجموعة 3652 في مكتبة تشستر بيتي في دبلن[18]، وهي نسخة أحدث، لا نعرف عنها إلا القليل.

4.2.1 في خطوط التحديد

يشير السجزي في كتابه *جواب المسائل الهندسية التي يطرحها أهل خراسان* إلى عنوان كتاب لابن سهل : في *خطوط التحديد* (Diorism)[19]. ويفهم في سياق الكلام في التنويه أن الكتاب يعالج المنحنيات، والقطعية منها في وجه الخصوص، المستعملة في مناقشة مسائل الإنشاء الهندسي (التحديد). إن تكريس كتاب بكامله لدراسة هذه المسألة هو بحد ذاته لبنة كبيرة في بناء فرع الإنشاء الهندسي بواسطة القطوع وهو الفرع الذي ما لبث ابن الهيثم أن تابعه[20].

إضافة إلى هذه النصوص الثلاثة المفقودة حتى الآن، والتي لا نملك سوى دلائل قليلة جداً تدلنا على وجهة البحث فيها، من دون المغالاة في المقارنة مع معاصريه أو أخلافه، بحوزتنا رسالة لمؤلف مجهول نذكرها هنا، وسنثبت أنها للشني.

5.2.1 كتاب الشني عن تركيب مسائل حللها أبو سعد العلاء بن سهل

يفيدنا مؤلف هذا الكتاب أن ابن سهل أرسل إلى أحد الوجهاء الملمين بالرياضيات رسالة تتعلق ببعض المسائل الهندسية مكتفياً بتحليلها، وأن هذا الوجيه طلب منه أن يبرهنها بالتركيب. ولكن، من كان هذا الوجيه، صاحب المراسلة مع ابن سهل أولاً، ومع مؤلف هذا الكتاب من بعده؟ ومن هو هذا المؤلف، معاصر ابن سهل، الذي كان جواب ابن سهل للوجيه في حوزته بدون شك؟

طرح عادل أنبوبا[21] في معرض دراسة إنشاء المسبع المنتظم اسم الرياضي أبي الجود بن الليث، وهو أكبر سناً من ابن سهل. لا يبدو لنا هذا التكهن مقبولاً ونعتقد أن المؤلف المجهول ليس سوى محمد بن أحمد الشني، وهو رياضي يحتمل أن يكون أصغر سناً من ابن سهل.

---

[17] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. 4, pp. 172-173.

[18] انظر المقتطف الأول في إنشاء المثلث بواسطة القطع الناقص والدائرة في الفصل IV؛ والمقتطف الثاني في الإسقاط التسطيحي في الفصل VI. حقق هذا المقتطفان وترجما إلى الفرنسية ونشرا في R. Rashed, 'Ibn Sahl et al -Qūhī : Les projections. Addenda & Corridenga', *Arabic Sciences and Philosophy*, 10, 1 (2000), pp. 79-100. انظر المقتطف الثالث في إنشاء مسألة هندسية في الفصل IV. انظر أيضا الكتاب القادم *Œuvre mathématiques d'al-Sijzī* by R. Rashed and P. Crozet.

[19] MSS Dublin, Chester Beatty 3652, fol. 53^v; Istanbul, Reshit 1191, fol. 113^v.

[20] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e et XI^e siècle*, vol. 3.

[21] في مقال حول تاريخ المسبع في الدائرة يعرض عادل أنبوبا هذا التخمين بالعبارات التالية: "نوه الشني بمقاطع من كلام العلاء وبمقاطع من كلام أبي الجود، حول الحل الذي بقي متعذراً على العلاء بن سهل. هذه المقاطع هي نفسها تلك الموجودة في المذكرة مجهولة المؤلف

فلقد كتب الشني رسالة أعاد فيها سرد قصة إنشاء المسبع في الدائرة، كما أثار مسألة الوسطين، حيث تركزت انتقاداته على أبي الجود بن الليث، المتهم بالاختلاس العلمي وعدم الكفاءة[22]. فهو يؤكد في معرض قصة الإنشاء هذه أن أبا الجود أعطى المقدمة التالية:

اقسم مقطعاً AB بنقطة C بحيث يكون:

$$AC \cdot AB = k^2 \qquad (1)$$

$$\frac{k}{BC} = \frac{AB}{AB + BC}$$

تقود قسمة AB هذه بالفعل إلى إنشاء المسبع في الدائرة؛ لكن أبا الجود – بحسب قول الشني – أخطأ مرتين في برهانه: فقد اعتقد بإمكانية الحصول على هذه القسمة بواسطة تقاطع مستقيم مع دائرة، كما استبدل، في مجرى البرهان، نسبة بأخرى غير مساوية لها.

أدرك السجزي، وكان رياضياً فتياً آنذاك، خطأ أبي الجود، ولما لم يستطع برهانه، توجه بالسؤال إلى ابن سهل الذي تمكن، كما يروي الشني، من "تحليل الخط إلى تلك النسبة بقطعين متقابلين من القطوع المخروطية – زائد ومكافئ – فحلله وأنفذه إلى أبي سعيد السجزي"[23].

حدث آخر نستغرب بقاءه، على الرغم من أهميته لموضوعنا، خفياً على المؤرخين، رواه الشني بالكلمات التالية:

> "وذلك أن العلاء بن سهل ذكر فيما كتب به إلى أبي سعيد السجزي مجيباً عما سأله عن قسمة الخط الذي تقدم ذكره تحليل شكل سأله عنه أيضاً وهو هذا:
> سطح ا ب جـ د متوازي الأضلاع، أخرج قطره وهو ب جـ وأخرج ضلع جـ د على استقامة من جهة د بلا نهاية؛ كيف نخرج خطاً كخط اهـ ز ح حتى تكون نسبة مثلث ب هـ ز إلى مثلث ز د ح نسبة مفروضة؟". وقال في آخر تحليله: "فأما إعطاء نسبة ما بين مثلثي ا هـ ب و ز د ح فلا سبيل إلى ذلك، ولو وجدنا مساغاً لتوصلنا إلى ذلك، في خضم كلام يطول ويهول"[24].

(تسبيع *الدائرة* ص. 373 رقم 33). ينسب أنبوبا سهواً لأبي الجود كلام الشني. ونحن ما أن نبعد هذا الخلط حتى يسقط التخمين تلقائياً. انظر

R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3, chap. III, 1.2.

[22] الشني، كشف *تمويه أبي الجود* في أمر ما قدمه من المقدمتين لعلم المسبع بزعمه في

Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XIe siècle, vol. 3 Appendix, text n° 11.

[23] انظر ما كتب الشني: "فتبين له (السجزي) فساد قوله (قول أبي الجود) والمغالطة في عمله ورام أبو سعيد السجزي أن يقسم الخط على النسبة المذكورة، فتهيأ للعلاء بن سهل تحليل الخط إلى تلك النسبة بقطعين متقابلين من القطوع المخروطية – زائد ومكافئ – حلله وأنفــذه إلى أبي سعيد السجزي، فلما وصل إليه ركبه أبو سعيد السجزي وبنى عليه المسبع وادعاه لنفسه". كشف *تمويه أبي الجود* في *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3, p. 842.

[24] المصدر نفسه، ص. 844–846.

ويتابع الشني:

"لا أدري كيف تعذر عليه هذا حتى استبعده وحسن الظن بنفسه فيما أورده، لأن بين المثلثين نسبة ما ويمكن الوصول إلى ذلك، لأنه إذا كان سطح ا ب جـ د مربعاً، وكان مثلث ا هـ ب مساوياً لمثلث ز د ح فهو الشكل الذي قدمه أرشميدس لعمل المسبع وسلك أبو سهل القوهي فيه طريق تقسيم الخط على النسبة التي تقع فيه"[25].

ثم يورد الشني تركيب القوهي.

إن المقاطع التي أوردناها، وكذلك عرض تركيب القوهي هي للشني وليست لأبي الجود، كما ظُن خطأً. وهي لا تذكر بتعابير النص المجهول فحسب، بل وتتطابق معها أحياناً[26]. إن مؤلف هذا النص المجهول هو إذاً، من دون شك، الشني نفسه.

لم ينتقل الشني إلى نقد أبي الجود بن الليث إلا بعد هذه الشواهد، فينقل أن هذا الأخير

"قال في مجموعاته التي سماها *الهندسيات* بعد ذكره ما قاله أبو العلاء بن سهل في ذلك: وقد وجدت أنا ما قاله العلاء بن سهل أنه ممتنع – يعني إعطاء النسبة بين مثلثي ا هـ ب و ز د ح من الشكل المتقدم"[27].

هكذا نرى نقلاً عن الشني، أن أبا الجود، وإن كان قد عالج نفس المسألة فإنه لا مجال للخلط بين الملاحظات التي أبدياها.

إن فائدة رسالة الشني هذه، التي كتبها ضد أبي الجود بن الليث، أنها ألقت الضوء على دور ابن سهل في إنشاء المسبع في الدائرة – مؤكدة في الوقت نفسه أصالة المسائل التي طرحها ابن سهل – ومكنتنا من إماطة اللثام عن هوية مؤلف كتاب *تركيب المسائل التي حللها أبو سعد العلاء بن سهل*.

لا نعلم شيئاً عن هوية الوجيه مراسل الشني على وجه الدقة سوى أنه أحد أفراد علية القوم في السلطة أو الثقافة وأنه كان ملماً بالرياضيات. وكان، كما نعلم من جهة أخرى، يملك مكتبة أعد الكتاب خصيصاً لها. ولقد استعمل مؤلف المقالة في مخاطبة هذا الوجيه ألقاباً كافية للدلالة على طبقته[28]. غير أن هناك مرشحين عديدين يمكن أن تنطبق

---

[25] المصدر نفسه، ص. 846.

[26] تظهر المقارنة بين تعابير الشني في هذه الرسالة، ونص الرسالة الأخرى حول *التركيب* بأنهما للشخص نفسه، من حيث الأفكار والكلمات والتعابير. انظر المصدر نفسه، خاصة ص. 481 السطر 12 إلى ص. 483 السطر 15 (الأوراق 127^{v}-128^{r})، حيث يكرر الشني استشهاد ابن سهل الشهير ويلخص حل القوهي.

[27] *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle*, vol. 3, p. 846.

نلاحظ أن الأقوال التي ينسبها الشني لأبي الجود منفصلة بشكل واضح.

[28] إن من نحن بصدده وجيه حقاً كما يظهر النص الموجه إليه. فهو يملك مكتبة "خزانته المعمورة" أعد الكتاب خصيصاً لها؛ وكان هذا في الواقع امتيازاً يتمتع به كبار رجال السلطة أو الثقافة في ذلك العصر. ومن ناحية أخرى تدل الألقاب المستعملة في مخاطبته أنه لم يكن أميراً أو وزيراً بل وجيهاً محترماً لمرتبته الفكرية. يخاطبه مؤلف النص بلقب "شيخ" أحد ألقاب رجال الدين كما يشرح لنا القلقشندي في *صبح الأعشى في صناعة الإنشاء* (القاهرة: بولاق مستعاد 1963) الجزء 6 ص. 17. ويدعوه "مولى" وهو لقب أمناء سر الدولة والكبار في الجيش والدواوين، ويسميه "أستاذ" وهي كلمة فارسية معربة؛ وقد سمي الوزير ابن العميد، معاصر ابن سهل، "أستاذ" أيضاً. تنطبق هذه الألقاب على مجموعة من الأشخاص كما قلنا. ويمكن مقارنة خطاب المؤلف بخطاب للشني توجه به بجلاء إلى أحد القضاة.

عليهم تلك الأوصاف في ذلك الزمان: أبو إسحاق الصابئي، أبو محمد بن عبد الله بن علي الحاسب وكثيرون غيرهم. إن كل ما نستطيع تأكيده بغياب معلومات إضافية أنه من الأعيان، من مرتبة اجتماعية عالية بدون أن يكون أميراً أو وزيراً؛ لم تكن الرياضيات مهنته لكنه كان واسع المعرفة فيها من غير أن يكون مبدعاً.

وصلنا كتاب *التركيب* في نسخة وحيدة تؤلف جزءاً من المخطوطة 41، رياضة، دار الكتب، القاهرة، وهي تحتوي على 32 رسالة وكتيباً، نقلها الناسخ الشهير مصطفى صدقي[29]، باستثناء بعض الصفحات، نهار الاثنين 8 آب/أغسطس 1740، بالخط النسخي. هذه النسخة إذاً حديثة العهد نسبياً، ولا شيء يشير إلى أنه قابلها مع الأصلية (التي، فضلاً عن ذلك، لا نعرف عنها شيئاً يذكر)[30].

كما يستعمل الشني نفس العبارات في مخاطبة أحد الفقهاء في عمله في "*مساحة أي مثلث متباين الأضلاع انطلاقاً من أضلاعه*" وهو عمل ينتمي إلى نفس المجموعة. إلا أنه يكاد لا يجرؤ المرء، نظراً لشيوع هذا النوع من الشخصيات في ذلك الزمان ولشحة المعلومات التي يعطيها الشني في عمله، على وضع اسم لمخاطب ابن سهل والشني. ومع ذلك نود، من باب التكهن المحض، جلب النظر إلى اسم واحد من بين كل الأسماء التي تخطر في البال هو اسم نظيف بن يُمن المتطبب. كان هذا الطبيب رجل دين نصراني على علم بالرياضيات كما كان عارفاً بالحضارة اليونانية. نعرف له ترجمة لبعض متممات المقالة العاشرة من *الأصول* لإقليدس: ما نقلوه ... مما وجد في اليوناني من الزيادة في أشكال المقالة العاشرة، نسخها السجزي (Paris, Bibliothèque Nationale, MS 2457, fols. 80-82). عاصر ابن يُمن ابن سهل وكان على علم بأعماله، كما يشهد على ذلك السجزي معاصر ابن سهل ومراسله. يكتب السجزي جواباً على رسالة من نظيف بن يُمن ما يلي "سألت، أدام الله سعادتك، عن عمل المثلث الحاد الزاوايا من خطين مستقيميين مختلفين، وذكرت أن أبا سعد العلاء بن سهل عمل ذلك من القطع الناقص من الشكل الثاني والخمسين من المقالة الثالثة من كتاب أبلونيوس في المخروط على طريق القسمة والتحديد. (رسالة أحمد بن محمد بن عبد الجليل إلى أبي علي نظيف بن يُمن في R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 4, p. 826, ar. p. 827). نعلم من هذه الشهادة أن نظيف بن يُمن كان على علم بأعمال ابن سهل وتراسل مع رياضيي عصره طالباً برهاناً لبعض القضايا أو برهاناً مختلفاً لقضايا مبرهنة. وهو يطلب من السجزي في هذه المراسلة برهان قضية كان ابن سهل قد برهنها. وجاء جواب السجزي بالبرهان المطلوب بدون اللجوء إلى المخروطات؛ وهو برهان أبسط من برهان ابن سهل حسب رأيه. ولم يكن ما قام به نظيف بن يمن هذا عملاً منعزلاً بأي حال فقد كتب إلى السجزي، كما يروي هذا الأخير، عن برهان مقدمة لعمل مخمس في الدائرة. يكتب السجزي عن الرسالة *حول الشكل العاشر من المقالة الرابعة من الأصول*: "المقالة الرابعة من كتاب إقليدس في الأصول الشكل العاشر وهي الرسالة التي عملت إلى نظيف بن يمن فيما سأله عن برهان هذا الشكل، وهي هذه: سألت أعزك الله عن مقدمة عمل المخمس الكائن في الدائرة التي سطرناها في مختصرنا لكتاب إقليدس في الأصول" (مخطوطات اسطنبول، رشيد 1191، الورقة 93). تبين شهادتا السجزي هذه أنه كان من عادة الطبيب المثقف–الفيلسوف الملم بالرياضيات مراسلة معاصريه سائلاً عن البراهين أو عن براهين جديدة. ثم إن للمثالين المذكورين علاقة بالتحليل الهندسي. وهذا بالتحديد ما يفعله مراسل الشني : إن برهان ابن سهل في حوزته ولكنه يكتب للشني طالباً منه إعطاء تركيب هذا البرهان. وهكذا فإن نظيف بن يُمن مرشح جيد للقيام بدور مراسل الشني وابن سهل. أضف إلى ذلك أنه المرشح الوحيد في الوقت الحاضر، الذي نملك في شأنه بعض الحجج.

[29] هو ناسخ مثقف. كان ينسخ، في بعض الأحيان، النصوص لنفسه، كما ذكر عن كتاب ابن البناء، *رفع الحجاب* (استانبول، وهبي، مخطوط رقم 1006). ولدينا الانطباع نفسه عن هذه المجموعة، عندما نقرأ في الصفحة الأولى أنها تخص الناسخ. وقد نقل مصطفى صدقي نصوصاً أخرى مثلاً: اليزدي، *عيون الحساب* (استانبول، هزيناسي، 1993).

[30] إن النص الذي نطبعه هنا ونترجمه للمرة الأولى هو النص الذي أشار إليه عادل أنبوبا، انظر الهامش 21. أثبت ج. هوكينديغ J. Hogendijk فقرة قصيرة من هذا النص. وإليكم المقطع (مع تصحيحاتنا التي وضعناها بين قوسين):

فأما كيفية (كيف) اطراد المعرفة الرياضية بإعطاء نسبة ما بين مثلثي د جـ ز و ل ا ه فلا سبيل لاتجاه العقول إلى بلوغ استخراجه بتحليل ولا اكتساب مقدمة ولو وجدنا مساغاً <و> توصلنا (يوصلنا) إلى نيله لزمنا بسبيله (بسببه) إلى علم ما شد (شذ) حتى سبّع (تبع). لكنه نلقي (ما بقي) لمبرزي (لمستهزئ) الأوائل (إلا وقلل) ببراعة النظر في التعاليم سعي متظاهر فيما يهدي إلى استفادته

6.2.1 *في خواص القطوع المخروطية الثلاثة*

يتميز كتيب ابن سهل هذا بقصة بسيطة ومؤكدة: لقد نسخه الرياضي السجزي وابن سهل مازال حياً. وعلى الرغم من عدم تدوين تاريخ النسخة، تبين المقارنة بينها وبين رسائل أخرى نقلها السجزي، أنها نسخت قبل عام 972. نعلم من جهة أخرى، أن السجزي كان في ذلك الوقت مراسل ابن سهل فلم ينس الدعاء له بطول العمر في مستهل الكتيب. ولم يفته، بعد انتهائه من نسخته، أن يقابلها بالأصلية. وهذه النسخة هي بالتحديد، تلك التي وصلتنا ضمن المخطوطة الثمينة 2457 في المكتبة الوطنية، باريز (140^v-139^v)، حيث إن جزءاً كبيراً منها، وهو الأقدم، نسخه السجزي بيده، كما هو ظاهر من قراءة ذيل "شرح *مقالة إقليدس العاشرة*" للماهاني، والذي نسخه السجزي أيضاً[31].

لا تحتوي نسخة الكتيب – وهي بالخط النسخي – على أي إشكال ذي شأن، باستثناء ترداد واحد وعبارتين فوق السطر من المرجح أنهما دونتا أثناء النسخ، وكذلك كلمة واحدة على الهامش كتبت عند المقارنة بالأصل، أما الأخطاء في الأحرف الهندسية فيعود سببه إلى التشابه في الرموز الكتابية. لا شيء إذاً يوحي بأن يداً ثانية تدخلت في هذه النسخة غير يد السجزي، أو أن أي اجتهاد قد أضيف إليها.

في عودة إلى النص نفسه، تعترضنا ملاحظتان: أولاهما استعانة ابن سهل بالقضايا 1.11 و 1.12، 1.35 و1.36 من *المخروطات*، من دون ذكرها صراحة، وهو ما يعني أن هذا الكتاب كان، في النصف الثاني من القرن العاشر، مؤلفاً أساسياً من المفروض إلمام القارئ به، على الأقل في قضاياه الأساسية. وثانيتهما، أن لغة النص هي لغة هندسة المخروطات المستقرة تماماً والخالية من الشواذ.

7.2.1 *رسالة في الأصطرلاب بالبرهان للقوهي وشرح ابن سهل*

حرر ابن سهل شرحه، كما نقرأ في مقدمته، بناء على طلب معاصر له. ويبدو نص ابن سهل كمتمم لنص القوهي، وبالإمكان الاعتقاد بأن هذه هي الحال دائما في التقليد المخطوطي. وهكذا يرد النصان في المخطوطة الشرقية رقم 14 (Or. 14) من مكتبة جامعة ليدن – التي نرمز إليها بالحرف L – وهي المخطوطة الوحيدة التي وصلتنا من هذه الكتابات. فيشغل كتاب القوهي الصفحات 254 إلى 282، وشرح ابن سهل الصفحات 282 إلى 294.

بإطناب وغير (وعنّ) ظاهر عما يؤدي إليه الإنجاج (الإلحاح) فيه فلنمسك عن تعدى (تعدي) هذه الغاية. (J. P. Hogendijk, 'Greek and Arabic Constructions of Regular Heptagon', *Archive for History of Exact Sciences*, 30 (1984), pp. 197-330, at p. 259). انظر ترجمتنا ص. 480؛ ar. 481, 12-16.

لهذه الطبعة التي أنجزناها قصة عجيبة. فنحن لن نجد فيها في حال من الأحوال لا كلمات ابن سهل ولا أفكاره. لقد كان هذا واضحاً لدينا إلى حد جعلنا نشعر أنه من غير اللائق الاستشهاد بهذه الطبعة وبترجمتها فأمسكنا عن الإشارة إليها في الطبعة الفرنسية لهذا الكتاب. إلا أن بعض المعلقين أخذوا علينا ذلك ولذا فنحن ننزل عند رغبتهم هنا.

[31] انظر الهامش 10 و *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. 1, pp. 147-150.

غير أن هذه المخطوطة L، كما أثبتنا في مكان أخر[32] هي نسخة حديثة – تعود على القرن السابع عشر – عن مخطوطة أخرى، وصلت، بطرق غامضة، إلى مكتبة جامعة كولومبيا في نيويورك، تحمل رقم 45 شرقيات سميث (Smith Or. 45) ونرمز إليها هنا بالحرف C. نعلم أن الرياضي والمستشرق غوليوس (Golius) قد شارك بنشاط، في القرن السابع عشر، في الحصول على المخطوطات العربية وتجميعها، وأن هذه المخطوطة قد نسخها له درويش أحمد أثناء إقامته في حلب وانتهى من العمل فيها في 27 آب/أغسطس 1627. وفي عداد هذه المخطوطات نجد النسخة C التي ما إن نسخت حتى اختفت لتظهر من جديد في مجموعة سميث[33].

نجد في الصفحة الأولى من المخطوطة C عناوين بعض الرسالات التي تحتويها. من هذه العناوين: *رسالة في الأصطرلاب بالبراهين* لأبي سهل (كذا !)، أي رسالة القوهي يتبعها شرح ابن سهل، كما تشهد النسخة L. ومن الجلي أن هاتين الرسالتين تختتمان مجموعة لم تعد، مع الأسف، موجودتين فيها. لقد ضاعتا إذاً على إثر عملية النسخ في القرن السابع عشر. وعلى العكس فقد أضيف حوالي الثلاثين صفحة من التعقيبات على نصوص رياضية، بينها *الأصول*، بخط مختلف. وبسبب هذا الضياع الموقت أو النهائي، فنحن مجبرون على أن نثبت النص انطلاقاً من المخطوطة L الوحيدة، التي وصفناها سابقاً[34]. نسخت هذه المخطوطة باعتناء، بالخط النسخي، وقد دون الناسخ بيده في الهامش أربعة تصحيحات على نسخته عند مقابلتها مع الأصلية – أي النسخة C [255، 267، 271، 291]. ولا توجد، في الهامش، أية كتابة أخرى باستثناء قصيدة في الأخلاق في رأس الصفحة 293. ولا شيء يوحي بوجود كلمات أو جمل مدسوسة. أما الأشكال فقد نقلت باعتناء أقل مقارنة بالجزء الباقي من C. لكن الحادث الأهم الذي طرأ على هذه السلالة المخطوطية فمن المحتمل جداً أنه يرجع إلى C. فمؤلَف القوهي يحتوي على مقالتين: الأولى في أربعة فصول، والثانية في سبعة فصول. بينما وصلتنا المقالة الأولى كاملة في L فإن المقالة الثانية ناقصة، إذ تعرضت للقطع في القضية الأخيرة – السادسة – من الفصل الثاني، أي على الصفحة 276، وضاعت الفصول الثالث والرابع والخامس، في حين بقي الفصلان السادس والسابع كاملين. وعلى الرغم من عدم تمكننا في الوقت الحاضر من الجزم بتاريخ هذا الضياع، فإن ناسخ L لم يعودنا في النصوص الأخرى إهمالاً كهذا، الأمر الذي يسمح لنا بالظن بأن هذا الحذف قد وجد من قبل في المخطوطة C.

8.2.1 الحراقات

لم تصلنا أية شهادة من مصادر قديمة أو حديثة عن رسالة ابن سهل. ولم يخطر وجودها على بال قبل أبحاثنا هذه. وقد كان معلوماً من فهارس المكتبتين الوطنيتين في دمشق وطهران أن في كلتيهما مخطوطة لابن سهل عنوان

---

[32] R. Rashed, *Sharaf al-Dīn al-Tūsī. Œuvres mathématiques. Algébre et géométrie au XII^e siècle*, 2 vols. (Paris, 1986), vol. 1, p. LV; *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3, pp. 532-534 and vol. 4 : *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques* (London, 2002), pp. 735-736.

[33] انظر *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3, pp. 533-535.

[34] انظر الهامش 32.

الأولى: *رسالة في الآلة المحرقة لأبي سعد العلاء بن سهل*، أما الثانية فعنوانها: *كتاب الحراقات عمله أبو سعد العلاء بن سهل*. ووفقاً للفهارس فقد ساد الاعتقاد طويلاً أن النسختين هما لنص واحد عنوانه *في المرايا المحرقة*، وهو خطأ محير ذلك أن إحدى هاتين المخطوطتين مؤلفة من ست وعشرين ورقة، في حين أن الثانية من ورقة ونصف فقط، كما أن العنوانين مختلفان، وكلمة "آلة" في مخطوطة دمشق لا تفهم بـــ "مرآة"[35].

لم يلبث تفحص المخطوطتين أن يظهر أنه لا يوجد أي مقطع، ولا حتى أي سطر واحد، مشترك بين الاثنتين. فمخطوطة دمشق – نرمز إليها بالحرف D – كرست بأكملها للمرايا المكافئية، في حين أن هذه الدراسة هي بالذات ما تفتقده مخطوطة طهران – التي نرمز إليها بالحرف T. فضلاً عن ذلك، هناك ثغرة مهمة ثانية في المخطوطة الأخيرة، فهي في فوضى كاملة ومبتورة بشكل خطير. فبعد تحليل عمل ابن سهل وترميم المخطوطة يظهر ترقيمها المتواصل من 1^r إلى 26^r وهمياً، وضع لاحقاً على النسخة بعد ضياع بعض أوراقها وخلط الأخرى. ففي الواقع يجب ترتيب الأوراق كالتالي:

$$1^v \rightarrow \left[14^r - 16^v\right] \rightarrow \left[13^{r\text{-}v}\right] \rightarrow \left[2^r - 12^v\right] \rightarrow \left[17^r - 26^r\right]$$

نلاحظ، بالإضافة إلى هذه الفوضى، بترين مهمين للمخطوطة T، واحد بين 1^v و 14^r، والآخر بين 16^v و 13^r. ويقابل هذين البترين ضياع عشر ورقات نزعت من المخطوطة. فهذه الأوراق بالذات تحوي دراستين: الأولى في المرآة المكافئية، والثانية في مرآة المجسم الناقص. وهكذا فنحن أمام فصل نموذجي قام به قارئ يولي اهتماماً خاصاً لهذا النوع من المرايا. كما أن الورقات المنزوعة تحوي أيضاً نهاية الدراسة التي تسبق المرآة المكافئية أو مرآة المجسم الناقص، وبداية الدراسة التي تتبع هاتين الدراستين، وهي في الحالتين دراسة الرسم المتصل للمنحني. وكما سنبين، حصل هذا الضياع بعد نهاية القرن الثالث عشر. وقد أصلحت أولى هاتين الثغرتين – أي دراسة المرآة المكافئية – بالكامل تقريباً بواسطة المخطوطة D. وبعد ترميم المخطوطة T، يتبين لنا أن المخطوطة D ما هي إلا جزء صغير من رسالة ابن سهل. وعلى أي حال فبينما كانت T في الأصل نسخة كاملة لرسالة ابن سهل، فإن D في المقابل ليست سوى نسخة لجزء من هذه الرسالة، ذلك الذي يتعلق بالمرآة المكافئية.

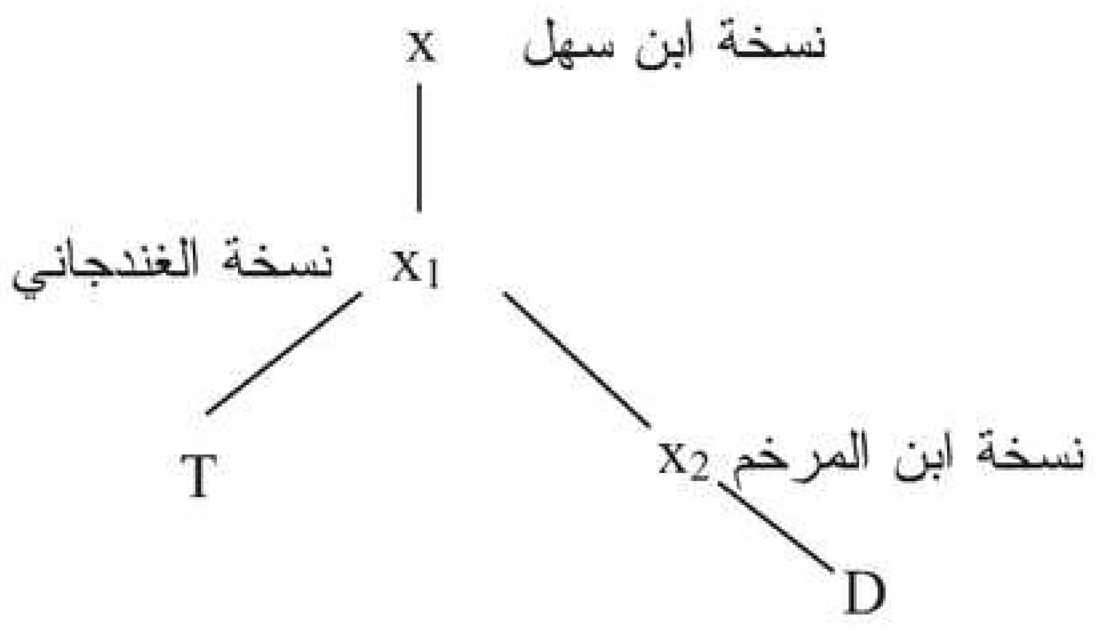
يتبين من قراءة الذيل أن المخطوطة T هي نسخة لمخطوطة x_1 نقلها أحمد بن أحمد بن جعفر الغندجاني الذي على الرغم من معرفتنا الضئيلة به، لم يكن ناسخاً بسيطاً، بل كان مهندساً يهتم بالمناظر أيضاً، ولا سيما بالمرايا المحرقة[36]. وقد نقلت المخطوطة D بدورها عن مخطوطة x_2، كان قد نسخها ابن المرخم[37]، وهو ليس بالناسخ البسيط

---

[35] نجد هذه الأخطاء في: F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, VI (Leiden, 1978), p. 233. حيث يعتبر المخطوطتين نسختين لنص واحد تحت عنوان: *Über den Brennspiegel* (sic).

[36] الغَندجاني وليس الغُندُجاني (الذي لم يذكره أي فهرس حتى الآن) يأتي استناداً إلى اسمه، من منطقة صغيرة في إيران: غندجان. انظر شهاب الدين أبو عبد الله ياقوت الحموي، معجم *البلدان*، ج. 4. نعرف له كتيباً عن *"القبلة"*، انظر: الغندجاني، القبلة (مخطوطات اوكسفورد، مكتبة بودلين، ذارستون 3، ورقة 93^r). تجدر الإشارة إلى أن هذا النص سبق نسخة لكتيب ابن سهل، *البرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء*. نجد أيضاً شروحات هندسية عدة للغندجاني نفسه في هامش كتيب أبي الوفاء البوزجاني حول الإنشاءات الهندسية، وخصوصاً حول صنع المرآة المحرقة (مخطوطات 2753، آيا صوفيا). سيوضح لنا البحث القادم أهمية مساهمة هذا العالم

كذلك، ناقلاً إياها عن نسخة الغندجاني كما يخبرنا ذيل D. وكان هذا الأخير قد نقلها بدوره عن مخطوطة كتبها ابن سهل بيده. نلخص شجرة التحدر كالتالي:



وهكذا فقد شكلت نسخة الغندجاني هذه، المنقولة عن نسخة ابن سهل نفسه، الأصل المباشر للمخطوطتين T وD، متحدرة في حالة D مروراً بالنسخة x_2، إلا أن المخطوطة T متأخرة جداً عن نسخة ابن المرخم x_2 وعن النسخة D بالذات التي جاءت بعد وقت قصير عن x_2. نعرف من ذيل T أن علياً ابن العالم الفلكي الشهير يحيى المغربي، أنهى تصويب النسخة[38] نهار الخميس في الحادي عشر من ربيع الآخر لسنة 690، أي بتقريب بعض الساعات 12 نسيان/أبريل 1291. وتكون المخطوطة T إذاً قد نسخت قبل أن يضع علي المغربي لمساته الأخيرة عليها في مراغة على الأغلب، حيث استقر والده للعمل في مرصدها المشهور. وهكذا تكون النسخة T قد أتمت في 12 نسيان/أبريل 1291، في وقت كانت فيه نسخة الغندجاني لا تزال في متناول اليد. نعلم، إضافة إلى ذلك، من ملحق D أن النسخة x_2 قد نقلت قبل خمسينيات القرن الثاني عشر، أي قبل حوالي قرن ونصف من T، في فترة كان ابن المرخم مازال حياً يمارس عمله كقاض في بغداد. أما فيما يخص D بالذات فقد نسخت بعيد x_2. وإذا ما انطلقنا من تأريخ المجموعة التي تنتمي D إليها والمكتوبة بالخط نفسه، فإننا نعلم أنها نقلت بين 1155/550 و 1163/558 تقريباً. كما يعلمنا ناسخ المخطوطة D أيضاً أن النسخة الأصلية التي اعتمدها ابن المرخم هي أيضاً نسخة الغندجاني[39]. تشير كل الدلائل إذاً إلى أن دراسة المرآة المكافئية بكتيب مستقل، يعود إلى تلك الحقبة، وكان من عمل ابن المرخم.

العلمية، ومن المحتمل أنه عاش في النصف الثاني من القرن الخامس أو أوائل القرن السادس للهجرة (النصف الثاني من القرن الحادي عشر أو أوائل القرن الثاني عشر ميلادي).

[37] كان ابن المرخم قاضياً في بغداد (541–555 هـ) أي (1146–1160). وبحسب ما نقل عنه فإنه كان يهتم بالفلسفة والعلوم وكان طبيباً أيضاً. انظر: ابن الأثير، *الكامل* في التاريخ، ج. 11، ص. 358، وأحمد بن محمد بن خلكان، *وفيات الأعيان* وأنباء أبناء الزمان، ج. 3، ص. 124. يشهد الغندجاني، وكذلك ابن المرخم، بعد قرن ونصف، تواصل الاهتمام ليس فقط بالمناظر، بل أيضاً بأعمال ابن سهل.

[38] انظر ذيل *رسالة الحراقات*.

[39] انظر *رسالة الحراقات*، critical apparatus، ص. 89.

نصل الآن إلى وصف هاتين المخطوطتين بادئين بالمخطوطة T. تنتمي هذه المخطوطة إلى المجموعة رقم 876 في مكتبة ميللي بطهران. وهي بخط نسخي جميل وبيد واحدة، باستثناء ما زاده عليها علي المغربي في الذيل وعلى هامش 23^v (جملة منسوخة وضوحاً أثناء مقابلتها بالأصلية). توجد الزيادة الثانية تحت السطر في الصفحة الأولى 1^v، مكتوبة بيد ثالثة توضح هوية الملك الذي أهدي إليه الكتاب: "صمصمام الدولة"، لقبه "أبو كاليجار بن عضد الدولة". كل الزيادات الأخرى هي بيد الناسخ. وهكذا عندما قابل هذا الأخير النسخة مع الأصلية زاد على الهامش، كما ذكر في نهاية المخطوطة – 26^r – التعابير المحذوفة أثناء النسخ، محدداً بدقة مواضعها في النص. كما أضاف أثناء النسخ، لكن فوق بعض السطور، كلمات منسية. وعلى الصفحة 18^v، توجد مسودة شكل مخربش لإنشاء ميكانيكي للقطــع الزائــد، معاد بشكل صحيح على الصفحة 19^v؛ أما الصفحة 19^r فبيضاء، والأشكال بمجملها مرسومة بشكل صحيح.

تشكل المخطوطة D جزءاً من المجموعة 4871 من المكتبة الظاهرية في دمشق، وبخط نسخي. والصفحات الثلاث لهذه المخطوطة – 82^r–81^r – هي بالخط نفسه، مع زيادة واحدة، على الهامش بخط الناسخ للإشارة إلى حذف ولتبيان موضعه. استرعت هذه المجموعة الانتباه منذ زمن طويل وذكرت سابقاً أكثر من مرة[40]. نشير أخيراً إلى أن اللغة هي لغة مناظر استقر مصطلحها العلمي.

9.2.1 *البرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء*

إنه نص ابن سهل الوحيد الذي نملك مخطوطات عدة عنه في الوقت الحاضر. تشكل المخطوطة الأولى جزءاً من مجموعة المكتبة الظاهرية التي ذكرناها سابقاً، ورمزنا إليها بـــ D، والمنسوخة باليد نفسها؛ وتحتل الصفحة 83^v. ترجع هذه المخطوطة إذاً إلى السنوات الخمسين من القرن الثاني عشر، ونسبها بمثيلاتها من النسخ مثير للاهتمام بشكل خاص. فسابقتها المباشرة هي نسخة بخط ابن المرخم، نقلها بدوره عن نسخة لابن الهيثم ترجع، ولا بد، إلى الثلث الأول من القرن الحادي عشر، تقريباً.

تنتمي المخطوطة الثانية لهذا النص – ونرمز إليها بالحرف L – إلى مجموعة B 1030 في بطرسبورغ (لينينغراد) – المؤسسة الشرقية 89 – الورقات 132، 48، 49 (وليس 148، 149). نقرأ في الصفحة 1^r أنها قوبلت بالأصلية عند انتهاء النسخ في سنة 1349/750. وباستثناء هذا النص الوحيد لابن سهل، لا تحتوي هذه المجموعة إلا على أعمال لابن الهيثم. ونعرف من D أن ابن الهيثم قد نسخ هذا النص بنفسه. نقرأ، من جهة أخرى، على الصفحة الأخيرة من هذه المجموعة: "قوبل هذا الكتاب من أوله إلى أخره مقابلة تصحيح وإتقان بالأصل المنقول منه وهو بخط المصنف ولله الحمد" [150^r]. انطلاقاً من أقوال الناسخ إذاً، نسخت هذه المجموعة عن مخطوطة بخط ابن الهيثم، وكان

---

[40] محمد كرد علي، "مخطوط نادر"، *مجلة المجمع العلمي العربي*، العدد 20 (1945)، ص. 1–7، و 41–43؛

J. Ragep and E.S. Kennedy, 'A Description of Zāhiriyya (Damascus) Ms 4871', *Journal of the History of Arabic Science*, 5, 1-2 (1981), pp. 85-108.

قرأ هذان الآخران اسم الناسخ "العبدحاني" بدل "الغندجاني".

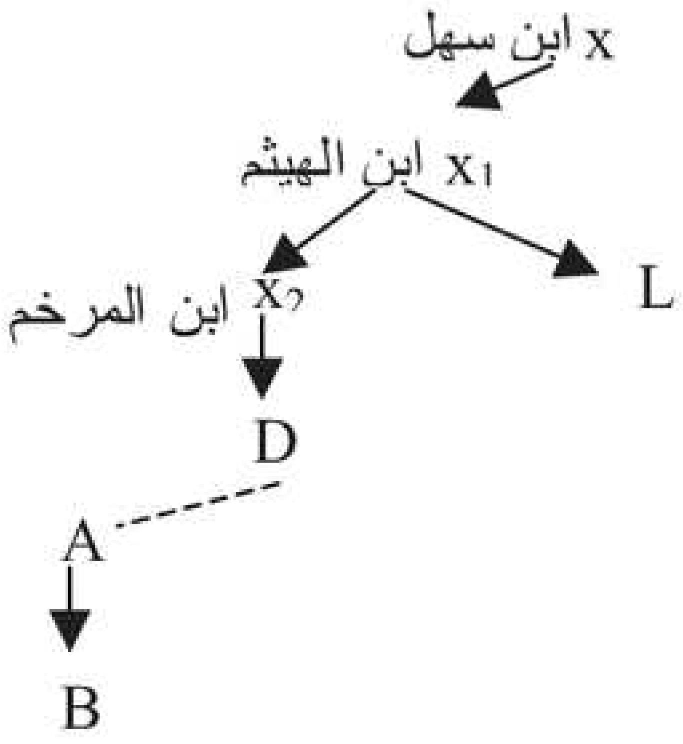
نص ابن سهل يشكل جزءاً منها. وعلى كل حال فإن لهذه المجموعة، التي كتبت بخط "نستعليق" رديء، ميزة علمية رفيعة، الأمر الذي يعزز، بطريقة غير مباشرة، تحدرها المخطوطي.

المخطوطة الثالثة – نرمز إليها بالحرف A – تنتمي إلى مجموعة ثيرستون 3 في مكتبة بودلين في اوكسفورد (Bodleian library) ورقة 93^r. إن ظهور نص ابن سهل في هذه المجموعة على إثر نص للغندجاني، أشرنا إليه سابقاً، أمر ذو مدلول، ولذا يحق لنا أن نتساءل عما إذا كان النص قد نقل عن نسخة لهذا الأخير، تحوي، في ما تحوي، نصه ونص ابن سهل كذلك. وتظهر دراسة النص بأن الناسخ حذف غالباً الكلمات "نقطة" و"مستقيم" ليبسط النسخة. إلى جانب هذه الميزة الخاصة بالنسخة يبين تفحص الحذوفات الأخرى والأخطاء نوعاً من العلاقة مع D، أو مع إحدى حفيداتها الضائعات حالياً. لقد نسخت في السنة 1276/675 وأيضاً بالخط "نستعليق".

نرمز إلى المخطوطة الرابعة بالحرف B وهي نسخة حديثة عن السابقة تنتمي مثلها إلى المكتبة نفسها: إلى المجموعة مارش 713 (Marsh 713)، في الورقات 176^r–176^v؛ وقد أهملناها في عملية إثبات النص.

نجد أخيراً عنوان النص مذكوراً في مجموعة جانال 1706 (Genel 1706)، في آخر الصفحة 258^v؛ لكن النص غير موجود فيها، خلافاً لما أكده بعض المفهرسين[41].

تكون شجرة التحدر كالتالي:



إثباتنا إذاً لنص هذا الكتيب ارتكز على A و D و L.

لهذا النص أهمية تاريخية فريدة فقد حرره ابن سهل عند درسه كتاب *المناظر* لبطلميوس. وكان ينوي، كما يدل عنوان الكتيب، عرض نتائج تمحيصه للمقالة الخامسة، على الأقل، من كتاب *المناظر* لبطلميوس، وأن يضم هذا الكتيب إليها. وهو أول نص يبين بصورة أكيدة أن كتاب بطلميوس هذا كان يُقرأ ويُستخدم. ومما لا شك فيه، أن هدف ابن سهل لم يكن التعقيب على كتاب *المناظر* لبطلميوس، بل تطبيق بعض قضاياه وخاصة ما جاء منها في المقالة الخامسة على

[41] F. Sezgin, Geschichte des Arabischen Schrifttums, vol. 1, p. 232.
ومن الغريب أن يظن هذا المفهرس أنه وجد هذا النص في هذه المخطوطة، ص. 258–259.

دراسة ظاهرات تهمه، كشفافية الفلك. ومن جهة أخرى، نشهد في هذا النص، كما في رسالته *الحراقات*، على الدور الحاسم الذي تلعبه لغة الانكسار ومفاهيمه. وكما أشرنا سابقاً فقد كانت المصطلحات العلمية قد استقرت إلا أن ترجمة كتاب *المناظر* لبطلميوس أتت دون ريب، خصوصاً في بحث الانكسار، باصطلاحات علمية جديدة، اعتمدها الرياضيون العرب، وفي المقام الأول منهم ابن سهل. أخيراً، تتبع أهمية كتيب ابن سهل هذا من صلاته اللاحقة بابن الهيثم، فهو موضوع الشرح في مقالته في الضوء ومن الغريب إذاً أن *البرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء* لم يدرس بعد ذلك مطلقاً.

هذه هي إذاً أعمال ابن سهل في المناظر وفي الرياضيات التي عثرنا عليها واستطعنا تحديد هويتها، حتى يومنا هذا. فأهميتها وأصالتها تثبتان الصورة التي كانت لابن سهل في ذلك العصر والمكانة الرياضية التي تتمتع بها. ربما نحصل لاحقاً على كتابات أخرى تمكننا من إيضاح أكبر لأعماله، وتسمح ببلورة المساهمة العلمية لواحد من ألمع ممثلي مدرسة بغداد.

2. القوهـــــي

1.2 الرياضي والصانع

أبو سهل ويجن (بيجان) بن رستم القوهي[42] هو أحد كبار الفلكيين والرياضيين في مدرسة بغداد وفي بلاط البويهيين على وجه الخصوص. يمكن تقدير أهمية ما عمله القوهي من خلال الرجوع إليه من قبل معاصريه من أمثال السجزي وابن سهل أو من قبل خلفائه من أمثال ابن الهيثم والبيروني. وكان القوهي يعرف في زمانه، على ما يرويه الأديب أبو الحيان التوحيدي، كعالم بارز لا يهتم بالدين ولا بما وراء الطبيعة[43]. لقد طور هذا الرياضي إلى أقصى الحدود المميزات المعرفية التي طبعت التقليد الذي أسسه في القرن السابق بنو موسى والتحويلات المتتابعة التي أدخلها عليه ثابت بن قرة وحفيده إبراهيم بن سنان. لقد عني القوهي بتطبيق الرياضيات في علم الفلك وفي علم السكون وبدراسة الآلات الرياضية، مثل البركار التام. كما ساهم بنشاط كبير في توسيع البحث في التحولات الهندسية: يكفينا في هذا المجال التذكير بكتاب صناعة *الأصطرلاب بالبرهان*[44]. لقد جمع القوهي، شأنه في ذلك شأن الرياضيين السائرين في اتجاهه، من أمثال ابن سهل، بين تقليدين في الهندسة اليونانية – تقليد أرشميدس وتقليد أبلونيوس – للوصول إلى

---

[42] ما يلي مأخوذ من

Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle, vol. 1, chap. V, pp. 835-838.

[43] يشير التوحيدي في كتابه *الإمتاع والمؤانسة*، تحقيق أ. أمين و أ. الزين، بعد أن أشار إلى الفيلسوف يحيى بن عدي، إلى مجموعة كاملة تتضمن القوهي والصاغاني والصوفي والسمري وآخرين ليقول: "وليس فيهم من يذكر كلمة في النفس والعقل والإله حتى كأنه محظور عليهم، أو قبيح عندهم (الجزء الأول ص. 38).

[44] انظر أعلاه ص. 11-12.

موطئ غير أغريقي في واقع الأمر: هو التحولات الهندسية. لقد استفاد القوهي أيضاً في تسلسله التاريخي من ثمار أعمال كبرى تم إنجازها منذ أيام بني موسى وثابت بن قرة.

من هو القوهي؟ ومن هم أساتذته؟ تكاد تكون المصادر التاريخية والفهرسية صامتة أمام هذين السؤالين وغيرهما من الأسئلة التي يمكن طرحها. فاسمه اسم فارسي أو على الأقل من منشأ فارسي. يذكر معاصره، المفهرس ابن النديم، أنه أتى من طبريستان، وهي منطقة جبلية تقع إلى جنوب بحر قزوين[45]. لا يضيف المفهرسون الآخرون – ماعدا القفطي كما سنرى – شيئاً جديداً إلى هذه المعلومات الضئيلة[46] ولم نتعرف عليه إلا لاحقاً عن طريق البيروني[47]. وهنا نلتقي بالقوهي في عام 969/359 وهو في صحبة نجوم عصره. ذلك أنه كان إلى جانب السجزي ونظيف بن يمن وغلام زحال (المعروف أيضاً باسم: أبو القاسم عبيد الله بن الحسن) لحضور الأرصاد الفلكية التي أمر بها والي فارس – عضد الدولة بالذات – والتي قام بها عبد الرحمن الصوفي، الشهير، من يوم الأربعاء الثاني من صفر إلى يوم الجمعة الرابع منه من عام 696/359.

ولذا فقد كان القوهي في حينه رياضياً مشهوراً تستشهد بأعماله. ولنذكر، كدليل إضافي، أن السجزي، كما تعلمنا المخطوطة 2457/2 من المكتبة الوطنية، كان قد قام بنسخ عمله في "*مراكز الدوائر المتماسة*"[48] الذي ألف قبل ذلك بزمن طويل. كما أنه كتب رسالة في *إنشاء المسبع الدائري*[49] في نفس الفترة تقريباً.

ونلتقي بالقوهي مرة ثانية، بعد تسعة عشر عاماً من هذا التاريخ، في بغداد في فترة حكم شرف الدولة، ابن عضد الدولة؛ فقد طلب منه رصد حركة الكواكب السبعة وانتقالها في أبراجها. وهذا ما دعا القوهي إلى بناء مرصد

---

[45] النديم، *كتاب الفهرست*، تحقيق ر. تجدد ص. 341–342. انظر أيضاً فيما يتعلق بحياة القوهي المقال "القوهي"
Y. Dold-Samplonius, in *Dictionary of Scientific Biography* (1975), vol. 11, pp. 239-241; C. Brockelmann, *Geschichte der arabischen Litteratur*, B. I (Leiden, 1937), pp. 339-340; F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, B. V (Leiden, 1974), pp. 315-321, and B. VI, pp. 218-219.

[46] يرسم لنا البيهقي (1105/499 – 1070/462) وهو من المفهرسين القدماء، صورة مدهشة للغاية للقوهي (*تاريخ حكماء الإسلام* تحقيق محمد كرد علي [دمشق، 1946]، ص. 88) فقد كان القوهي حسب روايته بهلواني إلى حد ما [كان في ابتداء أمره ممن يلعب في الأسواق بالقوارير، فأدركته عناية أزلية، فبرز في علم الحيل والأثقال والأكر المتحركة وكان في تلك الصنائع عديم المثيل ومشاراً إليه] لقد اعتمد الشهرزوري كالمعتاد هذه الصورة في كتابه وقام بنشرها (*تاريخ الحكماء، نزهة الأرواح وروضة الأفراح*، تحقيق عبد الكريم أبو شوريب [طرابلس، ليبيا 1988] ص. 313).

[47] البيروني، *كتاب تحديد نهايات الأماكن لتصحيح مسافات المساكن*، نص حققه ب. بولكاكوف P. Bulgakov وراجعه إمام إبراهيم أحمد
Revue de l'Institut des manuscrits arabes, 8, fasc. 1-2 (Novembre 1962), pp. 99-100. Cf. the English translation of this work by Jamil Ali, The Determination of the Coordinates of Positions for the Correction of Distances between Cities (Beirut, 1967), pp. 68-69.

[48] *مراكز الدوائر المتماسة*، الورقات 19–21.

[49] انظر
J. Dold-Samplonius, 'Die Konstruktion des regelmässigen Siebenecks', Janus, 50, 4 (1963), pp. 227-249.
انظر
R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle*, vol. 3, Appendix I text n° 7.

وإلى ابتكار جهاز فلكي. وحقق أرصاده بحضور شهود. وقد ذكرت مصادر عديدة جداً، وإن لم تكن كلها مستقلة عن بعضها، هذا الحدث. سنكتفي هنا بشهادة فلكي، البيروني، ومفهرس، القفطي، ومؤرخ، ابن تغري باردي. فقد كتب البيروني ما يلي:

> وأمر شرف الدولة أبا سهل القوهي بتحديد الرصد. فعمل ببغداد بيتاً، قراره قطعة كرة قطرها خمس وعشرون ذراعاً، ومركزها ثقبة في سماء البيت، يدخل منها شعاع الشمس ويرسم المدارات اليومية[50].

يستند القفطي في روايته لإثبات هذه الشهادة على وثيقتين حاسمتين في تاريخ العلوم: وهما صكان موثقان سجلت فيهما نتائج علمية – تقنية. وقد صاغهما قاضيان ووقع عليهما، إضافة للقاضيين، جميع الشهود الحاضرين، أي الفلكيين: أبو إسحاق إبراهيم بن هلال الصابئي، أبو سعد بن بولص النصراني، والقوهي نفسه، أبو الوفا البوزجاني، أبو حميد الصاغاني، أبو الحسن السامري وأبو الحسن المغربي. وقد بنى القوهي هذا المرصد في حدائق القصر الملكي وقام بسلسلتين من الأرصاد في شهر صفر 988/378[51] بواسطة جهازه وقد اعترف جميع الحاضرين بدقة وكمال هذه الأرصاد.

أما المصدر الثالث فهو المؤرخ ابن تغري باردي[52] الذي كتب في سرده لوقائع هذا العام 988/378 ما يلي: وهي سنة ثمان وسبعين وثلاثمئة فيها في المحرم أمر شرف الدولة بأن ترصد الكواكب السبعة في مسيرها وتنقلها في بروجها على مثال ما كان المأمون يفعل، وتولى ذلك ابن رستم القوهي، وكان له علم بالهيئة والهندسة، وبنى بيتا في دار المملكة بسبب ذلك في آخر البستان، وأقام الرصد لليلتين بقية من صفر.

وإن كان كاتب الحوليات ابن تغري باردي يستند، على ما يبدو، على القفطي هنا فإن الاكتشافات التي يتحدث عنها، مضافة إلى شهادة البيروني، تستند مباشرة إلى المصادر، ثم إنه كان في حوزته رسالة من نظيف بن يمن[53] يسرد فيها أحد نتائج الأرصاد.

فكل شيء يدل إذاً أن القوهي كان في هذه الفترة، أي في ثمانينيات القرن العاشر، أحد أبرز رياضيي بغداد وأنه كان منغمساً في وسط يجد فيه العلماء الذين أتينا على ذكرهم وعلماء آخرين مثل ابن سهل. ويمكننا أن نضيف بدون أن نجانب الصواب أن الأضواء كانت مسلطة عليه خلال عقدين على الأقل. ولنلاحظ أخيراً أن رفاقه الأولين

---

[50] البيروني، *تحديد نهايات الأماكن*. بولكاكوف، ص. 100–101. ترجمه جميل علي، The Determination of the Coordinates of Positions, p. 69.

[51] القفطي، *تاريخ الحكماء*، ed. Julius Lippert (Leipzig, 1903), pp. 351-354. وكالمعتاد فقد أخذ ابن العبري بعض أخبار القفطي باختصار؛ انظر *تاريخ مختصر الدول*، تحقيق A.P.O صالحاني الطبعة الأولى (بيروت، 1890. أعيد طبعه 1958) ص. 176. انظر فيما يخص وصف القفطي للمرصد الذي بناه القوهي Aydin Sayili, The Observatory in Islam and its Place in the General History of the Observatory, second edition (Ankara, 1988), pp. 112-117. لنلاحظ أننا نجد نفس التاريخ المعطى سابقا: 28 صفر 988/378. يأخذ البيروني نفس الشهادة بنفس الأعداد وبنفس الأسماء في *القانون المسعودي* Osmania Oriental Publications Bureau (Hyderabad, 1955), vol. 2, sixth book, pp. 642-643.

[52] ابن تغري باردي، *النجوم الزاهرة في ملوك مصر والقاهرة*، مقدمة وتعليق محمد حسين شمس الدين، الجزء 4 (بيروت، 1992) ص. 156. ومن الواضح أن ابن تغري باردي يكرر هنا نص القفطي وبنفس العبارات.

[53] يكتب البيروني في *تحديد نهايات الأماكن*، تحقيق بولكاكوف، ص. 101: "وكتباني نظيف بن يمن مخبراً، أن المنقلب الصيفي وجد في آخر الساعة الأولى التي صبيحتها يوم السبت الثامن والعشرين من صفر سنة ثمان وسبعين وثلاثمئة للهجرة".

أخذوا بالاختفاء ابتداءً من هذا التاريخ. فقد مات الصاغاني بعد سنة، في عام 989/379 وتبعه الصابئي بعد ست سنوات في عام 994/384 وقد قارب السبعين. ولكن من كان القوهي؟

لا نعلم شيئاً عن مصيره بعد عام 988/378، لكننا رأينا أنه كان مؤلفاً معترفاً به عشرين عاماً على الأقل قبل هذا التاريخ. وأكثر من ذلك فقد جاء في أخبار لم تؤخذ بعين الاعتبار حتى الآن أنه كان يمارس النشاط العلمي في خمسينيات القرن العاشر: فإذا صح هذا فهو من جيل زملائه، كالصابئي وقريب منهم في العمر، وانتهى عمله العلمي، إن لم تكن حياته، في أواخر القرن. يروي القفطي، ويتبعه في ذلك ابن أبي عصيبة، في المقال المخصص لسنان بن ثابت بن قرة – وهو أبو إبراهيم بن سنان وثابت بن سنان – أنه صحح تعابير أبي سهل القوهي "في جميع كتبه" بناء عل طلبه[54]. فقد توفي سنان بن ثابت، حسب رواية القفطي وابن أبي عصيبة، عام 943/331، ويحدد ابن أبي عصيبة شهر ويوم الوفاة: الجمعة فاتح ذي القعدة. ويدل الجمع "جميع" في الرواية على وجود كتب عديدة، ثلاثة على الأقل، ألفت قبل عام 943 مما يعني أنه ولد في أواخر العقد الأول أو أوائل العقد الثاني من القرن العاشر. هذا من جهة، إلا أن الخبر الأهم والأثمن هو إعلامنا، من جهة أخرى، أن القوهي كان على اتصال مباشر بابن ثابت بن قرة، أبي إبراهيم بن سنان، وأنه كان يعرفه معرفة جيدة. لابد من مقارنة رواية هذين المفهرسين القديمين مع مصادر أخرى للتأكد من صحتها. ولكنها، في انتظار ذلك، لا تحتوي على شيء مستبعد: فهي تضع القوهي في المكان الذي وضعه فيه التحليل الرياضي ضمن تقليد "سلالة" بني قرة.

2.2 أعمال القوهي العلمية

1.2.2 كتاب صنعة الأصطرلاب بالبرهان

وهو كتاب في غاية الأهمية في تاريخ الهندسة كما سنرى. فهو يتيح لنا، بالإضافة إلى شرح ابن سهل له، تفهم بدأ فرع جديد في الهندسة وهو الدراسة الهندسية للإسقاطات. لقد بقي هذا الكتاب، ومعه شرح ابن سهل له، مهملاً من قبل المؤرخين حتى عام 1980 حيث بدأنا مناقشته وإعطاء أولى نتائجنا[55] قبل تحقيقه وترجمته وتحليله رياضياً وتاريخياً ونشره في مطلع عام 1993 في كتابنا هذا[56].

---

[54] القفطي، *تاريخ الحكماء*، ص. 195، ابن أبي عصيبة، *عيون الأنباء في طبقات الأطباء*
éd. A. Müller, 3 vols. (Cairo / Königsberg, 1882-84), vol. 1, p. 324.

[55] لقد عرضت هذه النتائج في ندوة عقدت في باريز عام 1989 حضرها عدد كبير من المؤرخين مثل ج.ج. بيرغرين J. J. Berggren. فيما يخص ما فعله هذا الأخير بهذه النتائج، انظر ('Abū Sahl al-Kūhī's Treatise on the Construction of the Astrolabe with Proof : text, Translation and Commentary', Physics, XXXI, fasc. 1 (1994), pp. 141-252)
وانظر أيضاً المنشورات اللاحقة، انظر مقالتنا
'Ibn Sahl et al-Qūhī : Les projections. Addenda & Corrigenda', *Arabic Sciences and Philosophy*, 10, 1 (2000), pp. 79-100, especially p. 30, note 3 و R. Morelon's Essay-Review on *Géométrie et dioptrique, in*

لقد ناقشنا مخطوطة كتاب القوهي وتاريخها في سياق دراستنا لشرح ابن سهل له.

2.2.2 في البركار التام

أنهى ف. فوبك F. Woepcke قبيل وفاته تدوين المخطوطة Or. 161/1 في مكتبة ليدن (نرمز لها بـــ N) لرسالة القوهي هذه. ولم يسمح الوقت، مع الأسف، لهذا المؤرخ الكبير لمراجعة التدوين أو لتسجيل البدائل الممكنة إلا أنه استطاع ترجمة هذا التدوين، وقد نشر كلاهما بعد وفاته مع مقدمة لـــ ج. مول
J. Mohl ('Trois traités arabes sur la compas parfait', *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Impériale et autres bibliothèques*, vol. 22 [1874], pp. 1-175).

نقدم هنا الطبعة النقدية الأولى لهذا النص معتمدين على اثني عشرة مخطوطة وصلت إلينا مع ترجمة حاولنا قدر الإمكان جعلها دقيقة. إليكم المخطوطات ورموزها:

Aligarh, University Collection I، الورقات 40^v-52^r[57] نرمز لها بـــ B.

القاهرة، دار الكتب، رياضة 41/13 الورقات 95^v-104^v[58] نرمز لها بـــ C.

القاهرة، طلعت 239 الورقات 33^v- 67^v[59] نرمز لها بـــ O.

اسطنبول، توبقابي ساراي، أحمد III 3342، الورقات 94^r -102^v[60] نرمز لها بـــ A.

اسطنبول، راغب باشا، 569، الورقات 218^r - 235^r[61] نرمز لها بـــ D.

اسطنبول، توبتابي ساراي، أحمد III 3494[62]، الورقات 67^v -92^v نرمز لها بـــ E.

Physis, XXXVI, fasc. 1 (1999), pp. 281-284; Ph. Abgrall, 'La géométrie de l'astrolabe au X^e siècle', *Arabic Sciences and Philosophy*, 10, 1 (2000), pp. 7-77.

[56] انظر أيضاً مقالتنا
'A Pioneer in Anaclastics. Ibn Salh on Burning Mirros and Lenses', *Isis*, 81 (1990), pp. 464-491.

[57] تم النسخ يوم الثلاثاء 25 رمضان 1073 هـــ أي 4 مايو/أيار 1663. وتم تدوين كل المجموعة في 26 رجب 1075 أي 12 فبراير/شباط 1665. النسخة بالخط النسخي المعتنى به أبعاد الورقة 11,4 x 25,6 سم. انظر وصف هذه المجموعة في
Les Mathématiques infinitésimales du IX^e et XI^e siècle, vol. 3, p. 290.

[58] انظر الرقم 1.2.5 و *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au IX^e siècle*, vol. 1, pp. 839-840.

[59] نسخة هذه المجموعة هي بعد 1510/916 (وهو تاريخ نسخة مخطوطة جامعة اسطنبول n°314 التي هي النموذج الوحيد لها). الخط نسخي

[60] لقد تمت هذه النسخة في دمشق كما يشير ذيل النسخة، في شهر ذي القعدة 635 هـــ أي في يوليو / تموز 1238. الخط نسخي. انظر أيضاً *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3, p. 659.

[61] تحتوي هذه المجموعة على رسائل عديدة لابن الهيثم. أضيفت رسالة القوهي في البركار التام في الورقات 218^r -235^r ودونت على ورق مختلف وبيد أخرى وأرخت في يوم الثلاثاء 21 شعبان 649 هـــ أي في 7 نوفمبر/تشرين ثاني 1251. نقرأ في الذيل أنها نسخة شخصية لعبد الله القبجاقي محمي الملك المعز. الخط نسخي (الصفحة 12 x 16,1 سم والنص 9,5 x 14 سم).

اسطنبول، جامعة 314 A[63]، الورقات 106^r-119^r ، نرمز لها بـــ I.
ليدن 161/1Or (سابقاً رقم 1076)، الورقات 1-19[64]، نرمز لها بـــ N.
لينيغراد، المعهد الشرقي، A585، الورقات 1^v - 27^v [65]، نرمز لها بـــ L.
مشهد، آسطان قدس 12087، الورقات 59-80، نرمز لها بـــ S.
طهران، مجلس شورى 6/6092[66]، الورقات 1-29 ، نرمز لها بـــ M.
نيويورك، Yale Landberg 564، الورقات 14- 35 [67]، نرمز لها بـــ Y.
ليست كل هذه المخطوطات مستقلة عن بعضها بعضاً.

1° إن Y نسخة عن D وعن D وحدها. ونجد فيها كل النواقص وكل أخطاء التدوين الموجودة في D، ولا توجد في Y أي إضافة بالنسبة لـــ D. وهكذا فقد سقط من D بالنسبة إلى كل المخطوطات عنوان (ص. 729، 2) وثلاث كلمات نجدها ناقصة في Y أيضاً. إضافة على هذا فقد حذف من Y بالنسبة لـــ D سبعة وعشرون حذفا مؤلفاً من كلمة واحدة وخمسة حذوفات من كلمتين وحذف واحد من ثلاثة كلمات. ومن جهة أخرى ففي Y أربعة تصحيحات نحوية بدون أهمية قام بها الناسخ: فوضع في الصفحة 733 سطر 8 عمود بدلاً من عموداً وفي 737، 15 مشترك عوضاً عن مشتركة؛ وفي 739، 12 للمركز بدلاً عن المركز وأخيراً في الصفحة 733، 8 ب جـــ عوضاً عن ب هـــ ثم إن في D شطبتين لم يلحظهما ناسخ Y ودوّن التعبير الخاطئ: نقرأ في 729، 6 المستوي عوضاً عن المستوية وفي 735، 11 عموداً عوضاً عن عمود.

---

[62] دونت هذه المجموعة بخط واحد: وقد شكل الناسخ القسم الأول منها المحتوي خاصة على رسالة الطوسي في الأصطرلاب الخطي؛ ولكنه أهمل التشكيل في القسم الثاني المخصص للقوهي، الخط نسخي (الصفحة 12,5 x 21,8 سم والنص 6,2 x 14,2 سم).

[63] تم النسخ في 1510/916. والمجموعة بخط واحد وبالكتابة النسخية.

[64] قد يكون ناسخ هذه المجموعة درويش أحمد بناء على طلب كوليوس Golius حوالي القرن السابع عشر في حلب (انظر أعلاه ص. 11). الأشكال الهندسية بخط كوليوس. انظر
J. J. Witkam, *Jacobius Golius* (1596-1667) en *zijn handschriften*, Oosters Genootschap in Nederland, 10 (Leiden, 1980) and R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle*, vol. 3, p. 533.

[65] الكتابة نسخية (الصفحة 11,2 x 17 سم). الترقيم حديث العهد. ولم ترسم أغلب أشكال رسالة القوهي.

[66] الخط نسخي (الصفحة 15 x 22,5 سم). تاريخ التدوين ماثل في هامش الصفحة الأولى من رسالة القوهي: "الكلمة الصحيحة هي "فرجار" وليس "بركار" لأن بركار وهي ذات منشأ فارسي تكتب باركار في الفارسية وفرجار بالعربية لكني رأيت عدم تغيير الكلمة أو طريقة كتابتها لأنه لم يكن بين يدي إلا هذه المخطوطة "بخط أستاذ". كتبها أسد الله المنجم 1310". ونقرأ في الذيل (الورقة 29): "وبما أن المخطوطة نادرة ويكاد يستحيل العثور عليها فقد نسختها على أمل أن يوجد أمرؤ يستطيع إنشاء الفرجار". أنا عبد الله الفقير أسد الله المنجم. انتهيت من عملي ليلة السبت الخامس من ربيع الأول للعام 1310 من الهجرة في العاصمة طهران (أي 27 سبتمبر/أيلول 1892).

[67] حدث التدوين حسب وصف المجموعة قبل عام 1774 الخط نسخي (الصفحة 13 x 17,5 سم).

لا تدع الحذوفات والأخطاء مجالاً للشك في أن D هي نموذج Y الوحيد ولذا فإننا لم نأخذ Y بعين الاعتبار في هذه الطبعة النقدية للنص.

2° وعلى نفس النحو فإن O منسوخة عن I وعن I وحدها. فكل ما سقط في I سقط في O: ثلاث جمل تتألف كل منها من أكثر من ثلاث كلمات وسقط لكلمتين، وخمس سقوطات لكلمة واحدة. كما أن كل أخطاء I مستعادة في O وما كرر في I استعيد في O (الصفحات 731، 2؛ 733، 10؛ 785، 4) وكذا قلب واحد في 743، 4. أضف إلى ذلك أنه ينقص في O بمفردها جملة بأكثر من ثلاث كلمات وكذلك ثلاث كلمات منفصلة. ولذا فقد أهملنا O أيضاً.

3° يمكننا أن نبين أيضاً أن M هي نسخة عن S وعن S وحدها. لا يوجد أي سقط في S بالنسبة لـــ M في حين ينقص في M مقارنة بـــ S ثلاث جمل مؤلفة من أكثر من ثلاث كلمات وجملة بثلاث كلمات وثلاث كلمات. وتشترك المخطوطتان بخمس سقوطات كل واحدة منها تتجاوز الثلاث كلمات وبسقطتين بثلاث كلمات وأحد عشر سقطاً بكلمة واحدة. كما تشتركان بحوالي خمسين خطأ في النقل. وفي M خمسة عشر خطأ بالنسبة لـــ S. أما الأخطاء في S مقارنـــة بـــ M فهي غير ذات قيمة بمعنى أنه كان يمكن تصحيحها أثناء النسخ: صفحة 735، 14 ف/و؛ صفحة 757، 3 يلتقي/يلقى أو هـــ/ج. أضف إلى ذلك أن M أدمج في النص أو استعاد في الهوامش بعض التعابير الموجودة في هوامش S: الصفحات 733، 1؛ 741، 13؛ 747، 3؛ 11، 755، 13؛ 757، 1-12.

وهنا أيضاً لم نأخذ بـــ M في تحقيقنا للنص.

4° يمكننا تمييز زمرة جزئية من المخطوطات مؤلفة من A، C، E. تشير كل الدلائل أنه لم يكن في حوزة الناسخ الشهير مصطفى صدقي[68] الذي دون C إلا A كمصدر. واستطاع إدخال بعض التصحيحات الطفيفة على الجزء الأول. ولكن الأمر يختلف ابتداء من الورقة 98^ظ (ص. 759، 9) حيث حل محله ناسخ آخر: فقد ارتكب هذا الأخير أخطاء عديدة. ومع ذلك فإننا نحتفظ بـــ C لتحقيق النص ولتسهيل عمل من يريد البحث في تاريخ تقاليد النصوص.

يمكننا أن نبين أن العلاقة بين A وE شبيهة بالعلاقة بين A وC. نحتفظ به لتحقيق النص لنفس السبب الذي أشرنا إليه أعلاه.

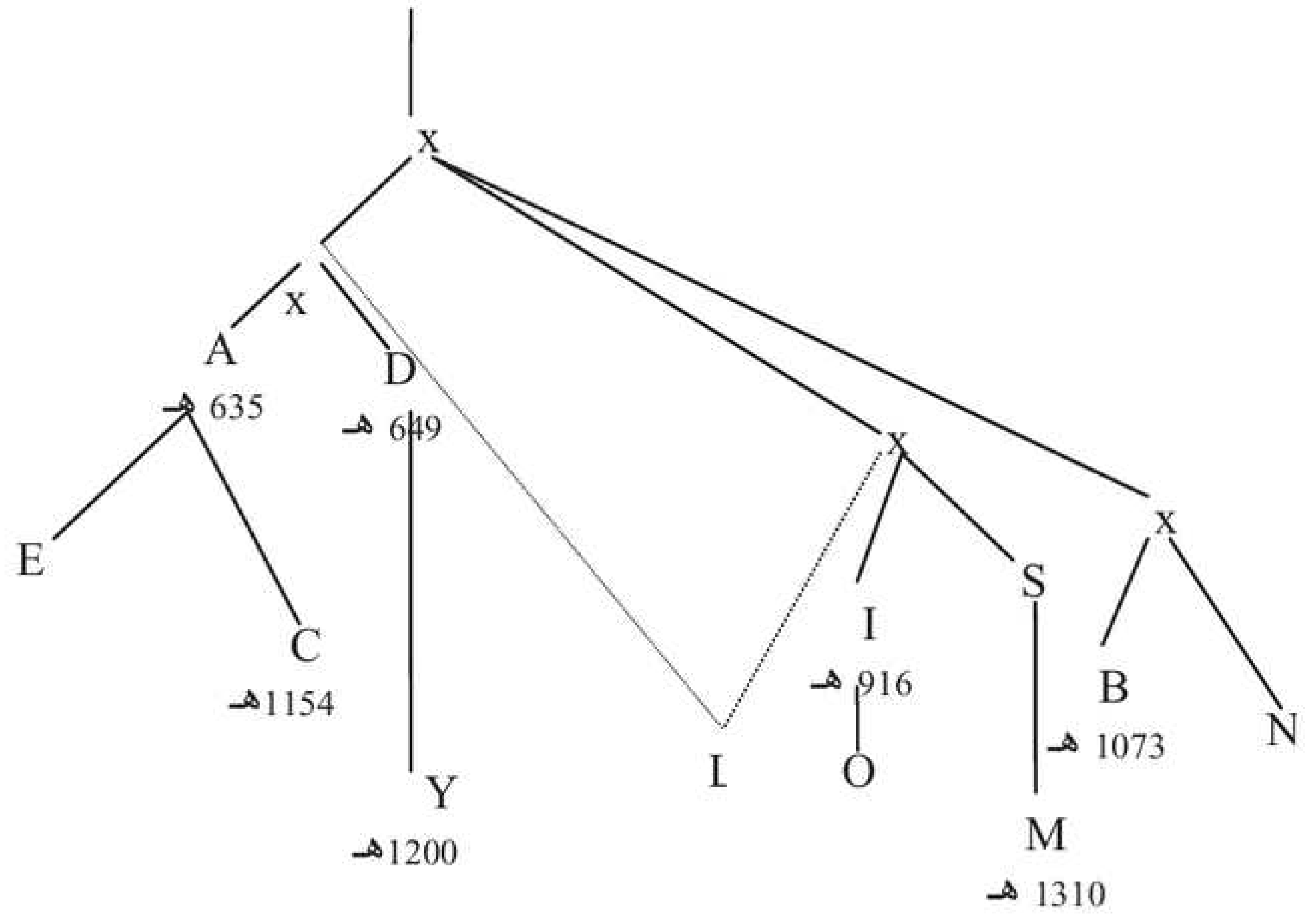
5° إن وضع L أكثر إشكالاً. فهو يشترك مع I وS بستة إسقاطات يتجاوز كل واحد منها ثلاث كلمات، وبإسقاطين من كلمة. ويشترك كذلك بنفس إسقاطات A، C، E من جهة، وبإسقاطات D من جهة أخرى. ناهيك عن الإسقاطات والأخطاء الخاصة به: عشر جمل من أكثر من ثلاث كلمات الواحدة منها وخمس جمل أخرى من كلمتين أو ثلاث كلمات وسبع وعشرون كلمة، هذا من حيث الإسقاطات، أما الأخطاء فتتجاوز التسعين. وهكذا فنحن أمام نص يقع بين عدة تقاليد في النسخ، منقول عن عدة مصادر.

6° وفيما يخص المخطوطة N التي دونها فوبك ففيها عشرون حذفاً لجمل بأكثر من ثلاث كلمات وثلاثة حذوف لكلمتين وثلاثة وأربعون حذفاً لكلمة واحدة. ولكنها تشترك مع المخطوطة B بعدة جمل لا توجد في المخطوطات الأخرى: 757، 14؛ 775، 15؛ 777، 3؛ 783، 8؛ 789، 5 وكلمة واحدة في 779، 14. ومما يكسي هذا الأمر

[68] أنظر أعلاه، ص. 10، الهامش 29.

أهمية خاصة هو أن إسقاطات B قليلة جداً: إسقاطان لكلمة واحدة (751، 14؛ 783، 6)؛ وإسقاط بكلمتين (771، 2) وإسقاط جملة واحدة (787، 7-8).

لقد أتاح لنا التفحص المنسق للإسقاطات والأخطاء والإضافات والذي لن نستعيده هنا، إثبات المخطط التالي:



3.2.2 مقدمة لتقسيم الخط المستقيم بقسمين على نسبة مفروضة لأرشميدس

إن الطبعة الأولى لهذا النص[69] الذي نعرضه هنا مبنية على مخطوطة ليدن Or. 168/8، الورقات $80^{v}-84^{v}$.

وقد حلل فوبك هذا النص؛ انظر "إضافات" *لكتابه*

Algèbre d'Omar Alkhayyāmī (Paris, 1851); reprinted in *Etudes sur les mathématiques arabo-islamiques* (Frankfurt am Main, 1986), vol. I, Appendix B, p. 96-102.

لنلاحظ في النهاية أن عنوان هذه الرسالة غير موجود في أي قائمة من قوائم أعمال القوهي التي وصفها المفهرسون القدماء. نعلم أن هذه القوائم غالباً ما تكون غير كاملة وأن غياب عنوان لا يعني عدم صحته. ولا يسعفنا القوهي نفسه لأنه لم يشر إلى هذه الرسالة في أي عمل من أعماله الأخرى. ولكن صمته هذا لا يدل على شيء خاصة أمام نهاية الرسالة "هذه المقدمة من استخراج الأستاذ أبي سهل الكوهي، رضي الله عنه، وأنا أعطيت نسختها للشيخ أبي

---

[69] انظر *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3, pp. 919-935.

الجود، رحمه الله". إنها شهادة قوية لا اعتراض عليها. لكننا لا نعلم في الوقت الحاضر شيئاً عن مراسل القوهي الذي أعطى نسختها إلى أبي الجود. كل ما نعلمه هو أن القوهي تراسل علمياً مع أقرانه، كتراسله الشهير مع الصابئي.

4.2.2 في عمل مخمس متساوي الأضلاع في مربع معلوم

وصلتنا هذه الرسالة في إنشاء المخمس متساوي الأضلاع وغير متساوي الزوايا بست مخطوطات أخذنا بخمس منها لتحقيق ونشر النص وهي مخطوطات نسخت بين منتصف القرن الثاني عشر والثلث الأخير من القرن الثامن عشر. وهي مؤلفة من زمرتين، كما سنبين، تنتميان إلى تقليدين في النصوص مختلفين. لنبدأ بوصف هذه المخطوطات.

1° – إن المخطوطة التي نرمز لها هنا بـ B جزء من مجموعة هامة في المكتبة الوطنية بباريز ذات الرقم 4821، الورقات 29^{v}-33^{v}. درسناها مفصلاً في موضع آخر[70] مذكرين فقط هنا أن ناسخها هو حسين بن محمد بن علي وأنها نسخت في 15 رمضان 544 هـ أي في 16 يناير/كانون الثاني 1150. في كل صفحة ثمانية عشر سطراً وفي كل سطر حوالي 11 كلمة. ونسخت بخط نسخي واضح ومعتنى به بل ويكاد يكون منمقاً، لا شطب أو إضافة فيها اللهم إلا بعض الكلمات التي سقطت سهواً أثناء التدوين. إنها على الأغلب من عمل وراق وليس من عمل رياضي، على ما في ذلك من محاسن ومساوئ.

2° تنتمي المخطوطة التي نرمز لها هنا بـ S إلى المجموعة 4832 أيا صوفيا، من المكتبة السليمانية في اسطنبول، الورقات 121^{v} -123^{v}. ويبدو أن رجلاً اسمه ابن حمامي اشترى هذه المجموعة في 19 رجب سنة 568 هـ أي في 6 مارس/آذار 1173. فتاريخ النسخة يعود إلى القرن السادس الهجري على أقل تقدير وقد يكون أقدم من ذلك. وحذفنا هذه النسخة ولخصنا تاريخها في موضع آخر[71]. وهي أيضاً بخط نسخي جميل.

3° المخطوطة A تنتمي إلى المجموعة 4830، أيا صوفيا، من المكتبة السليمانية في اسطنبول، الورقات 168^{v}-171^{r}. وهي نسخة دونت في دمشق في 1229/626[72]. وفيها كتابات هامشية بخط محمد سرتق المراغي في عام 1327. وخطها نسخي مقروء.

4° المخطوطة التي نرمز لها هنا بـ D هنا جزء من المجموعة 1751، الورقات 68^{v}-70^{r} من جامعة طهران ونسخت في 14 رمضان 1250 هـ، أي في 14 يناير/كانون الثاني 1835. تحتوي المجموعة على مقالة أخرى للقوهي (حل عمل المسبع المنتظم في الدائرة)[73]. وهي أيضاً بخط نسخي مقروء.

---

[70] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. 3, pp. 649-652.

[71] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. 1, pp. 147-149, 679.

[72] انظر الرقم 6.2.2.

[73] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. 4, p. 650.

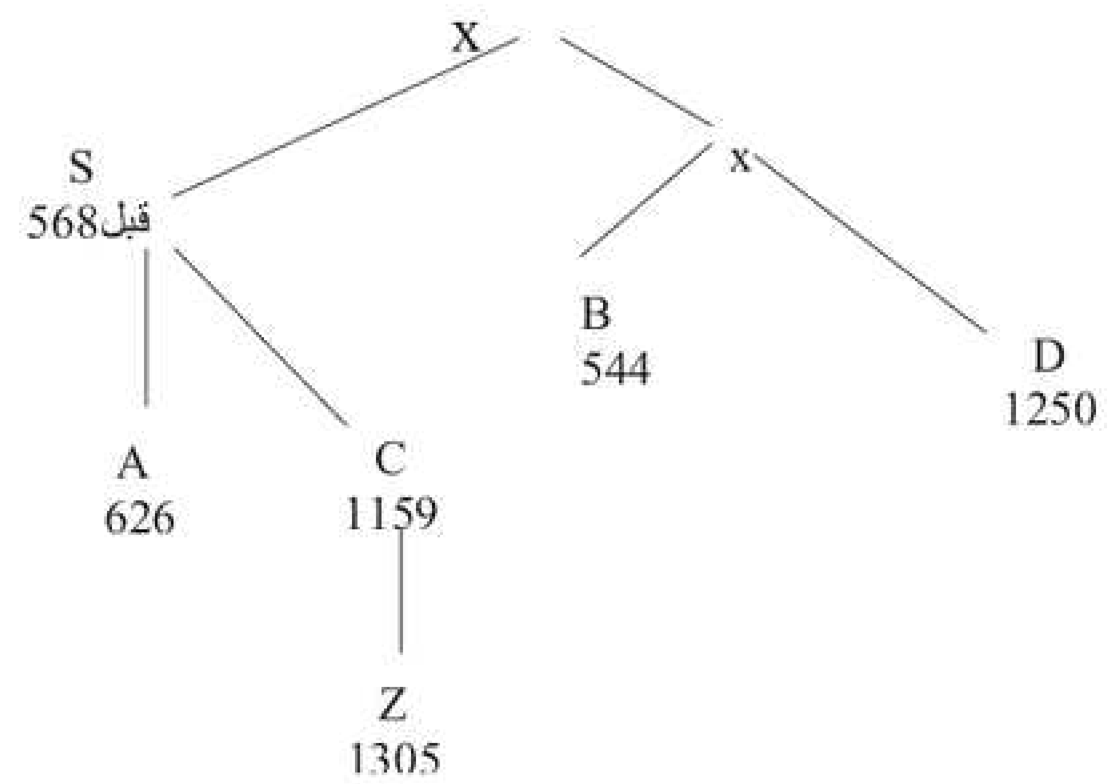
5° المخطوطة التي نرمز لها هنا بـــ C هي جزء من المجموعة رياضة 40 في دار الكتب، القاهرة، الورقات 203^v-205^v نسخت في شهر ذي القعدة 1159 هـــ أي في ديسمبر/كانون الأول 1746، بخط نسخي واضح. وقد وصفنا هذه المجموعة في موضع آخر[74].

6° إن المخطوطة السادسة التي نرمز لها هنا بـــ Z جزء من المجموعة 5648 من المكتبة الظاهرية في دمشق، الورقات 188^v-191^v. بينا أنها نسخة حديثة لمخطوطة دار الكتب آنفة الذكر (أي لـــ C)[75] في 1888/1305. لم نأخذها بعين الاعتبار لتحقيق النص.

يتبين من تفحص الإسقاطات والإضافات والعوارض الأخرى للمخطوطات الخمس ومقارنتها ببعضها زوجاً زوجاً أنها مؤلفة من زمرتين $F_1 = (B, D)$ و $F_2 = (A, C, S)$. لم نكتف بغياب الفقرة الأولى الموجودة في F_1 عن F_2 للقيام بهذا التقسيم. فهناك أيضاً سقوط أربعة تعابير من أكثر من كلمتين وسقوط ست كلمات في F_2. ومن جهة أخرى نفتقد في F_1 خمسة تعابير من أكثر من كلمتين، وكلمة واحدة، غير آخذين في عين الاعتبار هنا نواقص كل مخطوطة على حدة.

وعندما ننظر إلى كل زمرة لوحدها نجد في D ثلاث قفزات بين جمل كاملة وسقطين لكلمة. بينما تضيف D كلمة إلى السطر الأول من المدخل. نقرأ "شكل آخر أحسن" ولا نجد "آخر" في B. أما ما ينقص في B عن D فحرفان هندسيان لا غير. وعلى نقيض ذلك نجد في B جملة كاملة لا نجدها في أي من المخطوطات الأخرى بما فيها D وهي الجملة التالية "ولكن مربع $\overline{\text{د ا}}$، أعني الذي ينتهي إلى القطع، ثلاثة أمثال سطح $\overline{\text{ط د}}$ في $\overline{\text{د ف}}$. (الصفحة 543 السطر 3–4).

وعندما نأخذ بعين الاعتبار النواقص الخاصة بـــ A، S، C فإننا نصل إلى المخطط التالي:



من حسن الحظ أن نساخ نص القوهي هذا بذلوا عناية كبرى في نسخه كما قلنا، إذ يقدم لنا ناسخ B نصاً بخط نسخي منمق. لقد قام ج. ب. هوكنديغ[76] بنشر هذه الصفحات القليلة للقوهي. وقد لا تكون التحسينات التي أدخلناها، حوالي

[74] Ibid., vol. 1, p. 148.

[75] Ibid., vol. 1, p. 148.

العشرين، مبرراً كافياً لإعادة النشر لولا رغبتنا في جمع كل إسهامات القوهي المكرسة للإنشاءات الهندسية بواسطة القطوع المخروطية في هذا الكتاب، ماعدا أعماله في المسبع المنتظم التي نشرناها في موضع آخر[77]. وعليه فإننا نقدم للقارئ هــذه الطبعة الجديدة المعتمدة على كل المخطوطات المعتمدة في الطبعة السابقة مضاف إليها شهادة D الإضافية[78].

5.2.2 في استخراج قسمة الزاوية المعلومة بثلاثة أقسام متساوية

وصلتنا هذه الرسالة بمخطوطة واحدة موجودة في مجموعة نبي خان وعُبيدور – رحمان خان من لاهور نرمز لها بـــ L. وقد نسخت في المدرسة النظامية في الموصل وبغداد بين عامي 554 و 557 للهجرة أي بين 1159 و 1162 م. يقع نص القوهي في الورقات 162^{v}-165^{v} ونقرأ في الذيل "وفرغ من تعليقها في بغداد بمدينة السلام،

---

[76] 'Al-Kūhī's Construction of an Equilateral Pentagon in a Given Square', *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamichen Wissenschaften*, 1 (1984), pp. 100-144.

[77] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. 3, chap. III and Appendix I.

[78] هذه هي قائمة التحسينات التي نعتقد أننا قمنا بها:

الصفحات	الطبعة الحديثة	الطبعة القديمة	الصفحات
535، 2	عمود من نقطة هـــ على خط د جـــ فهو	عمود من نقطة هـــ فهو	120، 2
535، 6	وذلك ما أردنا أن نبين في (A, S, C)، حسب استعمال المؤلف فيما يلي		120، 5
535، 4	ويكون خط هـــ ك موازياً	وخط هـــ ك مواز	122، 3–4
537، 2–3	ويكون خط هـــ ك موازياً	و هـــ ك مواز	122، 6
537، 12	لأن كل واحدة	لأن كل واحد	124، 8
537، 13	وهو قطع ن ك	وهو ن ك	124، 9
539، 20	القطعين الزائدين	قطعين زائدين	128، 1–2
541، 1	تركيب ذلك أن	تركيب ذلك إن	128، 4
541، 14	فمربعا ك ل ا ب جميعاً مساويان	فمربعا ك ل ا ب جميعاً مساو	130، 10
543، 1	يكون خط د ف كما في (A, S, C)	فيكون هو ; ويكون هو : في B لم تذكر في التحقيق النقدي	130، 14
543، 5	نقطة ا بعينها	نقطة ا بعينه	132، 1–2
545، 3	ومربع ص ف مساو لمربع ف د لأن خطي ص ف ف د متساويان	ومربع ص ف مساو لمربع ف د لأنها متساويان	132، 12–13
545، 11–12	فنجعل كل ... وخط هـــ ط موازياً	فنجعل كل ... وخط هـــ ط مواز	134، 7–8
545، 15	برهانه أن	برهانه إن	134، 10 et passim
545، 16	فكل	وكل	134، 11
547، 4	خطين وهما هـــ ط ط ك إما أن نختار: وهما، كما في (A, S, C) أو أن نصحح: ليكونا	خطين وليكن هـــ ط ط ك	136، 4
547، 11	وبهذا التدبير يكون خط هـــ م مساوياً	وبهذا التدبير خط هـــ م مساو	136، 11
547، 11–12	فخطوط ... متساوية	وكل واحد من خطوط ... متساوية	136، 12

حماها الله، في المدرسة النظامية، بتاريخ الثالث عشر من جمادى الآخرة لسنة ست وخمسين وخمس مائة هجرية". ويأتي أيضاً في الذيل أنها "قوبلت بالأصل المنقول عنه" لا يحتوي النص على إضافة أو تشطيب. ولم يشر الناسخ إلى اسمه هنا ولكنه يذكر به في نهاية رسالات أخرى من مجموعته ولكن يبقى مع الأسف عير مقروء.

نشر هذا النص للمرة الأولى من قبل آ. س. سيدان "تثليث الزاوية في العصور الإسلامية" *مجلة معهد المخطوطات العربية* 28، 1 (1984) ص. 118–123 المرموز لها بـــ S. قام هذا العالم بنقل المخطوطة بدون تعليق نقدي يسجل فيه النواقص والأخطاء ولذا فقد حققنا هذه الرسالة حسب الأصول وترجمناها للمرة الأولى.

6.2.2 في قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية

وصلتنا هذه الرسالة بمخطوطتين معروفتين كلتاهما. الأولى في المكتبة السليمانية في اسطنبول، مجموعة آيا صوفيا، رقم 4830 الورقات 182^{r-v} نقلت في دمشق في شهر رمضان 626 هـــ أي أغسطس/آب 1229، وخُطت بنسخي واضح، وفيها أيضاً تعليقات في الهامش، بخط محمد سرتق المراغي، مؤرخة بـــ 17 ديسمبر/كانون الأول 1327 وكتبت في المدرسة النظامية في النقاشات[79]. نرمز لهذه المخطوطة بـــ A.

المخطوطة الثانية، وهي في دار الكتب مجموعة رياضة 40، الورقة 167^{v} كتبت بخط الناسخ الشهير مصطفى صدقي ونرمز لها بـــ C.

ينقص في C عن A مقطع المدخل – حوالي سبعة اسطر – وكذا العنوان. كما أن فيها إسقاطين لجملتين بينما لا ينقص في A عن C إلا كلمة واحدة. كل شيء يدل على نقل هاتين المخطوطتين من مصدر واحد.

7.2.2 في استخراج خطين بين خطين حتى تتوالى الأربعة على نسبة وقسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية

لقد حققنا هذا النص استناداً على ثلاث مخطوطات:

الأولى من المجموعة 4832، الورقة 147^{v} من المكتبة السليمانية، آيا صوفيا، اسطنبول (رمزنا لها بـــ A). لقد ناقشنا تاريخ هذه المجموعة في عدة مناسبات[80].

والثانية (ورمزنا لها بـــ C) من المجموعة رياضة 40، الورقات 226^{v}-227^{r} من دار الكتب في القاهرة. تم نقلها في مساء الثلاثاء الثاني العشرين من ذي القعدة 1159 هـــ أي 13 ديسمبر/كانون الأول 1746.

وقد ناقشنا تاريخ هذه المجموعة في مناسبات عدة.

تسمح لنا مقارنة هاتين المخطوطتين بالقول إن مخطوطة القاهرة منقولة عن مخطوطة اسطنبول أو عن أصل هذه المخطوطة. وهكذا فكل إسقاطات مخطوطة القاهرة بالنسبة لمخطوطة اسطنبول مكونة من جمل هامة بينما لا تتعلق

---

[79] انظر R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. 1, p. 841.

[80] Ibid., vol. 1, pp. 147-149, 679.

إسقاطات مخطوطة اسطنبول بالنسبة لنظيرتها القاهرية بمحتويات الرسالة. أما الأخطاء الموجودة في مخطوطة اسطنبول فهي موجودة أيضاً في القاهرية.

إن المخطوطة الثالثة (ونرمز لها بـ B) تنتمي إلى المجموعة 767، من مكتبة المكتب الهندي (Indian Office) في لندن، الورقات 191^{r}-189^{v} (folio 190 is a fold out page; on fol. 190^{r} there is a small diagram which can only be seen if pne unfolds the page; fol. 190^{v} is completely blank)[81] لا تضم هذه المخطوطة إلا المقطع الأول من الرسالة الذي يحدد فيه القوهي خطين بين خطين حتى تتوالى الأربعة على نسبة. نقلت هذه المخطوطة في حيدر أباد في الهند في القرن التاسع عشر بخط ناسخ رسالة شرف الدين الطوسي في *المعادلات* وشرح نصر الدين الطوسي *لمخروطات* أبلونيوس. أثبتنا فيما يخص نصر الدين الطوسي أن النسخ نقل عن نسخة تعود إلى 696هـ/1297[82]. وأياً كان الحال فالمخطوطة تنتمي إلى فئة مختلفة عن الفئة التي تنتمي إليها المخطوطتان الأخرتان – أيا صوفيا ودار الكتب. وهكذا فبينما ترجع المخطوطة B إلى II.8 من *المخروطات* نقرأ في المخطوطتين الأخيرتين II.6. كما أن في B إسقاطات خاصة بها. توجد مخطوطة أخرى لهذا المقطع في طهران ميللي ملك 3080، الورقة 67^{r-v} (مؤرخة عام 1850) وهي نسخة عن المخطوطة الأخيرة B أو أنها أخذت عن النموذج الذي أخذت B عنه.

نشر هذا النص بالاستناد إلى مخطوطة اسطنبول وحدها، وترجم وشرح من قبل آيدين سايئلي Aydin Sayili في *Bulleten Journal of the Turkish Historical Society*, 26 (1962), pp. 693-700. انظر أيضاً

'The Trisection of the Angle by Abū Sahl Wayjan ibn Rustam al-Kūhī (fl. 970-988)', (Ithaca, 26 III 1962).

8.2.2 في تثليث الزاوية وعمل المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة

وصلتنا رسالة القوهي هذه في نسخة لمؤلف مجهول أخذ على عاتقه حذف برهان المقدمة الأولى بحجة أنه بُرهن عليها في مقالات المخروطات وعلى شكل مخطوطة واحدة في المكتبة البودلانية[83] (Bodleian Library, Thurston collection n° 3, fol. 130^{v}-131^{r}) وهي بالخط النسخي وفي حالة سيئة وتصعب قراءتها. توجد نسخة أخرى حديثة نسبياً لنفس المخطوطة (Bodleian Library, Marsh collection n°720, fol. 264^{v}). وهي نسخة مليئة بالأخطاء قد تضلل القارئ عوضاً عن مساعدته.

---

[81] أشكر الدكتور كولين ف. بيكر رئيس مجموعات الشرقين الأدني والأوسط في المكتبة البريطانية (British Library) لتحققه من هذه النقطة.

[82] R. Rashed, *Sharaf al-Din Tūsī, Œuvres mathématiques*, vol. 1, p. XLIV.

[83] انظر الرقم 9.2.1.

9.2.2 في معرفة مقدار البعد بين مركز الأرض ومكان الكوكب المنقض في الليل

توجد نسخة واحدة لرسالة القوهي هذه رقم 4821 في المكتبة الوطنية في باريز، الورقات 34^{r}-36^{v}. نقرأ في الذيل وبخط مختلف بالفارسية أنه تم النسخ في 15 رمضان 544 في أسد والله أعلم[84]. لا نعلم شيئاً عن نشر هذا النص قبل نشرنا له في *Arabic Sciences and Philosophy* [85]. كما لا نعلم إن كان قد ترجم أو درس قبل هذا النشر.

10.2.2 في معرفة مقدار ما يرى من السماء والبحر من رأس شيء مرتفع

بقيت هذه الرسالة حية في مخطوطتين. الأولى من المجموعة 5412 رياضة 184، الورقات 13–22 في مكتبة أسطان قدس في مشهد – إيران. وهي بخط نسخي متقن، تم نقلها كما جاء في الذيل، في شهر ربيع الأول 672 هـــ أي في أكتوبر/تشرين أول– نوفمبر/تشرين ثاني 1273. تحتوي كل ورقة على 16 سطراً وفي كل سطر 9–10 كلمات. الإضافات الوحيدة هي بخط الناسخ عند مقارنته لنسخته بالأصل المنسوخ عنه، لا شطب فيها. نرمز لهذه المخطوطة بـــ B.

المخطوطة الثانية لهذا النص هي في آليغار – الهند وهي جزء من مجموعة حبيب غانج رقم 44/6، الورقات 1^{v}-5^{v}. لم يسجل الناسخ في الذيل تاريخ أو مكان إتمام النسخ. الخط نستعليق. تحتوي الورقة على 17 سطراً وفي كل سطر 12-13 كلمة. كتب قارئ يدعى أحمد بن سليمان بعض الحواشي، في الهامش أحياناً وبين السطور أحياناً أخرى. وهي متميزة تماماً عن نص القوهي. تدل أغلب الحواشي على قضايا لإقليدس أو أرشميدس رجع إليها القوهي ضمناً. تعطي حاشية في هامش الصفحة الأولى معنى كلمة وأخرى في هامش الورقة 3^{v} تستشهد بحساب معزو لابن الهيثم. نرمز لهذه المخطوطة بـــ A.

لا تدع مقارنة المخطوطتين A و B مجالا للشك في استقلالهما الواحدة عن الأخرى. إذ ينقص في B أربع كلمات وجملة موجودة كلها في A. وعلى العكس يسقط من A ست جمل وست كلمات نقرأها في B. كما أن بعض الجمل المشتركة بينهما مكتوبة بشكل مختلف في A وB.

لقد سمحت لنا هاتان المخطوطتان الوحيدتان لهذه الرسالة بإثبات الطبعة الأولى؛ وبإعطاء الترجمة والدراسة الأوليتين لها[86].

لنذكر القارئ بوجود نسخة مختصرة لهذا النص مشتقة على أغلب الظن من B. هل كان لدى الناسخ النسخة B أو مصدرها أو سلف له؟ يستحيل البت في هذا الشأن. وصلتنا هذه النسخة المختصرة في مخطوطة أيا صوفيا رقم

---

[84] انظر الرقم 4.2.2 و *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3, pp. 648-657.

[85] 'Al-Qūhī : From Meteorology to Astronomy', *Arabic Sciences and Philosophy*, 11, 2 (2001), pp. 157-204.

[86] نفس المصدر.

4832، الورقات 193^v - 194^r [87]. إلا أن نص القوهي خُط بيد مختلفة عن تلك التي نسخت مجموعة نصوص الكندي التي حُشر فيها هذا النص. وهناك نص آخر بيد ثالثة: *في تربيع الدائرة* لابن الهيثم يسبق مباشرة صفحات القوهي (193^r-191^v). ويبدو أن الكتابة قديمة قدم رسائل المجموعة الأخرى. نرمز لهذه المخطوطة المختصرة بـــ C.

تنتمي المخطوطة الثانية للنسخة المختصرة إلى مجموعة أيا صوفيا أيضاً رقم 2587، الورقة 120^v. وهي صفحة مكتوبة بالنسخي. وما من إشارة إلى تاريخ أو مكان النسخ أو إلى اسم الناسخ. يشير هذا الأخير بين الأسطر وبشكل مقتضب إلى أرقام قضايا *الأصول* وكذا إلى رقم قضية أرشميدس المذكورة. هل كانت النسخة A تحت تصرف هذا الناسخ برمتها؟ لا نستطيع العلم بذلك. نرمز لهذه المخطوطة بـــ D.

تكشف المقارنة بين C و D وجود خطأين في C – و، عوضاً عن أو؛ ومعلوم، عوضاً عن معلومة – وهما خطآن يمكن لأي ناسخ محترف تصحيحهما فوراً. يتطابق النصان إلا أنه قد يكون C، نظراً لقدمه الواضح، مصدر D.

وعلى أي حالة فقد أعطينا الطبعة الأولى للنسخة المختصرة بدون أن نترجمها لعدم جدوى الترجمة في سياق عملنا هنا.

11.2.2 في الزمان المنتهي حركة غير متناهية

ثُبت هذا النص بالاعتماد على مخطوطة وحيدة من مجموعة أيا صوفيا 4830، الورقات 180^v-181^r [88]. نشر آيدين سائيلي هذا النص مع ترجمته إلى الإنكليزية والتركية
'Al-Qūhī on the possibility of infinite motion in finte time', *Belleten*, 21 (1957), pp. 489-495.

3. أسلاف القوهي: في تثليث الزاوية

لقد قمنا كي نستطيع وضع عمل القوهي ضمن إطار التقليد الذي ينتمي إليه، بنشر إسهام ما وصلنا من أسلافه في مسألة الوسطين وفي مسألة تثليث الزاوية.

1.3 أحمد بن شاكر: في تثليث الزاوية المستقيمة الخطين

درس س. شوي C. Schoy[89] هذا النص في ثلاثينيات القـــرن الماضي وطبع النص عدة مرات[90]. إلا أن أحداً لم يلحظ أن هذا النص ليس لأحمد الشهير، الأخ الثاني من إخوة بني موسى الثلاثة، وإنما نسخة مجهولة الاسم

---

[87] انظر الرقم 4.2.2.

[88] انظر الرقمين 4.2.2 و 6.2.2.

[89] C. Schoy, 'Graeco-arabische Studien nach mathematischen Handschriften der Vicekoniglichen Bibliothek zu Kairo', *Isis*, 81 (1927), pp. 21-40.

لنص منسوب له. إنها الأثر الوحيد لرسالة أحمد وموجودة بمخطوطة واحدة في أكسفورد Bodleian Library, Thurston n° 3, fols. 131^v-132^r, كنا قد ناقشناها[91].

2.3 ثابت بن قرة

2.1.3 في عمل الوسطين وقسمة زاوية معلومة بثلاثة أقسام متساوية

لا توجد هذه الرسالة إلا بمخطوطة واحدة من المجموعة 5412 في مشهد، إيران، الورقات 23-27. نقلت بنسخ متقن في ربيع الأول 627 هـ أي في سبتمبر/أيلول 1273 (انظر الرقم 10.2.2).

2.2.3 قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية

إنها نسخة أخرى عن الرسالة السابقة لثابت تثير بعض المشاكل التي سنناقشها لاحقاً. وهي من المجموعة 2457 للمكتبة الوطنية في باريز، الورقات 192^v-195^r[92]. نسخت هذه المجموعة، التي نروي قصتها في موضع آخر بخط الرياضي السجزي، مع بعض الاستثناءات. ويبدو أن نص ثابت بن قرة هذا من ضمن تلك الاستثناءات وهو مكتوب بخط نسخي مقروء.

3.3 أبو جعفر محمد بن الحسين الخازن

1.3.3 قسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية واستخراج خطين بين خطين تتوالى متناسبة

ليست هذه رسالة منفصلة وإنما هي فصل من كتاب للخازن عنوانه "ما يحتاج إليه من رسم القطوع المخروطية ومقدمات للموسطين وقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام". ويتابع في مقدمة كتابه: "ما يحتاج إليه من رسم القطوع المخروطية ومقدمات للموسطين وقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام. وهذا القدر من علم المخروطات يكتفي به في معرفة ما ترسمه رؤوس أظلال المقاييس في كل يوم من أيام السنة، ويُنتفع به في استخراج سمت القبلة بطريق قطوع المخروطات، ويُحتاج إلى قسمة الزاوية بثلاثة أقسام لمعرفة وتَرسُبْع الدائرة بالحقيقة. وهذا المختصر مستخرج من كتاب المخروطات بإصلاح أبي جعفر محمد بن الحسين الخازن".

يوجد كتاب الخازن هذا في مخطوطتين أولاهما في أكسفورد، Bodleian Library, Hunt 237، نرمز لها بـــ H. ويشغل الفصل فيها، الورقات 102^v-104^v، ودون بالنسخي. ترك الناسخ فراغات للأشكال ولكنه لم يرسمها.

---

[90] J.-P. Hogendijk, 'How Trisections of the Angle were Transmitted from Greek to Islamic Geometry', *Historia Mathematica*, 8 (1981), pp. 417-438, at pp. 433-436 ; W. Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geomtry* (Boston/Basel/Berlin, 1989), pp. 267-270, pp. 326-328.

[91] انظر الرقم 9.2.1 و 8.2.2 و ص. 356.

[92] انظر الرقم 6.2.1 و ص. 360.

أما المخطوطة الثانية، ونرمز لها بـــ A، فهي في المكتبة الوطنية الجزائرية، رقم 1446 الورقات 153^r-150^v. نقلها الناسخ بالنسخي عن النموذج الذي كان بين يديه، وترك هو أيضاً فراغات للأشكال ولم يقم برسمها. أخطأ في نقل اسم المؤلف فدون الحارث عوضاً عن الخازن.

2.3.3 في استخراج خطين بين خطين تتوالى متناسبة من طريق الهندسة الثابتة

لا توجد سوى مخطوطة واحدة لهذا النص موجودة في المكتبة الوطنية في باريز، المجموعة 2457، الورقات 199^r-198^v.[93]

استرعى هذا النص أنظار المؤرخين منذ عام 1898 وشرح في *Bibliotheca mathematica*. ظهرت بعض النصوص، التي ننشرها ونترجمها هنا، في نشرات سابقة غير محققة[94] ومغلوطة[95].

4. السجزي

أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي مهندس فارسي من النصف الثاني للقرن العاشر. امتد نشاطه العلمي من عام 963 إلى 998 على وجه التقريب. سنعود بالتفصيل في موضع آخر لحياته ولأعماله[96] مكتفين هنا بالتذكير أنه عاش في الوسط الرياضي الذي عاش فيه من كانوا أكبر منه سناً، ابن سهل والقوهي اللذين يهمناننا في هذا الكتاب. فقد كتب إلى ابن سهل عندما عمل المسبع المنتظم وتابع ما عمله القوهي عندما كتب رسالته في الأصطرلاب، وهي رسالة كان يعتقد أنها مفقودة إلى أن شاء حسن الحظ أن تعترض طريقنا.

1.4 رسالة في عمل البركار التام

نشرت هذه الرسالة بالاعتماد على مخطوطة واحدة موجودة في مكتبة رامبور في الهند رقم 3698، الورقات 103^v–104^v. والرسالة مدرجة في قائمة أعمال السجزي التي تعرضها مخطوطة دبلن، شيستر بيتي رقم 3652[97]، الورقة 2^r، تحت عنوان في *عمل البركار المخروطي بطريق صناعي*. ويرجع السجزي نفسه إلى هذه الرسالة في عمله "رسالة في *وصف القطوع المخروطية*" تحت عنوان *في عمل البركار المخروطي* (ليدن MS Or. 168/1 fol. 5^r) نقلت مخطوطة لامبور بالنستعليق بيد ناسخ لم يفهم النص، وهو ما يبدو بجلاء. ثم إنه لا وجود للأشكال.

[93] انظر الرقم 6.2.1 سيدان، "تثليث الزاوية في العصور الإسلامية"، ص. 112–110.

[94] المصدر السابق.

[95] Knorr, Textual *Studies in Ancient and Medieval Geometry*.

[96] R. Rashed and P. Crozet, *L'Œuvre mathématique d'al-Sijzī*, vol. II.

[97] انظر الرقم 3.1.2.

2.4 في خواص القبة الزائدة والمكافئة

وصلنا كتاب السجزي هذا في مخطوطتين؛ إحداهما بيد المؤلف، وهي في المجموعة 2457 للمكتبة الوطنية في باريز، الورقات 137^v-139^r، نرمز لها هنا بـــ B. يضع السجزي هذا الكتاب بعد رسالة ثابت بن قرة في قياس مجسم القطع المكافئ التي بدأ فيها دراسة بعض القبب المكافئة. وهو في هذا يعترف، إن صح التعبير، بمصدر إلهامه[98]. يكتب السجزي بخط نسخي مقروء وقد انتهى من عمله يوم الاثنين رام – روز من شهر باهمان 340 (يازدغارد)؛ أي في 12 فبراير/شباط 972. ويشير إلى أنه قابل بنفسه وصحح هذه النسخة اعتماداً على النسخة التي أرسلت إلى أبيه.

أما المخطوطة الثانية فهي في المكتبة السليمانية، رشيد 1191، الورقات 66^r-68^v، لاشك أنها نسخت بعد مخطوطة شستر بيتي 3652[99]. توجد في الأوراق 1^v-2^r من هذه المجموعة الأخيرة قائمة المحتويات بكل رسائل السجزي التي احتوتها قبل ضياع عدد هام منها بما في ذلك الرسالتين اللتين ننشرهما هنا. ونجد هذا الكتاب في الرقم 11 تحت عنوان "*كتابه إلى أبيه الحسين محمد بن عبد الجليل في خواص قطوع الزائدة والمكافئة*". نرمز لهذه المخطوطة بـــ R.

يعطينا وجود المخطوطة الأصلية فكرة عما تعرض له نص السجزي في التقليد المخطوطي. وهكذا نلاحظ، إذا وضعنا جانباً العنوان وبعض الاختلافات الناشئة عن تطور الإملاء، وجود حوالي ثلاثين خطأ، أغلبها لغوي، تشترك فيها المخطوطتان، أي أن السجزي هو المسؤول عنها. قام الناسخ (شستر بيتي و/أو رشيد) بتصحيح حوالي خمسة أخطاء وقع فيها السجزي وأضاف كلمتين يتطلبهما السياق. ولكنه أهمل من جهة أخرى حوالي عشر كلمات وثلاث جمل من كلمتين أو أكثر وارتكب حوالي أربعاً وخمسين غلطة، أضف إلى هذا قلبه لجملة لا يترتب عليه شيء يذكر.

3.4 في خواص المجسم الناقص والزائد والمكافئ

وهو عمل لا وجود إلا بمخطوطة واحدة. وهو جزء من مجموعة رشيد، رقم 1191، الورقات 63^v-65^v، في المكتبة السليمانية في اسطنبول ويحمل الرقم 10 في قائمة المحتويات في مجموعة شستر بيتي المشار إليها أعلاه، كما أنه من بين الرسائل الضائعة. الخط نستعليقي ولا سبيل لمعرفة اسم الناسخ أو تاريخ التدوين. أما فيما يخص المصدر فقد نسخ في بغداد عام 1215/612.

نعطي هنا الطبعة الأولى لهذين العملين والترجمة الأولى لهما.

---

[98] انظر R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. 1, pp. 272 and 320-322.

[99] انظر الرقم 3.2.1.

5. ابن الهيثـــــم

سجلت أعمال ابن الهيثم ووقائع حياته من قبل الفهرسيين القدامى، فباتت بذلك معروفة أكثر، بما لا يقاس، من وقائع ابن سهل وأعماله. وقد رسمت أعمال حديثة عديدة حياته وعددت كتاباته[100]، ولذا فلا حاجة للتكرار. فيكفي التذكير بأنه ولد في الثلث الأخير من القرن العاشر – ربما سنة 965 في البصرة – وأنه مات في القاهرة سنة 1040 حيث أمضى أكثر حقبة في حياته العلمية نشاطاً. وقد كتب، إلى جانب تراثه الرياضي الواسع، حوالي خمس عشرة رسالة في مواضيع مناظرية مختلفة، نثبت منها هنا نصوص ثلاثة هي: مقطعان مأخوذان من المقالة السابعة لمؤلفه *كتاب المناظر*، ونص ثالث هو *رسالته حول الكرة المحرقة*[101].

1.5 المقالة السابعة من "كتاب المناظر"

لدينا الآن مخطوطات ثلاث للمقالة السابعة من كتاب *المناظر* لابن الهيثم، جميعها في اسطنبول. الأولى – ونرمز إليها بالحرف F – تحمل الرقم 3216 في المكتبة السليمانية. وهي عبارة عن مجلد من مجموعة "فاتح" التي كانت في الأصل تضم سبعة مجلدات، خصص كل واحد منها لمقالة من كتاب المناظر، ولم يبق منها سوى خمسة. لهذه النسخة أهمية خاصة جداً، ذلك أنها تعود لصهر ابن الهيثم: أحمد بن محمد بن جعفر العسكري[102] الذي يبدو، كما سبق وأشار مصطفى نظيف[103]، أنه نسخ كتاب *المناظر* كاملاً خلال سنتي 1083–1084، أي بعد حوالي أربعة وأربعين

---

[100] انظر مثلاً: مصطفى نظيف، الحسن بن الهيثم، ص. 10 وما بعدها، A. I. Sabra, 'Ibn al-Haytham', pp. 189-200, and M. Schramm, *Ibn al-Haytham Weg zur Physik*, pp. 274 ff. أعدنا النظر في حياة وأعمال ابن الهيثم بشكل منهجي وبينا على الخصوص وجود عالمين باسم ابن الهيثم أحدهما الرياضي الحسن بن الحسن بن الهيثم والآخر الفيلسوف محمد بن الهيثم. انظر فيما يخص حياة وأعمال الأول *منهما* *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 2 : *Ibn al-Haytham* (London, 1993), pp. 8-19; vol. 3 pp. 937-941; vol. 4, pp. 957-959.

[101] من بين المقالات السبع التي تؤلف *كتاب المناظر* لابن الهيثم، حقق صبرا المقالات الخمس الأولى فقط (الكويت، 1983–2002). ولم تحقق المقالتان الباقيتان بعد. نحقق هنا من المقالة السابعة الأجزاء التي تتعلق بالعدسات، والتي لم يفهم أحد محتواها كاملاً حتى يومنا الحاضر (1989)، ولم يتبين أهميتها الحقيقية. ننوي على هذا النحو وضع مجمل النصوص المتعلقة بنظرية العدسات بالعربية في متناول القارئ، بانتظار بقية نص كتاب المناظر بطبيعة الحال.

[102] نقرأ بالفعل في ذيل المقالة الأولى من كتاب *المناظر* (استانبول، فاتح 3212، ص. 141^{ظ}) وباليد نفسها لكن بخط أصغر: "بخط صهر المؤلف كله". هذه الجملة لفتت في السابق نظر ناسخ المخطوطة (أحمد III، رقم 1899 في توبكابي سراي) والتي تحوي المقالات الثلاث الأولى. فقد كتب على الصفحة الأولى: "كتب هذا الجزء من أصل تم كتابته في منتصف جمادى الأولى سنة ست وسبعين وأربع مائة هجرية، هكذا كتب في آخره: وكتب أنه بخط صهر المصنف كله". لكن بما أن مجمل مجلدات F هي باليد نفسها، وفي السنة نفسها، 476 هجرية، يمكن الاستنتاج أن كل هذه المجلدات منسوخة من قبل صهر ابن الهيثم.

[103] نظيف، *الحسن بن الهيثم*، ص. 13.

عاماً على وفاة ابن الهيثم. وقد وصلتنا المقالات الثلاث الأولى[104]، والمقالتان الأخيرتان من هذه النسخة، ولا تزال المقالتان الرابعة والخامسة مفقودتين[105]. أنجزت هذه النسخة في البصرة، وتمت المقالة السابعة والأخيرة، كما يشير الذيل نهار "الجمعة منتصف شهر رمضان، السنة ست وسبعين وأربع مئة" – أي في 26 كانون الثاني/ يناير 1084[106].

وقد أوضح العسكري أن النسخة الأصل كانت نسخة ابن الهيثم نفسه، فكتب مثلاً تحت الشكل السابع في المقالة السادسة: "قال المؤلف إن الخط $\overline{\text{ك ط ع}}$ يجب أن يكون مستقيماً، وكذا وجدنا في نسخته فحاكيناه"[107]. وعلى الرغم من وجود نسخة ابن الهيثم تحت تصرف الناسخ واعتنائه الكبير بالنقل، نجد عدداً لا يستهان به من الحذوفات والزيادات والأخطاء في النسخة، ولا سيما في نسخ الأحرف الدالة على المقادير الهندسية. لقد تصرف الناسخ، على الأقل في أقسام النص البرهانية، بطريقة آلية.

تتألف مخطوطة المقالة السابعة من 139 ورقة منقولة باعتناء، بخط نسخي. تشهد غزارة الكلمات والعبارات الملحوظة على الهامش بيد الناسخ، مع إشارته إلى مواضعها في صلب النص، بواسطة إشارات اصطلاحية، على أنه قابل نسخته مع الأصلية أثناء النسخ أو في نهايته. وكان يفصل بين الفقرات بإشارتين استعملتا في ذلك العصر وبعده بوقت طويل، وهما: "هـ" وهي اختصار لكلمة "انتهى"، أو دائرة محيطة بنقطة. أما قواعد الإملاء فهي تلك المستعملة آنذاك: كتابة غير ثابتة للهمزة، وغياب للمدة، وكتابة بعض الكلمات مثل "أحديهما"، الخ؛ إنها سمات كثيرة لا تميز هذه النسخة في شيء من غيرها في القرنين العاشر والحادي عشر. وليس لدينا معلومات عن تاريخ المخطوطة بالذات، سوى أنها كانت في استانبول[108].

ونذكر أخيراً بأن العسكري أحاط غلاف هذه المقالة السابعة، كبقية مقالات النسخة، إحاطة مذهبة: *المقالة السابعة من كتاب أبي علي بن الحسن بن الحسن بن الهيثم في المناظر*.

تحمل المخطوطة الثانية، ونرمز إليها هنا بالحرف U، الرقم 2248 من مجموعة آيا صوفيا في المكتبة السليمانية. وهي نسخة كاملة لـ *كتاب المناظر*، تتألف من 678 ورقة، انتهى نسخها، كما يذكر الذيل، سنة 1464/869 بأمر من السلطان محمد الفاتح. وقد سبق وأكد مصطفى نظيف بأنها نسخة متأخرة للمخطوطة F، مكملة بالمقالتين الناقصتين – الرابعة والخامسة – من مخطوطة فاتح 3125. ولا تحتوي هذه الأخيرة، نرمز لها بالحرف F_1، إلا هاتين

---

[104] المقصودة هي المخطوطات: 3212، 3213 و 3214، فاتح.

[105] المقالتان الرابعة والخامسة نسختا من جديد في المخطوطة F، بعد حوالي مائة وستين سنة، كما ذكر في: نظيف، المصدر نفسه، ص. 10–11. انظر فاتح، 3215.

[106] نقرأ في المخطوطة 3216 فاتح، الورقة 138^{v}: "وقع الفراغ من نسخ هذا الكتاب يوم الجمعة منتصف شهر رمضان سنة ست وسبعين وأربع مئة، وكتبه أحمد بن جعفر العسكري بالبصرة". انظر فاتح.

[107] مخطوطة 3339 أحمد III توبكابي سراي، الورقة 128^{v}. أبدى الناسخ ملاحظتين شبيهتين لشكلين آخرين في المقالة نفسها: الورقتان 129^{v} و 133^{v}.

[108] كان هذا عصر السلطان محمود خان كما هو مذكور في الصفحة الأولى. هذه المخطوطة "كانت سابقاً مِلك يحيى بن محمد اللابودي".

المقالتين، وقد نُسخت سنة 1239/636 استناداً إلى المجلدين الناقصين في F، كما يظن نظيف[109]. وبعبارة أخرى فالمخطوطة U هي نسخة مباشرة عن F للمقالات 1و 2 و 3 و 6 و7، وغير مباشرة بواسطة المخطوطة F_1 للمقالتين 4 و5. وهذا ما تثبته مقارنة مخطوطتي المقالة السابعة.

أما المخطوطة الثالثة للمقالة السابعة – ونرمز إليها بالحرف K – فهي ضمن مجموعة تحمل الرقم 952 في مكتبة كوبرولو في استانبول، وتتألف من 135 صفحة غير مرتبة، وتحتوي على أجزاء من المقالات الأربع الأخيرة من كتاب *المناظر*، نُسخت بخط "مغربي". لقد كُتب قسم كبير منها بخط واحد. والنصان اللذان يهمّاننا، واللذان يشغلان على التوالي 67^v-70^v و86^r-86^v، خُطّا بهذا الخط. وعلى الرغم من جهلنا تاريخ هذه النسخة[110]، تبين لنا دراستها الداخلية أنها لم تنسخ – في مقالتها السابعة على الأقل – عن نسخة العسكري، أي عن F، بل تتحدران كلتاهما من سلف مشترك هو، بحسب كل الاحتمالات، نسخة ابن الهيثم نفسه.

إننا إذا اقتصرنا على النصين المحققين هنا، واللذين يشكلان عينة معتبرة للمقالة السابعة، وقارناهما مع النصين المقابلين في F نخلص إلى التالي:

– تنقص في F ست عبارات من كلمتين على الأقل موجودة كلها في K: في النص الأول 83، 14–15؛ 84، 2؛ 86، 10؛ 88، 17؛ 89، 10–11؛ 90، 10–11؛ وفي النص الثاني 108، 3.

– تنقص في F خمس كلمات وحرف وصل: 86، 19؛ 87، 16–19؛ 91، 3؛ 95، 5؛ 97، 5.

– يوجد في المخطوطة F ثلاثة وستون خطأً في النسخ – لغوياً أو رياضياً – خاصاً بها، كما يدل على ذلك التحقيق النقدي. يضاف إلى هذا، الاستعمال الشائع في F للمخاطب المفرد، والذي لا يوجد في K. وهذا ما يبيّن أن F لا يمكن أن تكون مطلقاً سلف K الوحيد.

ولا تظهر، من جهة أخرى، أية من زوائد F في K، ونعني التكرار، خصوصاً تكرار أخطاء، كالعبارات 86، 18 و 88، 6–7. وأخيراً فإن الإسقاطات المشتركة لـــ F و K لا يمكن أن تتأتى إلا عن سلف مشترك؛ ففي 83، 11–12 مثلاً، يعيق الإسقاط الفهم كلياً. كذلك الأمر بالنسبة إلى الثمانية عشر خطأً المرتكبة، فعوضاً من: "وتبعد، ه طَ، الجسمين، المبصر، خيال واحد، منعطفة، متقطعة". نجد مثلاً: "وتنفذ طَ، الجسم، البصر، خيالاً واحداً، منعكسة، منعطفة".

والسؤال إذاً هو ماذا كان السلف المشترك؟ إنه نسخة ابن الهيثم نفسه، إذا تقبلنا أقوال العسكري المعقولة. تبدو هذه الفرضية محتملة جداً، إلا أنها بحاجة إلى إثباتها من خلال مقارنة مع كامل المخطوطة K، في حين اكتفينا نحن باختبار بضع نقاط، للقول بانبثاق المخطوطة K من تقليد مخطوطي آخر، يرجع إلى ابن الهيثم نفسه.

---

[109] نظيف، *الحسن بن الهيثم*، ص. 13 من المقدمة.

[110] بحسب م. كروز، هذه المخطوطة هي من القرن الثامن للهجرة، إلا أنه ليس من إثبات لهذا التاريخ، انظر
M. Krause, 'Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker', *Quellen und Studien zur Mathematik, Astronomie und Physik*, Bd III, 4 (1936), pp. 437-532.

أثبتنا إذاً نصوص المقالة السابعة استناداً إلى المخطوطتين F و K، وبمساعدة مصدرين غير مباشرين من الواجب ذكــرهما، هما الترجمة اللاتينية لكتاب ابن الهيثم، وتعقيب كمال الدين الفارسي عليه. ومن المعلوم أن كتاب *المناظر* تُرجم إلى اللاتينية في نهاية القرن الثاني عشر أو في أوائل القرن الثالث عشر، ونشــره ريسنر (F. Risner) سنة 1572[111]. وقد غابت عن هذه الترجمة، لأسباب ما زالت غامضة، الفصول الثلاثة الأولى من المقالة الأولى. وبالمقابلة مع الأصل العربي، يظهر أن هذه الترجمة لم تؤخذ عن F، وهو أمر سبقت ملاحظته[112]، بل أخذت عن نسخة من عائلة K، وتحديداً أيضاً عن سلف لــ K أو عن نسخة لهذا السلف. فمقابلة الترجمة مع المخطوطة K، بالنسبة إلى النصين المحققين هنا، لا تدع مجالاً للشك بهذا الخصوص، كما يبيّنه التحقيق النقدي، فالثغرات من كلمة أو كلمات عدة – في F بالنسبة إلى K – نجدها كذلك في الترجمة اللاتينية (ما عدا 84، 2). والأمر عينه بالنسبة إلى الأغــلاط. وعلى العكس فإن زيادات F، غير الموجودة في K، غائبة عن الترجمة اللاتينية أيضاً. ثم إن بعض ثغرات المخطوطة K غابت عن هذه الترجمة، الأمر الذي يبرهن أنها لم تأت من نسخة عن K. يوجد في المقابل ثغرات في الترجمة بالمقارنة مع K، لكنه من الصعب التكهن بكون هذه الثغرات أصلية أم ناجمة عن الترجمة، وهي حرفية بشكل عام، ولكن ليس دائماً. ومهما يكن، فقد أنارت هذه الترجمة أمامنا الطريق للبت، من حيث الثغرات، أو من حيث تصحيح بعض القراءات.

إن لشرح الفارسي – *تنقيح المناظر* – وضعاً مختلفاً لسببين على الأقل. فهو لم يقصد منه التكرار الجامد لبحث ابن الهيثم، بل عمل على تلخيص نصّه مع مراجعته وتصويب بعض تأكيداته[113]. ومكّنه هذا من أن يستشهد بابن الهيثم بتصرف وبكثير من الحرية. كما إنه أسهم بإغناء المصطلحات العلمية في *المناظر*، ولم يعد مصطلحه مطابقاً تماماً لمصطلح سلفه. يعسِّر هذان الأمران الاستعانة بشرح الفارسي في عملية الإثبات النقدي لنص ابن الهيثم، على الرغم من أنه باستعارته جملة أو عدة جمل لابن الهيثم يؤدي لنا بعضاً من المساعدة. لقد استعنّا إذاً بهذا الشرح ضمن هذا النطاق وعدنا إلى المخطوطة 62451 من مكتبة "مجلس الشورى" في طهران.

---

[111] *Opticae Thesaurus Alhazeni Arabis Liber Septem* (New York/London : Johnson Reprint, 1972) بخصوص الترجمة، انظر المصدر نفسه، مقدمة D. Lindberg، ص. VII-VI لهذه الطبعة المكررة. وجد م. كلاغت آثار هذه الترجمة في: *Liber de triangulis* لـ Jordanus de Nemore، في 1220–1230. انظر
Archimedes in the Middle Ages (Madison, 1964), vol. 1, p. 669.
لا نعلم بالتأكيد هوية المترجم أو مكان الترجمة، فالاسم الأكثر احتمالاً حتى الساعة هو اسم جيرار دي كريمون (Gérard de Crémone).

[112] انظر ابن الهيثم، *كتاب المناظر*، المقالات الأولى، الثانية والثالثة، تحقيق عبد الحميد صبرا، ص. 48.

[113] حول طبيعة شرح الفارسي، انظر
R. Rashed, 'Le modèle de la sphère transparente et l'explication de l'arc-en-ciel : Ibn al-Haytham, al-Fārisī', *Revue d'histoire des sciences*, 23 (1970), pp. 109-140 ; reprint in *Optique et Mathématiques : Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe*, Variorum reprints (Aldershot, 1992), III.

2.5 رسالة في الكرة المحرقة

كتب ابن الهيثم هذه الرسالة بعد كتاب *المناظر*. وقد وصلتنا عنها مخطوطتان / عاطف (Atif) 1714، الورقات 100^v-91^v في استانبول، و2970 .Oct، الورقات 83^r-74^v، في المكتبة الوطنية في برلين (Staatsbibliothek).

تبيّن مقابلة المخطوطتين أن نسخة استانبول قد نُسخت، من دون أي شك، عن مخطوطة برلين وعنها فقط[114]. لذلك اكتفينا بالاستناد إلى مخطوطة برلين وحدها لتحقيق نص هذه الرسالة. وقد شكل هذا النص جزءاً من تلك المجموعة، التي لم تنسخ بيد واحدة. فأول الناسخين قاضي زاده، هو رياضي أدار مرصد سمرقند فترة من الزمن، واشتغل في خدمة أُلُغ بك، وقد نسخ من المجموعة الجزء الذي تنتمي إليه رسالة ابن الهيثم. وفي ذيل نص من المجموعة نفسها – نص يحيى الكاشي – الذي نسخه أيضاً قاضي زاده نفسه، نقرأ: "فرغ من تنميقه في العاشر من ربيع الآخر السنة سبع عشرة وثمان مئة وكان ذلك في سمرقند" (الصفحة 21^v). يمكننا الافتراض أن رسالة ابن الهيثم قد نقلت في السنة نفسها، 1414/817، وفي المدينة نفسها. يوجد أيضاً تاريخ آخر، 1435/839، في المجموعة، في نهاية نص آخر لابن الهيثم، حول مساحة الكرة (انظر الصفحة 152^r)؛ لكنه كُتب بيد أخرى.

النص الذي نقله قاضي زاده هو بخط نستعليق، نجد بعض التصحيحات على الهامش بيد الناسخ، لكن لا شيء يدل على أن النسخة قد قوبلت بالأصلية. كما إننا لا نعرف شيئاً حول تاريخ هذه المخطوطة، باستثناء أنها أصبحت، منذ عام 1930، ملكاً لمكتبة برلين.

6. الفارسي: شرح الكرة المحرقة

الفارسي رياضي وفيزيائي فارسي توفي في 12 كانون الثاني/يناير 1319 عن واحد وخمسين عاماً. حياته وأعماله أضحت الآن معروفة بشكل أفضل، على وجه الخصوص في نظرية الأعداد، والجبر، والمناظر[115]. وقد قام بشرح *كتاب المناظر* لابن الهيثم تحت عنوان *تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر*. هذا الشرح، أو بالأحرى هذا التنقيح، بحسب تعبير الفارسي، ينتهي بتعقيب على رسالة *الكرة المحرقة* لابن الهيثم. ولكتاب الفارسي هذا أهمية على أكثر من صعيد: إذ بواسطته اطلع المؤرخون – وما زالوا – على رسالة ابن الهيثم؛ لقد أوضح هذا النص، إضافة إلى انتقاداته له، كيف فهم خلفُ ابن الهيثم مساهمته، وحدود هذا الفهم وكيف غيروا اتجاهها؛ وأخيراً كان لهذا النص دور رئيسي في التقدم الذي أحرزه الفارسي في تفسير قوس قزح والهالة.

---

[114] لا نريد إثقال الملاحظات بنتائج مقابلة النصين: إنها تبرهن ببساطة أن مخطوطة عاطف منسوخة عن مخطوطة برلين وعنها وحدها فقط.

[115] انظر:

R. Rashed, 'Kamāl al-Dīn al-Fārisī', *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 7 (New York, 1973), pp. 212-219 ; and below chapter III, note 29, p. 176.

تبع شرح الفارسي كتاب *المناظر*، ومن ثم شرحه *الكرة المحرقة*، نص آخر له حول قوس قزح والهالة. يتابع الفارسي الكتابة بشرح ثلاث رسائل أخرى لابن الهيثم: *في كيفية الظلال، وفي صورة الكسوف، ومقالة في الضوء*[116]. وهكذا فإن شرح الفارسي للكرة المحرقة جزء لا يتجزأ من كتاب التنقيح. ولهذا الكتاب الضخم مخطوطات عديدة لم تجر حتى الآن أية محاولة لإصدار طبعة محققة لها. استطعنا الحصول على ست مخطوطات للنص حول *الكرة المحرقة*، استعملناها لإثبات نص شرح الفارسي.

تحمل المخطوطة الأولى، ونرمز إليها هنا بالحرف T، الرقم 62451 في مكتبة "مجلس الشورى" في طهران، وقد نُسخت بالخط النسخي في السنة 1684/1096، الورقات 231^r-235^r. إن جدول القيم العددية للانكسار، في هذه النسخة المتأخرة، فارغ، فقد رسم الناسخ الجدول ووضع أرقام الأسطر الخمسة عشر الأولى في العمود الأيمن، من دون نقل القيم العددية. ومع ذلك نُسخت المخطوطة باعتناء، وقوبلت بالأصلية، تشهد بذلك الملاحظات المدونة على الهامش بخط الناسخ. وهذا ما يوحي بأن الأصلية لا تحتوي على القيم العددية.

تحمل المخطوطة الثانية، ونرمز إليها بالحرف A، الرقم 2598 من مجموعة آيا صوفيا في المكتبة السليمانية في استانبول، وهي منسوخة بالخط النسخي، في السنة 1668/1079، على أوراق 555–565. نجد كذلك في هذه المخطوطة المتأخرة، جدول القيم العددية مرسوماً، وفارغاً.

توجد المخطوطة الثالثة، ونرمز إليها بالحرف K، في مكتبة جامعة كولومبيا، تحت الرقم 2526–88، Or. 301، الورقات 272^r-277^r. وهي لا تحمل تاريخاً، ومن المحتمل جداً أنها متأخرة؛ جدول القيم العددية مرسوم وفارغ؛ والكتابة فيها بالخط النسخي.

نرمز إلى المخطوطة الرابعة بالحرف L، وهي في مكتبة جامعة ليدن، رقمها 201، 277^v-283^v، مكتوبة بالخط نستعليق. لم يضع الناسخ تاريخاً لإتمام النسخة. إن جدول القيم العددية منسوخ جيداً، لكن الناسخ كرّر كتابة الورقة: 279^v، حتى بداية 280^r.

إن رقم المخطوطة الخامسة – نرمز إليها بـ S – هو 3340 في مكتبة توبكابي سراي، مجموعة أحمد III، 180^v-184^v، مكتوبة بالخط النسخي، سنة 1316/716 في نيسابور. لا تحتوي هذه النسخة على جدول القيم العددية وحسب، بل على الحاشية التي تشرح تكوينه كذلك. فقد نقل الناسخ بوضوح هذه الحاشية عن الأصلية. نلاحظ بسهولة، وبالفعل، أن هذا الناسخ كان معتنياً بقدر ما كان دقيقاً. لذلك تتضمن هذه المخطوطة العددَ الأقل من الثغرات ومن حوادث النسخ، كما انتبه الناسخ أثناء مقابلة نسخته بالأصلية، للإشارة إلى أماكن الحذوفات، التي نقلها على الهامش، كما فعل في الصفحة 84^r، في السطر الخامس.

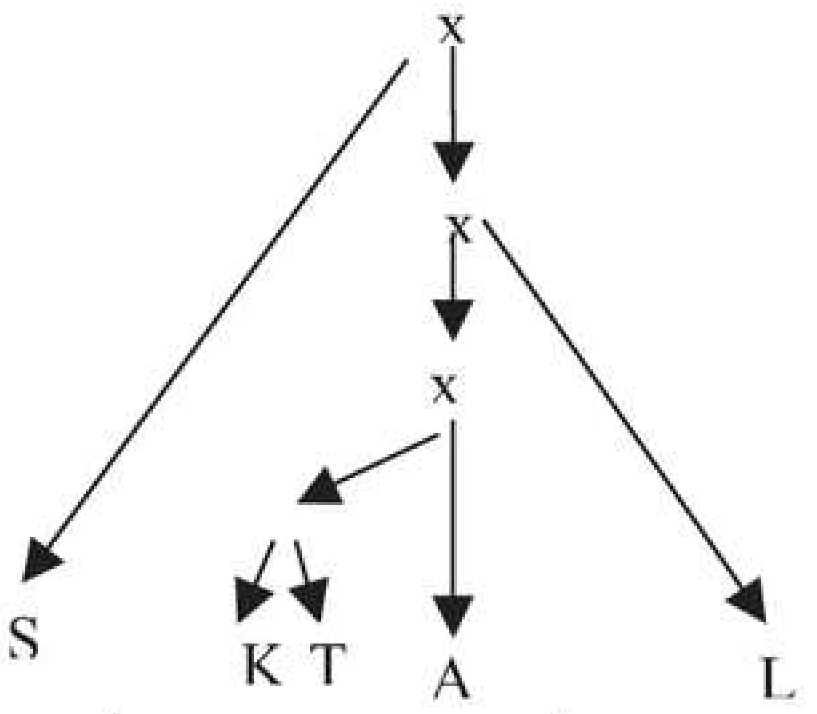
إن رقم المخطوطة السادسة – نرمز إليها هنا بالحرف H – هو 2945. الورقات ثلاث، في مكتبة خودا–بخش، في باتنا، بالهند. شُوهت هذه المخطوطة بسبب الرطوبة، وضياع بعض أجزائها. الكتابة هي بالخط نستعليق،

---

[116] الفارسي، *كتاب تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر*،
Osmānia Oriental Publications Bureau, 2 vols. (Hyderabad, 1347-48/1928-30), vol. 2.

يوجد جدول القيم العددية في القسم الضائع. لم ننجح في معرفة تاريخ هذه النسخة. إن كل هذه العناصر، تجعل مقارنتها صعبة مع الأخريات.

وسيكون من الإفراط بالإطالة إيراد جميع نتائج مقارنة المخطوطات الخمس في ما بينها من حذوفات وزيادات وأغلاط، الخ. وسنكتفي بإيراد شجرة التحدر التي استنتجناها من هذه المقارنات.



توحي هذه الشجرة إذاً أن المخطوطة S هي الأقرب إلى النموذج الأصلي، ومن المحتمل إرجاع الحاشية التفسيرية التي تحتويها إلى الفارسي نفسه. غير أنه لا يجوز أن نأمن لمثل هذا الاستنتاج إلا بعد إجراء مقارنة بين المخطوطات بشأن تنقيح المناظر بكامله، من دون حصرها بـــ *الكرة المحرقة* وحدها، وشرط مقارنة جميع المخطوطات المعروفة وعدم الاقتصار على المخطوطات الخمس التي انتقيناها[117].

---

[117] ليست هذه المهمة سهلة نظراً إلى عدد المخطوطات المعروفة حتى الآن عن التنقيح. هذا العدد، بحسب كل الاحتمالات، لا يغطي مجموعها. إننا نضع هنا لائحة لتلك التي نعرف مكان وجودها.

1- مكتبة اسطان قدس، مشهد، إيران رقم 5480، 278 ورقة، تمت سنة 1662,

2- مكتبة سباسالار، طهران، رقم 551، 182 ورقة، تمت في 1583-1584.

3- مكتبة سباسالار، طهران، رقم 552، 252 ورقة، تمت في 1686.

4- مكتبة مجلس شورى، طهران، رقم 2278، 326 ورقة، تمت في 1697-1698.

5- مكتبة راذا، رامبور، الهند، رقم 3687، 215 ورقة، تمت في 1642.

6- مكتبة راذا، رامبور، الهند، رقم 6444، 422 ورقة، تمت في القرن السابع عشر.

بشأن هاتين المخطوطتين انظر: Imtiyāz 'Alī 'Arshī, *Catalogue of the Arabic Manuscripts in Raza Library* (Rampur, 1975), vol. 5, pp. 36-37.

7- مكتبة متحف مهراجا منسنغ، جابور، الهند، 150 ورقة، تمت في 1659. انظر : D. King, 'A Handlist of the Arabic and Persian Astronomical Manuscipts in the Maharaja Mansingh II Library in Jaipur', *Journal of the History of Arabic Science*, 4, 82 (1980).

8- مكتبة خودا بخش، باتنا، الهند، 2455، 280 ورقة، تمت في القرن السابع عشر.

9- مكتبة خواد بخش، باتنا، الهند، 2456، 253 ورقة، تمت في القرن الثامن عشر.

بشأن هاتين المخطوطتين، انظر Maulavi Abdul Hamid, *Catalogue of the Arabic and Persian Manuscripts in the Oriental Public Library at Bankipore*, vol. 22 (Patna, 1937).

10- المكتبة الإقليمية في كيبيشيف، [سمارة]، 31^{v}-271^{v}. وهي الآن في المكتبة الوطنية في سان بترسبورغ. انظر : B. Rosenfeld, 'A Medieval Physico-mathematical Manuscript Newly Discovered in the Kuibyshev Regional Library', *Historia Mathematica*, 2 (1975), pp. 67-69.

إذا أضفنا هذه المخطوطات إلى تلك التي استعملناها تصبح لدينا ست عشرة مخطوطة معروفة – ومن المحتمل وجود غيرها– ضرورية للكتابة في تاريخ التقليد المخطوطي. ونحن لا نزال بعيدين عن هذا الهدف.

وقد تمَّ تجميع تنقيح المناظر من مقابلة أربع مخطوطات – ليدن، ومخطوطتي مكتبة راذا في رامبور، ونسخة غير محددة من خودا–بخش، طُبعت في حيدرأباد[118]. لم تكن الطبعة مبنيّة على تحقيق، بل جاءت تجميعاً خاطئاً. وبما أنها مرجعُ لمؤرخي ابن الهيثم، ولما كانت تعتمد على مخطوطات ثلاث لم يتح لنا استعمالها، اعتبرنا هذه النشرة بمثابة مخطوطة إضافــة – نرمــز إليها بالحــرف H – لإثبات نص شــرح الفارسي. قام إ. فيدمان E. Wiedemann بترجمة هذا النص عام 1910[119] بدون أن يثبته ولذا فقد عانت الترجمة من النتائج المترتبة عن ذلك. لكنها أدت رغم كل شيء خدمة جلى لمؤرخي المناظر، وهي ليست أسوأ من غيرها من ترجمات النصوص العلمية العربية بل على العكس إنها أفضل من عدد كبير منها. إلا أنها تحتوي على عدة أخطاء في الترجمة وعلى عدم دقة يجعلها غير خليقة بالثقة أحياناً.

يميز الفارسي أقواله، في هذا الشرح عن أقوال ابن الهيثم، بإدخال عبارة "أقول" أو "يقول". لكن نظرة خاطفة توضح أن الفارسي لا يستشهد بابن الهيثم بالحرف إلا نادراً، فهو يكتفي بنقل فكرة سلفه بشكل صحيح في لغته الخاصة. وبما أن نص ابن الهيثم قد حقق وترجم هنا، فلم نرَ حاجة إلى مقابلة كل النصوص التي ينسبها الفارسي إلى ابن الهيثم مع نصوص هذا الأخير.

أما بشأن الطريقة المتبعة لإثبات النصوص العربية القديمة، فقد شرحنا موقفنا في مناسبات عدة[120]. إنها ترتكز على مبدأين: عدم التدخل في النص إلا عند الضرورة القصوى، بغية تصويب خطأ لغوي أو علمي يهدد بمنع فهم النص، مذكرين في التحقيق بجميع هذه المداخلات. ومن ناحية أخرى، عندما يتكرر خطأ بكثرة، من دون أن يشكل عائقاً للفهم، فإننا أحياناً نصححه في التحقيق في المرة الأولى دون سواها. أخيراً لم نسمح لأنفسنا بأي تغيير قبل أن نستنفد جميع الإمكانات اللغوية للإبقاء على أصالة النص؛ كل هذه الاحتياطيات ضرورية لضمان الحصول على طبعة محققة علمياً.

وبالنسبة إلى الترجمة، فقد اعتمدنا أيضاً طريقتنا الخاصة: ترجمة حرفية أمينة للنص بقدر أمانتها لروحيته. ومن دون التضحية بالوضوح في سبيل الحرفية، فقد بحثنا قدر المستطاع عن المسلك الضيق الذي يوفق بينهما. ولقد قبلنا، من دون شك، المجازفة بالحصول على الدقة والوضوح على حساب أناقة الترجمة، عاملين على ضبط الحدود بين الترجمة والتفسير. لقد سهّلت علينا مهمتنا هذه كون لغة المناظر العربية، قد تكونت منذ ابن سهل واستقرت جيداً، مع استثناءات قليلة سنتعرض لها في ملاحظاتنا الإضافية.

---

[118] الفارسي، *تنقيح*، الجزء الثاني، ص. 285–302.

[119] 'Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften – XIX – Über die Brechung des Lichtes in Kugeln nach Ibn al-Haiṯam und Kamāl al-Dīn al-Fārisī, *Sitzungsberichte der physikalische-medizinischen Sozietät in Erlangen*, Bd XIII, (1910), pp. 15-58; reprod. *In Aufsätze zur arabischen Wissenschafts-Geschichte*, 2 vols (Hildesheim/New York, 1970), vol. 1, pp. 597-640.

[120] Diophante : *Les Arithmétiques*, Collection des Universités de France, 2 vols (Paris, 1984), vol. 3, pp. LXXIV ff.

الهندسة وعلم المناظر
في
ضحى الإسلام

الفــصل الثاني
ابن سهل و بداية علم الانكســاريات

رشدي راشد

مؤسســة الملك عبد العــزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz
منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

الفصل الثانـــــــي

ابن سهل وبداية علم الانكساريات

مقدمة

لم يصلنا من أعمال ابن سهل في المناظر سوى مخطوطتين: أُولاهما رسالته *الحراقات* التي كتبها في بغداد ما بين عامي 983 و 985 وأهداها إلى البويهي، ملك تلك الحقبة. أما الثانية، وهي *البرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء*، فنحن نجهل تاريخ تأليفها. هل يمكننا الجزم بأن هاتين المخطوطتين تمثّلان مجمل أعمال ابن سهل في المناظر؟ الحقيقة إنه ليس بمقدورنا الآن الإجابة عن هذا السؤال بشكل أكيد، غير أن هاتين المخطوطتين كافيتان لإعطائنا برهاناً لا شك فيه على أهمية إسهام ابن سهل في مجال المناظر إنْ على صعيد البحث العلمي بحد ذاته، أو على صعيد الدور التاريخي الذي يلعبه. وهما تكشفان، من جهة أخرى، عن المصادر الأساسية للبحث في علم المناظر في تلك الحقبة والتي هي، باعتراف ابن سهل نفسه، أعمال الانعكاسيين القدامى حول المرايا المحرقة، من جهة، وكتاب *المناظر* لبطلميوس من جهة أخرى. في مقدمة "رسالته"، يذكر ابن سهل إطلاعه على كتب عدة للانعكاسيين القدامى التي عالجت مسألة المرايا المحرقة ولكنها لم تتطرق إلى موضوع العدسات على الإطلاق. وتبقى هذه الإشارة، وللأسف الشديد، عامةً وغامضةً إذ لم يذكر ابن سهل اسماً ولا عنواناً (وسنعمد لاحقاً إلى طرح بضعة أسماء أمثال أنتيميوس الترالي والكندي). أما في ما يخص بطلميوس، فابن سهل يستشهد بكتاب *المناظر* ويتمعن بشكل خاص بتفحص الجزء الخامس منه الذي كرسه بطلميوس للانكسار[1].

إن التقاء هاتين المدرستين – مدرسة الانعكاسيين والمدرسة البطلميوسية – بمعزل عن أية مدرسة أخرى كمدرسة جالينوس أو مدرسة الفلاسفة، يلقي الضوء على إسهام ابن سهل ويسمح برؤية انطلاقة علم الانكساريات. وكما سنبيّن لاحقاً، فإن التقاء نظرية الانكسار، كما وردت في كتاب *المناظر* عند بطلميوس، بأبحاث الانعكاسيين حول *المرايا المحرقة*، شكل المصدر الذي استقى منه ابن سهل علم الانكساريات. من هنا، فإن هذا العلم كان بعيداً في انطلاقته عن كل تساؤل حول النظر والرؤية، وهو بذلك وليد علم الانعكاسيات.

هيمنت مسألتان اثنتان، مختلفتا الطبيعة على الرغم من ترابطهما الوثيق، على أبحاث الانعكاسيات في موضوع المرايا المحرقة. أولاهما، ذات طابع نظري يتعلق بالخصائص الهندسية للمرايا، ومدى قدرتها على إشعال المواد القابلة للاحتراق تبعاً لبعد المنبع الضوئي وموقعه. كان دوزيتوس[2]، مراسل أرشميدس قد طرح هذه المسألة وكذا ديوقليس[3].

---

[1] انظر أدناه نص ابن سهل عن صفاء الفلك.

[2] جاء في مجموعة ديوقليس التي لم تصلنا إلا معربة: "وأما أبيوذاموس المنجم، فإنه لما نظر إلى أرقاذيا وقدم فيها سألنا كيف نجد بسيط مرآة متى وُضع قبالة الشمس اجتمعت الشعاعات التي تنعطف منه إلى نقطة فأحرقت" (في المرايا المحرقة في *Les Catoptriciens grecs. I : Les miroirs ardents*, textes établis, traduits et commentés par R. Rashed, Collection des

أما المسألة الثانية فهي تاريخية الطابع، انطلقت منذ حوالي القرن السادس وارتكزت على التساؤل عن مدى صحة أسطورة إحراق أرشميدس أسطول مرسيللوس، إبان هجومه على سرقسطة. وقد تساءل الانعكاسيون البيزنطيون، أمثال أنتيميوس الترالي، عن شكل المرآة وأجزاء جهاز أرشميدس الانعكاسي. ويبدو أن ابن سهل قد طرح على نفسه هاتين المسألتين في القرن العاشر؛ مما يبين أنهما مرتبطتان بتقليد عميق الجذور.

نعلم الآن أن ابن سهل لم يكن أول من طرح هاتين المسألتين لدى العرب – فالفيلسوف والعالم الكندي قد طرحهما في رسالة مهمة درس فيها موضوع المرايا المحرقة بهدف تشذيب نقائص أبحاث أنتيميوس[4]، كما إن كتاب عطارد[5] وشهادة المفهرس[6] ابن النديم يظهران أن البحث في موضوع هذه المرايا كان شديد الحيوية قُبيل قيام ابن سهل بأبحاثه.

غير أننا نشهد مع ابن سهل انطلاقة مسألة جديدة. ففي مقدمة رسالته *الحراقات* يعلن ابن سهل، ومن دون أدنى التباس، أسبقيته بالتفكير في الإشعال بواسطة الضوء العابر "لآلة"، والمنكسر بعد ذلك في الهواء، أي أسبقية تفكيره في موضوع العدسات. وكي يتمكن من طرح هذه المسألة، ينساق ابن سهل إلى صياغة مسألة الحراقات بشكل جديد تماماً؛ فلم يعد اهتمام هذا العالم ينحصر في موضوع المرايا فحسب، بل تعداها إلى مجموعة أكثر اتساعاً تشمل، إضافة إلى هذه المرايا، العدسات، أو، بحسب تعبيره، كل الآلات المحرقة، وهكذا لم يعد الانعكاس موضوع الدراسة الوحيد في المناظر كما كان سابقاً، بل انضم إليه الانكسار. وتحولت بذلك المسألة التقليدية في البحث حول الانعكاسيات تحولاً جذرياً لتحمل عند ابن سهل العنوان التالي: "استخدام الانعكاس أو الانكسار بغية الإشعال في نقطة محددة بواسطة منبع ضوئي بعيد أو قريب"[7].

Universités de France [Paris, 2000], p. 98) ويتابع ديوقليس مؤكداً أن مسألة "عمل مرآة يجتمع شعاعها إلى نقطة واحدة كان الذي عملها ذوسيثاوس".

[3] انظر الهامش السابق.

[4] كتب أنتيميوس الترالي بهذا الصدد: "ولم يكن بجائز إبطال رأي أرشميدس الحكيم الــذي اتفق الجميع على الحديث به أنه أحرق مراكب المحاربين له بشعاع الشمس، وجب من هذه الجهة إثبات ذلك وأنه ممكن باضطرار". انظر في *صناعة المرايا المحرقــة* في *Les Catoptriciens grecs*, p. 303.

ومن ناحية أخرى، كتب الكندي في مطلع رسالته في *الشعاعات <الشمسية>*، بعد أن ذكَر بأسطورة أرشميدس: "فهذا قول أنتيميوس. وقد كان يجب على أنتيميوس ألا يقبل خبراً بغير برهان في التعاليم وفي صناعة الهندسة خاصة". ويتابع الكندي في مكان آخر: "ونعرض ذلك على أوضح ما يمكننا وأقربه ومبيّن بالبراهين الهندسية". انظر
R. Rashed, Œuvres *philosophiques et scientifiques d'al-Kindī*. Vol. 1 : *L'Optique et la Catoptrique d'al-Kindī* [Leiden, 1997], p. 363.

[5] ألَّف عطارد بن محمد رسالة في المرايا المحرقة: *الأنوار المشرقة في عمل المرايا المحرقة* (مخطوطات استانبول، لالولي 2759 (1)، ص. 20^{r}-1^{v}). حقق وترجم هذا النص في *Les Catoptriciens grecs*, pp. 296-315.

[6] ينسب المفهرس ابن النديم أيضاً لقسطا بن لوقا عملاً حول المرايا المحرقة، هو: *كتاب المرايا المحرقة*، انظر: أبو الفرج بن اسحق بن النديم، *الفهرست*، تحقيق رضا تجدد (طهران: [د.ن.]، 1971)، ص. 253. انظر تحقيقنا وترجمتنا في *L'Optique et la Catoptrique d'al-Kindī*, Appendix II.

[7] انظر أدناه رسالة *الحراقات*، ص. 77.

وبغية التفكير في هذه المسألة وحلّها، يجمع ابن سهل بين العناصر التالية: أ- الإشعال بالانعكاس؛ ب- الإشعال بالانكسار؛ ج- الحالة التي يمكن اعتبار الأشعة فيها متوازية؛ د- حالة الأشعة المنبثقة من نقطة على مسافة متناهية. ويسمح تركيب هذه العناصر بالحصول المتسلسل على فصول رسالته كافة. وهو ما يمكّن من إعادة بنائها وترتيب فصولها[8]. وهكذا، فإن تركيب (أ) و(ج) يعطي الحالة التي تكون فيها الأشعة متوازية – منبع الضوء على مسافة تُعد لامتناهية– والإشعال بالانعكاس، وأما الجهاز الانعكاسي الذي يعطيه ابن سهل مثلاً لهذه الحالة فهو المرآة المكافئية العاكسة لأشعة الشمس. أما تركيب (أ) و(د) فيعطي حالة الأشعة المنبثقة من منبع متناه والإشعال فيها بالانعكاس؛ ويعطي ابن سهل مثلاً لهذه الحالة مرآة المجسم الناقص. أما تركيب (ب) و(ج) فيقود إلى الأشعة المتوازية ذات الإشعال بالانكسار حيث يأخذ ابن سهل العدسة المستوية–المحدبة مثالاً لهذه الحالة. وأخيراً، يقوده تركيب (ب) و(د) إلى العدسة ذات الوجهين المحدبين.

ولا يكتفي ابن سهل بشرح القواعد المثالية لكل حالة، وإنما يتوسع بعرض طرق تصنيع هذه الآلات المحرقة ولو نظرياً على الأقل. من هنا نفهم أن ليس بمقدوره الاكتفاء بمجرد دراسة المنحنيات ورسمها. فعلى غرار جميع أسلافه الذين عملوا على إنشاء المرايا، كان على ابن سهل أن يعي طريقة إنشاء هذه المنحنيات؛ لذا احتوى كل فصل من رسالته على قسمين: خصص أولهما لدراسة نظريةٍ للمنحني المطروح، أما الثاني فلإنشاء هذا المنحني. وبالفعل، فإن الأقسام غير المنقوصة التي وصلتنا من هذه الرسالة تفي بتلك المواصفات؛ فالفصل المخصص للقطع الزائد وهو ضروري للعدسات المستوية – المحدبة، ينقسم إلى قسمين: دراسة المنحني كقطع مخروطي، والإنشاء الميكانيكي لهذا المنحني. يعمد ابن سهل في القسم الأول، إلى تعريف القطع الزائد برأسه ومحوره و*ضلعه القائم*، ويدرس حينئذ المماس انطلاقاً من خاصية البؤرتين، لينتقل بعد ذلك إلى المجسم الزائدي فالمستوي المماس مبرهناً وحدانيته. أما في القسم الثاني فيعمد إلى رسم متصل لقوس منحن هو بالواقع قوس قطع زائد، لينتقل بعدها إلى دراسة المستوي المماس للسطح الناجم عن دوران هذا القوس حول خط مستقيم ثابت. وكما سنرى لاحقاً، ينطلق في القسمين من خصائص المماس كي يجد قوانين الانكسار، ويستنتج بذلك طريقة إنشاء عدسة مستوية–محدبة وصولاً إلى عدسة محدبة الوجهين.

يمكننا أن نرى في تنظيم رسالة *الحراقات*، وقد استطعنا من إعادة بنائه بشكل أكيد، العناصر المختلفة لمشروع ابن سهل. يحد المخطط أدناه الحالة التي وصلتنا فيها مختلف أقسامه. وهكذا نرى من دون عناء أن القسم المفقود هو ما بين نهاية دراسة القطع المكافئ وبداية دراسة القطع الناقص. ويبدو أن هذا الضياع يعود إلى حقبة قديمة[9]. غير أنه بإمكاننا التأكيد أن الدراسة النظرية للقطع المكافئ قد وصلتنا كاملة، وكذا المقطع الذي يتبعه حول الرسم المتصل لقوس منه، مع غياب دراسة مماس هذا القوس ودراسة المستوي المماس للمجسم المكافئ، وغياب التطبيق البصري عنه. أما

---

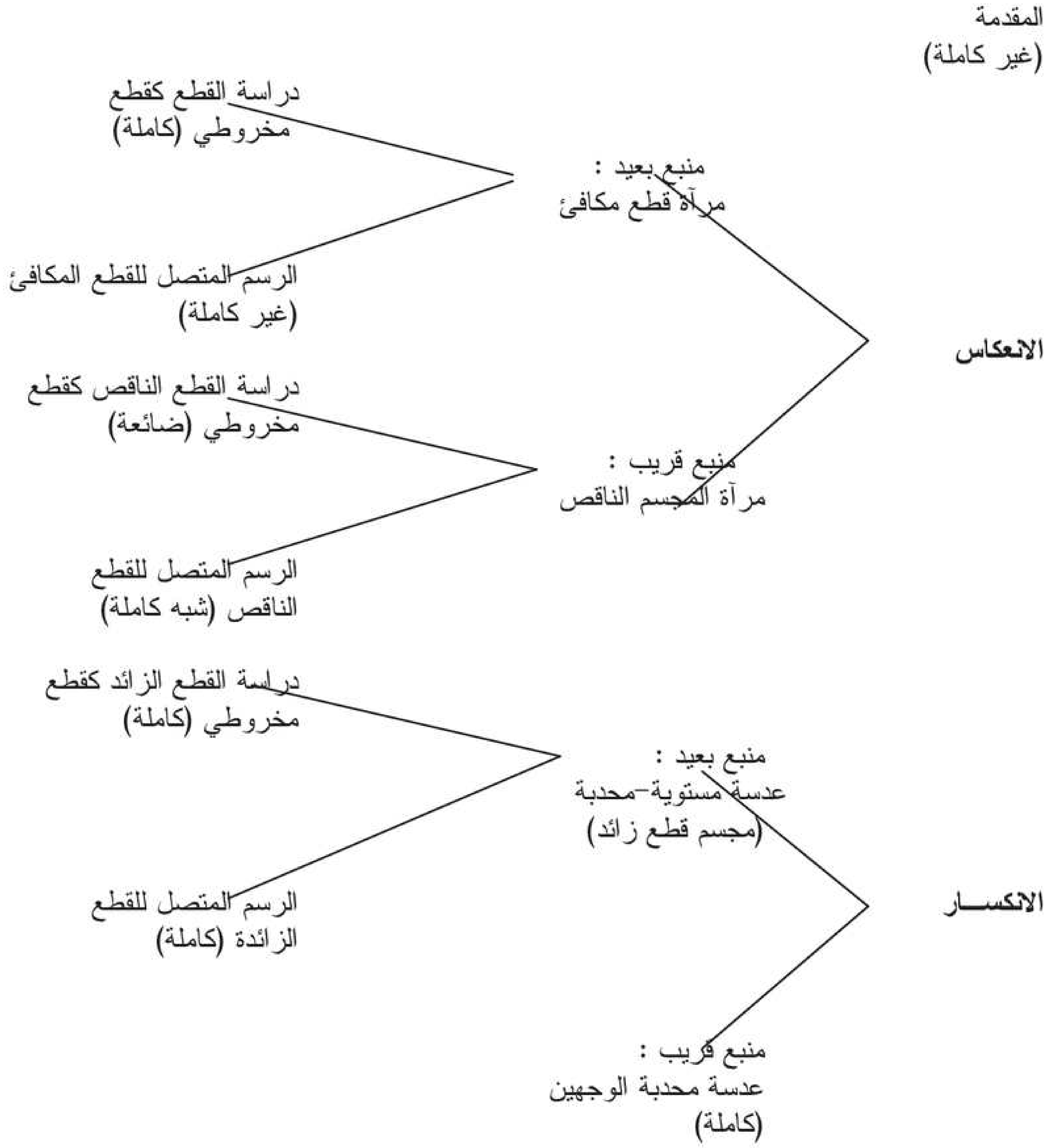
[8] انظر:

R. Rashed, 'A pioneer in Anaclastics : Ibn Sahl on Burning Mirrors and Lenses', *Isis*, 81 (1990), pp. 464-491.

[9] انظر الفصل الأول تاريخ مخطوطات هذه الرسالة.

الجزء المخصص للقطع الناقص، فقد بُترت منه دراسة هذا المنحني كقطع مخروطي، لكنه، في المقابل، يقدم بشكل شبه كامل، دراسة للمرآة الاهليلجية المتولدة عن قوس القطع الناقص المرسوم بشكل متصل.

وهكذا فبمقدورنا إذاً القيام بجرد دقيق للقسم المفقود من الرسالة، ومن الواضح أن هذه الثغرة لن تمنعنا البتة من الإحاطة بفحوى هذا الكتاب وشكله. وهكذا وبمجرد الإطلاع البسيط على بنية هذا المؤلَّف نتمكن من الإلمام بموقع ابن سهل الجديد: متابعة للمدرسة الانعكاسية اليونانية والعربية، وانفصام عنها بإدخاله الانكسار والعدسات في مجال بحثه. وبغية فهم أكثر عمقاً لنظرتنا الجديدة هذه، يتحتم علينا القيام بتحليل تفصيلي لمختلف فصول هذه الرسالة.



2. المرآة المكافئية

1.2. شكلت المرآة المحرقة المكافئية، كما هو معروف، وقبل ابن سهل بزمن طويل، موضوع بحث: فلقد ترك لنا ديوقليس وأنتيميوس الترالي ومؤلف مقتطف بوبيو دراسات عدة حولها[10]. كما خصص علماء آخرون قسماً من أعمالهم لها. نجدها كذلك في نص عرب من اليونانية منسوب إلى دترومس[11]. أما بالعربية، وقبل ابن سهل، فقد كتب حول هذه المرآة المكافئية كل من الكندي[12] وأبي الوفاء البوزجاني[13]. نلاحظ إذاً أن البحث في الموضوع يتميز لا بقدمه فحسب، بل وبشيوعه النسبي حتى القرن العاشر. غير أن دراسة ابن سهل حول هذه المرآة تختلف عن كل سابقاتها بميزات سيمكننا تفحص مساهماته من الإحاطة بها.

إن هدف ابن سهل من استعمال هذه المرآة هو الرد على السؤال التالي: كيف يمكن لنور الشمس – أي انطلاقاً من منبع يُعد ذا بُعدٍ لامتناه بحيث تصل الأشعة متوازية في ما بينها إلى المرآة المذكورة – وبالانعكاس لا غير من إشعال نقطة على مسافة معينة؟

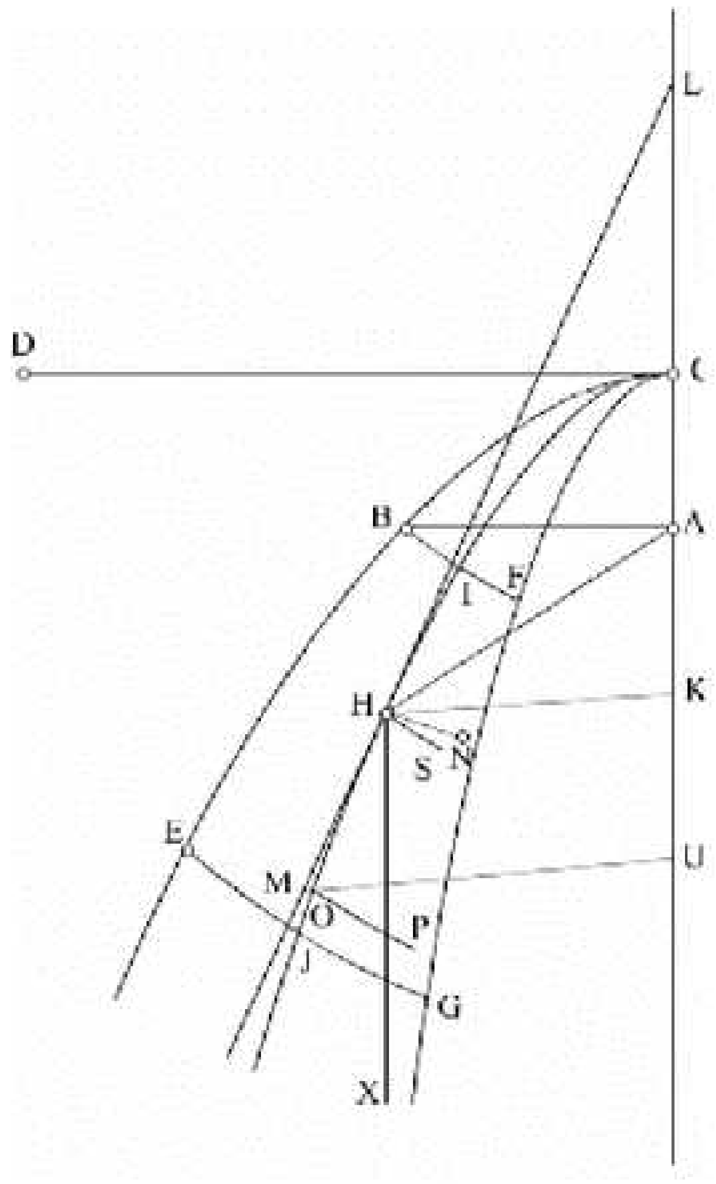
لتكن AB هذه المسافة وAC اتجاه أشعة الشمس (حيث C نقطة كيفما اتفق). ولنبدأ بالحالة التي يكون فيها AC عمودياً على AB، وننشئ $AC = AB/2$ وCD عمودياً على AC بحيث يكون $CD \cdot AC = AB^2$. إن القطع المكافئ المعرّف برأسه C وبمحوره AC، و*بضلعه القائم* CD يمر في النقطة B.

[10] لدراسة المرآة المكافئية من قبل أنتيميوس الترالي وفي مقتطف بوبيو، انظر: Th. Heath, 'The Fragment of Anthemius on Burning Mirrors and the *Frangmentum mathematicum Bobiense*', *Bibliotheca Mathematica*, VII, ser. 3 (1906/7), pp. 225-233, on pp. 228 ff.; P. Ver Eecke, *Les Opuscules mathématiques de Didyme, Diophane et Anthémius* (Paris/Bruges, 1940), pp. XXI ff., 55-56, 59 ff.; G. L. Huxley, *Anthemius of Tralles : A Study in Later Greek Geometry* (Cambridge, Mass., 1959), pp. 185 ff.; and Rashed, *Les Catoptriciens grecs*, pp. 264-279.

[11] لم نتوصل إلى توضيح هوية هذا المؤلف، كُتب اسمه دتروس. إن النص بالعربية موجود في المتحف البريطاني، مخطوطات تحت رقم 7473. نشرت هذه المخطوطة محققة ومترجمة ومحللة في: Rashed, *Les Catoptriciens grecs*, Part II.

[12] بينا وللمرة الأولى في: *L'Optique et la Catoptrique d'al-Kindī*, pp. 115-116 أن الكندي عالج كذلك المرآة المكافئية.

[13] F. Woepcke, 'Analyse et extraits d'un recueil de constructions géométriques par Aboūl Wafā", *Journal asiatique*, 5e sér., 5 (1855), pp. 309-359, on pp. 325 ff. كما أن نص أبي الوفاء البوزجاني قد حقق وترجم في: O. Neugebauer and R. Rashed, 'Sur une construction du miroir parabolique par Abū al-Wafā' al-Būzjānī', *Arabic Sciences and Philosophy*, 9, 2 (1999), pp. 261-277.



الشكل. 1

لنأخذ قوساً BE من هذا المكافئ في الاتجاه المعاكس لـــ C، ولنقم بتدويره حول الخط الثابت AC. ترسم النقطتان B و E قوسي دائرة هما BF و EG. فيتحدد بذلك جزء من مجسم مكافئي EBFG، نرمز إليه بـــ (BG). يبرهن ابن سهل بعدئذ على القضية التالية:

قضية: إذا كان السطح (BG) انعكاسياً وسقطت عليه أشعة موازية لـــ AC، انعكست هذه الأشعة نحو النقطة A.

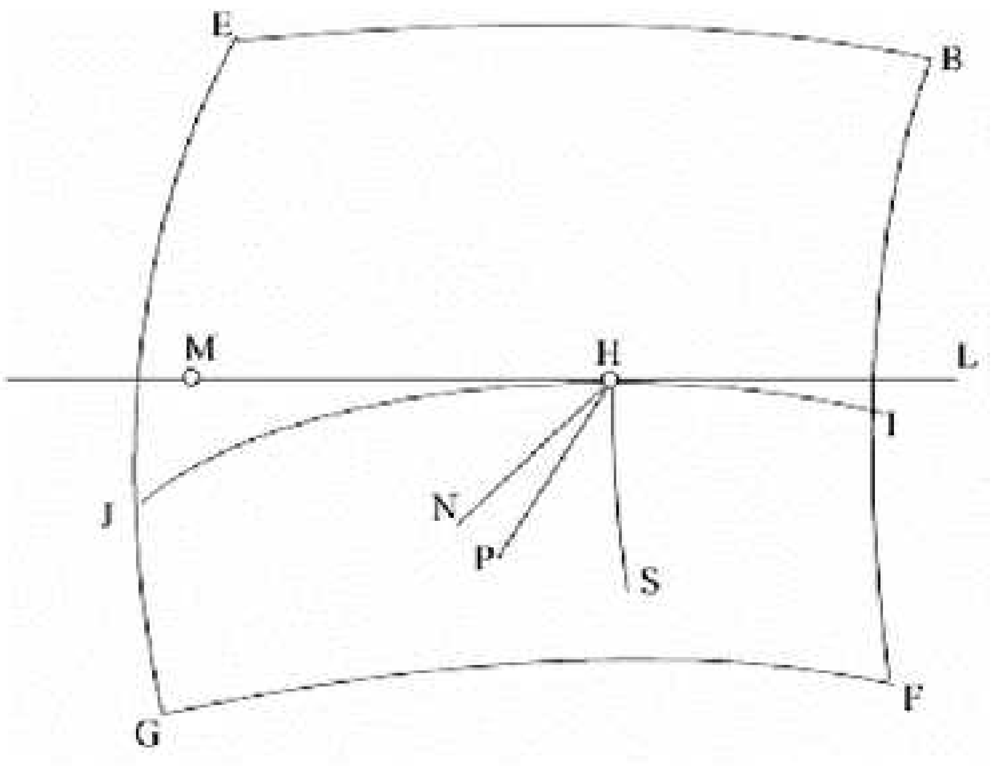
يبدأ ابن سهل لبرهان هذه القضية بمناقشة المستوي المماس ووحدانيته في نقطة H.

لتكن H نقطة من (BG)؛ يكون القوس IJ، الناجم عن قطع المستوي ACH للمجسم (BG)، قوساً مكافئياً مساوٍ للقوس BE. لتكن K الإسقاط العمودي لـــ H على AC، و L نقطة من AC بحيث يكون CL = CK. يكون حينذاك الخط المستقيم LH مماساً للقوس IJ، ويكون المستوي الحاوي للمستقيم LH والعمودي على المستوي AHC هو بدوره مماساً للسطح (BG) عند النقطة H.

يبرهن ابن سهل بالخلف أن هذا المستوي لا يقطع (BG) في النقطة H، ثم يثبت وحدانية المستوي المماس في هذه النقطة[14].

---

[14] برهان بالخلف يستعمل الشكل رقم 2.



الشكل. 2

ومن ثم يناقش ابن سهل انعكاس شعاع موازٍ للمحور:

ليكن XH الشعاع الساقط في النقطة H ولتكن M نقطة على امتداد LH؛ يمكن برهنة تساوي الزاويتين $A\hat{H}L$ و $M\hat{H}X$.

لدينا:

$$CD \cdot AC = AB^2 = 4AC^2$$

أي أن $CD = 4AC$. من جهة أخرى، بما أن النقطة H موجودة على المجسم المكافئ، لدينا:

$$HK^2 = CD \cdot KC = 4AC \cdot KC$$

ومنه نستنتج:

$$AH^2 = AK^2 + 4AC \cdot KC = AK^2 + 4AC^2 + 4AC \cdot AK = (AK + 2AC)^2 = AL^2$$

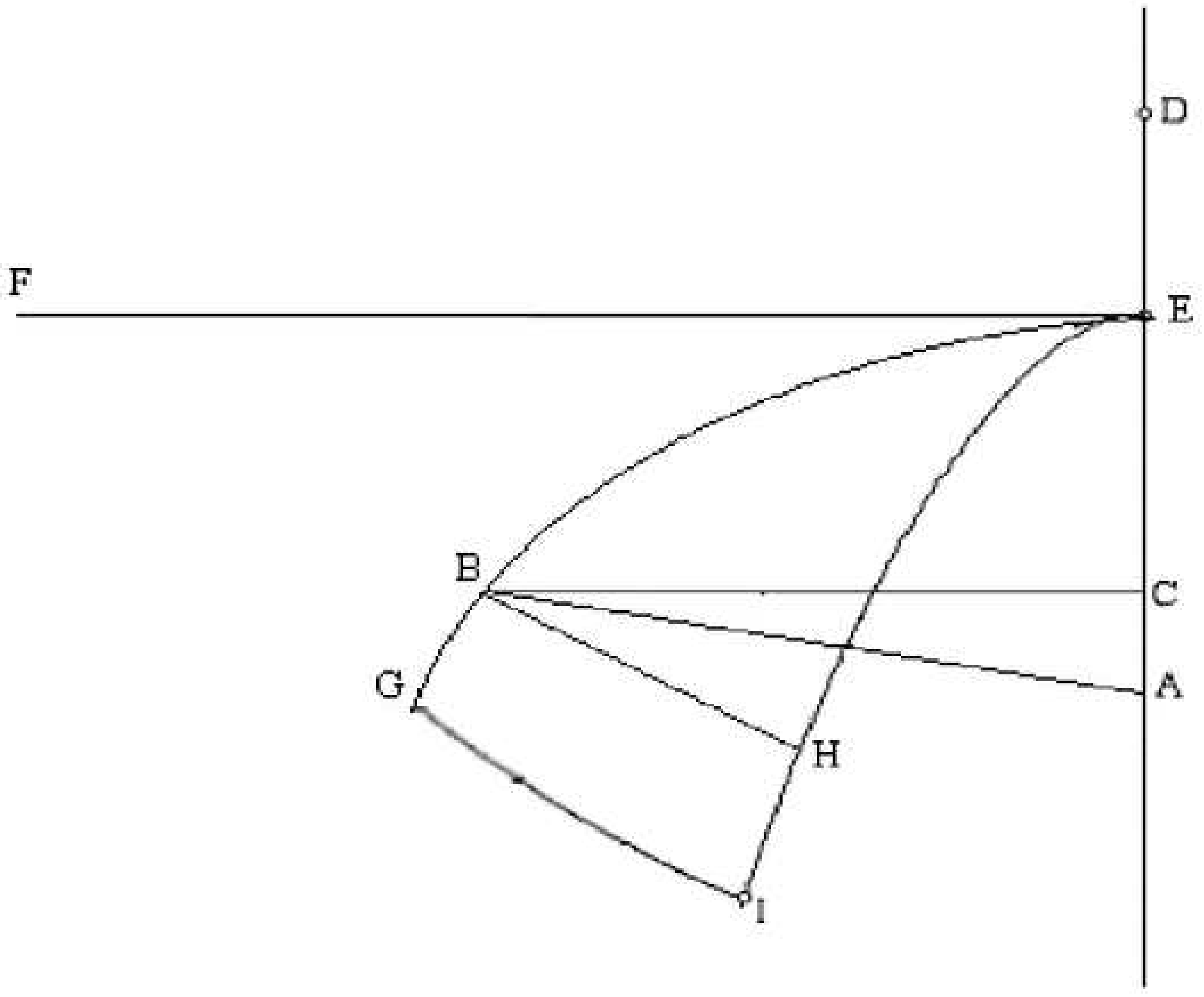
وبالتالي

$$A\hat{H}L = A\hat{L}H$$

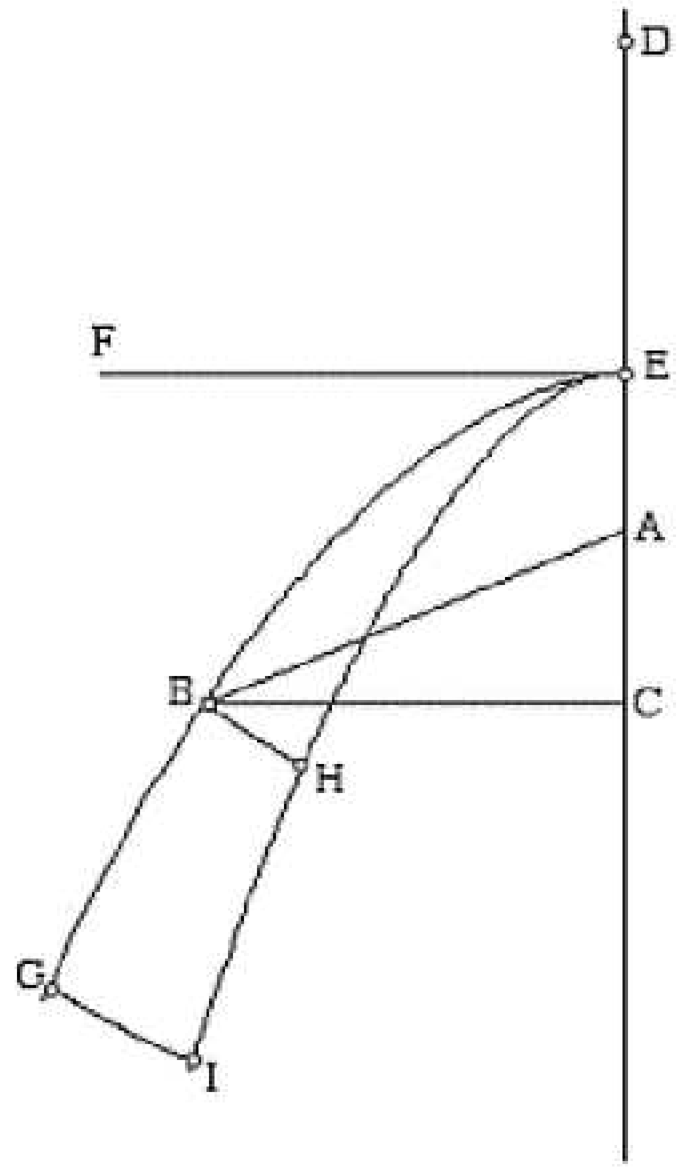
ولكن، وبما أن $AL \parallel HX$، فإن $A\hat{L}H = M\hat{H}X$ وبالتالي $M\hat{H}X = A\hat{H}L$. وهكذا فإن الشعاع الساقط XH على النقطة H ينعكس نحو النقطة A.

ويعالج ابن سهل بعد ذلك الحالة التي لا يكون فيها AC عمودياً على AB:

نسقط من B المستقيم العمودي على اتجاه الشعاع الآتي إلى A، لتكن C المسقط، ثم نأخذ على المستقيم AC نقطة D بمسافة AD = AB. لدينا هنا إمكانيتان: إما أن تكون C و D من جهتين متقابلتين بالنسبة إلى A [الشكل. 3] أو من الجهة نفسها بالنسبة إليها [الشكل. 4]. لتكن E النقطة الوسطى لـــ CD و F نقطة على المستقيم العمودي منها بحيث $BC^2 = CE \cdot EF$. إن القطع المكافئ ذا الرأس E والمحور AE و*الضلع القائم* EF يمر بـــ B.



الشكل. 4



الشكل. 3

يولد دوران قوس من هذا القطع BG حول المحور AC مقطعاً مجسماً مكافئياً (BI). فإذا كان هذا المقطع انعكاسياً فإن كل شعاع يسقط بشكل مواز للمحور AC على سطح هذا المقطع، ينعكس نحو النقطة A.

وليبرهن ابن سهل القضية في هاتين الحالتين، يعيدهما إلى الحالة السابقة. فيكفي إذاً أن يظهر أن A هي بؤرة المكافئ، أي أن $EA = \frac{1}{4} EF$. ويتم ذلك كالتالي:

لدينا

$$AD^2 = AB^2 = AC^2 + BC^2 = AC^2 + EF \cdot CE \quad \text{و} \quad EF \cdot CE = BC^2$$

وفي كل من الحالتين نجد :

إما $AD = 2EC - AC$ و $AE = EC - AC$

أو $AD = 2EC + AC$ و $AE = EC + AC$

لدينا إذاً:

$$AD^2 = AC^2 + 4EC^2 \pm 4EC \cdot AC = AC^2 + 4EC\,(EC \pm AC)$$
$$= AC^2 + 4EC \cdot AE$$

ومنه نستنتج $EC \,.\, EF = 4EC \,.\, AE$ أي $EF = 4AE$.

تقع النقطة A إذاً على مسافة من الرأس E تساوي ربع *الضلع القائم*. وهكذا، وكما في الحالة السابقة، فإن كل شعاع يسقط على المرآة (BI) موازيا للمحور ينعكس نحو النقطة A.

وهكذا برهن ابن سهل في الحالات الثلاث – $B\hat{A}C = \frac{\pi}{2}$ ، $B\hat{A}C > \frac{\pi}{2}$ ، $B\hat{A}C < \frac{\pi}{2}$ [15] – أن الأشعة الموازية للمحور تنعكس جميعها نحو النقطة A من المحور، على مسافة من رأس المكافئ تساوي ربع *الضلع القائم*.

بقي علينا، لإتمام هذا التحليل المتعلق بدراسة ابن سهل للمرآة المكافئية، النظر في روابطه مع من سبقه حتى نتمكن من تقييم أهمية إسهامه. لنلاحظ في البداية أن ابن سهل يستعين في براهينه بالخاصة المميزة للقطع المكافئ إضافة إلى كون الرأس منصفاً لتحت المماس. يمكننا انطلاقاً من هاتين الخاصتين القيام بمقارنة دقيقة بين دراسة ابن سهل ودراسات الانعكاسيين القدامى ودراسات معاصريه على حد سواء.

إن أول عمل مطروح لهذه المقابلة هو ما كتبه ديوقليس؛ وصلتنا ترجمة عربية لمؤلفاته لا يعلم تاريخها. نجد فيها المقولة نفسها التي صاغها وبرهنها ابن سهل، والاختلاف الوحيد هو أن ديوقليس استعان بخاصة تحت الناظم كمساو للوسيط بدون اللجوء إلى الخاصة المميزة (Symptoma).

كاتب قديم آخر، بيزنطي على الأرجح، اسمه دترومس، كما وصلنا بالعربية، يستعمل في هذه المسألة الخصائص نفسها التي يعتمدها ابن سهل، مع اختلاف في نقطة الانطلاق: فدترومس ينطلق من تساوي الزاويتين ليحدد البؤرة، في حين ينطلق ابن سهل من البؤرة ليبرهن تساوي الزاويتين. ويبدو التباعد أعظم في طريقة إنشائهما القطع المكافئ، إذ يلجأ دترومس إلى الإنشاء بالنقط مستعيناً بمسطرتين، في حين يعمد ابن سهل إلى استخدام الرسم المتصل، كما سنبين ذلك لاحقاً.

وتختلف طريقة ابن سهل عن طريقتي أنتيميوس الترالي والكندي اختلافاً كبيراً إلى حد يغنينا عن التوقف، ولو قليلاً، عنده (الرسم المتصل، دراسة المستوي المماس، الخ.) ولا تبدو الشقة أقل سعة عندما نقارن طريقة ابن سهل بطريقة أبي الوفاء البوزجاني: صحيح أن هذا الأخير استعان، هو أيضاً، بالخاصة المميزة وأخذ منذ البداية مقطعاً مساوياً *للضلع القائم*؛ لكنه أنشأ القطع المكافئ بالنقاط. وهكذا نرى أن هذه الدراسات تختلف اختلافاً بيناً عن دراسة ابن سهل.

ليس الحال كذلك فيما يخص التفحص الذي قام به المؤلف المجهول لمقتطف بوبيو الشهير. فقد استعمل الخاصتين اللتين استعملهما ابن سهل. إلا أنه ليس هناك ما يشير إلى ترجمة هذا المقتطف إلى العربية، أو إلى أنه كان معروفاً بشكل غير مباشر من قبل ابن سهل أو ممن سبقه.

إن تحليل كتابة ابن سهل حول المرآة المكافئية لا يسمح لنا بإيجاد رابط تسلسلي مع الكتاب القدامى والمعاصرين. ويبقى بالمقابل أن أسطورة أرشميدس، التي يذكرها ابن سهل، قد وردت في نص لأنتيميوس الترالي[16].

---

[15] C ترمز هنا إلى رأس القطع المكافئ خلافا لما هو عليه الحال في الشكلين 3 و 4.

[16] Ver Eecke, *Les Opuscules mathématiques de Didyme, Diophane et Anthémius*, pp. 51, 55-56 ; et Rashed, *Les Catoptriciens grecs*, pp. 303, 309.

ولم يكن هذا النص، الذي يذكر هذه الأسطورة[17]، وحده المترجم إلى العربية إلا أنه يتميز من غيره بكونه، بحسب ما نعرفه حتى الآن، النص القديم الوحيد الذي يحوي دراسة عن المرآة الإهليلجية وهو موضوع أعاد ابن سهل دراسته. كما يتميز من غيره من النصوص المترجمة عن اليونانية، بأنه كان مرجعاً جد معروف، فهو موضوع شرح نقدي للكندي[18]، وقد أتى أحمد بن عيسى على ذكره مراراً[19]، وفي القرن العاشر ورد بالكامل في رسالة لعطارد[20]. وتتعزز هذه الوقائع جميعها التي جئنا على إثباتها بشكل ما من قبل ابن الهيثم الذي لا يذكر في دراسته عن المرآة المكافئية إلا أنتيميوس الترالي كاسم وحيد إلى جانب أرشميدس[21]. وعلى هذا فقد اطلع ابن سهل من دون شك، على كتابة الترالي هذه.

وبما أن ابن سهل، طبقاً لأقواله، قد اطلع على كتب لمؤلفين قدامى عدة، فلم تكن معلوماته لتقتصر إذاً على كتابة أنتيميوس الترالي وحده، ومن المنطقي القول بإطلاعه على إحدى الترجمات التي ذكرنا، كما أنه من المعقول إلمامه بالأعمال العربية في هذا المضمار ولا سيما أعمال البوزجاني الذي لم يتقدمه سناً فحسب، بل وعاش هو أيضاً في بغداد منتمياً، مثله، إلى حاشية البويهيين.

يتبيّن من هذه المناقشة الموجزة أن ابن سهل قد انتمى إلى مدرسة بحثت في المرايا المحرقة. وكان طبيعياً أن يقوم بعض العلماء بإعادة معالجة مواضيع سبق طرحها، عاملين على إيجاد حلول أخرى لها، وهي من السمات التي ميزت ذلك العصر، في هذا المجال كما في غيره. ويكفي لتبيان ذلك التذكير، مثلاً، بالدراسات حول الإنشاءات

---

[17] في نص ينسب إلى ديديموس بعنوان: *في صناعة المرآة التي أحرق بها أرشميدس مراكب العدو*؛ نجد هذه الأسطورة بشكل مشوش شرحناه في *Catoptriciens grecs*, pp. 325 ff.

[18] الكندي، كتاب الشعاعات في *L'Optique et la Catoptrique d'al-Kindī*.

[19] *L'Optique et la Catoptrique d'al-Kindī*, Appendix III.

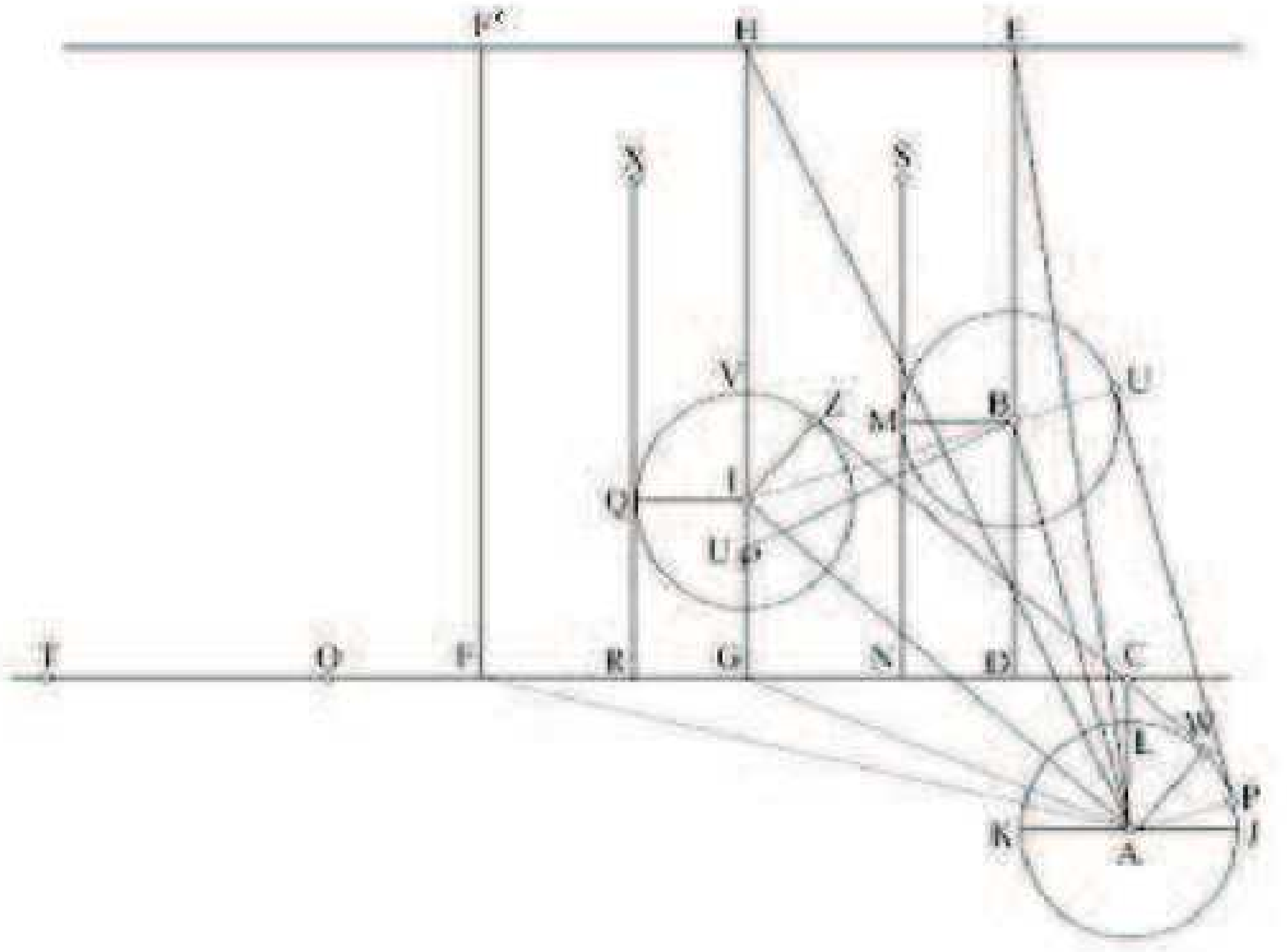
[20] Rashed, Les Catoptriciens grecs, pp. 228-237

[21] أبو علي محمد بن الحسن بن الهيثم، *في المرايا المحرقة بالقطوع* في: مجموع *الرسائل* (حيدرآباد – الدكن: دائرة المعارف العثمانية، 1357هـ/1938–1939)، ص. 2–3. انظر: J. L. Heiberg and E. Wiedemann, 'Ibn al-Haiṯams Shrift über parabolische Hohlspiegel', *Bibliotheca Mathematica*, 3, 10 (1909-1910), pp. 201-223 , اللذين أصدرا طبعة عن اللاتينية لـــ Gerard of Cremona (*Liber de speculis comburentibus*) مع ترجمة ألمانية لها. انظر طبعة:
M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, American Philosophical Society (Philadephia, 1980), vol. 4, especially pp. 13-18.

الهندسية[22]. والواقع أن ابن سهل كان معتاداً على هذا المنحى: فهو قد أسهم، كما سنرى لاحقاً، في دراسة حل مسألة المسبع المنتظم المشهورة التي كانت موضوع نقاش في القصر البويهي من قبل علماء كثر، أمثال القوهي والسجزي[23].

وقد عاد ابن الهيثم في ما بعد إلى أبحاث ابن سهل هذه حول المرآة المكافئية: تكتسي هذه النقطة أهمية خاصة لكل من يريد معرفة ما آلت إليه أعمال ابن سهل ومعرفة علاقات خلفه بها وبالتالي تحديد الموقع التاريخي لمساهمة ابن الهيثم. فقد استعان هذا الأخير، تماماً كابن سهل، بالخاصة الأساسية للمكافئ وبخاصة تحت المماس، وميّز، تماماً كابن سهل، بين الحالات الثلاث المشار إليها سابقاً في البرهان[24]. أما الفارق المهم الوحيد في هذا المجال فيكمن في طريقة العرض التي حسنها ابن الهيثم بلجوئه إلى "التحليل والتركيب". ومهما يكن من أمر، فإن هذه المقارنة لا تترك مجالاً للشك في اطلاع ابن الهيثم على رسالة ابن سهل هذه. ويزداد هذا الاستنتاج يقيناً عندما يأتي ابن الهيثم على ذكر الإنشاء الميكانيكي للمنحنيات المخروطية.

2.2. ينتقل ابن سهل بعد ذلك إلى رسم المكافئ رسماً متصلاً بوساطة البؤرة والدليل، فيأخذ نقطة ثابتة A ومستقيماً ثابتاً DF، وطولاً = DE على مستقيم عمودي على DF. وليكن AC العمود المسقط من A على DF؛ تقع النقطتان A و E على جانبي DF و DE > AC.



الشكل. 5

[22] انظر مثلاً عادل انبوبا، *تسبيع الدائرة*، (حول تاريخ هذه المسألة في الرياضيات العربية)، *Journal for the History of Arabic Science*, 1, 2 (1977), pp. 352-384, وكذلك ملخص بالفرنسية لهذا المقال، في:
Adel Anbouba, « Construction de l'heptagone régulier par les arabes au 4ème siècle de l'hégire », *Journal for the History of Arabic Science*, 2, 2 (1978), pp. 264-269 ; R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. 3 : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique* (London, 2000), chap. III.

[23] انظر أعلاه الهامش 21، والفصل الرابع.

[24] انظر الهامش 20 أعلاه.

يشرح ابن سهل عملية إنشاء ثلاث نقط من المكافئ المعرف بالبؤرة A وبالدليل EH الموازي لـــ DF، وذلك من دون تسميته حتى الآن بالقطع المكافئ. هذه النقاط الثلاث هي النقطة F، والنقطة B على DE، والنقطة I على GH العمودي على DF، التي تحقق

$$IH = IA, \quad BE = BA, \quad AF =$$

وبالتالي

$$BD + BA = IG + IA = FA = \qquad (1)$$

وتتابع النقط C، D، G، F بهذا الترتيب على DF. ويبرهن، بالخلف، أن $AI > AB$.

يرسم ابن سهل نصف دائرة مركزها A وقطرها JK، بحيث يكون $JK \leq AB$، ويرسم دائرتين متساويتي الشعاع مع الدائرة الأولى، مركزهما B و I، ويستتبع الافتراض $JK \leq AB$ بأن $JK < AI$؛ وهكذا فإن الدائرتين (A) و (B) لا تتقاطعان، وكذا الدائرتين (A) و (I) من جهة أخرى. وينشأ PU مماساً مشتركاً لــ (A) و (B)، و MN مماساً لــ (B) عمودياً على DF. ونستنتج من هذا أن

$$MN = BD \text{،} \quad PU = AB \quad \text{و} \quad \widehat{PK} = \widehat{UM}$$

نرمز بـــ s_1 إلى طول محيط الشكل JPUMN و بـــ p لنصف محيط الدائرة (A) لنحصل على :

$$s_1 = \widehat{JP} + PU + \widehat{UM} + MN = \ell + p$$

وبشكل مماثل نقرن المحيط JWZQR بالدائرة (I)، فنحصل على :

$$s_2 = \widehat{JW} + WZ + \widehat{ZQ} + QR = \ell + p$$

إن طريقة ابن سهل للتوصل إلى الرسم المتصل تتبع عملياً من العلاقة $s_1 = s_2$، الناتجة عن المعادلة (1).

يأخذ ابن سهل كوساً صلباً، بحيث ينزلق ضلع زاويته القائمة NO على DF، في حين ينطبق الضلع الآخر NS على NM ويختار $NS > NM$. إن النقطة A ثابتة، وكذلك نصف الدائرة (A)؛ أما الدائرة (B) فمتحركة يرتبط بها حزام طوله $\ell + p$، يثبت أحد طرفيه في J على نصف الدائرة (A)، أما الآخر فمثبت في N على الكوس. ويفترض أن الحزام غير مرن: يتكلم ابن سهل عن "سلك حديدي" ويشرح ضرورة استعمال الدوائر كي لا ينقطع هذا السلك. فلو تحولت الدوائر إلى مجرد نقط لاختزال المحيط ليصبح ABD مستدق الرأس في B لدرجة قد ينقطع معها السلك تحت ضغط المسبر.

إن الضغط على الدائرة (B) مع الإبقاء على الحزام مشدوداً وعلى الدائرة (B) متماسة مع ضلع الكوس NS، يسمح بانزلاق الكوس على المستقيم DF الذي يلعب دور السكة. ويرسم المسبر الموضوع في النقطة B قوساً مكافئياً BI. لنلاحظ إمكانية تحريك النقطة B في الاتجاهين وصولاً إلى رأس القطع المكافئ من جهة وإلى الموقع الذي تصبح فيه الدائرة (B) مماسة للمستقيم DF من جهة أخرى.

أما الجزء الأخير من تفحص الرسم المتصل للقطع المكافئ، فهو ضائـــع للأسف، يفترض أن يحتوي – كما يظهر تشابه سير بقية الفصول – على دراسة عن المماس في نقطة من القوس BI الذي أنشئ، وعن المستوي المماس

للسطح المتولد من هذا القوس وأخيراً، عن انعكاس الشعاع الضوئي على هذا السطح. ويهتم هذا الجزء الضائع كذلك بالتثبت من كون المرآة المنشأة بالبؤرة والدليل هي فعلاً مكافئية، إذ إن خاصة البؤرة – الدليل لم تكن بعد كافية في القرن العاشر، عند ابن سهل على الأقل، للتعريف بالمكافئ كمحل هندسي للنقاط.

3. مرآة مجسم القطع الناقص (أو الإهليلجية)

1.3. يتفحص ابن سهل بعد ذلك إشعال جسم قابل الاحتراق على مسافة معينة بانعكاس ضوء يوجد منبعه على مسافة متناهية، أي البحث عن إحداث إشعال في نقطة A موجودة على مسافة معينة، انطلاقاً من منبع ضوئي موجود في نقطة C. ولذا يدرس ابن سهل المرآة الإهليلجية.

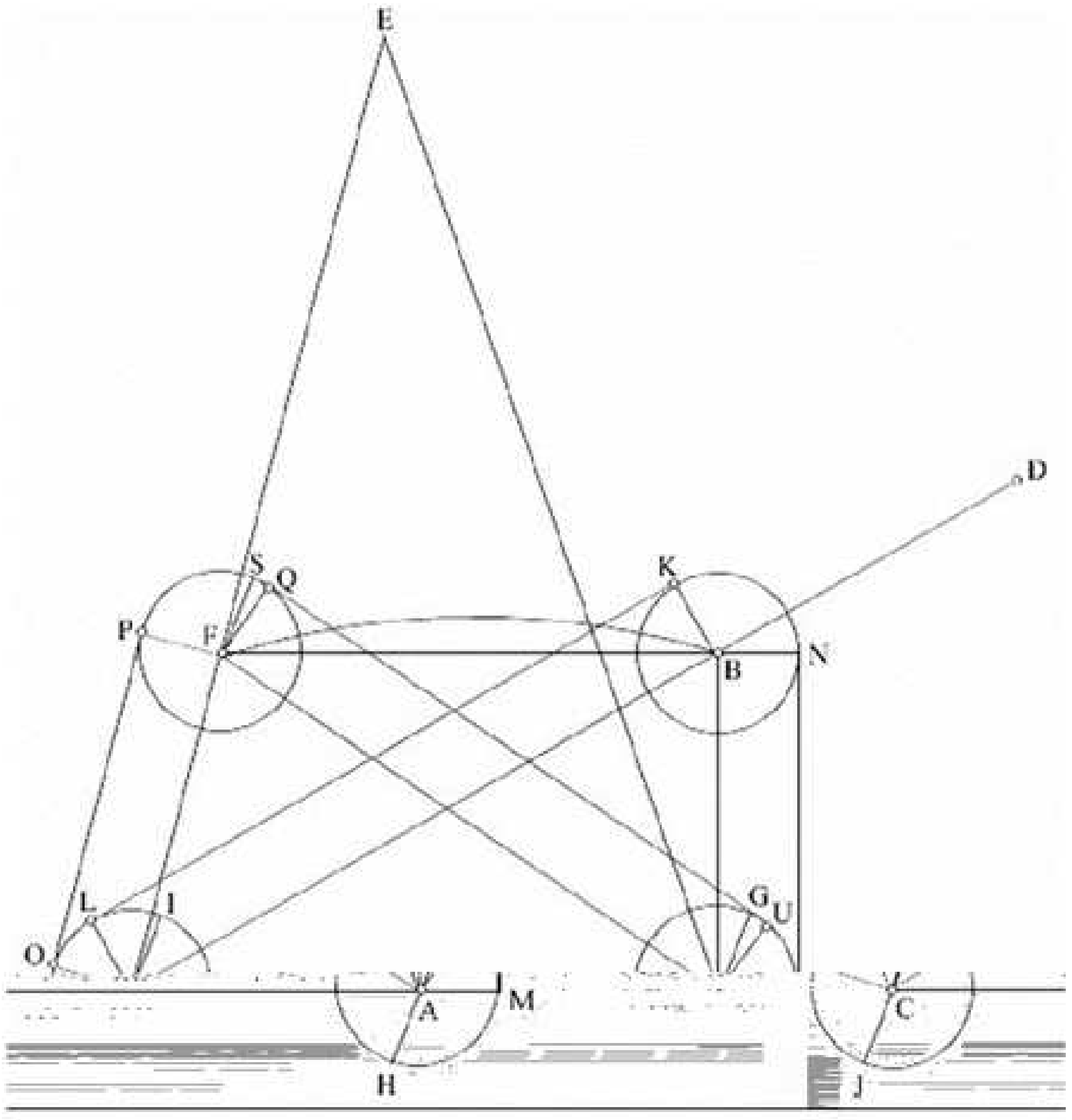
وكما ذكرنا سابقاً، فإننا لا نعرف حتى الساعة، أية كتابة مخصصة للمرآة الأهليلجية سابقة لنص ابن سهل، باستثناء دراسة لأنتيميوس الترالي. وقد يعود ضعف اهتمام الباحثين في المرايا المحرقة، بهذه المرآة إلى ما تفرضه من شروط قاسية في ما يتعلق بموقعي المنبع والجسم المشعَل. ودراسة أنتيميوس هذه لا تتعدى كونها مدخلاً يرتكز فيه العالم البيزنطي على خاصة بؤرتي القطع الناقص ليؤكد، ومن دون أي شرح إضافي، انطلاقاً من قوانين الانعكاس، أن الشعاع المنبثق من إحدى البؤرتين ينعكس نحو الأخرى. يشير أنتيميوس كذلك إلى ما يعرف بطريقة البستاني لرسم القطع الناقص رسماً متصلاً[25]. ويبدو جلياً اطلاع ابن سهل على هذه الدراسة، ولكنه من الواضح، في ضوء ما وصلنا من أبحاثه حول المرآة الإهليلجية، أنه قد أعاد كلياً دراسة هذه المسألة. ونظراً إلى ضياع القسم الأول من هذا الفصل، وهو قسم مخصص لدراسة الإهليلج كقطع مخروطي، فإن ما وصلنا يعالج طريقة الإنشاء الميكانيكي للإهليلج ويبحث في انعكاس الضوء في مرآة إهليلجية.

2.3. بُغية رسم قوس قطع ناقص رسماً متصلاً، ينطلق ابن سهل من ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة A وB وC تحقق: $AB < AC < BC$ (الشكل. 6).

يضع على المستقيم CB نقطة D تكون كالتالي: $CB + BA = CD = \ell$؛ ويضع على الدائرة (C, ℓ) نقطة E تحقق $A\hat{C}B < A\hat{C}E \leq C\hat{A}B$، حيث B و E تقعان في نفس الجهة بالنسبة إلى المستقيم CA؛ ويضع على المقطع CE نقطة F متساوية البعد عن A و E. أي أن: $FA + FC = \ell$. وهكذا تقع النقطتان B وF على الإهليلج ذي البؤرتين A و C والدائرة الدليلة (C, ℓ). وكما فعل مع القطع المكافئ، لا يسمي ابن سهل هذا المقطع باسمه (الإهليلج) عند عرضه طريقة رسم متصل للقوس BF المحدد بهذا الشكل.

---

[25] انظر مثلاً: Ver Eecke, Les *Opuscules mathématiques de Didyme, Diophane et Anthémius*, pp. 47 ff. وحسبما يقول الرياضي السجزي، المعاصر لابن سهل، فإن الأخوة بني موسى، من رياضيي منتصف القرن التاسع، كانوا يعرفون الرسم المتصل للقطع الناقص بالطريقة المسماة طريقة البستاني.



الشكل. 6

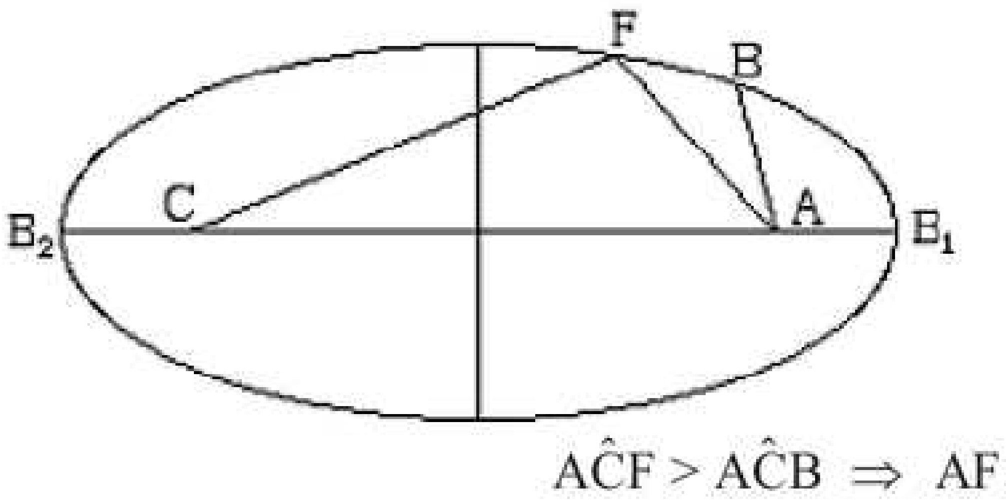
ينتج من مجمل الافتراضات المعتمدة لإنشاء F أن $AF > AB$، وهي علاقة يبرهنها ابن سهل بالخلف، وبالتالي فإن $CF < CB$. لدينا كذلك $CF \geq AB$[26].

نرسم مقطعين متساويين ومتوازيين GH وIJ، بوسطين هما بالترتيب A وC – $IJ = GH < AB$ – ثم نرسم الدوائر (A)، (C)، (B) و (F) بشعاع يساوي 1/2GH. وهي لا تتقاطع في ما بينها نظراً إلى افتراض $GH < AB$.

ليكن MN مماساً مشتركاً خارجياً لــ (A) و (B)، وكذلك KL لــ (B) و (C). لدينا:

$$MN = AB \quad \text{و} \quad KL = BC$$

[26] لتبيان ذلك نأخذ الاهليلج ذا البؤرتين A و C والمحور الكبير B_1B_2. فإذا جرت B على القوس B_1FB_2 ازدادت المسافة AB من AB_1 إلى AB_2 وبالتالي تصغر CB:



$$A\hat{C}F > A\hat{C}B \Rightarrow AF > AB$$

فنستنتج:

$$A\hat{C}F \leq C\hat{A}B \Rightarrow CF \geq AB$$

آخذين بالاعتبار محور التناظر، وهو وسيط B_1B_2.

وبالتالي $MN + KL = \ell$.

من ناحية أخرى، بما أن $AM \parallel BN$ و $BK \parallel CL$ و $AH \parallel CJ$، نحصل على $\widehat{HM} + \widehat{NK} + \widehat{LJ} = p$، حيث p هو محيط الدائرة. نقرن عندئذ الدائرة (B) بمحيط الشكل HMNKLJ وطوله:

$$s_1 = \widehat{HM} + MN + \widehat{NK} + KL + \widehat{LJ} = \ell + p$$

وبشكل مماثل، ليكن UQ مماساً مشتركاً لــ (A) و (F)، وكذلك PO لــ (F) و (C)، فنقرن حينها الدائرة (F) بمحيط الشكل HUQPOJ ذي الطول

$$s_2 = \widehat{HU} + UQ + \widehat{QP} + PO + \widehat{OJ}$$

وكالسابق لدينا

$$\widehat{HU} + \widehat{PQ} + \widehat{OJ} = p \quad \text{و} \quad UQ + PO = AF + FC = \ell$$

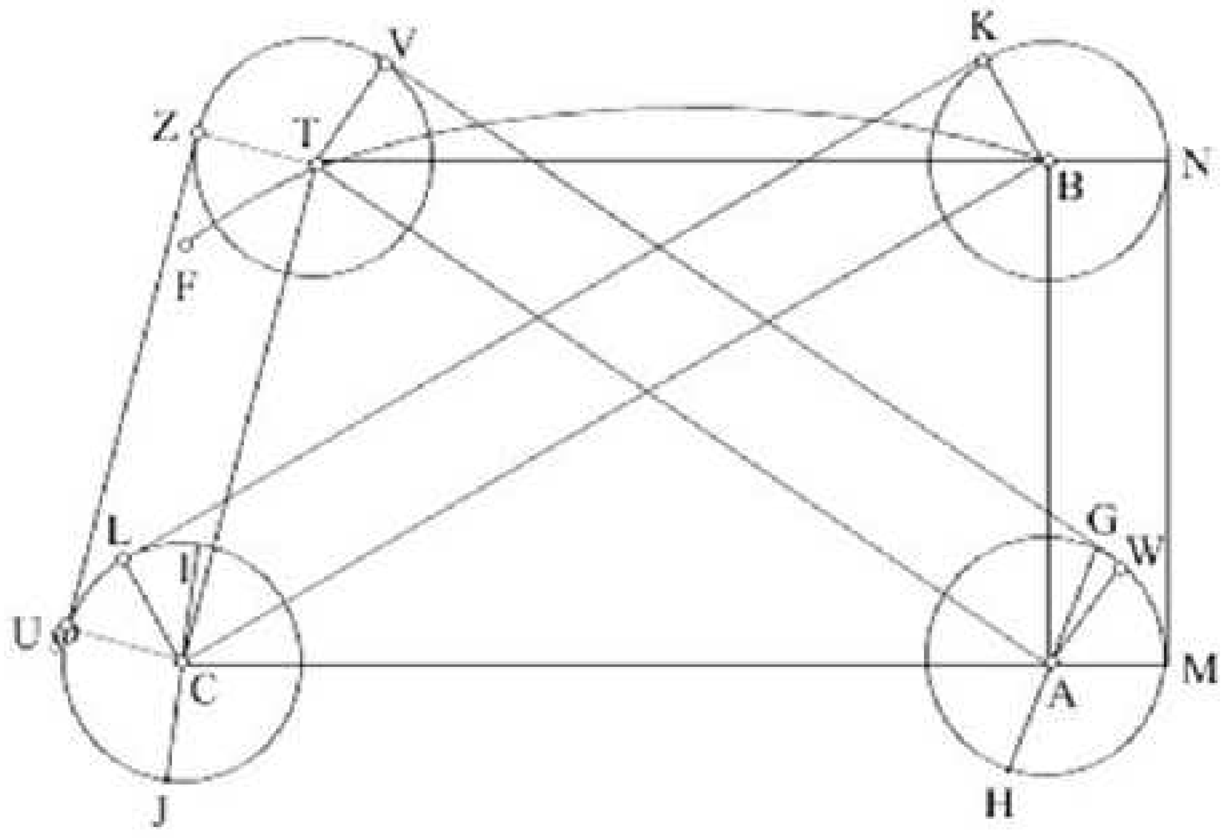
أي أن $s_2 = \ell + p = s_1$

عند ذلك يتصور ابن سهل جهازاً مؤلفاً من ثلاث دوائر متساوية الشعاع تلعب دور بكرات، ومن حزام طوله ثابت $\ell + p$؛ اثنتان من هذه البكرات، ومركزهما A و C، ثابتتان، أما البكرة الثالثة، ومركزها B، فهي متحركة. يُثبت طرفا الحزام أحدهما في نقطة H من الدائرة (A) والآخر في J من الدائرة (C)، ويحيط هذا الحزام بالبكرة (B) [الشكل. 7].

ندفع بالبكرة (B) مع الإبقاء على الحزام مشدوداً فيرسم المركز B قوس القطع الناقص BF.

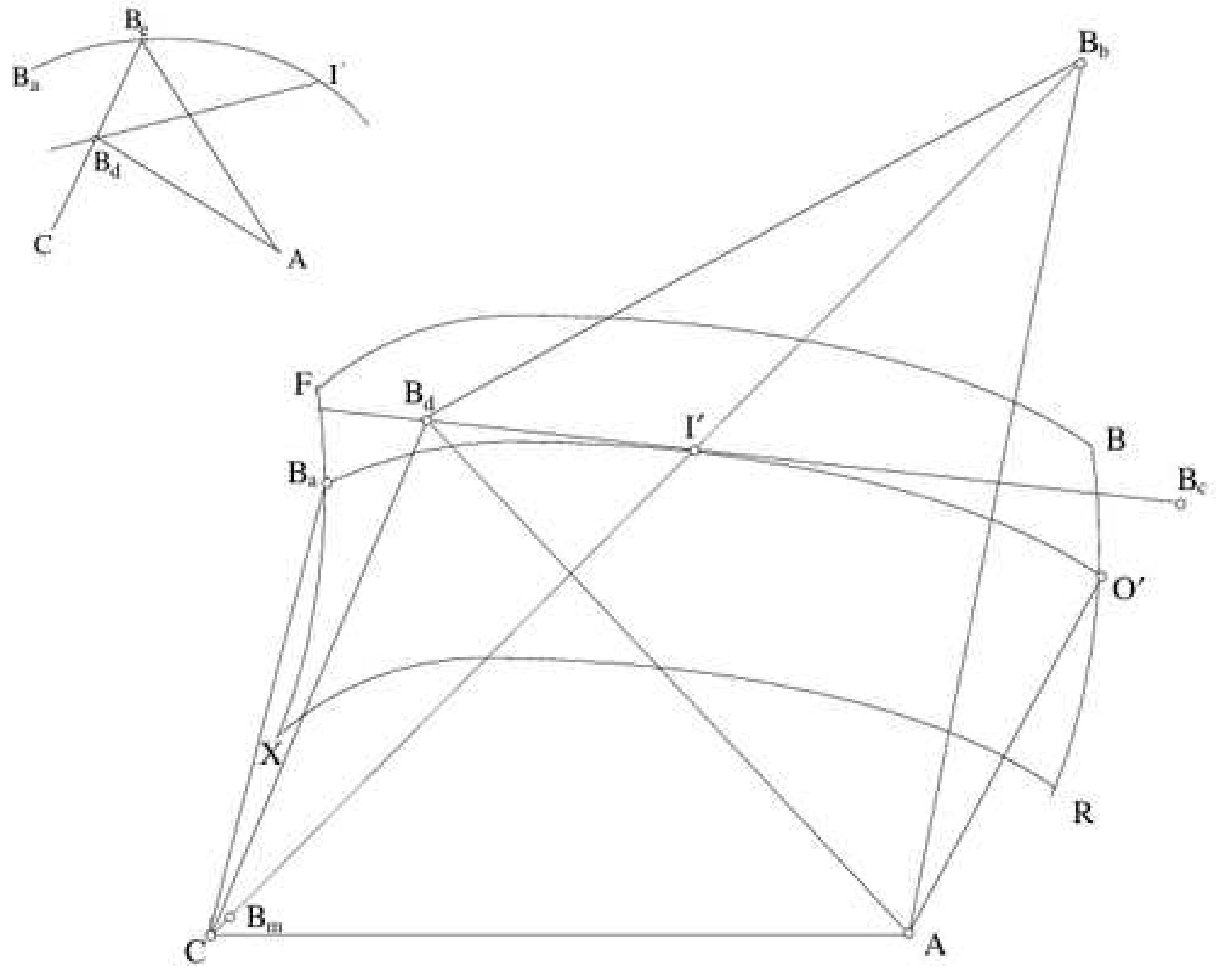
3.3. ويتابع ابن سهل دارساً الانعكاس على مرآة إهليلجية، يرمز إليها بالسطح (BX) الذي نولده بتدوير القوس BF حول AC، فترسم فيه بذلك B و F قوسين دائريين هما على التوالي BR و FX. لنبرهن أن الأشعة الواردة من C تنعكس نحو النقطة A [الشكل. 8].

لتكن T نقطة على القوس BF نقرنها بالدائرة (T) وبمحيط طوله s. تتطابق الدائرة (T) في أحد مواقعها مع (B)، فينتج من ذلك أن $s = s_1$، وبالتالي $TA + TC = BA + BC$.



الشكل. 7

لتكن I' نقطة ما من (BX)، يتقاطع المستوي $AI'C$ و (BX) وفق قوس B_aO'، أحد أوضاع القوس FB، فنحصل إذاً على $I'A + I'C = BA + BC$. نمدد CI' طولاً قدره $I'A$؛ $I'B_b = I'A$ فيكون مُنصف الزاوية $AI'B_b$ ولنسمه $B_cI'B_d$، مماساً في النقطة I' للقوس B_aO'. يبرهن ابن سهل ذلك، وكذلك وحدانية المماس، بالخلف.



الشكل. 8

إن المستوي الحاوي للمستقيم B_cB_d والعمودي على المستوي ACI' مماس للسطح (BX) في النقطة I'؛ وهو مستوي مماس وحيد.

ويستعمل ابن سهل برهان الخلف كذلك ليثبت أن المستقيمين AI' و CI' لا يقطعان السطح (BX) خارج النقطة I'. ينعكس الشعاع الضوئي القادم باتجاه CI' على المرآة (BX) باتجاه I'A، وفقاً لقوانين الانعكاس. والأمر صحيح لكل نقاط السطح (BX).

نلاحظ في الحالتين المعالجتين (المرايا المكافئية والإهليلجية) اهتمام ابن سهل بصورة خاصة بتحديد المستوي المماس عند نقطة سقوط الضوء على السطح العاكس، وكذلك بوحدانية هذا المستوي. ولا ينبع هذا الاهتمام من معرفته بنظرية المخروطات فحسب، بل إنه مرتبط مباشرة بمفهومه لانعكاس الضوء. فهو لا يكتفي بقانون تساوي زاويتي الورود والانعكاس، بل يستند إلى القانون الناص على كون مستقيم الشعاع الوارد ومستقيم انعكاسه، وأخيراً العمودي للمستوي المماس في نقطة السقوط هذه على السطح، تقع جميعها في مستو واحد. وليس السطح العاكس بالنسبة إلى ابن سهل هو المهم، بل هذا المستوي المماس. وعلى الرغم من اعتماده المستمر في دراسته للمرايا المكافئية والإهليلجية على هذين القانونين، فهو لم يصغهما صراحة. وعلى الرغم من ذلك يجب الاحتراس من اعتبار ذلك ظاهرة معرفية تنم عن قصور في تطوير المفاهيم لديه: فالموضوع لا يتعدى مجرد أسلوب كتابة. فابن سهل، عالم الهندسة أساساً، لا يولي فيزياء الضوء أو فيزيولوجيا البصر عنايته؛ لقد اختار عرضاً هندسياً مقتصداً واضح البرهان.

ومهما يكن من أمر، فابن الهيثم يتابع في ما بعد ويلح على أهمية المستوي المماس، ويولي عناية خاصة لصياغة قوانين الانعكاس في أكثر من مكان في كتاب *المناظر*، فنراه يكتب:

> "كل ضوء ينعكس عن سطح صقيل، فإن كل نقطة من السطح الصقيل الذي منه انعكس الضوء، ينعكس الضوء منها على خط مستقيم، يكون هو والخط المستقيم الذي عليه امتد الضوء إلى تلك النقطة، والعامود الخارج من تلك النقطة، القائم على السطح المستوي المماس للسطح الصقيل على تلك النقطة في سطح واحد مستو، ويكون وضع الخط الذي عليه ينعكس الضوء بالقياس إلى العامود المذكور كوضع الخط الذي عليه امتد الضوء من سطح صقيل، فإنه يحيط مع العامود الذي يخرج من تلك النقطة قائماً على السطح المستوي المماس للسطح الصقيل على تلك النقطة، بزاوية مساوية للزاوية التي يحيط بها الخط الأول الذي عليه امتد الضوء إلى تلك النقطة مع ذلك العامود، وتكون الخطوط الثلاثة في سطح واحد مستو قائم على السطح المستوي المماس للسطح الصقيل على نقطة الانعكاس على زوايا قائمة"[27].

ويتميز هذا النص بوضوح صياغته لقانوني الانعكاس بشكل لا مثيل له من قبل، غير أن ابن الهيثم لا يأتي فيه بأمر لم يتناوله من قبله وبدقة ابن سهل في براهينه. اختلاف الأسلوب هذا، بين المهندس ابن سهل والمهندس – الفيزيائي ابن الهيثم، يستحق منا اهتماماً خاصاً، وسنعود إليه لاحقاً.

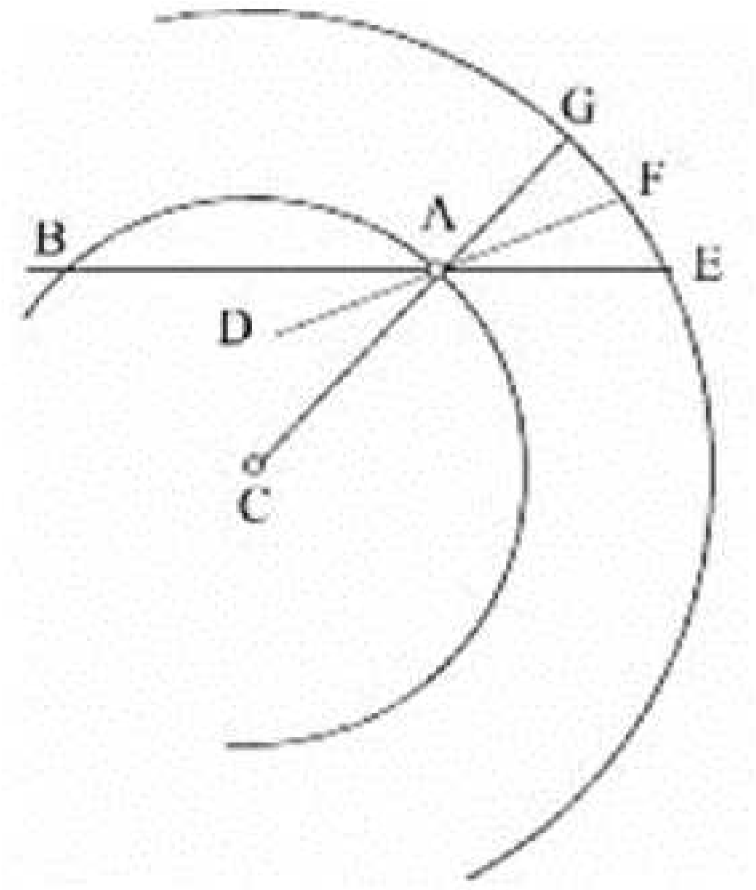
---

[27] أبو علي محمد بن الحسن بن الهيثم، *كتاب المناظر*، المقالة الرابعة: استانبول، فاتح، 3215، ص. 14[ر-ظ].

4. الانكسار وقانون سنيلليوس

في القسم الثاني من كتاب *الحراقات*، يتساءل ابن سهل عن الإشعال بالانكسار فيقوده ذلك إلى دراسة العدسات البلورية. وللإحاطة بدقة بإجابته، علينا بادئ ذي بدء، الإلمام بمعرفته الشخصية. ففي ضوء ما وصلنا من شهادة، استحوذ الفصل المخصص لهذا الموضوع من كتاب *المناظر* لبطلميوس جل اهتمامه. فقد قام ابن سهل، عند قراءته المقالة الخامسة من هذا الكتاب، بصياغة مذكرة مقتضبة حول شفافية الفلك، كان ينوي ضمها إلى مناقشة أكثر إسهاباً لمجمل الكتاب الخامس هذا. فمن الطبيعي إذاً أن ننطلق من تفحص هذه المذكرة المرتبطة بقراءته كتاب *المناظر* لبطلميوس، لنعود بعدها إلى كتاب *الحراقات* الذي صيغ من دون شك في مرحلة لاحقة.

يهدف ابن سهل في مذكرته هذه إلى برهنة أن شفافية الفلك ليست مطلقة. فيأخذ شعاعاً آتياً من نقطة F من الفلك إلى نقطة A من سطح كرة العناصر (ومركزها C) حيث ينكسر باتجاه AB. حالات ثلاث يمكن تصورها للشعاع المنكسر AB تبعاً لوضعية الشعاع الساقط FA بالنسبة إلى الناظم العمودي GA وللامتداد AE لـــ BA. فهو إما يقع بين GA و AE (الحالة 1) أو متطابقاً مع EA (الحالة 2) أو خارجهما (الحالة 3). في الحالة الأولى، يستنتج أولاً ابن سهل أن زاوية الانكسار BAC أكبر من زاوية الورود GAF، وبما أن FA واقع في الوسط I و AB في الوسط II، يستنتج ابن سهل ثانياً أن II أكثر شفافية من I، وبالتالي، أن الكرة السماوية ليست في غاية الشفافية.

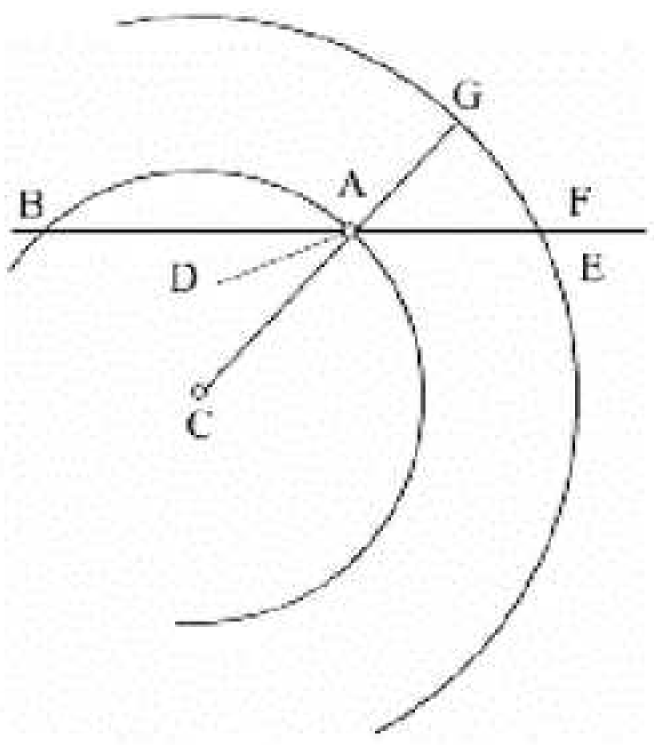


الشكل. 9

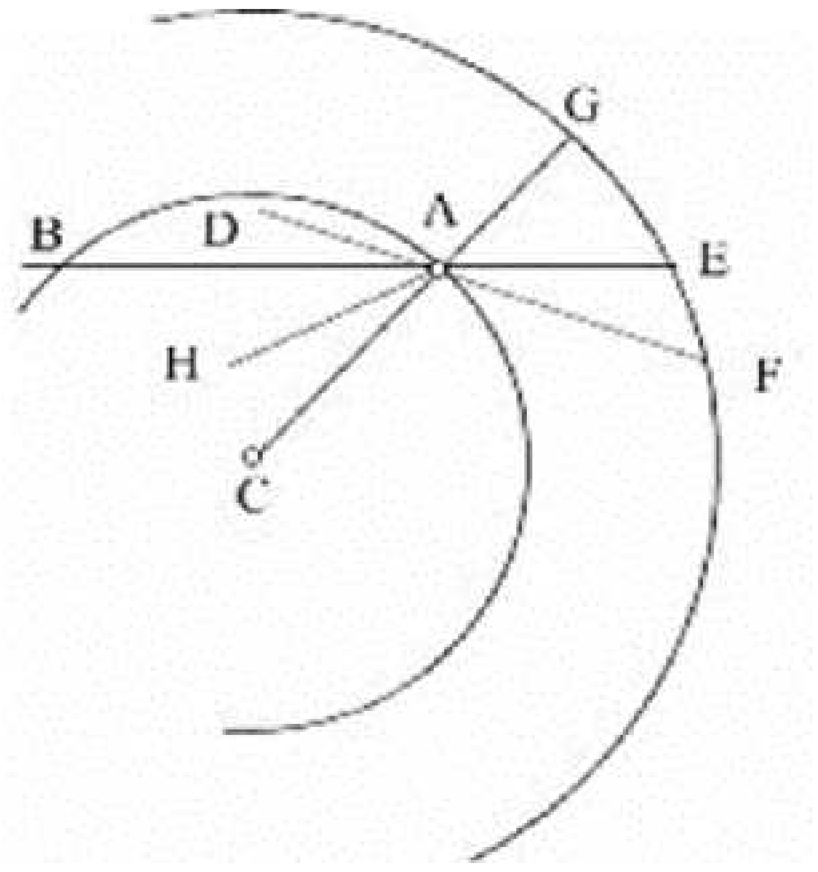
في الحالة الثانية (FA متطابقة مع EA) فإن انكسار FA باتجاه AB يعني أن الوسطين I وII متساويا الشفافية: وهي شفافية الكرة السماوية. إذا لم يتغير الوسط II، إذا كان الشعاع AF، الذي يتطابق دائماً مع EA، ينكسر بحسب AD (خط مستقيم يقع بين AB والناظم AC) فلأن AF يقع في وسط 'I أكثر شفافية من الوسط II. وبالتالي أكثر شفافية من الوسط I. لتكن i_1 زاوية الورود في الوسط I و i_2 زاوية الانكسار في الوسط II. عندئذ، فإن بقيت

الشفافية في الوسط II والزاوية i_1 دون تغيير بإمكاننا القول عندئذ: إذا انكسر FA وفق AB، $- i_1 = i_2 -$ فإن للوسط I نفس شفافية الوسط II.

أما إذا انكسر FA وفق AD، أي $i_1 < i_2$، فإن الوسط 'I أكثر شفافية من الوسط II، وبالتالي، أكثر شفافية من الوسط I. يوجد إذاً وسط أكثر شفافية من الكرة السماوية [الشكل. 10].



الشكل. 10



الشكل. 11

في الحالة الثالثة (يقع AF وراء AE)، فانكسار AF باتجاه AB يعني أن الوسط I أكثر شفافية من الوسط II. فإذا بقي الوسط II كما هو وانكسر AF باتجاه AH (مستقيم واقع بين AB والناظم AC)، فذلك لأن AF في وسط 'I أكثر شفافية من الوسط I [الشكل. 11].

وهكذا تظهر طريقة ابن سهل في هذه المذكرة. فلتحديد النقطة F نقرأ له ما يلي:

> "وليكن نقطة ثابتة في وجه كوكب يخرج ضوءها على خط ا ب وهي نقطة و. فنقطة و في جانب خط ا جـ الذي فيه نقطة هـ، لما بينه بطلميوس في المقالة الخامسة من كتاب *المناظر*"[28].

فمن الواضح أن ابن سهل يشرح هنا قانون وجود الشعاعين الوارد والمنكسر في المستوي نفسه مع الناظم وأنهما على طرفي الناظم[29]. كما يطبق قاعدة أخرى مأخوذة عن بطلميوس: وهي أن الزاوية الأكبر تنم عن شفافية أكبر. أو بعبارة أخرى أن الانكسار يتوقف كماً واتجاهاً على فارق الكمدة بين وسطين يعبرهما الضوء؛ إذ يبتعد الشعاع عن الناظم بانتقاله من وسط أكثر كثافة إلى آخر أقل كثافة، ويقترب منه في الحالة المعاكسة. وبعبارة أخرى، إذا ما

[28] انظر *البرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء*، ص. 145 سطر 9–12.

[29] Ptolemy, *L'Optique de Claude Ptolémée*, Université de Louvain, Recueil de travaux d'histoires et de philologie, ed. A. Lejeune, 4e sér., fasc. 8 (Louvain, 1956), pp. 224-225, where we read : 'Debet ergo iterum exinde, sicut in praecedentibus, superficies quae transit per radium fractum, esse directa super superficiem de qua fit fractio'.

رمزنا بـــ i_1 إلى زاوية الورود في الوسط I وبـــ i_2 إلى زاوية الانكسار في الوسط II، وكانت i_1 و i_2 حادتين؛ فإذا كانت $i_1 > i_2$، نستنتج أن الوسط I أقل كمدة من الوسط II[30].

حتى هنا، ما يزال ابن سهل يطبق في دراسته للانكسار مفاهيم كانت موجودة عند بطلميوس[31]، إلا أن معرفة ابن سهل بالانكسار لا يقف عند هذا الحد: فهو لا يتخطى بطلميوس فحسب بل يتبع منحى آخر. فبمجرد قراءة مذكرته هذه حول شفافية الفلك، نتنبه لما يوليه من أهمية لمفهوم الوسط. حيث يعمد إلى إظهار أن كل وسط – بما في ذلك الفلك – يتسم بكمدة معينة ويعرف بها. ولقد وعى ابن الهيثم هذه الفكرة لاحقاً، إذ كتب لدى اطلاعه على مذكرة ابن سهل هذه، أن سلفه أراد أن يبرهن "أن الشفيف الذي في الأجسام المشفة يمكن أن يزداد لطفاً وصفاء إلى غير نهاية، أعني أن كل شفيف في جسم مشف يمكن أن يتخيّل شفيفاً أصغر منه"[32]. ومهما يكن من أمر، فإن هذا الطرح من قبل رياضي كابن سهل يوضح بجلاء مفهوم الوسط الذي تحدده كمدة خاصة به.

ولكن الاكتشاف الأصيل لابن سهل يكمن في طرحه، في كتاب *الحراقات* لسؤال لم يسبقه إليه أحد، وهو موضوع الإشعال بواسطة الانكسار. فهو لم يعد يعرّف الوسط بكمدته الخاصة بل بنسبة ثابتة تميزه. ويشكل مفهوم النسبة الثابتة هذه التي تميز الوسط عن غيره الحجر الأساس لدراسة الانكسار في العدسات. فهذه النسبة التي يعلنها ابن سهل من دون القيام بحسابها، ليست في الواقع سوى مقلوب قرينة الانكسار n للوسط بالنسبة إلى الهواء. إنه حقاً قانون سنيلليوس للانكسار، بشكل يشابه كثيراً ما سنقرأه لدى سنيلليوس نفسه بعد حوالي ستة قرون ولكن دعنا نعود إلى رسالة ابن سهل.

في مطلع دراسته للانكسار في العدسات، يأخذ ابن سهل سطحاً مستوياً يحدد قطعة GF من البلور، وخطاً مستقيماً CD يمتد الضوء عليه في البلور، لينكسر تبعاً لـــ CE في الهواء. وينشئ في G ناظماً للسطح GF يلتقي مع CD في H ومع الضوء المنكسر في E.

---

[30] أي، بشكل آخر:

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

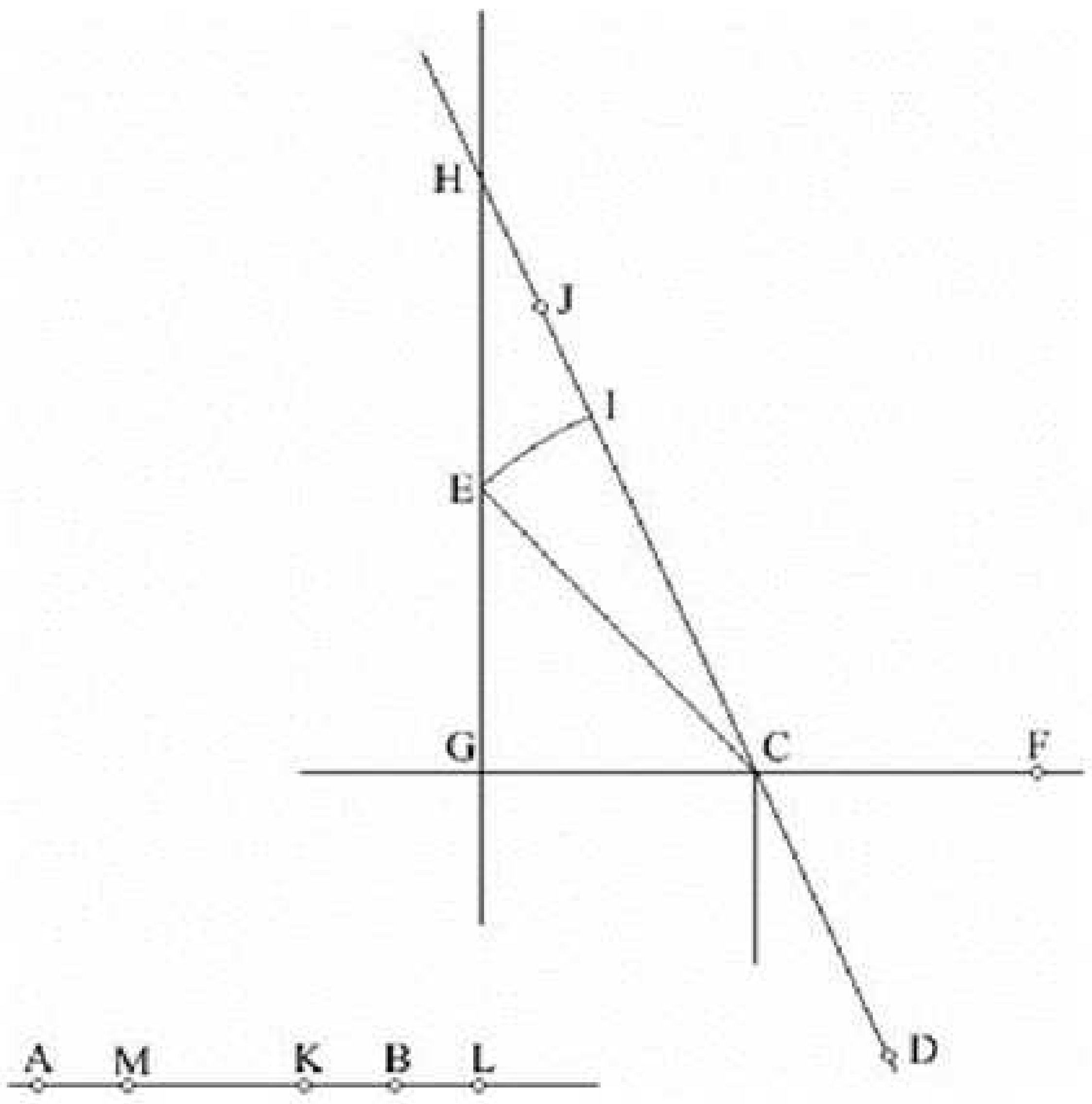
حيث i_1 و i_2 هما زاويتان حادتان، و n_1 و n_2 هما قرينتا انكسار الضوء على التوالي في الوسطين. فإذا كانت $i_1 > i_2$ صارت $\sin i_1 > \sin i_2$، وبالتالي: $n_1 < n_2$.

[31] A. Lejeune, 'Recherches sur la catoptrique grecque, d'après les sources antiques et médiévales', *Mémoires de l'Académie royale de Belgique. Classe des Sciences*, 52, 2 (1957), pp. 157-158.

نلاحظ أن ابن سهل لم يذكر في أي وقت، شعاع البصر؛ كل ما نريده هنا هو التأكيد على قواعد الانكسار ومفهوم كثافة الوسط، إضافة إلى بعض القواعد المأخوذة من المقالة الخامسة من كتاب *المناظر* لبطلميوس.

[32] ابن الهيثم، *قول في الضوء*، الترجمة الفرنسية في

R. Rashed, 'Le Discours de la lumière d'Ibn al-Haytham (Alhazen)', *Revue d'histoire des sciences*, 21 (1968), pp. 197-224, on p. 218 ; reprint in *Optique et Mathématiques : Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe*, Variorum Reprints (Aldershot, 1992), V.



الشكل. 12

من الواضح أن ابن سهل يطبق هنا القانون الذي ذكرناه ومفاده وجود الشعاعين CD في البلور و CE في الهواء في المستوي نفسه مع الناظم GE لسطح البلور. وكعادته، ومن دون أدنى توضيح للمفاهيم، يكتب ابن سهل: "فخط جـ ه أصغر من خط جـ ح. ونفصل من خط جـ ح خط جـ ط مثل خط جـ هـ ، ونقسم ح ط نصفين على نقطة ي، ونجعل نسبة خط ا ك إلى خط ا ب كنسبة خط جـ ط إلى خط جـ ي ونخرج خط ب ل على استقامة خط ا ب ونجعله مثل خط ب ك"[33].

وهكذا يلخص ابن سهل في بضع جمل، إلى أن النسبة $\frac{CE}{CH} < 1$ ويعمد إلى استعمالها على امتداد بحثه المتعلق بالعدسات المصنّعة من البلور نفسه. وهو لا يتوانى عن العودة إلى النسبة نفسها، مستعيداً الشكل نفسه كلما ناقش الانكسار في هذا البلور.

وليست هذه النسبة سوى مقلوب قرينة الانكسار، إذ لو رمزنا بـ i_1 و i_2 إلى زوايتي الناظم GH مع CD و CE على التوالي، لحصلنا على ما يلي:

$$\frac{1}{n} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{CG \cdot CE}{CH \cdot CG} = \frac{CE}{CH}$$

أما ابن سهل فيأخذ النقطة I على المقطع CH بحيث يكون CI = CE، والنقطة J في وسط IH وهو ما يعطينا:

---

[33] كتاب *الحراقات*، ص. 107 السطر 13-15.

$$\frac{CI}{CH} = \frac{1}{n}$$

وتميّز القسمة CIJH البلّور في كل عملية انكسار، وهو ما يبدو أن ابن سهل قد أدركه، ويشهد بذلك استعماله المتواصل لهذه القسمة طوال دراساته. ويستعمل ابن سهل بادئ ذي بدء صراحة النسبة:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{CI}{CJ} = \frac{2}{n+1}$$

ليعود بعدها إلى استعمال $\frac{CE}{CH} = \frac{1}{n}$ بشكل متواصل في بقية رسالته.

كما يبرهن ابن سهل، خلال بحثه في العدسة المستوية–المحدبة والعدسة محدبة الوجهين، أن اختيار القطع الزائد لصنع هذه العدسات يتعلق بطبيعة البلور، إذ إن التباعد المركزي للقطع الزائد هو $e = \frac{1}{n}$. تتيح هذه النتيجة بالغة الأهمية لابن سهل إدخال قاعدة الرجوع العكسي في الانكسار، وهي قاعدة جوهرية في دراسة العدسات ذات الوجهين المحدبين، وهو ما سنراه لاحقاً.

إنه إذاً قانون سنيلليوس نفسه وبالشكل الذي تصوره فيه هذا الأخير؛ فكل الشهادات متفقة على أن سنيلليوس، في الأعمال الضائعة التي صاغ فيها القانون الحامل اسمه، لم يذهب أبعد من ابن سهل[34]. إذ يُثبت غوليوس وكذلك هويكنز وفوسيوس، الذين كانوا على معرفة بعمل سنيلليوس، أن هذا الأخير قد عرف هذا القانون بالشكل التالي:

---

[34] يظهر الإطلاع على مختلف الشهادات المتعلقة بمساهمة سنيلليوس في هذا الموضوع أن صياغته تكاد لا تتعدى إلا قليلاً وضوح صياغة ابن سهل، وأن النهجين متماثلان. في رسالة غوليوس الشهيرة إلى قسطنطين هويكنز المكتشفة من قبل:
D. J. Korteweg, 'Descartes et les manuscrits de Snellius', *Revue de métaphysique et de morale*, 4 (1896), pp. 489-501, on pp. 491-492.

نقرأ:

'Esto medii densioris terminus AB, visible V, radius incidentiae VR, refractus in rariore medio RO, oculi situs in puncto O. Videbitur itaque imago rei visibilis in concursu radii refracti OR continuitati et perpendicularis incidentiae ; quae sit VP et punctum concursus I. In eodem itaque medio, sc. Hic densiore, radius incidentiae verus erit VR, suusque apparens RI. Docent observata quae ratio est VR ad RI, semper obtinere eandem inter quoscumque radios similes ; ut U'R' et R'I', quin in ipso radio perpendiculari et irrefracto UA, ubi incidentis ipsius pars est radius apparens ; neque enim res visibilis U spectata perpendiculariter suo apparet loco, sed superiore in J : atque ut UA ad AJ, ita VR se habet ad RI. Unius itaque radii obliquatione, aut perpendicularis contractione cognita, quod modis pluribus facile fieri potest, cognoscetur ratio ceaterorum incidentium et apparentium omnium, quae, exempli gratia, in aqua ut 4 ad 3, in vitro ut 3 ad 2, quando sc. utrobique oculus consistit in aere'.

وكريستيان هويكنز، وهو ابن قسطنطين هذا، وقد رأى عمل سنيلليوس بنفسه، يرسم تاريخ هذا القانون، فيكتب أنه بعد كبلر : 'فيلبرورد سنيلليوس، بعد ما اتضحت أهمية الأمر، نظرا إلى اكتشاف التلسكوب، توصل بعد عناء كبير وبعد إجراء تجارب عديدة إلى قياس مناسب لقيمة الانكسارات، من دون أن يفهم ما وجده فهما كافيا. لأنه وعلى سبيل المثال، عندما يأخذ المستوي AB كسطح للماء، والنقطة D كالشيء المرئي تحت الماء الذي تراه العين الموجودة في نقطة F على المستقيم FC، ويمدد المستقيم FC حتى يتلاقى مع DA في النقطة G. حيث DA عمودي على سطح الماء. يؤكد سنيلليوس بعد هذا الإنشاء أن صورة الجسم D تظهر في النقطة G وأن بين المستقيمين CD و CG نسبة محددة هي 4 إلى 3 في حالة الماء'. انظر:
(*Œuvres complètes* [THe Hague, 1916], vol. 13, p. 6).

انظر أيضاً شهادة: Isaac Vossius, *De Lucis natura et proprietate* (Amsterdam, 1662), pp. 36-38.

انظر أخيرا بخصوص مخطوطة سنيلليوس الضائعة:
C. De Waard, '*Le Manuscrit* perdu de Snellius sur la réfraction', *Janus*, 39 (1935), pp. 51-75.

النسبة $\frac{CH}{CE}$ كمية ثابتة

إن وجود هذه العلاقة نفسها عند ابن سهل في القرن العاشر لا يقلب تصورنا للتاريخ فحسب، بل يقودنا إلى طرح مخالف لمسألة إعادة اكتشاف هذا القانون مرات عدة. فلنقل إنه، إلى جانب سنيلليوس وهاريو وديكارت، يجب، من الآن فصاعداً، إضافة اسم ابن سهل.

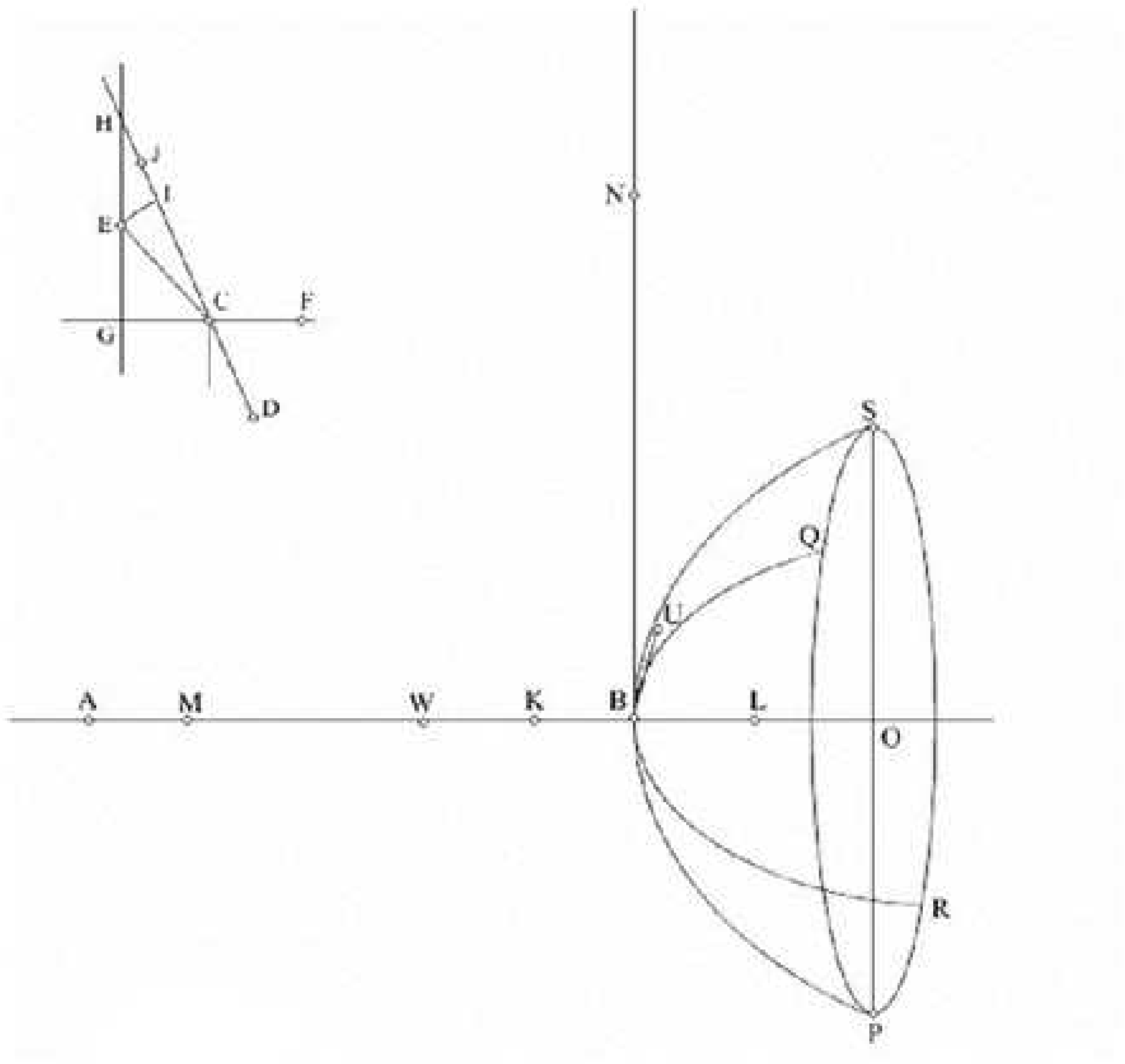
5. العدسة المستوية–المحدبة والعدسة محدبة الوجهين

إن اكتشاف قانون الانكسار وتطبيق مبدأ الرجوع العكسي في حالة الانكسار كافيان لتبيان البون الشاسع الذي يفصل بين ابن سهل وبطلميوس. ولقد قام ابن سهل بدراسة العدسات مستنداً على هاتين الوسيلتين؛ فإذ به ينقاد وبشكل طبيعي إلى برهنة أن القطع الزائد هو منحني انكساري، وإذ به يصوغ نظرية هندسية للعدسات هي، بحسب معرفتنا، أولى النظريات في هذا المجال. يبتدئ هذا الجزء من رسالته، وقد وصلنا كاملاً، بدراسة الانكسار متابَعاً بإنشاء عدسة مستوية–محدبة، مروراً بإنشاء ميكانيكي للقطع الزائد، ليصل إلى دراسة الخاصة الانكسارية لهذا المنحني. وبفضل مبدأ الرجوع العكسي، ينهي ابن سهل سريعاً دراسة العدسة الزائدية محدبة الوجهين.

1.5. يهدف ابن سهل، بادئ ذي بدء، إلى إنشاء عدسة تحدث الإشعال على مسافة منتهية بواسطة أشعة متوازية. ويكون لمادتها نفس قرينة الانكسار n للبلور الذي دُرس سابقاً.

لتكن النقاط A، K، B و L، على خط مستقيم، ولتكن القسمة بينها مماثلة للقسمة C، I، J، H، أي أن

$$\frac{AK}{AB} = \frac{CI}{CJ} \quad \text{و} \quad BL = BK$$



الشكل. 13

لدينا إذاً $\frac{AK}{AL} = \frac{CE}{CH} = \frac{1}{n}$

ولتكن النقطتان M على AB حيث AM = BK، و N على المستقيم العمودي من B على AB بحيث إن $BN \cdot BM = 4BL \cdot LM$. نأخذ القطع الزائد ذا الرأس B والمحور BM و*الضلع القائم* BN. ويتولد، نتيجة دوران القوس الزائدي BS حول المستقيم AB سطح زائدي؛ وترسم S دائرة مركزها O فنحصل على جسم دوراني محدد بالسطح الزائدي وبالدائرة (O, OS) [الشكل. 13]. نفترض أن الجسم قد صُنّع من بلور قرينة انكساره n.

قضية: إن أشعة الشمس الموازية إلى OB والعابرة لهذا الجسم، تتكسر على السطح الزائدي لتتقارب في النقطة A.

وبالفعل إن كل شعاع موازٍ إلى OB يجتاز السطح (O, OS) من دون انكسار ليلاقي السطح الزائدي، إما في النقطة B، وإما في نقطة أخرى $T \neq B$.

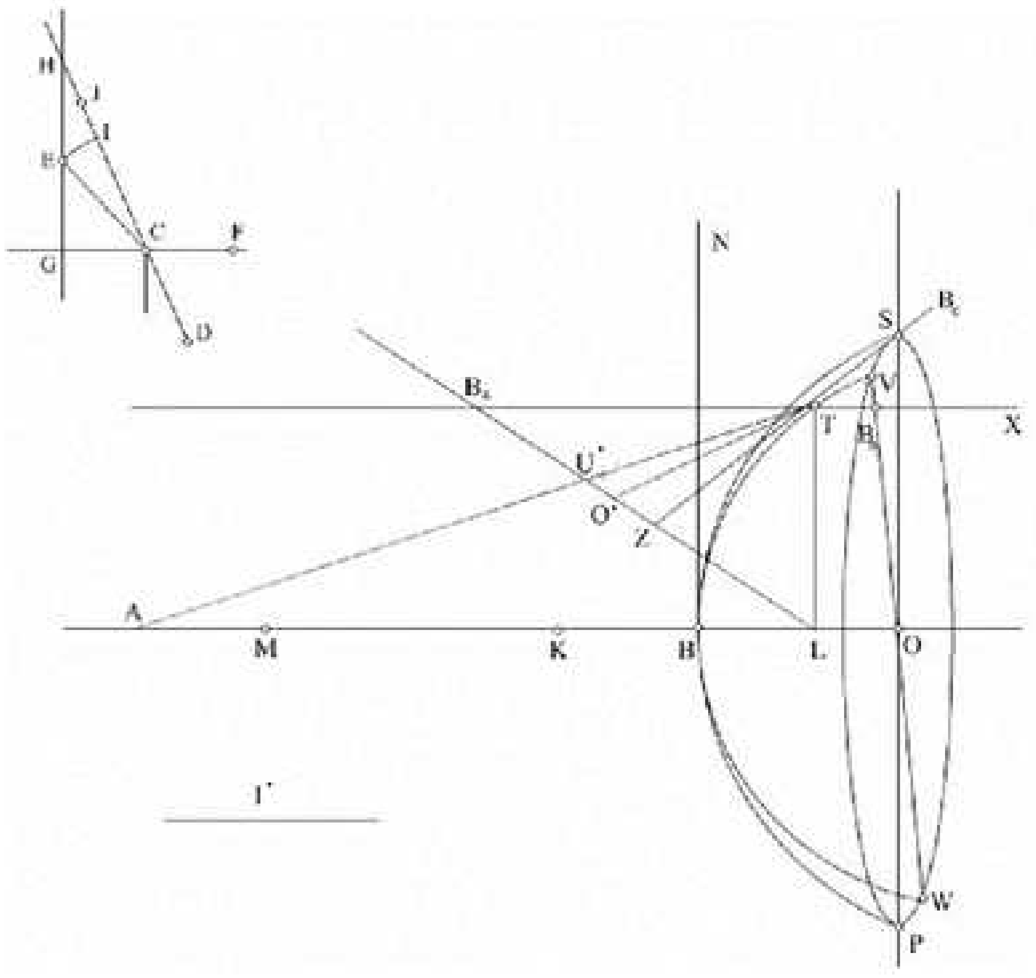
أ. في حالة النقطة B، يبرهن ابن سهل بالخلف ما يلي:

- إن المستوي العمودي في B على OB هو مماس في B على المجسم الزائدي؛
- وحدانية المستوي المماس في B؛
- عدم تلاقي المستقيم AO مع المجسم الزائدي إلا في النقطة B.

فيستنتج أن الشعاع المنتشر باتجاه OB عمودي على المستوي المماس في B، فلا ينكسر ويصل إلى A.

ب. في حالة النقطة $T \neq B$ [الشكل. 14]، يبرهن ابن سهل ما يلي:

- يلاقي المستوي BLT سطح العدسة وفق القطع الزائد VBW ذي المحور BM والبؤرتين A و L؛
- إن المنصف TZ للزاوية ATL هو مماس في T على القطع الزائد؛
- إن المستوي الحاوي على TZ والعمودي على المستوي BLT هو مماس في T على السطح الزائدي، وهو وحيد.



الشكل. 14

لدينا $AT - LT = BM$. لتكن U' على AT بحيث يكون $AU' = BM$؛ لدينا عندئذ $TU' = TL$ وTZ منصف المقطع LU'، وبالتالي LU' عمودي على المستوي المماس.

ليكن XT الشعاع الوارد؛ فهو موازٍ لـــ AL وتوجد الخطوط المستقيمة XT، TL، TZ وTA في المستوي ATL، الذي يشتمل أيضاً على الناظم في النقطة T على المجسم الزائدي؛ سيكون الشعاع المنكسر في هذا المستوي أيضاً. لتكن B_a نقطة تقاطع XT و LZ؛ لدينا:

$$\frac{TU'}{TB_a} = \frac{AU'}{AL} = \frac{AK}{AL}$$

ولكن طبقاً لما سبق إنشاؤه فإن:

$$\frac{AK}{AL} = \frac{CE}{CH}$$

وبالتالي

$$\frac{TU'}{TB_a} = \frac{CE}{CH}$$

وهكذا يتشابه الشكلان TZB_aU' و$CGHE$؛ وبالتالي فإن $TU'A$ هو الشعاع المنكسر المقابل للشعاع الوارد XT، الذي يمر عند المستوي OS في B_b من دون أي انحراف، ليلاقي سطح المجسم الزائدي في النقطة T.

إن حزمة الأشعة الموازية لـــ AB والساقطة على الدائرة (O, OS) تخترق العدسة دون انحراف لتتحول إلى حزمة أشعة متقاربة في النقطة A.

ثم يعرض ابن سهل طريقته في رسم القطع الزائد رسماً متصلاً[35] فينطلق من القسمة $(L، K، B، A)$ التي عرضها سابقاً ليحصل على:

$$\frac{AK}{AL} = \frac{1}{n}$$

حيث n هي قرينة انكسار البلور المستعمل.

لتكن M نقطة على الدائرة (A, AK) بحيث تكون الزاوية AML منفرجة، وN نقطة على المستقيم AM بحيث إن $M\hat{L}N = L\hat{M}N$؛ ومنه $NM = NL$ و $NA - NL = AM = AK$؛ بذلك تقع N على القطع الزائد ذي

[35] كان رياضيو ذلك العصر مهتمين بشكل خاص بإنشاء المنحنيات المخروطية. وهكذا فقد عمد إبراهيم ابن سنان إلى إنشاء القطع الزائد بالنقاط، انطلاقاً من الدائرة، في رسالته: *في رسم القطوع الثلاثة* (انظر our edition in R. Rashed, and H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e siècle* [Leiden, 2000]). كما أنشأ السجزي، معاصر ابن سهل، القطع متساوي الساقين في رسالة هامة عن الخط المقارب لهذا المنحني، انظر:

R. Rashed, 'Conceivability, Imaginability and Provability in Demonstrative Reasoning : al-Sijzī and Maimonides on II. 14 of Apollonius *Conic Sections, Fundamenta Scientiae*, 8, ¾ (1987), pp. 241-256.

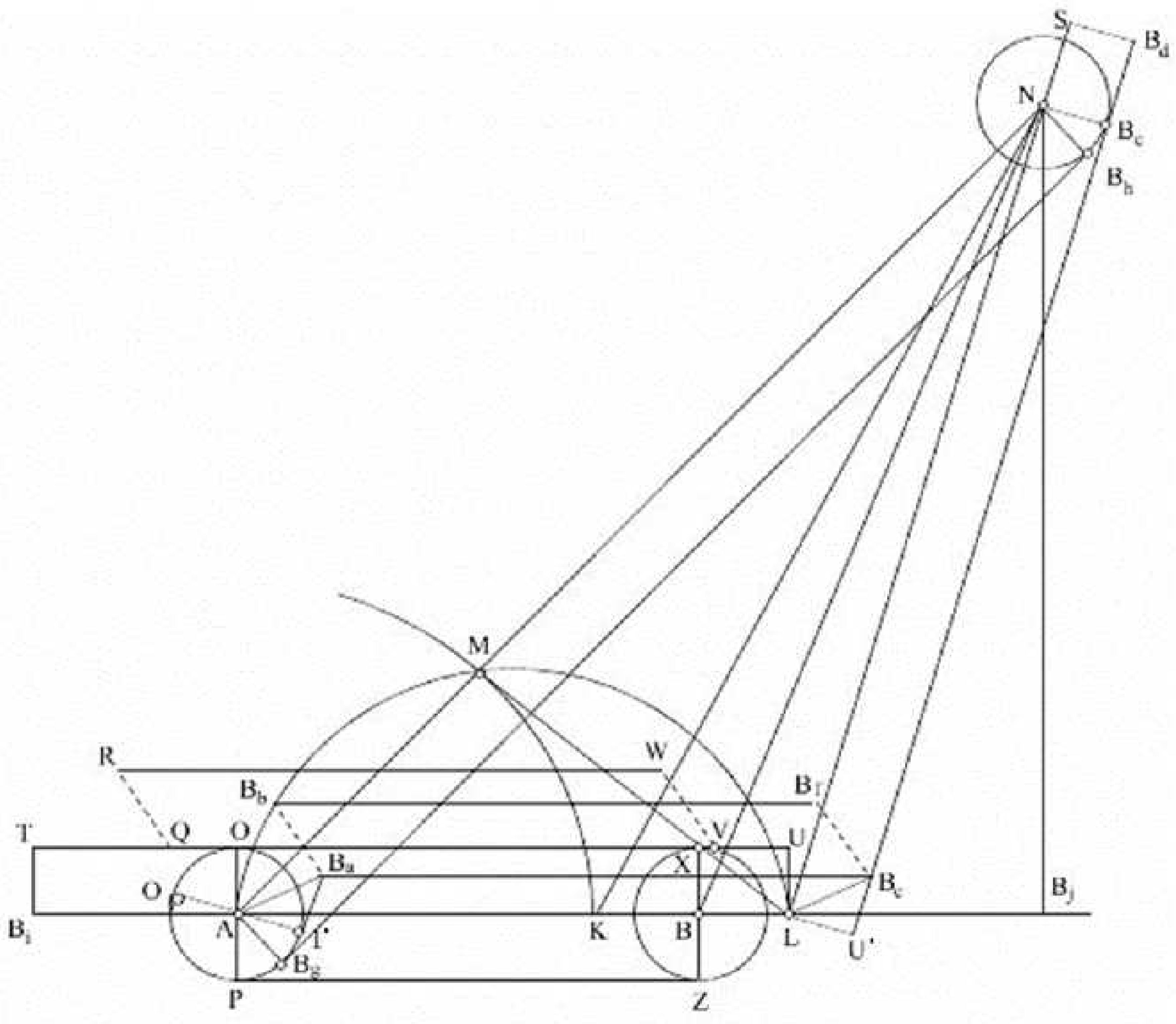
كما كتب كل من القوهي والسجزي مقالة عن البركار التام حيث يتناولان الرسم المتصل للقطع الزائد. انظر:

F. Woepcke, 'Trois traités arabes sur le compas parfait', *Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Impériale et autres Bibliothèques*, 22 (1874), 1^re partie

انظر أيضاً الفصل الخامس أدناه. كما نعلم أن الذين أتوا بعد ابن سهل، كابن الهيثم، تناولوا هذه المسألة بالدراسة.

الرأس B والبؤرتين A و L. وكعادته، لا يسمي ابن سهل القطع المخروطي باسمه في هذه المرحلة. فهو يريد إنشاء القوس BN، وهو قوس زائدي، وطريقته في ذلك مستوحاة مما سبق وقام به بالنسبة إلى القطعين المخروطيين الآخرين.

ليكن المقطع OP وAB منصفه في النقطة A بحيث يكون $OP \leq AB$ و $OP \leq KL$ [الشكل. 15]. نرسم الخط الموازي لـــ AB المنشأ من النقطة O ونعين عليه النقطتين U و X المسقطين العمودين لـــ L وB على الترتيب وكذا النقطتين V و Q بحيث يكون $UV = OQ$ (طول اعتباطي)؛ وأخيراً مقطعاً آخر غير محدد UT بحيث $UT > LN$. ونرسم الدائرتين (A, AO) و (B, BX).



الشكل. 15

نضع 'U على العمودي في L على LN، بحيث يكون $LU' = LU$، ثم نرسم قطراً للدائرة (A) موازياً لـــ 'LU، ليكن 'O'AI. وليكن $I'B_a$ عمودياً على 'AI بحيث يكون $I'B_a = OQ$؛ ولتكن النقاط B_e، B_c وB_d على العمودي في 'U على 'LU، بحيث يكون $U'B_e = OQ$ و $U'B_c = LN$ و $U'B_d = UT$. ثم نرفع من النقاط Q، V، B_a وB_e مقاطع متساوية وعمودية على المستوي ALM: $QR = VW = B_aB_b = B_eB_f$؛ فنحصل هكذا على

$$AL = OU = VQ = RW = I'U' = B_aB_e = B_bB_f$$

وتكون الدائرة ذات المركز N والمساوية لـــ (A) مماسة في B_c لـــ $U'B_c$ (إن كون $NLU'B_c$ مستطيلاً فإن $NB_c = LU' = AI'$). نرسم PZ مماساً مشتركاً للدائرتين (A) و (B)، و B_gB_h مماساً مشتركاً لـــ (A) و (N)؛ لدينا $PZ = AB$ و $AN = B_gB_h$ و $LN = U'B_c$ و $NS = B_cB_d$.

ولنبرهن ما يلي:

$$B_gB_h + B_cB_d = PZ + XT \qquad (1)$$

بما أن

$$B_gB_h + B_cB_d = AN + NS = AK + MN + NS$$

وكذلك

$$MN + NS = LS = UT = LB_i$$

حيث B_i هي المسقط العمودي لـــ T على AB. فنستخلص أن:

$$AN + NS = B_gB_h + B_cB_d = AK + LB_i = AK + LB + BB_i = AB + BB_i = \ell$$

كما أن كل نقطة من نقاط القطع الزائد تحقق :

$$AN + NS = AB + BB_i$$ [36]

لكن $AB = PZ$ و $BB_i = XT$ وتصبح المساواة (1) محققة.

ومن جهة أخرى، فإن $\widehat{B_hB_c} = \widehat{B_gI'}$ لأن $B_g\hat{A}I' = B_h\hat{N}B_c$، ولذلك فإن

$$\widehat{O'PB_g} + \widehat{B_hB_c} = \text{نصف دائرة}$$

ولدينا

$$\widehat{O'B_g} + B_gB_h + \widehat{B_hB_c} + B_cB_d = PZ + \frac{1}{2}\text{ cercle} + XT = \ell + p \qquad (2)$$

حيث p تمثل نصف محيط إحدى الدوائر.

نلاحظ أن الدائرتين (A) و(B) لا تتقاطعان، لأن $AB \geq OP$. كما نلاحظ من ناحية أخرى أن $AN > AB$، وهذه ميزة خاصة بالقطع الزائد، يبرهنها ابن سهل بالخلف؛ فيحصل بالتالي على: $AN \geq OP$، ولا تتقاطع الدائرتان (A) و (N).

وينطلق ابن سهل من المساواة (2) ليتصور جهازاً قادراً على رسم متصل للقوس الزائدي BN. يتألف هذا الجهاز من جزئين صلبين (غير قابلين للتشويه): يدور الجزء الأول منه حول النقطة الثابتة A؛ وهو يتألف من نصف دائرة يحدها القطر OP والمقطع OQ والمقطع RQ العمودي على المستوي LAO. أما الجزء الثاني فيدور حول

---

[36] وبالعكس، لدينا:

$$AN + NS = AB + BB_i \Rightarrow AN + NS - LS = AB + BB_i - LB_i$$

فنحصل إذاً على

$$.AN - NL = AB - BL$$

النقطة الثابتة L وهو مؤلف من كوس صلب LUT، ومن مقطع VW عمودي على المستوي LUT، حيث VW = QR و V موجودة على UT، بحيث يكون UV = OQ. ويتصل هذان الجزآن في ما بينهما بقضيب RW، يلعب دور الساعد، فيؤدي دوران الجزء الثاني حول L إلى دوران الجزء الأول بزاوية مساوية حول A.

يتصور ابن سهل بعد ذلك جزءاً متحركاً يتألف من الدائرة (B) التي تلعب دور البكرة، ومن حزام مثبت في P و T يلتف حول الدائرة (B) طوله PZXT ثابت يساوي $(\ell + p)$ بموجب المساواة (2).

فإذا دفعنا الدائرة (B) شرط أن يبقى الحزام مشدوداً، فإن (B) تدفع بدورها الكوس الصلب LUT فيدور حول النقطة الثابتة L جاراً معه كل الجهاز الصلب، بينما يبقى القضيب RW موازياً إلى AL. يأخذ الكوس LUT وضع $LU'B_d$، وتأتي P إلى O'، ليأخذ الحزام بذلك وضع $O'PB_gB_hB_cB_d$ عندما تنطبق النقطة B على النقطة N [الشكل. 15]. وهكذا يرسم مركز البكرة B في هذا الانتقال القوس BN.

بما أن M هي نقطة تقاطع المستقيم AN والدائرة (A, AK)، فإن NM < NK وبالتالي فإن NL < NK. وهكذا، ففي المثلثين NBL و NBK تكون $L\hat{B}N < K\hat{B}N$، وبالتالي فالزاوية $L\hat{B}N$ حادة. كما تقع النقطة B_j مسقط العمود الساقط من N على AB على نصف المستقيم BL. يبرهن ابن سهل في ما بعد بالخلف أن المستقيم NB_j لا يلتقي القوس BN إلا في النقطة N[37]. وبدوران الشكل المحدد بالقوس BN والمقطعين BB_j و NB_j، حول المستقيم BB_j، يتولد مجسم يُفترض أنه مصنوع من البلور المدروس سابقاً.

وما إن ينتهي من الرسم المتصل للمنحني المميز بالخاصة (2) – وهو قطع زائد – حتى ينكبّ ابن سهل على دراسة خواصه الانكسارية غير مهتم بالبرهان على كونه قطعاً زائداً. فيبرهن القضية التالية:

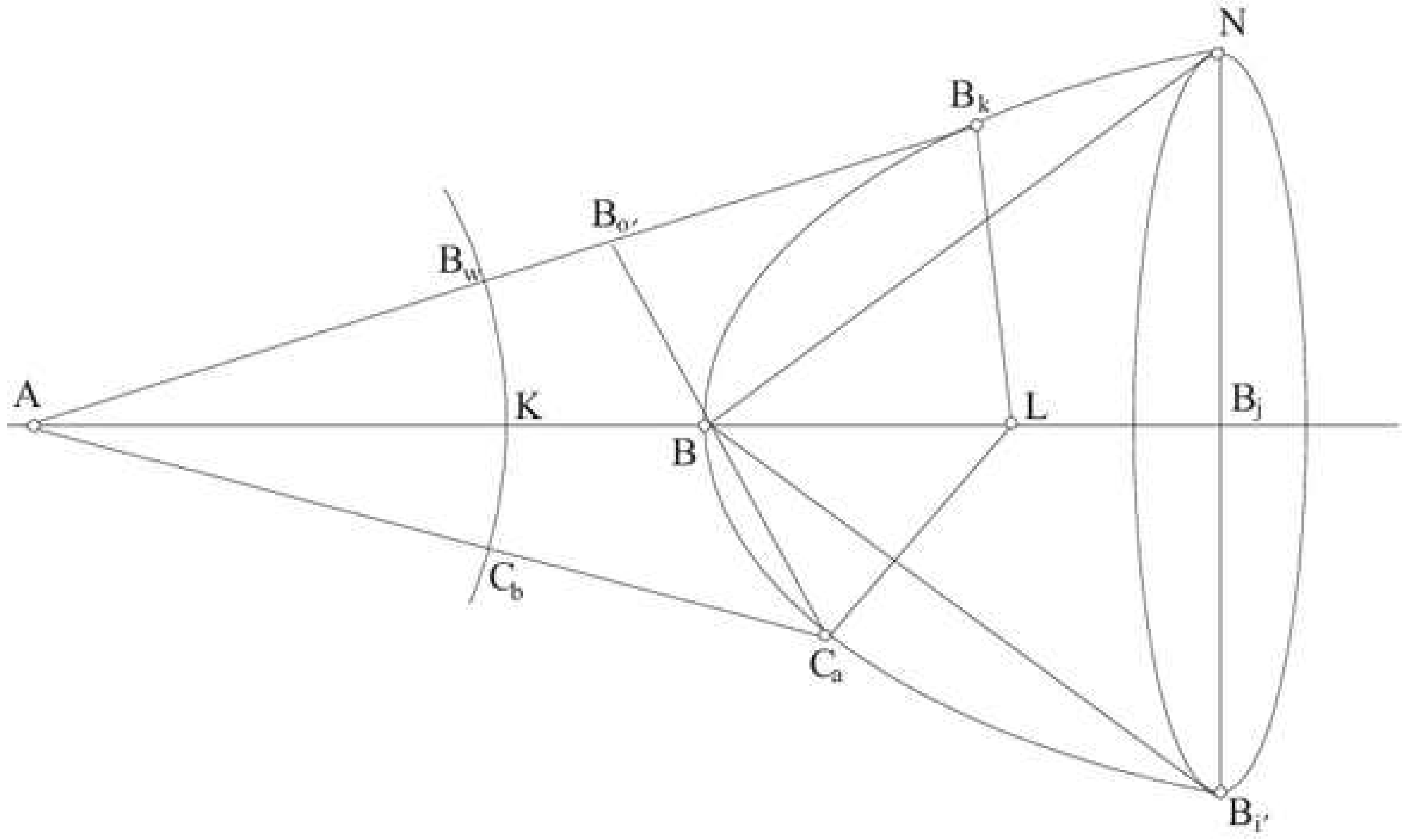
قضية: إن الأشعة الشمسية الموازية لـــ BB_j والساقطة على الجانب (B_j) تعبر هذا الجانب من دون انحراف، لتسقط على السطح الزائدي (B)، فتنكسر عنده باتجاه النقطة A.

لبرهنة هذه القضية يأخذ ابن سهل على السطح الزائدي نقطة B على المحور، ومن ثم نقطة أخرى على السطح الزائدي خارج المحور، ويدرس في كلتا الحالتين المستوي المماس ومسار شعاع الضوء.

لنبدأ بالنقطة B: القوس NBB_i في المستوي BLN قوس زائدي رأسه B.

---

[37] يستعمل البرهان بالخلف [الشكل. 15] في النص ص. 126.

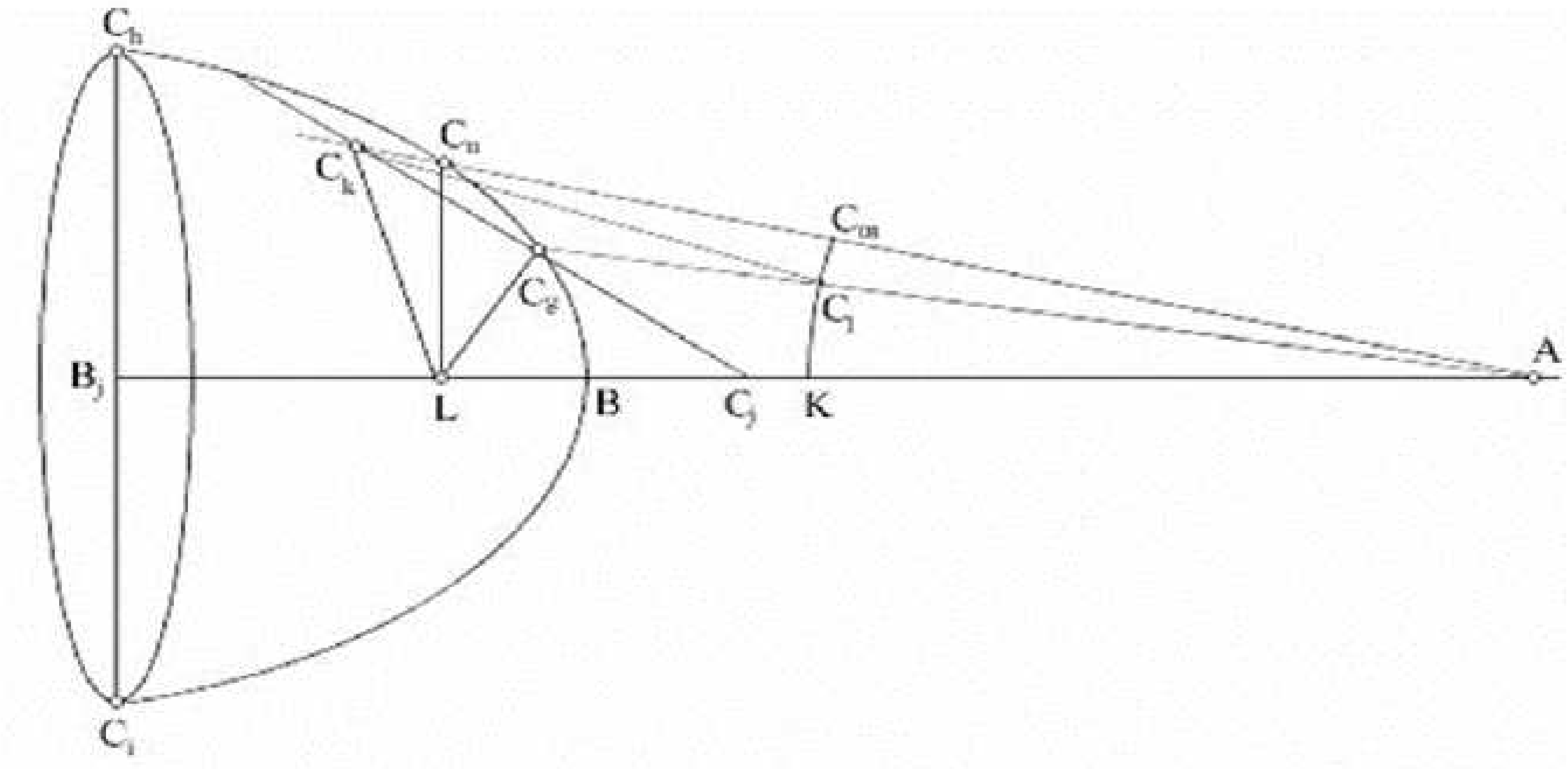


الشكل. 16

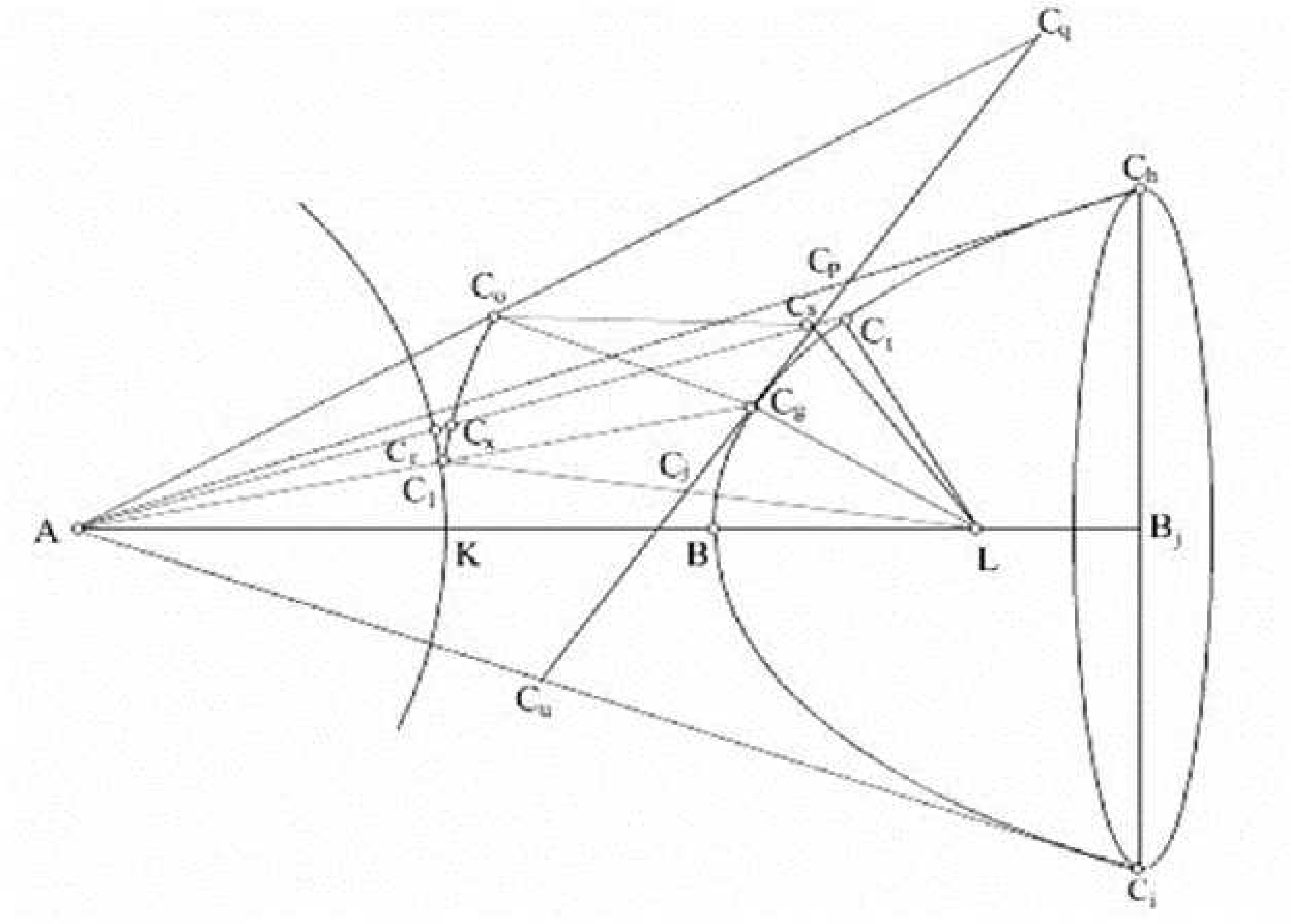
وليكن $BB_{o'}$ عمودياً على BL؛ يبرهن ابن سهل بالخلف أن $BB_{o'}$ هو مماس في B للقوس $NBB_{i'}$ وأنه المماس الوحيد في هذه النقطة. ثم ينتقل إلى المستوي العمودي على المستوي BLN، الحاوي على المستقيم $BB_{o'}$، فيبرهن أنه مماس في النقطة B على السطح (B)، وإنه المستوي المماس الوحيد في هذه النقطة. ويبرهن أخيراً وبالخلف أن المستقيم AL لا يلتقي مع السطح (B) إلا في النقطة B فقط.

وهكذا فإن ضوء الشمس ينتشر في البلور باتجاه B_jB، ومن ثم في الهواء باتجاه BA.

لننتقل الآن إلى نقطة C_g مختلفة عن B [الشكل. 17]. يتقاطع المستوي BLC_g مع السطح (B) وفق المنحني C_hBC_i. يبرهن ابن سهل بالخلف أن المنصف C_gC_j للزاوية LC_gA هو مماس في C_g لهذا المنحني، وأنه المماس الوحيد [الشكل. 18]. كما يبرهن في النهاية أن المستوي العمودي على المستوي ALC_g، المار بالمستقيم C_gC_j، هو مماس للسطح (B) في النقطة C_g.



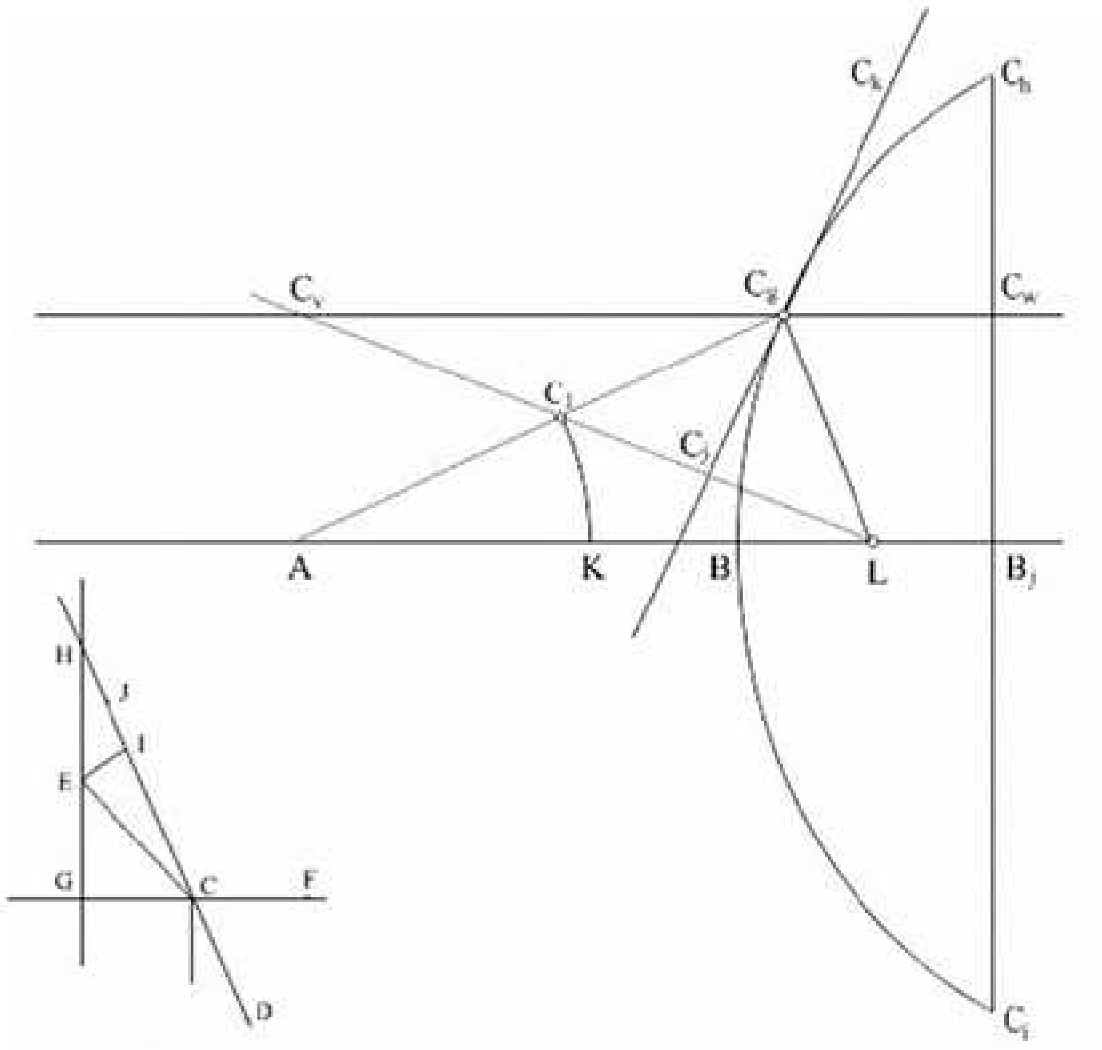
الشكل. 17



الشكل. 18

والآن لتكن C_ℓ نقطة تقاطع AC_g مع الدائرة (A, AK). يلتقي المستقيم LC_ℓ مع المماس في النقطة C_j، وهو بدوره عمودي في هذه النقطة على المستوي المماس. يقطع المستقيم الموازي لـــ AL والمار من C_g المستوي (B_j) في C_w، كما يقطع المستقيم LC_ℓ في النقطة C_v [الشكل. 19]؛ لدينا:

$$\frac{C_gC_\ell}{C_gC_v} = \frac{AC_\ell}{AL} = \frac{AK}{AL}$$



الشكل. 19

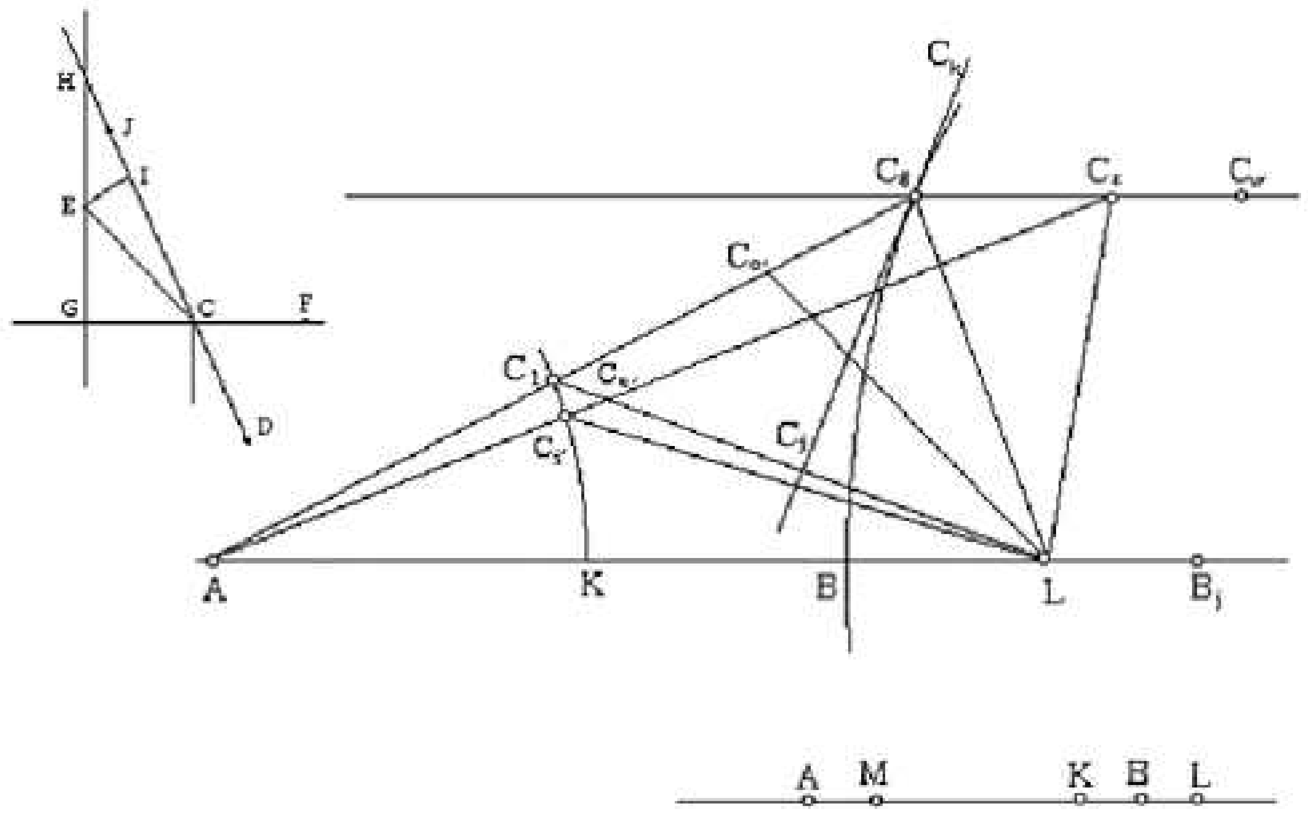
إلا أن لدينا فرضاً:

$$\frac{AK}{AL} = \frac{CE}{CH}$$

وإذاً

$$\frac{C_g C_\ell}{C_g C_v} = \frac{CE}{CH} = \frac{1}{n}$$

ومن ناحية أخرى، يبرهن ابن سهل بالخلف أن C_g هي نقطة التلاقي الوحيدة للسطح (B) مع المستقيمين $C_w C_v$ و AC_g.



الشكل. 20

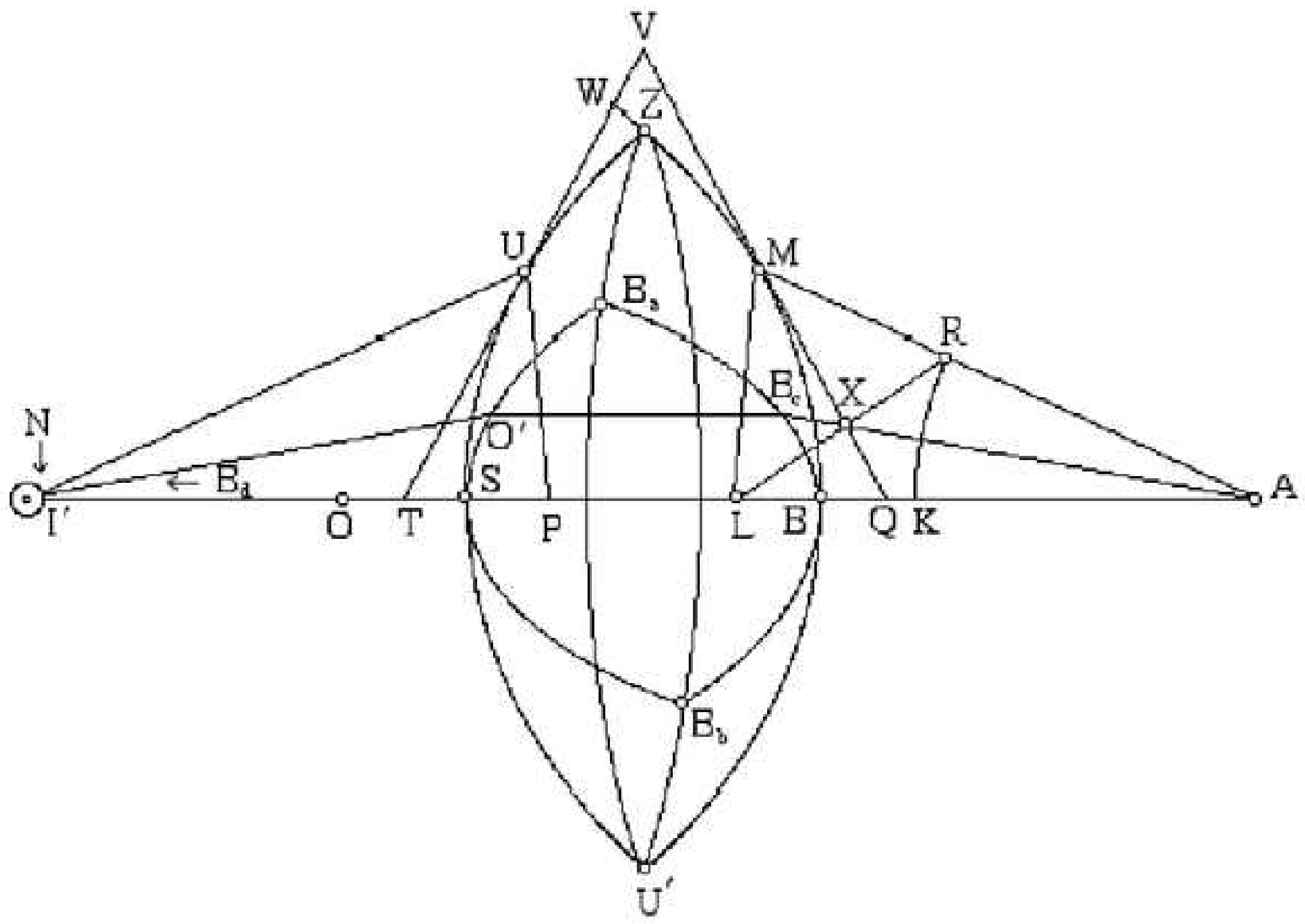
وهكذا فإن الشعاع الشمسي الموازي لـــ AL الساقط على المستوي (B_j) في C_w، يخترق الجسم وينتشر باتجاه $C_w C_g$؛ ثم ينكسر في C_g على السطح (B) وينتشر في الهواء باتجاه $C_g A$. ويصح هذا على كل شعاع شمسي يسقط على الوجه (B_j).

2.5. ينهي ابن سهل دراسته بإنشاء عدسة محددة بجزئين من مجسمين زائديين دورانيين حول المحور نفسه، مصنّعة من نفس بلور العدسة السابقة. ويستعمل هنا لهذا الإنشاء النتيجة التي أثبتها خلال دراسته العدسة المستوية–المحدبة مفترضاً مبدأ الرجوع العكسي للضوء. وتظهر العدسة محدبة الوجهين المنشأة هنا وكأنها التصاق عدستين مستويتين–محدبتين.

وكالسابق، يأخذ ابن سهل على خط مستقيم قسمة L، B، K، A مماثلة للقسمة H، J، I، C، ليقرنها بقوس BM من قطع زائد رأسه B وبؤرتاه A و L. ثم يأخذ قسمة أخرى P، S، O، N مماثلة للقسمة H، J، I، C، ليقرنها بقطع زائد رأسه النقطة S وبؤرتاه P و N [الشكل. 21]. لدينا:

$$\frac{CI}{CH} = \frac{NO}{NP} = \frac{AK}{AL} = \frac{1}{n}$$

حيث n هي قرينة انكسار البلور بالنسبة للهواء.



الشكل. 21

إن المنصف MQ للزاوية $A\hat{M}L$ هو مماس للمنحني BM في النقطة M. لتكن R نقطة من AM بحيث MR = ML، (وبالتالي AR = AK)؛ ويتقاطع المستقيمان MQ و LR في X بزاوية قائمة، وبالتالي $L\hat{Q}X$ زاوية حادة. وكذا الأمر مع المنصف UT للزاوية $N\hat{U}P$، فهو مماس للمنحني SU والزاوية $P\hat{T}U$ حادة. وهكذا فإن المستقيمين MQ و TU يتلاقيان ولتكن V نقطة التقائهما.

يلتقي المنحني BM مع كل من الخطوط المستقيمة QB وQM وTV في نقطة واحدة فقط، هي بالتوالي B و M و W. ولا يلاقي المنحني SU المستقيم TV إلا في U؛ ويلاقي المنحني BW في النقطة Z.

لنثبّت المستقيم BS، ولندوّر حوله السطح المحدد بالقوسين BZ و ZS وبالمستقيم BS، فترسم النقطة Z الدائرة 'ZU؛ ونحصل على المجسم 'BZSU. ونصنع مجسماً له من البلور الذي استعملناه سابقاً.

قضية: إن الأشعة الضوئية المنبثقة من النقطة N والساقطة على السطح 'ZSU تدخل هذا المجسم وتلتقي السطح 'ZBU ومن ثم تنتشر لتتلاقى في النقطة A فتُشعلها.

يبدأ ابن سهل بدراسة حالة النقطة S. إن الخط المستقيم NS يلتقي سطح الجسم المضيء في النقطة 'I. يدخل الشعاع 'I'S المجسم في النقطة S، وينتشر باتجاه SB، ليخرج من النقطة B وينتشر باتجاه BA.

ثم يواجه حالة أية نقطة 'O مختلفة عن S. إن المستوي 'BSO يقطع سطح المجسم وفق $SO'B_a$ وB_aB_cB (B_a أحد مواقع النقطة Z، والقوس $SO'B_a$ هو موقع للقوس SZ، أما القوس B_aB_cB فهو موقع للقوس ZB)؛ نفرض أن $O'B_c$ موازٍ لـــ BS. ولتكن B_d نقطة التقاء المستقيم 'NO مع سطح الجسم المضيء. فالضوء المنبثق من النقطة

B_d ينتشر في الهواء باتجاه B_dO'، يخترق المجسم في النقطة O'، وينتشر باتجاه $O'B_c$ ويخرج من B_c، لينتشر باتجاه B_cA.

تخضع حزمة الأشعة المنبثقة من النقطة N لانكسار على السطح S يحولها إلى حزمة أسطوانية. وتخضع هذه الحزمة حين سقوطها على السطح B إلى انكسار ثان يحولها إلى حزمة متقاربة في النقطة A.

6. خاتمـــــة

وهكذا فقد قادت دراسة المرايا المحرقة ابن سهل للقيام بأولى الأبحاث حول الانكساريات. ودفعته تأملاته في موضوع الإشعال على مسافة معينة بواسطة أشعة متوازية، أو منبثقة من منبع ضوئي موجود بدوره على مسافة متناهية، لا عن طريق الانعكاس فحسب بل وبواسطة الانكسار كذلك، إلى الخوض بشكل جد طبيعي في البحث المتعلق بالانكساريات. لكن تمكنه من نظرية القطوع المخروطية، والتي تشهد بها دراسته إضافة إلى أعمال سنحللها لاحقاً، أتاح له القيام بأبحاثـــه ليس حول انعكاس الضـــوء وحده، وإنما أدى كذلك إلى ولادة هـــذا الفصل في تـــاريخ العلـــوم أيضاً. وكما في البحث في المرايا، فهو ينطلـــق هنا من تطبيق البنى الهندسية – وخصوصاً تلك التي تتيحها نظرية القطوع المخروطية – على بعض الظواهر الضوئية للتوصل إلى الهدف التطبيقي المنشود ألا وهو: الإشعال انطلاقاً من منبع ضوئي، بعيداً كان أم قريباً. ويجب أن يتفق إنشاء الجهاز – مرآة كان أم عدسة – مع البنية الهندسية المطبقة عليه.

وهكذا فإن لهذا الفرع من المعرفة هدف يتجاوز المعرفة البحتة. إنه، إن صح التعبير علم وفن؛ مما قد يدفع بعض الناس الآن إلى القول (المبرر إلى حد ما) إنه لا يعدو كونه إنشاءً للنماذج، استجابة لحاجة تطبيقية بالاستعانة بالرياضيات: وهي الإشعال انطلاقاً من منبع قريب أو بعيد. لا يحاول المرء، عندما تقوم المعرفة على إنشاء النماذج، وضع المفاهيم المتعلقة بالسيرورة المثالية للظاهرة، بل يكتفي بتلك المتعلقة بالعناصر المحتواة في الظاهرة التي تقتضيها التساؤلات التطبيقية. ومن وجهة النظر هذه فإن هذا الفصل الجديد في الانكساريات لا يختلف عن فصل المرايا المحرقة الأقدم منه بكثير إلا من حيث تعقيد العناصر الداخلة فيه ودقة البنى الرياضية المطبقة.

مما لا شك فيه أن هذا التماثل المعرفي بين البحث الانعكاسي في المرايا المحرقة والبحث الانكساري في العدسات مبني جزئياً على واقع أن البحث الثاني هو امتداد للأول، لكنه يقوم أساساً على استعمال النماذج في كلا الفصلين. فلا غرابة والحال هذه أن تبدو القرابة في أسلوب المعرفة: فالأسلوب في الحالتين هندسي بشكل أساسي وما من شيء يلزم الرياضي بانتقاء مذهب معين حول طبيعة الضوء مثلاً، أو حول أسباب الانعكاس أو الانكسار. وهذا هو واقع ابن سهل على ما يتبين لنا من خلال ما وصلنا منه من مخطوطات: ينحصر اهتمامه الأوحد في عمليه الإشعال، بدراسة محض هندسية. فالتجربة على الرغم من وجودها الطبيعي لا تشكل مطلقاً جزءاً من البرهان نفسه. فلا يتخطى ابن سهل بذلك حدود تصور الأنموذج الهندسي وإنشائه اللازمين لصنع العدسة، وبالتالي لتحقيق مراده بالإشعال. وهو بهذا يسهم في تحسين الدراسة الهندسية وتطويرها، تاركاً للاستعمال اللاحق تفحص القيمة التطبيقية لهذا الأنموذج المستحدث ومدى فعاليته.

يوضح هذا التحليل المقتضب فحوى اكتشاف ابن سهل وبداية علم الانكساريات، إذ إننا بتنا قادرين الآن على فهم هذا الاهتمام المتجدد بدراسة الانكسار: إنها المرة الأولى، على حد علمنا، منذ كتاب *المناظر* لبطلميوس، التي نواكب فيها تقدماً ملموساً ومهماً في هذا المضمار. فابن سهل، كقارئ للمؤلف الإسكندري المذكور وشارح له، كان يعلم أن الشعاعين الوارد والمنكسر يقعان في مستوٍ واحد مع الناظم، كل واحد في جهة منه. كما كان يعلم مبدأ الرجوع العكسي للضوء. ويضيف إلى كل هذا قانون سنيلليوس، الذي اكتشفه. وكما بيّنا سابقاً، فلقد أدخل ابن سهل نسبة الشعاع المنكسر إلى المسافة ما بين الصورة ونقطة الورود (CE/CH في كل دراسته)، كنسبة ثابتة لوسط محدد بالنسبة إلى الهواء.

لكن ابن سهل لم ينظر بالمقابل، عند دراسته العدسات، إلا إلى نوع واحد من الأشعة، ألا وهي الموازية للمحور في حالة العدسة المستوية–المحدبة، أو المنبثقة من بؤرة أحد السطحين الزائدين في حالة العدسة محدبة الوجهين؛ ليحصل بذلك وفي كلتا الحالتين على تقارب الضوء المنكسر في نقطة واحدة من المحور. من جهة أخرى، لا يولي ابن سهل أي اهتمام بصياغة ما يرتكز ضمناً عليه من قوانين وقواعد فيزيائية. فغياب هذه الصياغة، وإن كان لا يسمح مطلقاً بالشك في إحاطة ابن سهل بها، ليس عرضياً: إنه نابع، كما يبدو لنا، من غياب التساؤل حول الأسباب الفيزيائية لعملية الانكسار. فنصوص ابن سهل لا تحتوي على أية محاولة لتفسير كيفية انتشار الضوء هذه. ويختلف الأمر تماماً عندما يعالج المسائل المتعلقة بصورة جسم ما من خلال العدسة، إذ لا يمكن عندئذ تجنّب الصعوبات المتعلقة بتسديد النظر أو بالزيغ البصري. وفيما لم يتعرض ابن سهل لهذه المسائل في رسالته، فإنها ستطفو على السطح من جديد عند خلفه ابن الهيثم، لتقوده إلى تحديد جديد للعلاقات بين شروط الإبصار، وشروط انتشار الضوء.

يثير اكتشاف رسالة ابن سهل في *الحراقات* هذه جملة تساؤلات حول العلاقات التي قامت بين ابن الهيثم وسلفه. إذ من المستغرب حقاً أن تبقى هذه المساهمة ذات الأهمية الكبرى في تاريخ المناظر والاستثنائية في زمانها من دون وريث. كما قد لا يقل غرابة أن يأتي نتاج بثورية نتاج ابن الهيثم من دون أن تمهد له أعمال عظيمة سابقة له. يبقى علينا إذاً التساؤل عن ما آل إليه هذا الإنجاز في تاريخ علم الانكساريات في مرحلة ما بعد ابن سهل، أي في أعمال ابن الهيثم.

العلاء بن سهل
كتاب الحراقات

ت – ١ – ظ

بسم الله الرحمن الرحيم
وبه أستعين

من حقّ الملك صمصام الدولة وشمس الملّة – على من عرف قَدْر النعمة في عنايته بإظهار العلوم، حتى يشيعَ في الناس ذكرُها ويعظُمَ عندهم خطرُها وحتى يأخذ طلاّبُها بالحظّ الوافر من فائدتها ويتهنؤوا بعائدتها – أن يجعل خدمتَه في ذلك بكل ما يجدُ السبيلَ إليه بعضَ شُكر هذه النعمة. وكيف لا يُعنى بإظهارها وقد لاقَتْ به من يعرِف فضلَها، ويعتدُّه لها، ومن يرعاها بحُسن قيامه عليها ويتألف غائبَها بكرم مُجاورته لحاضرِها، فسبَبُها اليوم قويٌّ، وناصِرُها عزيزٌ، وسُوقُها قائمةٌ، وتجارتُها رابحةٌ، ورأيه فيها ذِمامٌ على هَواه، فلن يخاف البريءُ أن يُقْضى عليه، ولا يرجو السقيمُ أن يُقْضى له.

وقد غَبرتُ دهرًا أبحث عن حقيقة ما يُنْحَلُ أصحابُ التعاليم من القدرة على إحراق جسم بضوءٍ على مسافة بعيدة، ويُضاف إلى أرشميدس من إحراقه سُفُنَ الأعداء بهذا الضرب من الحيل؛ حتى عرفت جملة الحال فيه، وتعقّبتُها بالتفصيل، فاسْتعنتُ عليه بما وجدتُه من كتب القدماء وانتزعت منها ما تضمَّنت منه، وهو وصف الإحراق بضوء الشمس المنعكس عن مرآة على مسافة قريبة؛ ونوعٌ من الإحراق بضوء جسم قريب ينعكس عن مرآة. وواصلتُ النظر فيما لم يتضمّن منه؛ حتى استخرجتُه وهو وصف الإحراق بضوء الشمس ‹الذي ينفذ في آلة وينعطف في الهواء›.

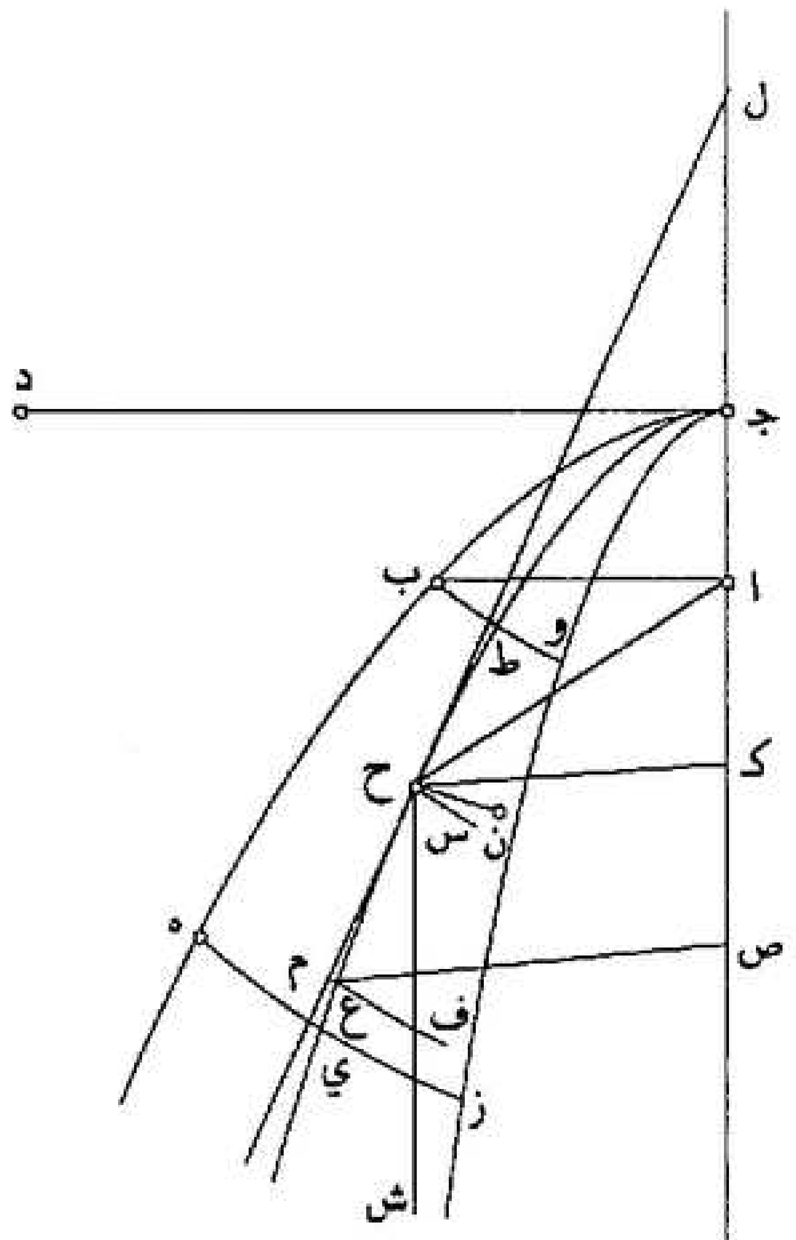
7 ويتهنؤوا: ويتهنأوا – 17 الشمس: توقف بعدها نص مخطوطة [ت]، راجع المقدمة.

‹المرآة المحرقة بالقطع المكافئ›

/ نريد أن نحرق جسمًا بضوءٍ على مسافة معلومة. د-٨١-و

فليكن المسافة المعلومة خط ا ب. فإما أن يكون الإحراق بضوء ينعكس من آلة أو ينفذ فيها، فإن كان الإحراق بضوءٍ ينعكس من آلة، فإنا نُخرج خط ا جـ، فإما أن تكون الأضواء الخارجة من نقطة على وجه المضيء إلى جوانب الآلة متوازية في الحس، أو لا تكون متوازية فيه. فإن كانت الأضواء الخارجة من نقطة على وجه المضيء إلى جوانب الآلة متوازية في الحسّ – وعلى ذلك كل ضوء يأتيها من السماء – فإما أن تكون زاوية ب ا جـ قائمة، أو لا تكون قائمة.

فإن كانت زاوية ب ا جـ قائمة، فإنّا نجعل خط ا جـ نصف خط ا ب، ونخرج خط جـ د قائمًا على خط ا جـ، ونجعل سطح جـ د في ا جـ مثل مربع ا ب. فالقطع المكافئ الذي سهمه خط ا جـ وضلع سهمه خط جـ د يمرّ بنقطة ب ويحدّ قطعةً منه تبتدئ من نقطة ب وتنتهي في خلاف جهة نقطة جـ، وليكن ب ه.



2 نريد: قبلها نجد في [د] بعد البسملة العبارة التالية: «رسالة في الآلة المحرقة لأبي سعد العلاء بن سهل». وبجوار العنوان في الهامش كتب الناسخ عبارة تآكلت بعض كلماتها وهي «كان في أولها شكل ذكر العبدجاني (sic) أنه بعد الشكل الثاني والثالث من المقالة ... المحرقة ...» – 4 تكون: عادة ما يكتبها الناسخ «يكون»، ولن نشير إليها فيما بعد – 11 خط (الأولى): خطا.

ونثبت خط ا جـ ونديرحوله قطعة ب ه حتى تقطع نقطة ب قوس ب و، ونقطة ه قوس ه ز، ويحدث بسيط ب ز، فنجعله وجه مرآة تحاذي نقطة ا. وينبغي أن يكون ضوء الشمس إذا انعكس من جميع بسيط ب ز إلى نقطة ا أحرق عندها. ثم نركب على ظهر المرآة هدفين، يلي أحدهما قوس ه ز وفي وسطه ثقب تحيط به دائرة، والآخرُ قوس ب و، وفي وجهه المقابلِ الأول دائرة يوافقها ضوء الشمس النافذُ من الثقب إليها، ويكون الخط المتصل بين مركزيهما موازيًا لخط ا جـ، ثم تُحاذي بالمرآة الشمسُ حتى ينفذ ضوءها من الثقب إلى الدائرة.

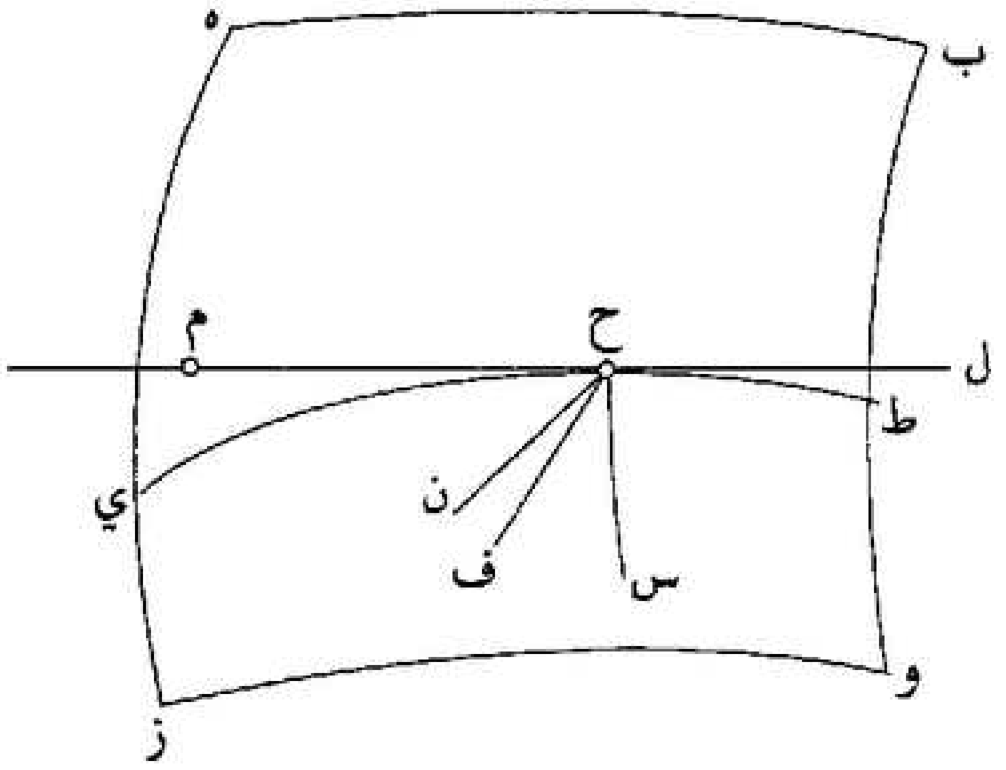
أقول: إن ضوء الشمس ينعكس من جميع بسيط ب ز إلى نقطة ا فيحرق عندها.

برهان ذلك: أنا ننزل على بسيط ب ز نقطة ح، ونخرج سطح ا جـ ح وليحدث في بسيط ب ز رسم ط ي. فلأن قطع ب ه مكافئٌ، سهمُه خط ا جـ وضلع سهمه جـ د وهو يطابق رسم ط ي، ‹فسهمه› خط ا جـ، وضلع سهمه مثل خط جـ د. ونخرج خط ح كـ قائمًا على خط ا جـ، ونجعل خط جـ ل مثل خط جـ كـ، ونخرج خط ل ح م فهو يماسّ قطع ط ي على نقطة ح. ونخرج على خط ل م سطح ل م ن قائمًا على سطح ا جـ ح، فهو يماسّ بسيط ب ز على نقطة ح؛ ولأنه إن لم يماسّه عليها فليقطعه عليها، فلا بد من أن ينتهي من سطح ل م ن إلى نقطة ح جزء يكون داخل الزاوية التي يحيط بها بسيط و ي وسطح ا جـ ح. وننزل على هذا الجزء نقطة ن ونخرج سطح ح كـ ن. فإما أن يكون خط ا جـ قائمًا على سطح ح كـ ن أو لا يكون قائمًا عليه: فإن كان خط ا جـ قائمًا على سطح ح كـ ن، فليحدث سطح ح كـ ن في بسيط و ي قوس ح س، وفي سطح ل م ن خط ح ن. فلأن نقطة ن داخل الزاوية التي يحيط بها بسيط و ي وسطح ا جـ ح، على سطح ح كـ ن، فهي داخل الزاوية التي يحيط بها قوس ح س وخط ح كـ. وبيّنٌ أن نقطة كـ مركز قوس ح س، فليس خط ح ن قائمًا على خط ح كـ. ولأن خط ا جـ قائم على سطح ح كـ ن، فسطح ح كـ ن قائم على سطح ا جـ ح، وكذلك سطح ل م ن. فالفصل المشترك لسطحي ح كـ ن ل م ن، وهو خط ح ن، قائم على سطح ا جـ ح؛ فخط ح ن قائم على خط ح كـ، وهذا محال.

وإن لم يكن خط ا جـ قائمًا على سطح ح كـ ن، فإنا نخرج على نقطة ن سطحًا مستويًا حتى يكون خط ا جـ قائمًا عليه، وليحدث في بسيط و ي قوس ع ف، وفي سطح ا جـ ح

5 وجهه: جهة – 10 ب ز: ب د / رسم ط ي: سمطى – 11 خط (الأولى): وخط – 12 يماس: تماس – 14 يماسّ: تماس / يماسّه: كتب «يكن يماسّها»، ثم ضرب على «يكن» بالقلم – 21 فسطح: بسطح.

خط م ص، وليلق خط ا جـ على نقطة ص؛ وفي سطح ل م ن خط م ن. فنقطة ن داخل الزاوية التي يحيط بها قوس ع ف وخط ع ص، ونقطة م خارجها. ونقطة ص مركز قوس ع ف، فليس خط م ن بقائم على خط م ص. وبيّنٌ أن خط م ن قائم على سطح ا جـ ح، فهو قائم على خط م ص، وهذا محال. فسطح ل م ن يماسّ بسيط ب ز على نقطة ح.



ولا يماسّ بسيط ب ز على نقطة ح سطحٌ مستوٍ غيرُ سطح ل م ن. فلأنه إن ماسّه عليها سطح مستوٍ غيره – فليكن الفصل المشترك بين سطح قوس ح س وبين سطح ل م ن خط ح ن، وهو يماسّ قوس ح س على نقطة ح – فلأن هذا السطح / د – ٨١ – ظ يقطع سطح ل م ن على نقطة ح؛ فلا بدّ من أن يقطع أحد خطي ح ن ح ل على نقطة ح. فإن قطع هذا السطح خط ح ن على نقطة ح، فليكن الفصل المشترك بينه وبين سطح قوس ح س خط ح ف. فلأن هذا السطح يماس بسيط ب ز على نقطة ح، فخط ح ف يماس قوس ح س على نقطة ح؛ وكذلك خط ح ن، وهذا محال.

وإنْ قطع هذا السطح خط ح ل على نقطة ح، ‹كان الفصل› المشترك بينه وبين سطح قطع ط ي خطَّ ح ر. فلأن هذا السطح يماس بسيط ب ز على نقطة ح؛ فخط ح ر يماسّ قطع ط ي على نقطة ح، وكذلك خط ح ل، وهذا محال. فلا يماسّ بسيط ب ز على نقطة ح سطح مستوٍ غير سطح ل م ن.

ولأن سطح جـ د في ا جـ مثل مربع ا ب، ومربع ا ب أربعة أمثال مربع ا جـ لأن خط ا جـ نصف خط ا ب، فسطح جـ د في ا جـ أربعة أمثال مربع ا جـ؛ فخط ‹جـ د› أربعة

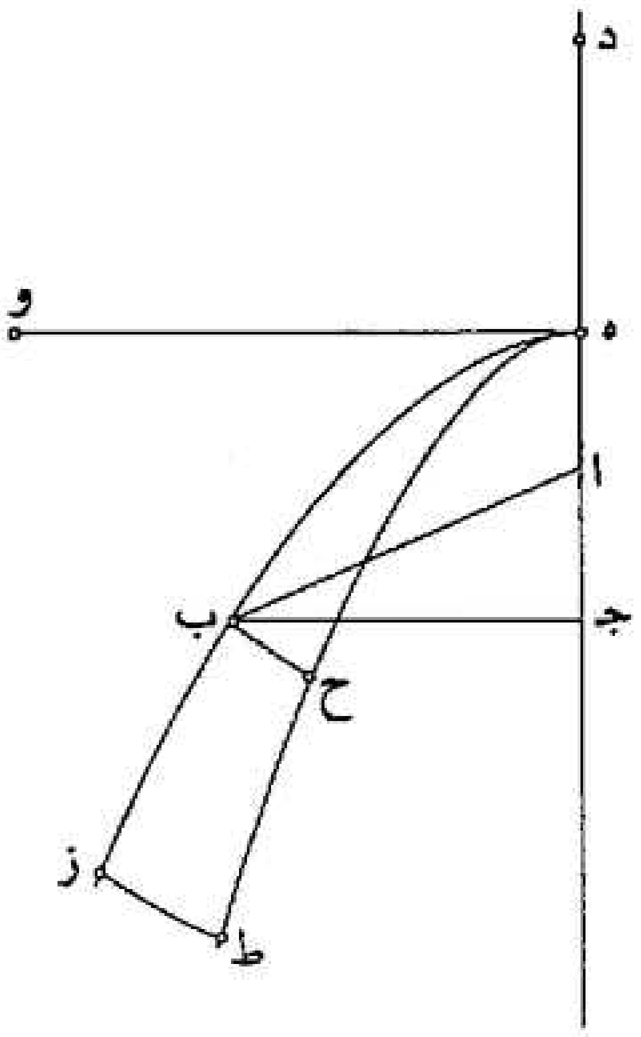
1 فنقطة: فقطه – 2 وخط: كتب «ويحيط خط»، ثم ضرب على «يحيط» بالقلم / ونقطة (الأولى): ونقصه – 10 يماس: كتبها الناسخ «تماس»، ولن نشير إليها فيما بعد – 16-17 لأن خط ا جـ: أثبتها في الهامش مشيرًا إلى موضعها.

أمثال خط ا جـ، ومربع ح ك مثل سطح جـ د في ك جـ، فمربع ح ك أربعة أمثال سطح ا جـ في جـ ك. فمجموع مربعي ا ك ك ح – أعني مربع ا ح – مثل مجموع مربع ا ك وأربعة أمثال سطح ا جـ في جـ ك، أعني مربع ا ل. فمربع ا ح مثل مربع ا ل، فخط ا ح مثل خط ا ل؛ فزاوية ا ح ل مثل زاوية ا ل ح. ونخرج خط ح ش موازيًا لخط ا ل، فزاوية ا ل ح مثل زاوية م ح ش، فزاوية ا ح ل مثل زاوية م ح ش. وخطا ا ح ح ش لا يلقيان بسيط ب ز على غير نقطة ح؛ لأنهما إن لقياه على غيرها فيلقياه على نقطة س، فلأن نقطة س على بسيط ب ز – كما أنها على بسيط ا جـ ح – فهي على الفصل المشترك بينهما، وهو قطع ط ي. فخطا ا ح ح ش يلقيان قطع ط ي، وهو مكافئ، وسهمه خط ا جـ على غير نقطة ح، وهذا محال.

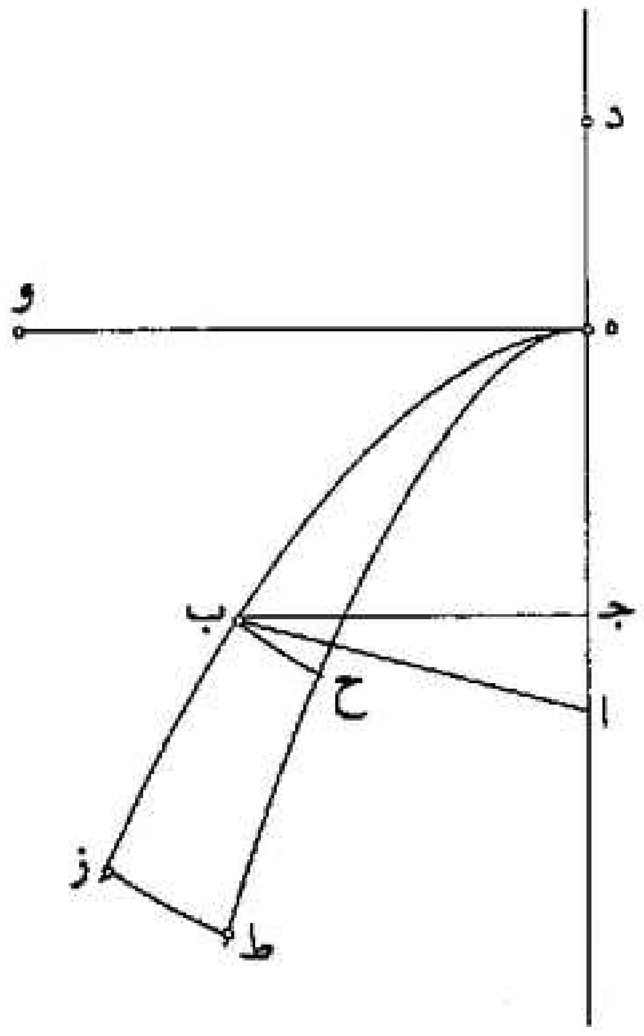
فخطا ا ح ح ش لا يلقيان بسيط ب ز على ‹نقطة› غير نقطة ح.

ولأنا قد حاذينا بالمرآة الشمس حتى نفذ ضوءها من الثقب إلى الدائرة؛ فقد خرج ضوء نقطة على وجه الشمس في الهواء على الخط المتصل بين مركزي الثقب والدائرة. وكل واحد من ‹الخطين›: الخط المتصل بين مركزيهما، وخط ح ش، موازٍ لخط ا جـ. فالخط المتصل بينهما موازٍ لخط ح ش. ولا يلقى خط ح ش ساترًا دون تلك النقطة. ومعلوم أنه إن أُخرج ضوء نقطةٍ على وجه الشمس على أحد خطين متوازيين عندنا ثم لا يلقى الآخر ساترًا دون تلك النقطة، فإن ضوءها يخرج على الآخر، فضوء تلك النقطة يخرج على خط ح ش وهو لا يلقى بسيط ب ز على غير نقطة ح، فيلقى به غير الهواء، فيصل فيه إلى نقطة ح ثم ينعكس على خط ا ح، وهو لا يلقى بسيط ب ز على غير نقطة ح، فيلقى به غير الهواء، فيصل منه إلى نقطة ا، وكذلك سائر النقط المنزلة على بسيط ب ز؛ وإذا وافقت نقطة ا ظاهر الجسم الذي يُلتمس إحراقه، وافق خط ا جـ ظل ذلك الجسم. وقد علمنا أن خط ا جـ لا يلقى بسيط ب ز. وعلى ذلك كل خط يمرّ بين نقطة ا وبين قوس ب و موازيًا لخط ا جـ. فإذا انتهى ظلُّ الجسم، في أقرب جوانبه من بسيط ب ز، إلى بعض هذه الخطوط، بقي بسيط ب ز مكشوفًا للشمس، فانعكس ضوءُها من جميعه إلى مواضع نقطة ا من ظاهر ذلك الجسم وأحرقه؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

4 ا ل ح (الثانية): ا ح – 6 فيلقياه: فيلتقياه – 8 فخطا: فخط – 10 يلقيان: يلتقيان – 14 يلقى: يكفى – 17 يلقى: يكفى – 18 فيلقى: فيكفى – 21 موازيًا: وموازيايا.



وإن لم يكن زاوية ب ا جـ قائمة، فإنا نخرج خط ب جـ قائمًا على خط ا جـ، ونجعل خط ا د مثل خط ا ب، ونقسم خط جـ د بنصفين على نقطة ه، ونخرج خط ه و قائمًا على خط جـ د، ونجعل سطح ه و في جـ ه مثل مربع ب جـ. فالقطع المكافئ، الذي سهمه خط ا ه، وضلع سهمه خط ه و، يمرّ بنقطة ب، ويحدّ قطعةً منه تبتدئ من نقطة ب وتنتهي في خلاف جهة نقطة ه، وليكن ب ز. ونثبت خط ا جـ وندير حوله قطع ب ز حتى يقطع نقطة ب قوس ب ح ونقطة ز قوس ز ط ويحدث بسيط ب ط، فنجعله وجه مرآة تحاذي نقطة ا، وينبغي أن يكون ضوء الشمس إذا / انعكس من بسيط ب ط إلى نقطة ا أحرق عندها. د-٨٢-و



5 جهة: جه / ه: ح – 6 تحاذي: مطموسة – 7 انعكس: أولها مطموس / ب ط: د ط.

ثم نركب على ظهر المرآة هدفين، ونستعملهما على ما وصفنا.

أقول: إن ضوء الشمس ينعكس من جميع بسيط ب ط إلى نقطة ا فيحرق عندها.

برهان ذلك: أن سطح ه و في جـ ه مثل مربع ب جـ، فمجموع مربع ا جـ وسطح ه و في جـ ه مثل مجموع مربعي ا جـ ب جـ، ومجموع مربعي ا جـ ب جـ مثل مربع ا ب، ومربع ا ب مثل مربع ا د، ومربع ا د مثل مجموع مربع ا جـ وأربعة أمثال سطح ا ه في ه جـ؛ فمجموع مربع ا جـ وسطح ه و في جـ ه مثل مجموع مربع ا جـ وأربعة أمثال سطح ا ه في ه جـ، فسطح ه و في جـ ه أربعة أمثال سطح ا ه في جـ ه؛ فخط ه و أربعة أمثال خط ا ه.

فضوء الشمس ينعكس من جميع بسيط ب ط إلى نقطة ا، فيحرق عندها بمثل ما بيّن في القسم الأول؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

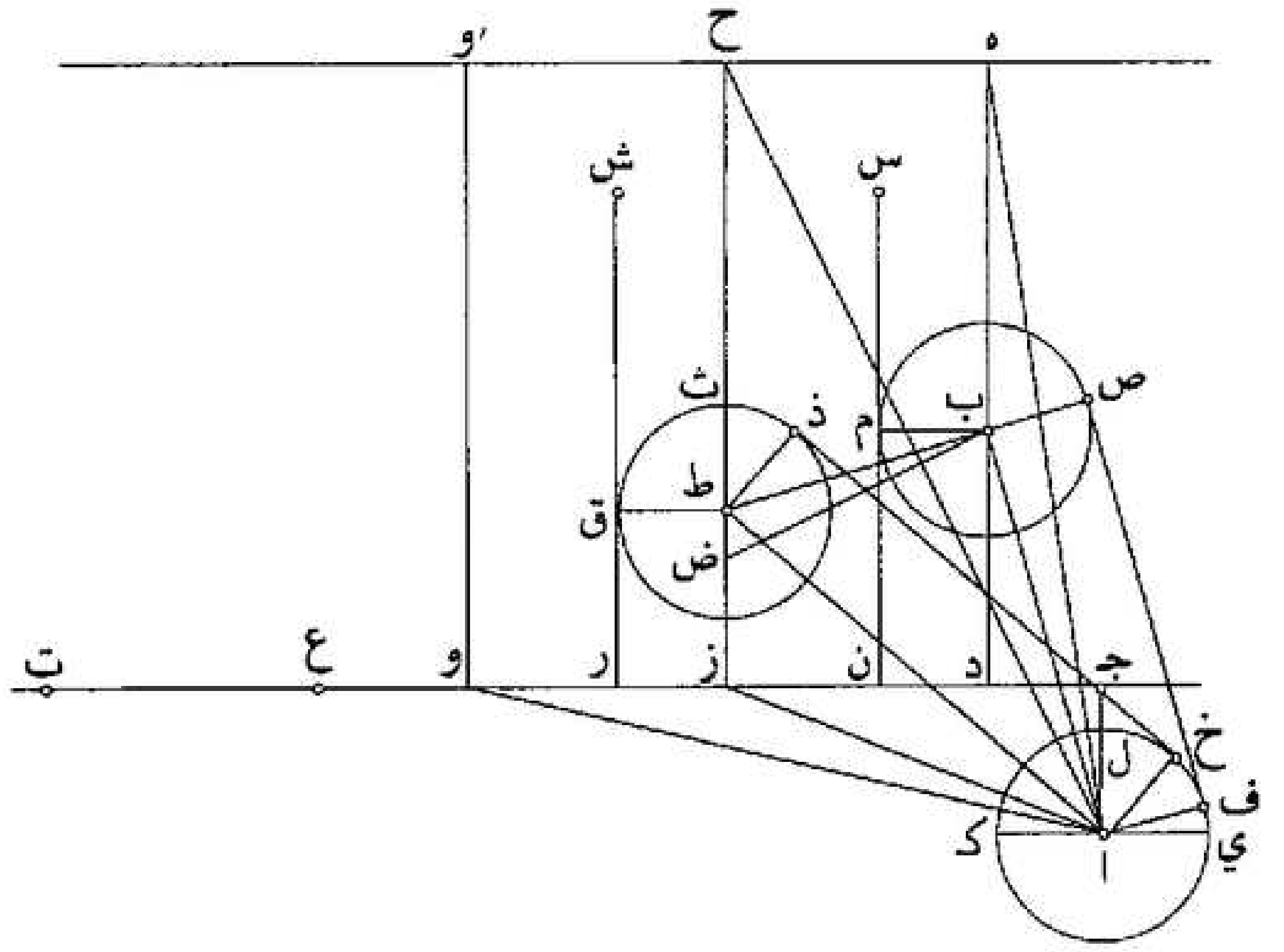
‹الرسم المتصل للقطع المكافئ›

‹فليكن خط د و، وننزل عليه نقطة جـ، ونخرج خط جـ ا قائمًا على خط د و، ونخرج د ه قائمًا على خط د و، ونجعله أعظم من خط د ا، ونصل خط ا ه، فزاوية ه ا د أعظم من زاوية د ه ا، ونفصل من زاوية ه ا د زاوية ه ا ب مثل زاوية ا ه د. وليلق خط ا ب خط د ه على نقطة ب، فيكون خط ا ب مساويًا لخط ب ه، وزاوية ا د ب أعظم من زاوية قائمة، فيكون خط ا ب أعظم من خط ا د. ونخط حول نقطة ا ببعد خط د ه دائرة، ولتلق خط د و على نقطة و، ونصل› / خط ا و، فهو مثل خط د ه، وخط ب ه مثلُ خط ا ب، فخطّ ت – ١٤ – و

د ه مثلُ مجموع خطي ا ب ب د. ونصل خط ا د، فمجموع خطي ا ب ب د أعظم من خط ا د؛ فإذن خط ا و أعظم من خط ا د. وليلق خط د و خطاً ا جـ على نقطة جـ. فلأن خط د ه موازٍ لخط ا جـ، فزاويةُ ا جـ و مثلُ زاوية ه د و، وزاوية ه د و قائمة، فزاوية ا جـ و قائمة، فخط ا و أبعد من خط ا جـ من خط ا د، فنقطة و أبعد من نقطة جـ من نقطة د. ونُنزل على خط د و نقطة ز، ونُخرج خط ز ح قائمًا على خط د و، ونجعله مثلَ خط ا و، ونصل ا ز، فخط ا و أعظمُ من خط ا ز، فخط ز ح أعظم من خط ا ز، ونصل خط ا ح،

5 مربع ا جـ: مربعى ا د – 9 نبيّن: هنا ينتهي نص مخطوطة [د] ويكتب الناسخ بعدها «تمّت والحمد لله رب العالمين . كتبته من نسخة بخط القاضي ابن المرخّم ببغداد، وذكر في آخرها: إني كتبته وقابلته بالأصل، وكان بخط العبدحانى (sic)، وفي آخره: هذا آخر ما وجد بخط العلاء بن سهل، رحمه الله، وصلى الله على نبيه محمد وآله أجمعين الطيّبين الطاهرين».

فزاويةُ ح ا ز أعظم من زاوية ا ح ز. ونفصل من زاوية ح ا ز زاوية ح ا ط مثلَ زاوية ا ح ز، وليلْق خطُّ ا ط خطَّ ز ح على نقطة ط. ونخرج خط ي ا كـ قائمًا على خط ا جـ ونجعل خط ا ي مثل خط ا كـ، وينبغي ألا يكون خط ا ب أصغر من خط ي كـ. ونخط حول نقطة ا ببُعد خط ا ي نصفَ دائرة ي كـ، وليلْق خط ا جـ على نقطة ل، ونُخرج خط ب م قائمًا على خط ب د، ونجعله مثلَ خط ا ي، ونجعل خطَّ د ن مثلَ خط ب م، ونخرج خط ن م س، ونجعل خط و ع مثل خط د ن. ونخطُّ حول نقطة ب ببُعد خط ب م دائرةً، ونخرج خطي ا ف ب ص قائمين على خط ا ب وليلقيا نصفَ / دائرة ي ودائرة م على ت-١٤-ظ نقطتي ف ص، ونصل خط ف ص، ونُخرج خط ط ق قائمًا على خط ز ط، ونجعله مثلَ خط ا ي، ونجعل خط ر ز مثلَ خط ط ق، ونُخرج خط ر ق ش ونجعله مثل خط ن س، ونجعل خطَّ ر ت مثلَ خط ن ع، ونخطُّ حول نقطة ط ببُعد ط ق دائرةً، ولتلْقَ خط ح ط على نقطة ث، ونُخرج خطي ا خ ط ذ قائمين على خط ا ط، وليلقيا نصف دائرة ي ودائرة ق على نقطتي خ ذ ونصل خط خ ذ.



فلأن خط ز ر مثلُ خط ط ق، وهما قائمان على خط ز ط، فخطُّ ر ش قائم على خط ر ت وخط ط ق على خط ر ش، فدائرة ق تماسُّ خط ر ش.

وكذلك نبيّن أن خط ن س قائم على ن ع، وأن دائرة م تماسُّ خط ن س، وخطَّ ق ر مثلُ خط ز ط؛ وخطّ ا خ مثلُ خط ط ذ، وهما قائمان على خط ا ط، فخطُّ خ ذ مثلُ خط ا ط، وكل واحدة من زاويتي ق ط ث كـ ا ل قائمة، وخط ط ق مثلُ خط ا ي، فقوس ق ث مثل قوس كـ ل. وبيّنٌ أن خط ط ذ موازٍ لخط ا خ، وخطَّ ط ث موازٍ لخط

ا ل، فزاويةُ ث ط ذ مثل زاوية ل ا خ، فقوس ث ذ مثل قوس ل خ، وقوسُ ق ذ مثلُ قوس ك خ، فمجموعُ قوسي ي خ ق ذ مثلُ نصف دائرة ي، فمجموع قوس ي خ وخط خ ذ وقوس ق ث ذ وخط ق ر مثلُ مجموع خطي ا ط ز ط ونصفِ / ت-١٥-و دائرة ي. وكذلك نبيّن أن مجموع قوس ي ف وخط ف ص وقوس م ص وخط م ن مثل مجموع خطي ا ب ب د ونصف دائرة ي. ولأن زاوية ح ا ط مثل زاوية ا ح ط، فخط ا ط مثل خط ح ط، فمجموع خطي ا ط ز ط مثل خط ز ح، وخط ز ح مثل خط ا و، وخط ا و مثل خط د ه، وخط د ه مثل مجموع خطي ا ب ب د؛ فإذن مجموع خطي ا ط ز ط مثل مجموع خطي ا ب ب د، فمجموع خطي ا ط ز ط ونصف دائرة ي مثل مجموع خطي ا ب ب د ونصف دائرة ي؛ فإذن مجموع قوس ي خ وخط خ ذ وقوس ق ذ وخط ق ر مثل مجموع قوس ي ف وخط ف ص وقوس م ص وخط م ن. وخط ا ط أعظم من خط ا ب: لأنه إنْ لم يكن أعظمَ منه، فإما أن يكون مثلَه أو أصغرَ منه. فإن كان خط ا ط مثل خط ا ب، فلأن مجموع خطي ا ط ز ط مثل مجموع خطي ا ب ب د، فخطُّ ز ط مثل خط ب د. ونصل خط ب ط، فلأن خطي ز ط ب د قائمان على خط د ز، فزاويةُ د ب ط قائمة، فزاوية ا ب ط منفرجة، فخط ا ط أعظمُ من خط ا ب، وكان مثلَه، وهذا محال.

وإنْ كان خط ا ط أصغرَ من خط ا ب، فلأن مجموع خطي ا ط ز ط مثل مجموع خطي ا ب ب د، فخط ز ط أعظم من خط ب د. ونفصل من خط ز ط خط ز ض مثلَ خط ب د، ونصل ب ض؛ فلأن خطي ز ض ب د قائمان على خط د ز / ت-١٥-ظ فزاوية د ب ض قائمة. ونصل خط ب ط، فزاوية ا ب ط منفرجة، فخط ا ط أعظم من خط ا ب، وكان أصغرَ منه، وهذا محال.

فخط ا ط أعظم من خط ا ب، فخط ز ط أصغر من خط ب د، وخط ق ر مثل خط ز ط، وخط ب د مثل خط م ن، وخط م ن أصغرُ من خط ن س، وخط ن س مثل خط ر ش، فخط ق ر أصغر من خط ر ش. ولأن خط ا ط أعظم من خط ا ب وخط ا ب ليس بأصغر من خط ي ك، وخط ي ك مثل مجموع خطي ا ي ط ق، فخط ا ط أعظم من مجموع خطي ا ي ط ق، فنصف دائرة ي ودائرة ق لا يلتقيان. ولأن خط ا ب ليس بأصغر من خط ي ك وخط ي ك مثل مجموع خطي ا ي ب م، فخط ا ب ليس بأصغر من مجموع خطي ا ي ب م، فنصف دائرة ي ودائرة م لا يتقاطعان.

6 وخط ا و: أثبتها الناسخ في الهامش مع بيان موضعها – 16 خط (الأولى): فوق السطر – 23-24 فخط ... ط ق: أثبتها الناسخ في الهامش مع بيان موضعها.

ونُنزل نصف دائرة ومجموعًا ودائرةً تطابق نصف دائرة ي ومجموعَ خطي ن س ن ع ودائرة م، ولتكن نهايات أجسام صعبة التثني، لتبقى على صُورها، ونجعل الجزءَ المطابق لخط ن ع لازمًا لخط ن ت، ونُنزل مجموعًا يُطابق مجموعَ قوس ي ف وخط ف ص وقوس م ص وخط م ن، ولتكن نهاية جسم صعْبِ التمدّد سهلِ التثني، وعلى ذلك خيوط الحديد، ليبقى على مقداره، ونستبدل بصورته، وليتصل بنصف الدائرة والمجموع المطابقين لنصف دائرة ي ومجموع خطي ن س ن ع / عند نقطتي ي ن. وإنما اجتلبنا دائرة م لتبقى على اتصال الجسم السهل التثني، فإنا لو عدلْنا عنها إلى مَخطٍ لم نجد بُدًّا من أن يكون حادًا، فكان يقطع ذلك الجسم؛ واجتلبنا نصف دائرة ي لأنه تابعٌ لدائرة م. ت-١٦-و

ثم نُثبت نصف دائرة ي ونعتمد على النقطة المطابقة لنقطة ب في جهة خطٍ موازٍ لخط د ز من نقطة ب إلى نقطة ط. وينبغي أن يكون نقصان القوة التي تنال الجسم السهل التثني عن قوةٍ إذا نالتْه لم يتمدّد بها في الحسّ محسوسًا، فلا يتمدّدُ بالقوة التي تناله في الحقيقة؛ لأنه إن تمدّد بها في الحقيقة فإن قوة صلابته ناقصةٌ عن القوة التي تناله، والقوةُ التي تناله ناقصة عن القوة الأخرى، فقوة صلابته ناقصةٌ عن القوة الأخرى، ونقصانُها عنها محسوسٌ، فيجب أن يتمدّد بالأخرى في الحس، ولكنه لا يتمدّد بها فيه، وهذا محال.

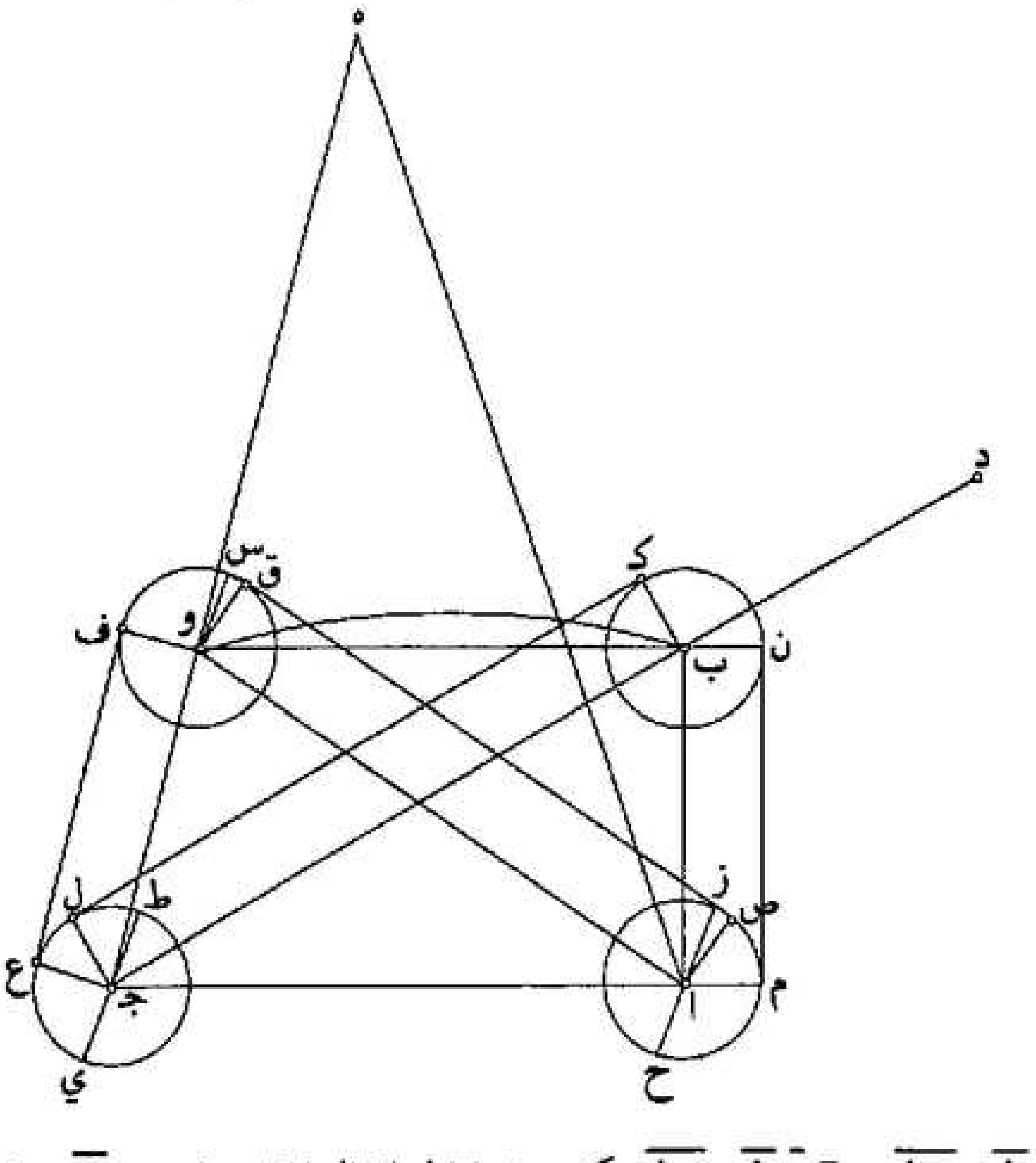
فلا يتمدّد بالقوة التي تناله في الحقيقة. وتتحركُ النقطةُ والدائرة والمجموعان المطابقةُ لنقطة ب ودائرة م ومجموع خطي ن س ن ع ومجموع قوس ي ف وخط ف ص وقوس م ص وخط م ن حتى تطابق نقطة ط ودائرة ق ومجموع خطي ر ش ر ت ومجموع قوس ي خ وخط خ ذ وقوس ق ذ وخط ق ر، كل واحد نظيره. / ت-١٦-ظ

‹الرسم المتصل للقطع الناقص›

... ‹وزاوية› / س و ق مثل زاوية ز ا ص، فقوس س ق مثل قوس ز ص، وخط و ف موازٍ لخط جـ ع، وخط و س موازٍ لخط ا ز، وخط ا ز موازٍ لخط جـ ط، فخط و س موازٍ لخط جـ ط، فزاوية س و ف مثل زاوية ط جـ ع، فقوس س ف مثل قوس ط ع، فقوس ف ق مثل مجموع قوسي ز ص ط ع، ومجموع قوسي ح ص ي ع مشتركٌ، فمجموع قسيّ ح ص ف ق ي ع مثل مجموع نصفي دائرتي ز ط. فمجموع قوس ح ص وخط ص ق ت-١٣-و

1 ن ع: ز ع – 7 عنها: عنه – 17 قوس: قوسي.

وقوس ف ق وخط ع ف وقوس ي ع مثل مجموع خطي ا و جـ و ونصفي دائرتي ز ط. وكذلك نبيّن أن مجموع قوس ح م وخط م ن وقوس كـ ن وخط كـ ل وقوس ي ل مثل مجموع خطي ا ب ب جـ ونصفي دائرتي ز ط. ولأن زاوية ه ا و مثل زاوية ا ه و، فخط ا و مثل خط ه و، فمجموع خطي ا و جـ و مثل خط جـ ه، وخط جـ ه مثل خط جـ د، وخط جـ د مثل مجموع خطي ا ب ب جـ. فمجموع خطي ا و جـ و مثل مجموع خطي ا ب ب جـ، فمجموع خطي ا و جـ و ونصفي دائرتي ز ط مثل مجموع خطي ا ب ب جـ ونصفي دائرتي ز ط. فإذن مجموع قوس ح ص وخط ص ق وقوس ف ق وخط ع ف وقوس ي ع مثل مجموع قوس ح م وخط م ن وقوس كـ ن وخط كـ ل وقوس ي ل. وخط ا و أعظم من خط ا ب، لأنه إن لم يكن أعظمَ منه فإما أن يكون مثله أو أصغر / منه. فإن ت-١٣-ظ كان خط ا و مثل خط ا ب فلأن مجموع خطي ا و جـ و مثل مجموع خطي ا ب ب جـ، فخط جـ و مثل خط ب جـ، وقد التقيا مع خطي ا و ا ب على نقطتي و ب في جهة واحدة، وهذا محال. وإن كان خط ا و أصغر من خط ا ب، فلأن مجموع خطي ا و جـ و مثل مجموع خطي ا ب ب جـ، فخط جـ و أعظم من خط ب جـ؛ ونصل خط ب و، فزاوية جـ ب و أعظم من زاوية ب و جـ، وزاوية ا ب و أعظم من زاوية جـ ب و، وزاوية ب و جـ أعظم من زاوية ا و ب، فزاوية ا ب و أعظم من زاوية ا و ب، فخط ا و أعظم من خط ا ب، وكان أصغر منه، وهذا محال. فخط ا و أعظم من خط ا ب.



1 ز ط: ز ط – 6 ز ط: ز ط – 7 ز ط: ز ط، كرر بعدها الجملة السابقة «مثل ... ط»، ثم ضرب عليها بالقلم – 11 و ب: و ب – 12-13 ا و جـ و ... ا ب ب جـ: أثبتها الناسخ في الهامش مع بيان موضعها.

وكذلك نُبيّن أن خط ب جـ أعظم من خط جـ و. ولأن خط ا و أعظم من خط ا ب وخط ا ب ليس بأصغر من خط ز ح وخط ز ح مثل مجموع خطي ا ز و س، فخط ا و أعظم من مجموع خطي ا ز و س. فنصفُ دائرة ز ودائرة س لا يلتقيان، ولأن خط جـ و ليس بأصغر من ا ب وخط ا ب ليس بأصغر من خط ز ح وخط ز ح مثل مجموع خطي جـ ط و س، فخط جـ و ليس بأصغر من مجموع خطي جـ ط و س، فنصفُ دائرة ط ودائرة س لا يتقاطعان. ولأن خط ا ب ليس بأصغر من خط ز ح وخط ز ح مثل مجموع خطي ا ز ب كـ، فخط ا ب ليس بأصغر من مجموع خطي ا ز ب كـ، فنصفُ دائرة ز ودائرة كـ لا يتقاطعان. ولأن خط ب جـ أعظم من / [ت-٢-و] خط جـ و وخط جـ و ليس بأصغر من خط ا ب، وخط ا ب ليس بأصغر من خط ز ح، وخط ز ح مثل مجموع خطي جـ ط ب كـ، فخط ب جـ أعظم من مجموع خطي جـ ط ب كـ، فنصف دائرة ط ودائرة كـ لا يلتقيان.

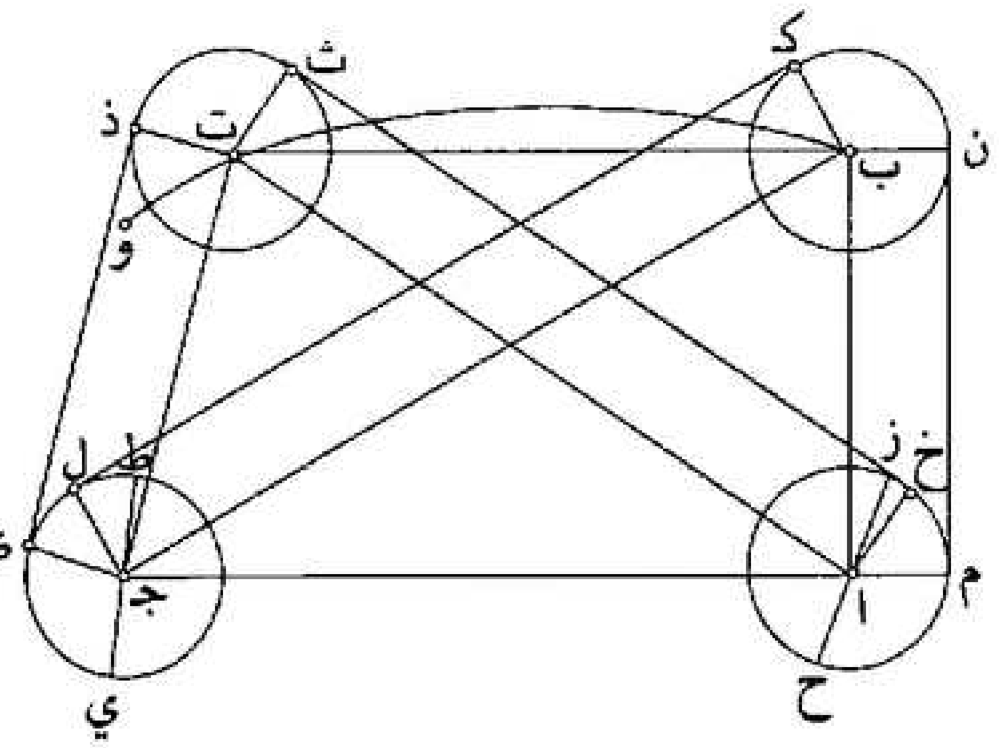
ونُنزل نصفي دائرتين ودائرة تطابق نصفي دائرتي ز ط ودائرة كـ ولتكن صعبةَ التثني، ومجموعًا يطابق قوس ح م وخط م ن وقوس كـ ن وخط كـ ل وقوس ي ل، وليكن / [ت-٢-ظ] صعبَ التمدّد، سهل التثني، وليتصل بنصفي الدائرتين المطابقتين لنصفي دائرتي ز ط عند نقطتي ح ي. ثم نُثبّت نصفي الدائرتين المطابقتين لنصفي دائرتي ز ط ونعتمد على النقطة المطابقة لنقطة ب في جهة دائرة مركزُها نقطة جـ من نقطة ب إلى نقطة و. وينبغي أن يكون نقصانُ القوة التي تنال الجسمَ السهلَ التثني عن قوة إذا نالته لم يتمدّد بها في الحس محسوسًا، فلا يتمدّد بالقوة التي تناله في الحقيقة. وتتحرك النقطة والدائرة والمجموع المطابقةُ لنقطة ب ودائرة كـ ومجموعِ قوس ح م وخط م ن وقوس كـ ن وخط كـ ل وقوس ل ي حتى تُطابق نقطة و ودائرة س ومجموع قوس ح ص وخط ص ق وقوس ف ق وخط ع ف وقوس ي ع، كل واحد نظيرَه. ويحدث من حركة هذه النقطة ممرٌّ وليكن ب و.

ثم نُثبّت خط ا جـ ونُدير حوله ممرّ ب و حتى تقطع نقطة ب قوس ب ر ونقطة و قوس و ش، ويحدث بسيط ب ش، فنجعله وجه مرآةٍ تُحاذي نقطتي ا جـ، ونُقرّ الجسم المضيء في موضع نقطة جـ، وينبغي أن يكون ضوءه – إذا انعكس من جميع بسيط ب ش إلى نقطة ا – أحرقَ عندها، ثم نُقرّ الجسمَ المضيء في موضع نقطة جـ. أقول: إن ضوءَ الجسم ينعكس من جميع بسيط ب ش إلى نقطة ا فيُحرق عندها.

3 س: ه س – 9 من خط: مكررة، ثم ضرب عليها بالقلم – 11 دائرتين: دائرتي – 14 المطابقة: أثبتها الناسخ في الهامش مع بيان موضعها.

برهان ذلك: أنا نُنزل على ممرّ ب و نقطة ت. فلأنه / لمّا تحرّكت النقطةُ والدائرةُ والمجموعُ، التي طابقت نقطةَ ب ودائرة كـ ومجموعَ قوس ح م وخطّ م ن وقوس كـ ن وخط كـ ل وقوس ي ل، طابقتْ نظائرها عند نقطة ت قبل أن تُطابق نظائرها عند نقطة و. فليكن نظائرُها التي طابقتْها عند نقطة ت، نقطة ت ودائرة ث ومجموع قوس ح خ وخطّ ث خ وقوس ث ذ وخط ذ ض وقوس ي ض. فمجموع قوس ح خ وخط ث خ وقوس ث ذ وخط ذ ض وقوس ي ض مثل مجموع قوس ح م وخط م ن وقوس كـ ن وخط كـ ل وقوس ي ل. ونصل خطي ا ت جـ ت، فمجموع قوس ح خ وخط ث خ وقوس ث ذ وخط ذ ض وقوس ي ض مثل مجموع خطي ا ت جـ ت ونصفي دائرتي ز ط. ومجموعُ قوس ح م / وخط م ن وقوس كـ ن وخط كـ ل وقوس ي ل مثل مجموع خطي ا ب ب جـ ونصفي دائرتي ز ط. فمجموعُ خطي ا ت جـ ت ونصفي دائرتي ز ط مثل مجموع خطي ا ب ب جـ ونصفي دائرتي ز ط، فمجموعُ خطي ا ت جـ ت مثلُ مجموع خطي ا ب ب جـ.

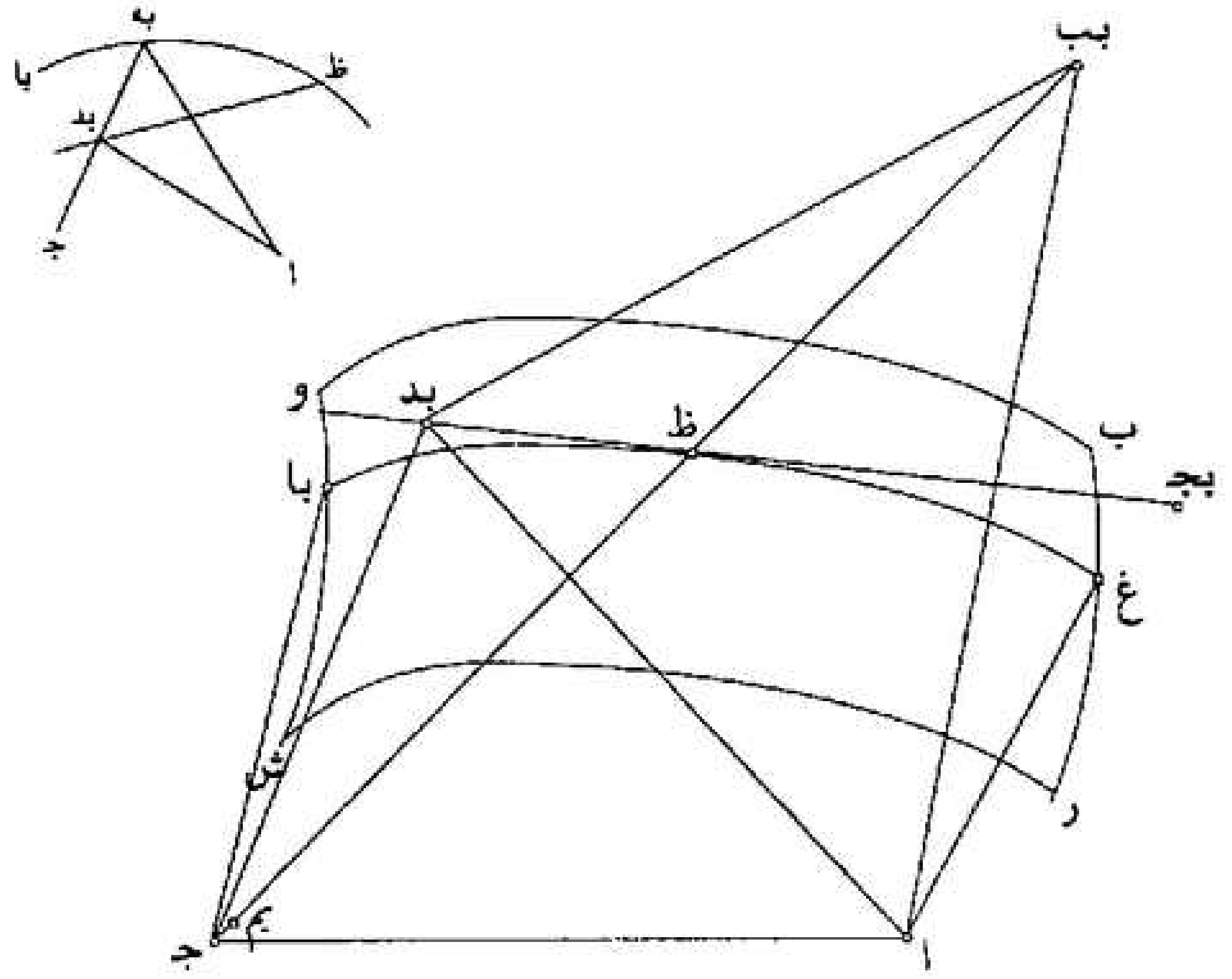
ت-٣-و
ت-٣-ظ



ونُنزل على بسيط ب ش نقطة ظ، ونخرج سطح ا جـ ظ، وليُحدِث في بسيط ب ش رسمَ غ با، ونصل خطي ا ظ جـ ظ، ونُخرج خط ظ بب على استقامة خط جـ ظ، ونقسم زاوية ا ظ بب نصفين بخط بجـ ظ بد، فخط بجـ بد يُماسّ رسْم غ با على نقطة ظ، لأنه إن لم يماسّه عليها فليقطعْه عليها. ونصل خطي ا غ جـ با، فلا بدّ من أن ينتهي من خط بجـ بد إلى نقطة ظ جزءٌ يكون داخل سطح ا با. ونُنزل على هذا الجزء نقطة بد، ونجعل خط ظ بب مثل خط ا ظ، ونصل خطي ا بد بب بد، فخط ظ بد ضلعٌ مشترك لمثلثي ا ظ بد ظ بب بد، وزاوية ا ظ بد مثل زاوية بب ظ بد، لأن زاوية ا ظ بجـ مثل زاوية بب ظ بجـ فخطُ بب بد مثل خط ا بد، ونصل خط جـ بد، فمجموع خطي ا بد جـ بد مثل مجموع

4 نقطة ت (الثانية): فوق السطر / ح خ: ه ح خ – 8 جـ ت: فوق السطر – 18 ا ظ بد مثل زاوية: أثبتها الناسخ في الهامش مع بيان موضعها – 18-19 ظ بجـ فخط بب بد: أثبتها الناسخ في الهامش مع بيان موضعها.

خطي بب بد جـ بد، ومجموع خطي بب بد جـ بد أعظم من خط جـ بب، وخط ظ بب مثل خط ا ظ، فخط جـ بب مثل مجموع خطي ا ظ جـ ظ، فمجموع خطي ا بد جـ بد أعظم من مجموع خطي ا ظ جـ ظ. وليلْقَ خط جـ بد رسمَ غ با على نقطة به، ونصل خط ا به. فلأن رسم ب و يطابق رسمَ / ت-٤-و غ با ونقطتي ا جـ مشتركتان لهما، ومجموعَ خطي ا ب ب جـ مثل مجموع خطي ا ت جـ ت، فمجموع خطي ا ظ جـ ظ مثل مجموع خطي ا به جـ به. فإذن مجموع خطي ا بد جـ بد أعظم من مجموع خطي ا به جـ به، ولكنه أصغر منه، وهذا محال. فخط بجـ بد يماسُّ رسمَ غ با على نقطة ظ. ولا يماسّ رسم غ با على نقطة ظ خطٌّ مستقيمٌ غيرُ خط بجـ بد.

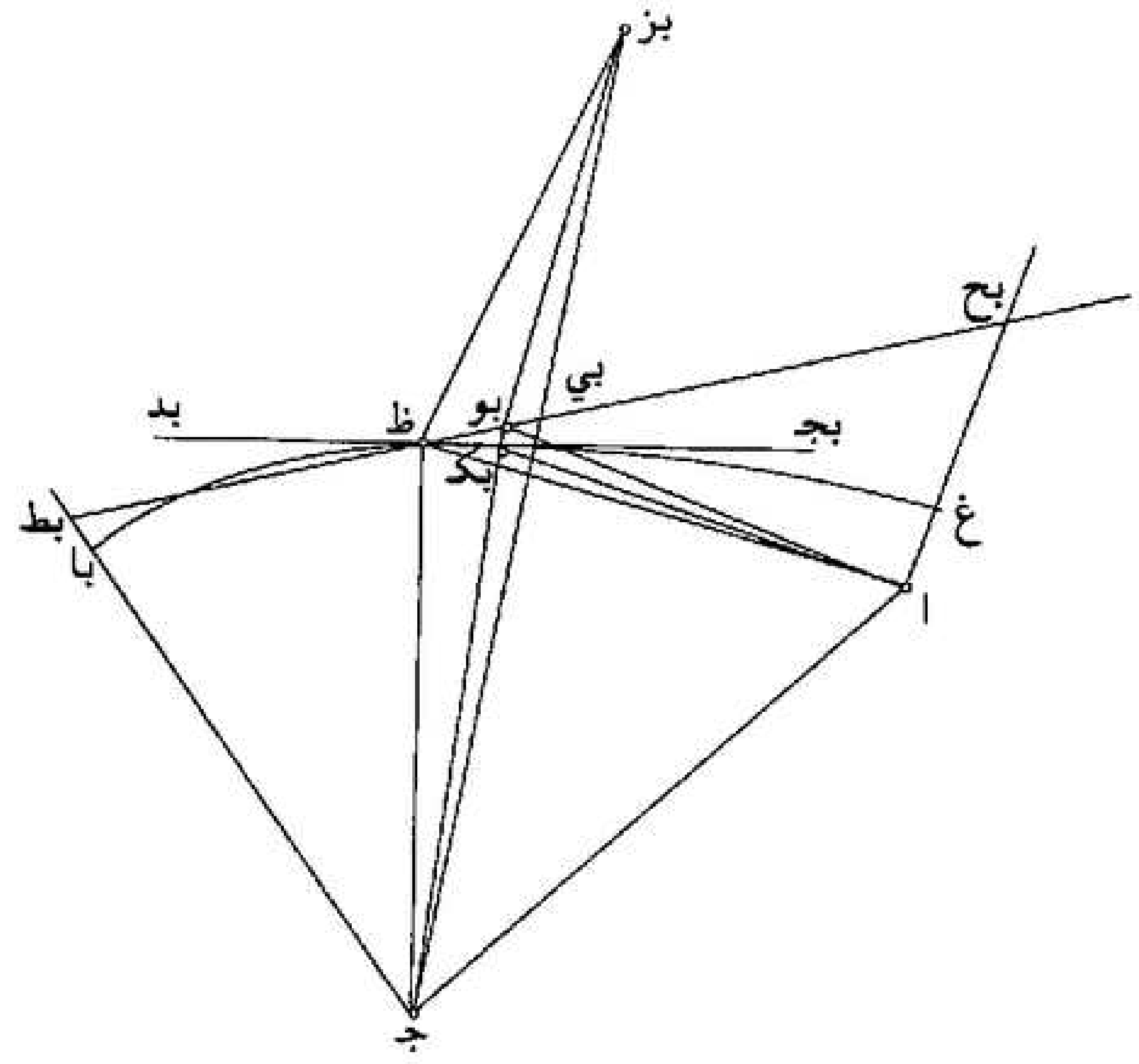


لأنه إن ماسّه عليها خطٌّ مستقيم غيرُه، فليكن ذلك الخط ظ بو. ونجعل زاوية بو ظ بز مثلَ زاوية ا ظ بو، وخط ظ بز مثل خط ا ظ، ونصل خط جـ بز، وليلْق خطٌّ ظ بو خطاً ا غ على نقطة بح، وخطاً جـ با على نقطة بط، وخطاً جـ بز على نقطة بي فلا بدّ من أن ينتهي / ت-٤-ظ من خط ظ بو إلى نقطة ظ جزءٌ يكون خارجَ سطح ا با.

ونُنزل على هذا الجزء نقطةً تكون بين نقطة ظ ونقطة بي وإحدى نقطتي بح بط، ولتكن بو. ونصل خطي ا بو بو بز. فلأن خط ظ بز مثل خط ا ظ وخطاً ظ بو ضلعٌ مشتركٌ لمثلثي ظ بو بز ا ظ بو وزاوية بو ظ بز مثل زاوية ا ظ بو، فخطٌّ بو بز مثل خط ا بو. ونصلُ خطاً جـ بو. فمجموع خطي ا بو جـ بو مثل مجموع خطي بو بز جـ بو. ولأن نقطة بو داخل مثلث

5 ب جـ: بجـ – 8 بجـ بد: بي بد.

جـ ظ بز، فمجموع خطي بو بز جـ بو أصغر من مجموع خطي ظ بز جـ ظ. ولأن خطَّ ظ بز مثل خط ا ظ فمجموع خطي ظ بز جـ ظ مثل مجموع خطي ا ظ جـ ظ. وليلْق خط جـ بو رسمَ / غ با على نقطة بكـ. ونصل خط ا بكـ، فمجموع خطي ا ظ جـ ظ مثل مجموع ت-ه-و خطي ا بكـ جـ بكـ، فإذن مجموع خطي ا بو جـ بو أصغر من مجموع خطي ا بكـ جـ بكـ، ولكنه أعظم منه، وهذا محال. فليس يُماسّ رسمَ غ با على نقطة ظ خطٌّ مستقيمٌ غيرُ خط بجـ بد.

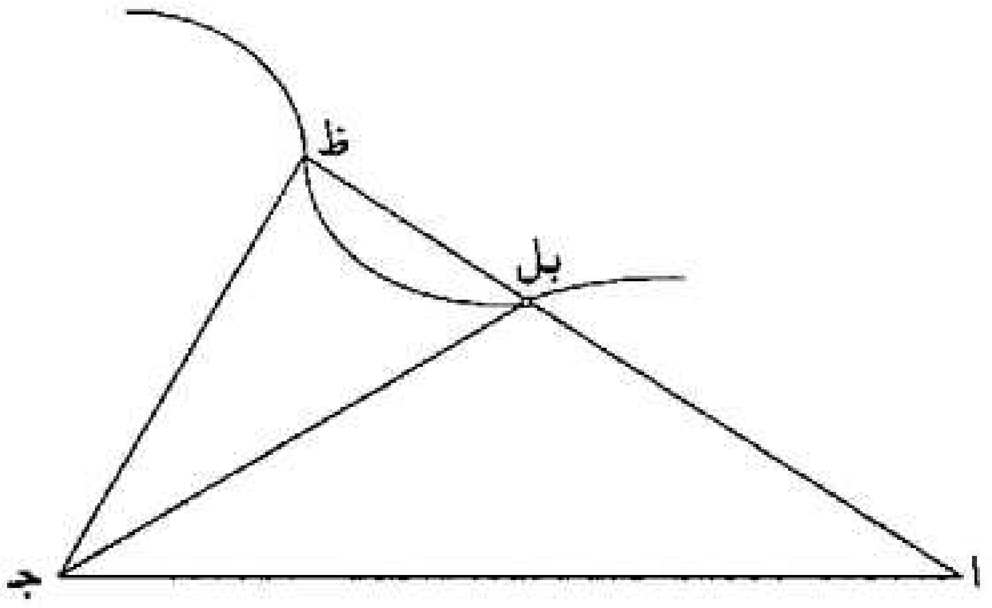


ونُخرج على خط بجـ بد سطحًا قائمًا على سطح ا جـ ظ، فيماسّ بسيطَ ب ش على نقطة ظ، ولا يماسُّه عليها سطحٌ مستوٍ غيرُه، لمثل ما بيّنا فيما تقدم.

وزاوية جـ ظ بد مثل زاوية بب ظ بجـ، وزاويةُ بب ظ بجـ مثل زاوية ا ظ بجـ، فزاوية جـ ظ بد مثل زاوية ا ظ بجـ، وخطا ا ظ جـ ظ لا يلقيان بسيطَ ب ش على غير نقطة ظ، لأنهما إن لقياه على غيرها فسيلْقيان رسمَ غ با على غير نقطة ظ، فليلقياه على نقطة بل.

10 يلقيان: يلتقان.

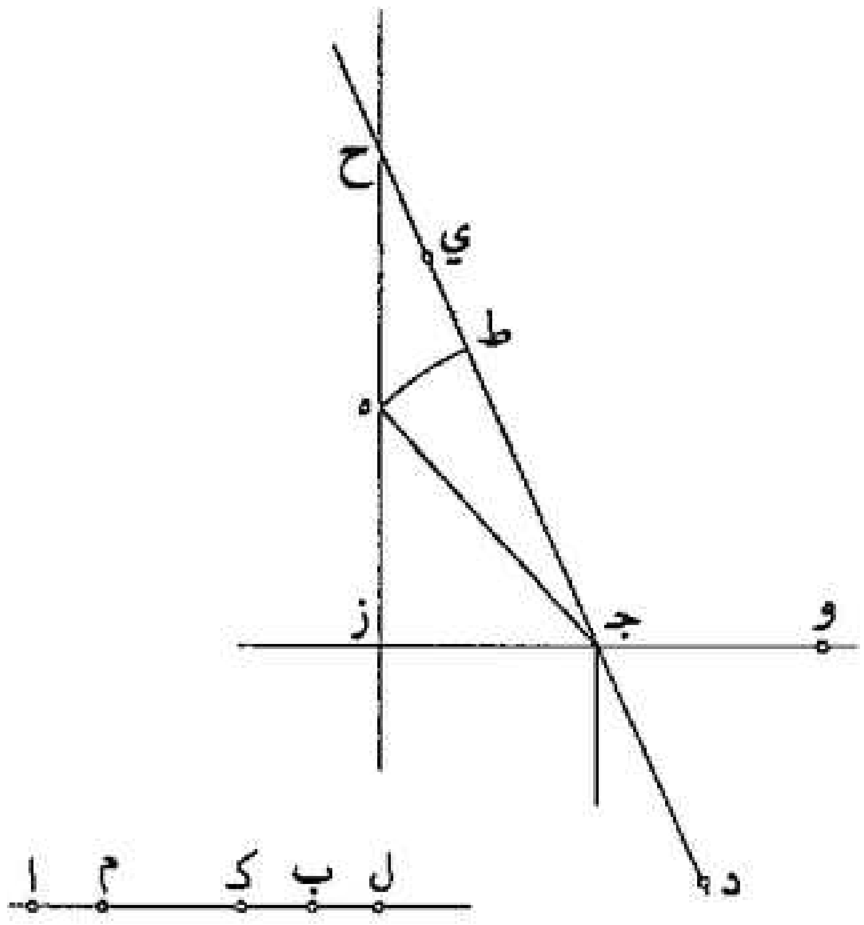
ونصلُ خط ا بل. فلأن نقطتي ظ بل على رسم غ با، فمجموع خطي ا بل جـ بل مثل مجموع خطي ا ظ جـ ظ، ولكنه / أصغرُ منه، وهذا محال. فخطا ا ظ جـ ظ لا يلقيان [ت-٥-ظ] بسيطَ ب ش على غير نقطة ظ. وليلْق خطُّ جـ ظ الجسمَ المضيءَ على نقطة بم، فضوءُ نقطة بم يخرج على خط ظ بم إلى نقطة ظ وعلى خط ا ظ إلى نقطة ا. وكذلك سائر النقط المُنزلة على بسيط ب ش، فضوءُ الجسم ينعكس من جميع بسيط ب ش إلى نقطة ا فيُحرق عندها؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



‹العدسة المسطحة المحدبة›

وإن كان الإحراقُ بضوء ينفذ في آلة، فإنا نعمد إلى قطعة بلُّور تنتهي إلى سطح مستوٍ، وليكن جـ. وينبغي أن تكون بقدْر الحاجة، وأجزاؤها في الصفاء متشابهة. ونستخرج خطين ينفذ الضوءُ على أحدهما في البلّور، وليكن جـ د وينعطف على الآخر في الهواء، وليكن جـ ه. ونُخرج سطح جـ د ه، وليكن الفصلُ المشتركُ بينه وبين سطح جـ خطَّ و جـ ز، فزاويتا د جـ و ه جـ ز حادّتان، وأصغرُهما زاوية ه جـ ز، ونخرج خطَّ جـ ح على استقامة خط جـ د ونُنزل على خط جـ ح نقطة ح ونُخرج خط ز ح قائمًا على خط جـ ز، وليلْق خطَّ جـ ه على نقطة ه. فخطُّ جـ ه أصغر من خط جـ ح. ونفصل من خط جـ ح خطَّ جـ ط مثلَ خط جـ ه، ونقسم ح ط نصفين على نقطة ي، ونجعل نسبة خط ا ك إلى خط ا ب كنسبة خط جـ ط إلى خط جـ ي ونخرج خط ب ل على استقامة خط ا ب ونجعله مثلَ خط ب ك. فإما أن تكون الأضواءُ الخارجةُ من نقطة على وجه المُضيء / إلى جوانب الآلة متوازيةً في [ت-٦-و] الحس أو لا تكون متوازية فيه.

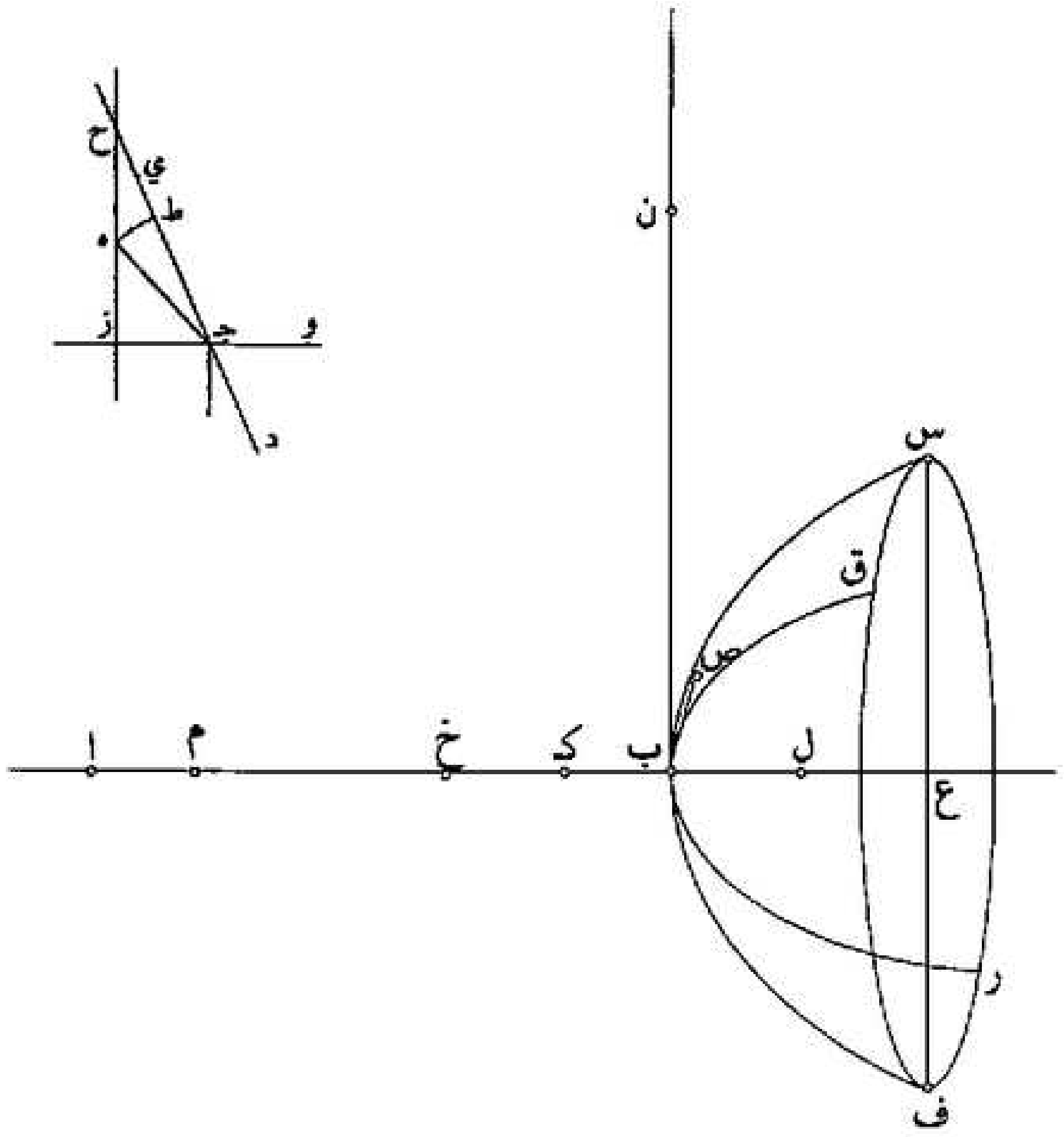
2 يلقيان: يلتقان – هذا الشكل ليس في المخطوطة.



فإن كانت الأضواءُ الخارجةُ من نقطة على وجه المُضيء إلى جوانب الآلة متوازيةً في الحس فإمّا أن يكون الإحراقُ على مسافة قريبة أو غيرِ قريبةٍ؛ فإن كان الإحراق على مسافة قريبة، فإنا نجعل خط ب م مثلَ خط ا ك، ونخرج خطًّ ب ن قائمًا على خط ا ب، ونجعلُ سطح ب ن في ب م أربعةَ أمثال سطح ب ل في ل م. ونحدُّ قطعًا زائدًا سهمُه خطُّ ب م وضلعُ سهمه خطُّ ب ن يبتدئ من نقطة ب وينتهي إلى نقطة س؛ ونُخرج خطًّ س ع قائمًا على خط ب ل، ونُثبّت خط ب ع ونُدير حوله السطحَ الذي يحيط به قطعُ ب س وخطا ب ع س ع حتى تقطع نقطةُ س دائرة س ف ويحدُث مجسمُ ب س، فنخرُطُ مثلَه مع هدفين يلي أحدُهما دائرةَ س ف وفي وسطه ثُقبٌ تحيط به دائرةٌ، ويلي الآخرُ نقطةَ ب وفي وسطه دائرةٌ يوافقها ضوءُ الشمس النافذُ من الثقب إليها، ويكون الخط المارُّ بمركزي الدائرتين موازيًا لخط ب ل من نفس الجوهر الذي اعتبرنا به، ونُنزل في أحد الهدفين فضلاً لنُمسِكَه به ونجلوه، سوى الهدفين فما فوقهما. وينبغي أن يكون ضوء الشمس، إذا نفذَ من جميع سطح ع إلى جميع سطح ب، سوى موضع الهدفين فما فوقهما، ومن جميع بسيط ب سواه إلى نقطة ا، أحرَق عندها.

ثم نحاذي به الشمس حتى ينفُذ ضوءُها من الثقب إلى الدائرة؛ / أقول: إن ضوء ت-٦-ظ الشمس ينفذُ من جميع سطح ع إلى جميع بسيط ب سوى موضع الهدفين فما فوقهما ومن جميع بسيط ب سواه إلى نقطة ا فيحرق عندها.

هذا الشكل ليس في المخطوطة – 4 ونحدّ: ونجد – 15 سوى: سوا – 15-16 موضع ... سواهُ: أثبتها الناسخ في الهامش مع بيان موضعها.



برهان ذلك: أنا نُنزل على بسيط ب نقطةً، فإما أن توافق نقطة ب وإما ألا توافقها؛ فإن وافقتْ النقطةُ المنزلةُ نقطة ب فإنا نخرج على خط ب ن سطح ب ن ص قائمًا على سطح ل ب ن فهو يُماسُّ بسيط ب على نقطة ب؛ لأنه إن لم يُماسّه عليها فليقطعْه عليها، فلا بدّ من أن ينتهي من سطح ب ن ص إلى نقطة ب جزءٌ يكون داخلَ مجسم ب س ف. ونُنزل على هذا الجزء نقطةَ ص ونُخرج سطح ب ل ص وليُحدث في بسيط ب رسمَ ق ب ر، وفي سطح ع خطَّ ق ر وفي سطح ب ن ص خط ب ص. فلأن نقطة ص داخلَ مجسّم ب س ف كما أنها على سطح ب ل ص، فهي داخلَ السطح الذي يحيط به رسمُ ق ب ر وخطُّ ق ر. ولأن قطع ب س زائدٌ وسهمُه ب ل، وهو يطابق رسمَ ب ق، وخط ب ل مشترك لهما، فرسم ب ق قطْع زائدٌ، وسهمُه خط ب ل، فليس خط ب ص قائمًا على خط ب ل. ولأن سطح ب ن ص قائم على سطح ب ل ن وخطَّ ب ن قائم على خط ب ل، فسطح ب ن ص قائم على خط ب ل، فخط ب ص قائم على خط ب ل، وهذا محال.

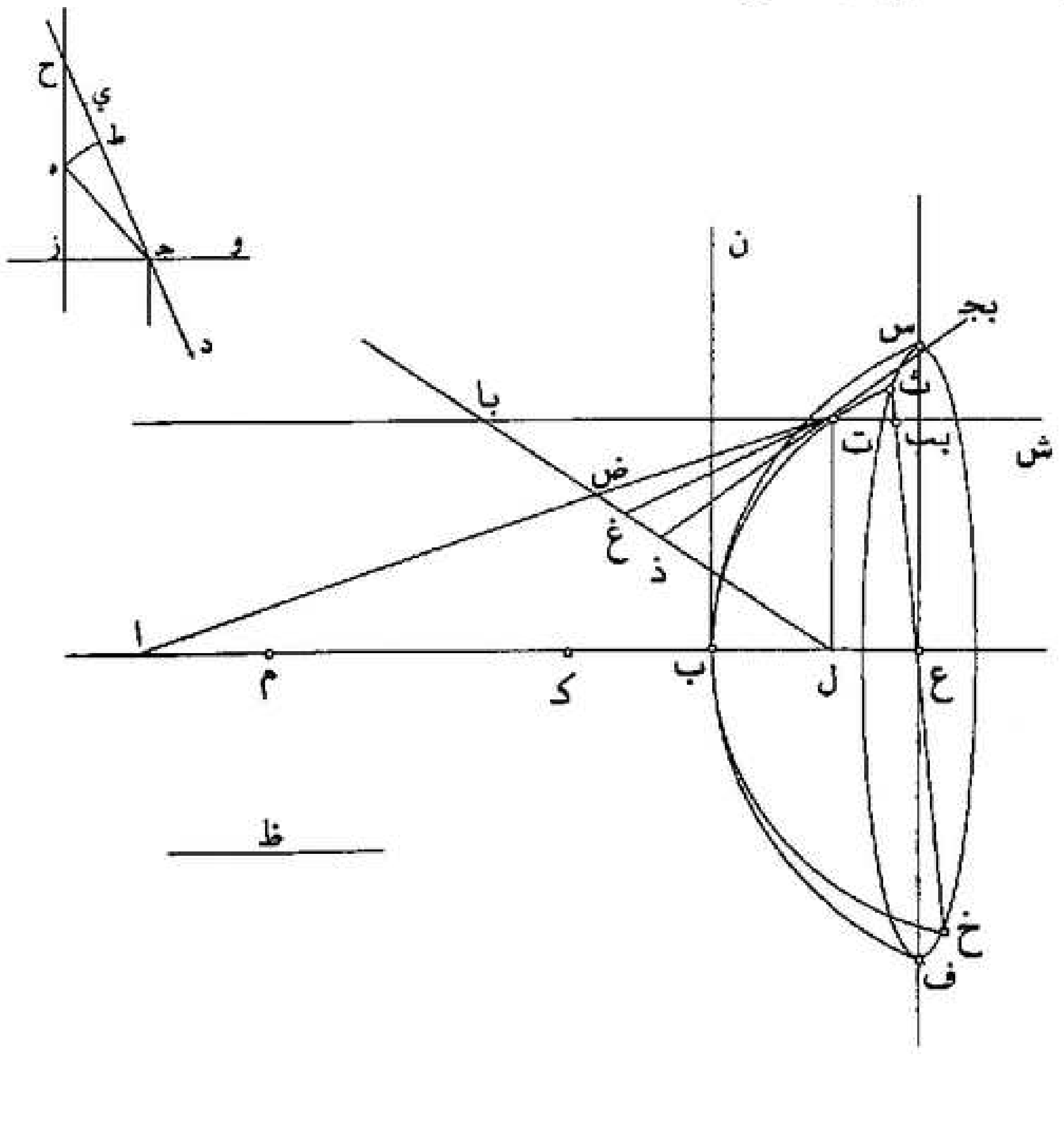
فسطح ب ن ص يماسُّ بسيط ب على نقطة ب ولا يماسّ بسيط ب على نقطة ب سطحٌ مستوٍ غيرُ سطح ب ن ص. /

10 ب ن ص: ب ز ص.

لأنه إن ماسَّه عليها سطحٌ مستوٍ غيرُه، فلأن هذا السطحَ يقطع سطح ب ن ص على ت-٧-و
نقطة ب فلا بدّ من أن يقطع أحدَ خطي ب ن ب ص. فليكن ذلك الخطُّ ب ص والفصلُ
المشترك بين هذا السطح وبين سطح قطْع ق ر خطَّ ب ش. فلأن هذا السطح يماسُّ بسيطَ ب
على نقطة ب فخطُّ ب ش يماسُّ قِطْع ق ب ر على نقطة ب، وكذلك خط ب ص، وهذا
محال، فلا يماسّ بسيطَ ب على نقطة ب سطحٌ مستوٍ غيرُ سطح ب ن ص. /

وخط ا ع لا يلقى بسيطَ ب على غير نقطة ب لأنه إن لقيه على غيرها فليُحدث سطحُ ت-٧-ظ
ب س ع في بسيط ب رسمَ ب ف، فسيلقى خطُّ ا ع رسمَ س ب ف – وهو قطْع زائدٌ
سهمُه خط ب ل – على غير نقطة ب، وهذا محال، فخط ا ع لا يلقى بسيطَ ب على غير
نقطة ب.

ولأنا قد حاذَيْنا بقطعة البلُّور الشمس حتى نفذَ ضوءُها من الثقب إلى الدائرة فقد خرج
ضوءُ نقطةٍ على وجه الشمس على الخط المتصل بين مركزي الثقب والدائرة، والخطُّ المتصل
بينهما موازٍ لخط ب ل، فضوءُ تلك النقطة يخرج في الهواء على استقامة خط ب ع إلى
نقطة ع، وهذا الخطُّ / قائم على سطح ع فضوءُها ينفُذ في البلُّور على خط ب ع وهو لا ت-٨-و
يلقى بسيطَ ب على غير نقطة ب، فيلقى به غيرَ البلّور، فتبيَّن أنه يصل فيه إلى نقطة ب،
وخط ب ع قائم على السطح الذي يماسُّ بسيطَ ب على نقطة ب ولا يماسّه عليها غيرُه،
فضوءُها ينفُذ في الهواء على خط ا ب وهو لا يلقى بسيطَ ب على غير نقطة ب، فيلقى به
غير الهواء، فبيّنٌ أنه يصل فيه إلى نقطة ا.



وإن لم يوافق النقطةُ المنزلةُ نقطةَ ب، فلتكن ت ونخرج سطح ب ل ت وليُحدث في بسيط ب رسمَ ث ب خ، فهو قطعٌ زائدٌ، وسهمُه خط ب ل وضلعُ سهمه مثلُ خط ب ن. ونصل خطي ا ت ل ت ونقسم زاوية ا ت ل نصفين بخط ت ذ، فهو يماسّ قطع ث ب خ. ونُخرج على خط ت ذ سطحًا قائمًا على سطح ب ل ت، فهو يماسّ بسيط ب على نقطة / ت ولا يماسّه عليها سطحٌ مستوٍ غيرُه لمثل ما كنا بيّنا. ولأن سطح ب ن في ب م أربعة أمثال ت-٨-ظ
سطح ب ل في ل م، فزيادة خط ا ت على خط ل ت مثلُ خط ب م. ونجعل خط ا ض مثلَ خط ب م، فخط ت ض مثل ل ت. ونُخرج خط ل ض وليلقَ خطَّ ت ذ على نقطة ذ، فخط ت ذ ضلعٌ مشتركٌ لمثلثي ت ذ ض ل ت ذ وزاوية ذ ت ض مثل زاوية ل ت ذ، فزاوية ت ذ ض مثل زاوية ل ذ ت، فخط ذ ض قائم على خط ت ذ، فخط ذ ض قائم على السطح المماس لبسيط ب على نقطة ت، ونجعل نسبةَ خط ت ذ إلى خط ظ كنسبة خط جـ ه إلى خط جـ ح. فلأن زاوية جـ ز ح قائمة، وخط جـ ه أصغر من خط جـ ح، فخط ت ذ أصغر من خط ظ. ونخُط حول نقطة ت ببُعدٍ مثلِ خط ظ دائرةً، فستلقى الخطَّ الخارج من نقطة ذ على استقامة خط ل ذ فلتَلْقه على نقطة غ، ونصل خط ت غ، فهو مثل خط ظ. فنسبةُ خط ت ذ إلى خط ت غ كنسبة خط جـ ه إلى خط جـ ح. ونخرج خط ت با موازيًا لخط ا ل، وليلْق خطَّ ل ض على نقطة با، فمثلث ت ض با شبيهٌ بمثلث ا ل ض فنسبة خط ت ض إلى خط ت با كنسبة خط ا ض إلى خط ا ل، وخطُّ ا ض مثل خط ب م، وخط ب م مثل خط ا ك، فخط ا ض مثل خط ا ك كما أن خط جـ ه مثل خط جـ ط. ونسبة خط ا ك إلى خط ا ب كنسبة خط جـ ط إلى خط جـ ي وخط / ب ك ت-٩-و
مثل خط ب ل كما أن خط ط ي مثل خط ح ي، فنسبة خط ا ض إلى خط ا ل كنسبة خط جـ ه إلى خط جـ ح، فنسبة خط ت ض إلى خط با ت كنسبة خط جـ ه إلى خط جـ ح. وقد كانت نسبة خط ت ذ إلى خط ت غ كنسبة خط جـ ه إلى خط جـ ح، فنسبة خط ت ذ إلى خط ت غ كنسبة خط ت ض إلى خط با ت، فنسبة خط ت ذ إلى خط ت ض كنسبة ‹خط› ت غ إلى خط ت با، وخط ت ذ أصغر من خط ت ض، فخط ت غ أصغر من خط ت با، فنقطة غ بين نقطتي ذ با. وليلْق خطُّ ت با سطح ع على نقطة بب، فخط ت بب قائم على سطح ع. ونُخرج خط ت بجـ على استقامة خط ت ذ فزاويةُ بب ت بجـ حادةٌ، وهي مثل زاوية ذ ت با، وزاوية ذ ت با أعظم من زاوية ذ ت غ، فزاوية

1 ب ل ت: ب ل ث – 3 ت ذ: ت ل – 11 وخط: فخط – 12 فستلقى: فسيلقى – 13 خط (الأولى): فوق السطر.

بب ت بجـ أعظم من زاوية ذ ت غ، وخطا ا ت ت بب لا يلقيان بسيط ب على غير نقطة ت، لأنهما إن لقياه على غيرها فسيلْقيان قِطعَ ث ب خ على غير نقطة ت، وهذا محالٌ، فهما لا يلقيان بسيطَ ب على غيرها.

فضوءُ نقطةٍ على وجه الشمس يخرج على استقامة خط ت بب إلى نقطة بب وعلى خط ت بب إلى نقطة ت وعلى خط ا ت إلى نقطة ا، وكذلك سائر النقط المُنزلة على بسيط ب. فضوءُ الشمس ينفُذ من جميع سطح ع إلى جميع بسيط ب سوى موضع الهدفين فما فوقهما، / ومن جميع بسيط ب سِواه إلى نقطة ا فيُحرِق عندها؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ت-٩-ظ

〈الرسم المتصل للقطع الزائد〉

وإن كان الإحراق على مسافة غير قريبة، فإنا نعمل على خط ا ل قوسًا تقبل زاوية منفرجة، ولتكن ا م ل، ونخطّ حول نقطة ا ببُعد خط ا كـ دائرةً، ولتلْقَ قوسَ ا م ل على نقطة م ونُخرج خطي ل م / ا م ن، فزاويةُ ا م ل منفرجةٌ، فزاويةُ ل م ن حادّةٌ. ونجعلُ زاوية ت-١٠-و م ل س مثلَ زاوية ل م ن، فزاوية م ل س حادّةٌ، فخط م ن يلقى خطَّ ل س، فليلْقه على نقطة ن. ونُخرج خط ع ا ف قائمًا على خط ا ب ونجعل خط ا ع مثلَ خط ا ف. وينبغي ألا يكون كل واحد من خطي ا ب كـ ل أصغرَ من خط ع ف. ونخطّ حول نقطة ا ببُعد خط ا ع نصفَ دائرة ع ف ونُخرج خط ل ص قائمًا على خط ا ل ونجعله مثلَ خط ا ع، ونُخرج خط ص ع ق، ونُنزل عليه نقطة ق، ونخرج خط ق ر قائمًا على سطح ا ل م وخط ب ش قائمًا على خط ا ب وليلْقَ خطَّ ع ص على نقطة ش، ونُنزل على خط ع ش نقطةَ ث ونجعل خط ص ث مثلَ خط ع ق وخطَّ ث خ قائمًا على سطح ا ل م ونجعله مثلَ خط ق ر، ونصل خط ر خ، ونخُطّ حول نقطة ب ببُعد ب ش دائرة ش ونُخرج خط ب ذ على استقامة خط ب ش وليلْقَ دائرة ش على نقطة ذ، ونصل خط ف ذ، ونُخرج خط ل ض قائمًا على خط ل ن وخطَّ ظ ا غ موازيًا لخط ل ض، وليلق نصفَ دائرة ع على نقطة ظ ويتمّمُ نصف دائرة ظ غ، ونخرج خط ظ با قائمًا على ا ظ ونجعله مثلَ خط ع ق، ونخرج خط با بب قائمًا على سطح ا ل م ونجعله مثلَ خط ق ر، ونجعل خط ل ض مثل خط

12 ل م ن: ا م ن – 22 ظ با: ظ ب.

ل ص / ونُخرج خط ن بجـ قائمًا على خط ل ن ونجعلُه مثلَ خط ل ض، ونُخرج خط ض بجـ بد ونجعله مثلَ خط ص ت. ونجعل خط ض به مثل خط ص ث ونُخرج خط به بو قائمًا على سطح ا ل م ونجعله مثل خط ث خ، ونصل خط بب بو ونخطّ حول نقطة ن ببُعد خط ن بجـ دائرة بجـ، ونخرج خطي ا بز ن بح قائمين على خط ا ن، وليلْقيا نصفَ دائرة ظ ودائرة بجـ على نقطتي بز بح، ونصل خط بز بح وخط با به. فلأن خط به بو مثل ث خ وخط ث خ مثل ق ر وخط ق ر مثل خط با بب فخط به بو مثل خط با بب وهما قائمان على سطح ا ل م، فخط بب بو مثل خط با به. ونصل خطي ل به ا با. فلأن خط ض به مثل خط ص ث، وخط ص ث مثل خط ع ق، وخط ع ق مثل خط ظ با، فخط ض به مثل خط ظ با. ولأن خط ل ض مثل خط ل ص وخط ل ص مثل خط ا ع – لأن سطح ا ص قائمُ الزوايا – وخط ا ع مثل خط ا ظ، فخط ل ض مثل خط ا ظ، وكل واحدة من زاويتي ل ض به ا ظ با قائمةٌ، فخط ل به مثل خط ا با، وزاوية ض ل به مثل زاوية ظ ا با، وخط ل ض موازٍ لخط ا ظ، فخط ل به موازٍ لخط ا با وهو مثله، فخط با به مثل خط ا ل وسطح ا ص قائم الزوايا، فخط ا ل مثل خط ع ص وخط ص ث مثل خط ع ق، فخط ع ص مثل خط ق ث وخط ث خ مثل خط ق ر وهما قائمان على سطح ا ل م، فخط ق ث / مثل خط ر خ، فإذًا خط بب بو مثل خط ر خ. ت-١٠-ظ ت-١١-و

ونُخرج خط س بد قائمًا على خط ل س، فسطح ن بد قائم الزوايا، فخط بجـ بد مثل خط ن س. ولأن خط ا بز مثل خط ن بح وهما قائمان على خط ا ن فخط ا ن مثل خط بز بح، فمجموعُ خطي بز بح بجـ بد مثل مجموع خطي ا ن ن س. ولأن زاوية م ل ن مثل زاوية ن م ل فخط ل ن مثل خط م ن، فمجموعُ خطي م ن ن س مثل خط ل س، وسطحُ ل بد قائم الزوايا، فخط ل س مثل خط ض بد وخط ض بد مثل خط ص ت. ونُخرج خط ت بط قائمًا على خط ا ب، فسطحُ ل ت قائم الزوايا فخط ص ت مثل خط ل بط، وخط ب ل مثل خط ب ك، فخط ل بط مثل مجموع خطي ب ك ب بط، فمجموعُ خطي م ن ن س مثل مجموع خطي ب ك ب بط. ونقطة ا مركزُ دائرة ك م، فخط ا م مثل خط ا ك، فمجموعُ خطي ا ن ن س مثل مجموع خطي ا ب ب بط وسطح ب ف قائم الزوايا، فخط ا ب مثل خط ف ذ وسطح ب ت قائم الزوايا، فخط ب بط مثل خط ش ت، فمجموعُ خطي ا ب ب بط مثلُ مجموع خطي ف ذ ش ت. فإذن مجموع خطي

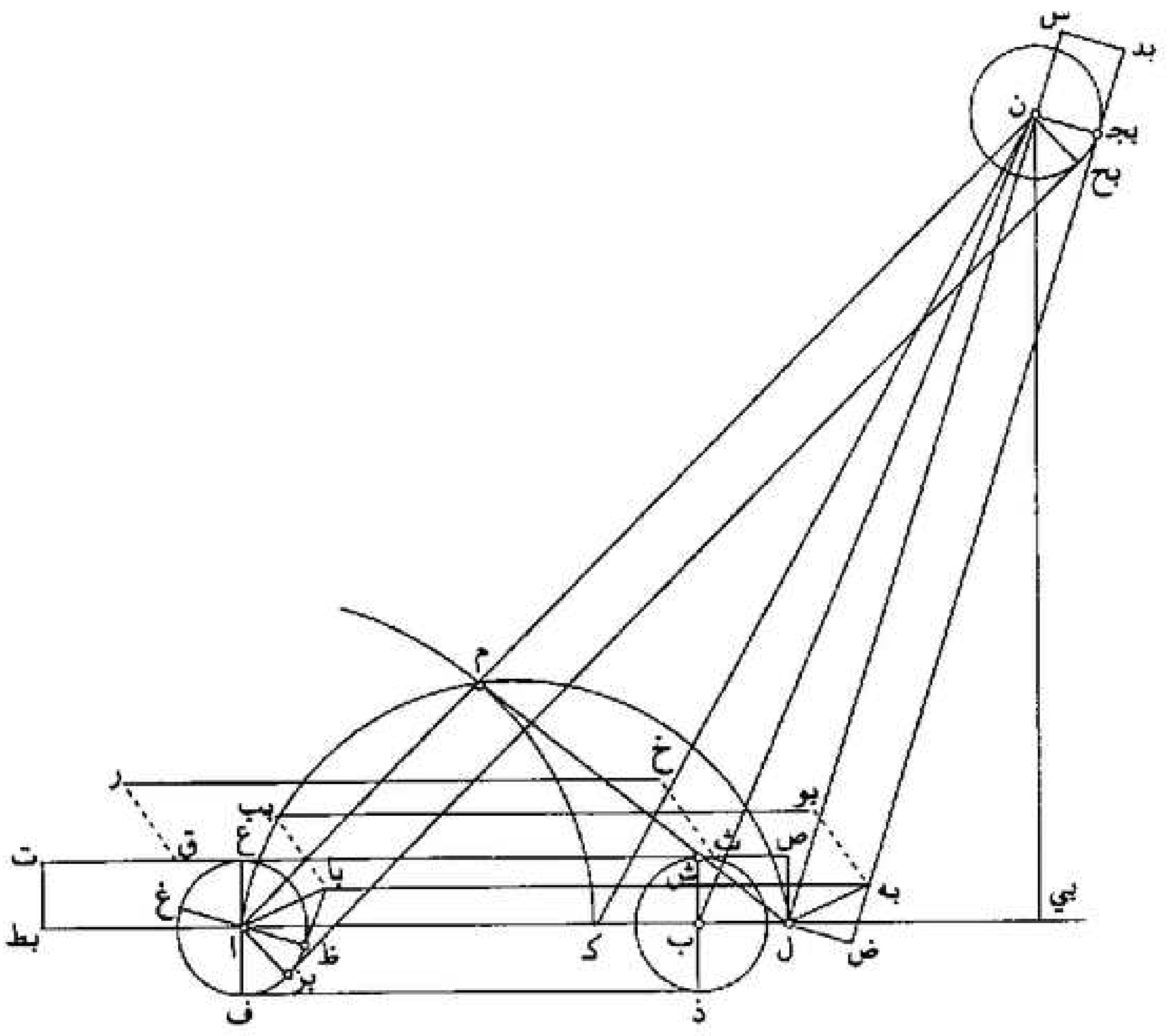
1 ن بجـ: ز بجـ – 5-6 بابه ... ق ر وخط: أثبتها الناسخ في الهامش – 17 ن س: ن ش – 18 ن س: ن ش.

بز بح بجـ بد مثل مجموع خطي ف ذ ش ت، وخطُّ ن بجـ موازٍ لخط ل ض وخط ل ض موازٍ لخط ا ظ فخط ن بجـ موازٍ لخط ا ظ وخط ن بح موازٍ لخط ا بز، فزاوية بجـ ن بح / مثل زاوية ظ ا بز، وخط ن بجـ مثل خط ل ض، وخطُّ ل ض مثل خط ل ص، وخط ل ص مثل خط ا ع، فخط ن بجـ مثل خط ا ع، فقوس بجـ بح مثل قوس ظ بز، فمجموعُ قوسي غ بز بجـ بح مثل نصف دائرة ظ، ونصفُ دائرة ظ مثل نصف دائرة ع، وخط ا ع مثل خط ب ش، فنصف دائرة ع مثل نصف دائرة ش، فمجموعُ قوسي غ بز بجـ بح مثل نصف دائرة ش، فمجموع قوس غ بز وخط بز بح وقوس بجـ بح وخط بجـ بد مثل مجموع خط ف ذ ونصف دائرة ش وخط ش ت. وخط ا ن أعظم من خط ا ب، لأنه إن لم يكن أعظمَ منه فإما أن يكون مثلَه أو أصغرَ منه. فإن كان خط ا ن مثلَ ا ب فلأن مجموع خطي ا ن ن س مثل مجموع خطي ا ب ب بط، فخط ن س مثل خط ب بط. وخط ل س مثل خط ل بط، فخطُّ ل ن مثل خط ب ل، فمجموعُ خطي ا ن ل ن مثل خط ا ل، ولكنه أعظمُ منه، وهذا محال. وإنْ كان خط ا ن أصغرَ من خط ا ب فلأن مجموع خطي ا ن ن س مثل مجموع خطي ا ب ب بط فخط ن س أعظم من خط ب بط. وخط ل س مثل خط ل بط، فخط ل ن أصغر من خط ب ل، فمجموع خطي ا ن ل ن أصغر من خط ا ل، ولكنه أعظم منه، وهذا محالٌ. ت-١١-ظ

فخط ا ن أعظم من خط ا ب وخط ا ب ليس بأصغر من خط ع ف وخط ع ف مثل مجموع خطي ا ع ن بجـ فخط ا ن أعظم / من مجموع خطي ا ع ن بجـ، فنصفُ دائرة ظ ودائرة بجـ لا يلتقيان. وخط ا ب ليس بأصغر من خط ع ف، وخط ع ف مثل مجموع خطي ا ع ب ش، فخط ا ب ليس بأصغر من مجموع خطي ا ع ب ش فنصفُ دائرة ع ودائرة ش لا يتقاطعان. ونُنزل مجموعين ودائرة تطابقُ مجموعَ نصفِ دائرة ع وخطي ع ق ق ر ومجموعَ خطوط ل ص ص ث ث خ ودائرةَ ش، ولتكن نهايات أجسام صعبة التثنّي ومجموعًا يطابق مجموعَ خط ف ذ ونصف دائرة ش وخطّ ش ت، وليكن صعبَ التمدُّد سهلَ التثني وليتّصِلْ بنصف الدائرة والخط المطابقين لدائرة ع وخط ص ت عند نقطتي ف ت، وخطًا يطابق خطَّ ر خ، وليكن صعب التمدّد سهل التثني وليتّصلْ بالخطين المطابقين لخطي ق ر ث خ عند نقطتي ر خ. ثم تُثبت النقطتين المطابقتين لنقطتي ا ل ويُعتمد على النقطة المطابقة لنقطة ب في جهة دائرة مركزها نقطة ن من نقطة ب إلى نقطة ن. وينبغي أن ت-١٢-و

1 ل ض (الأولى والثانية): ل ص – 22 وليكن: ولتكن – 26 ن (الأولى): ل.

يكون نقصانُ القوة التي تنال كل واحد من الجسمين السهْليْ التثني عن قوة إذا نالتْه لم يتمدَّد بها في الحس محسوسًا، فلا يتمدّد بالقوة التي تناله في الحقيقة، وتتحرك النقطةُ والدائرةُ والمجموعاتُ والخط، المطابقةُ لنقطة ب ودائرة ش ومجموع خطوط ل ص ص ث ث خ ومجموع نصفِ دائرة ع وخطي ع ق ق ر ومجموع خط ف ذ ونصف دائرة ش وخط ش ت وخط ر خ حتى / تطابق نقطة ن ودائرةَ بجـ ومجموعَ خطوط ل ض ض به به بو ت-١٢-ظ ومجموعَ نصف دائرة ظ وخطي ظ يا يا بب ومجموعَ قوس غ بز وخط بز بح وقوس بجـ بح وخط بجـ بد وخط بب بو، كل واحد نظيرَه.



/ ويحدث من حركة هذه النقطة ممرٌّ، وليكن ب ن ونصل خط ك ن، فلأن خط ا ن يمرُّ ت-١٧-و بمركز دائرة ك م فخط م ن أصغر من خط ك ن وخط م ن مثل خط ل ن، فخط ل ن أصغر من خط ك ن، وخط ب ل مثل خط ب ك. ونصل خط ب ن، فهو ضلع مشترك لمثلثي ب ل ن ب ك ن، فزاوية ل ب ن أصغر من زاوية ك ب ن، فزاوية ل ب ن حادّة. ونخرج خط ن بي قائمًا على خط ا ل، فخط ل بي على استقامة خط ا ب، وخطُّ ن بي لا يلقى ممرَّ ب ن على غير نقطة ن. لأنه إنْ لقيه على غيرها فليلْقه على نقطة بك. فلأنه لما تحركت النقطةُ والدائرةُ والمجموعاتُ والخط التي طابقت نقطة ب ودائرةَ ش ومجموعَ خطوط ل ص

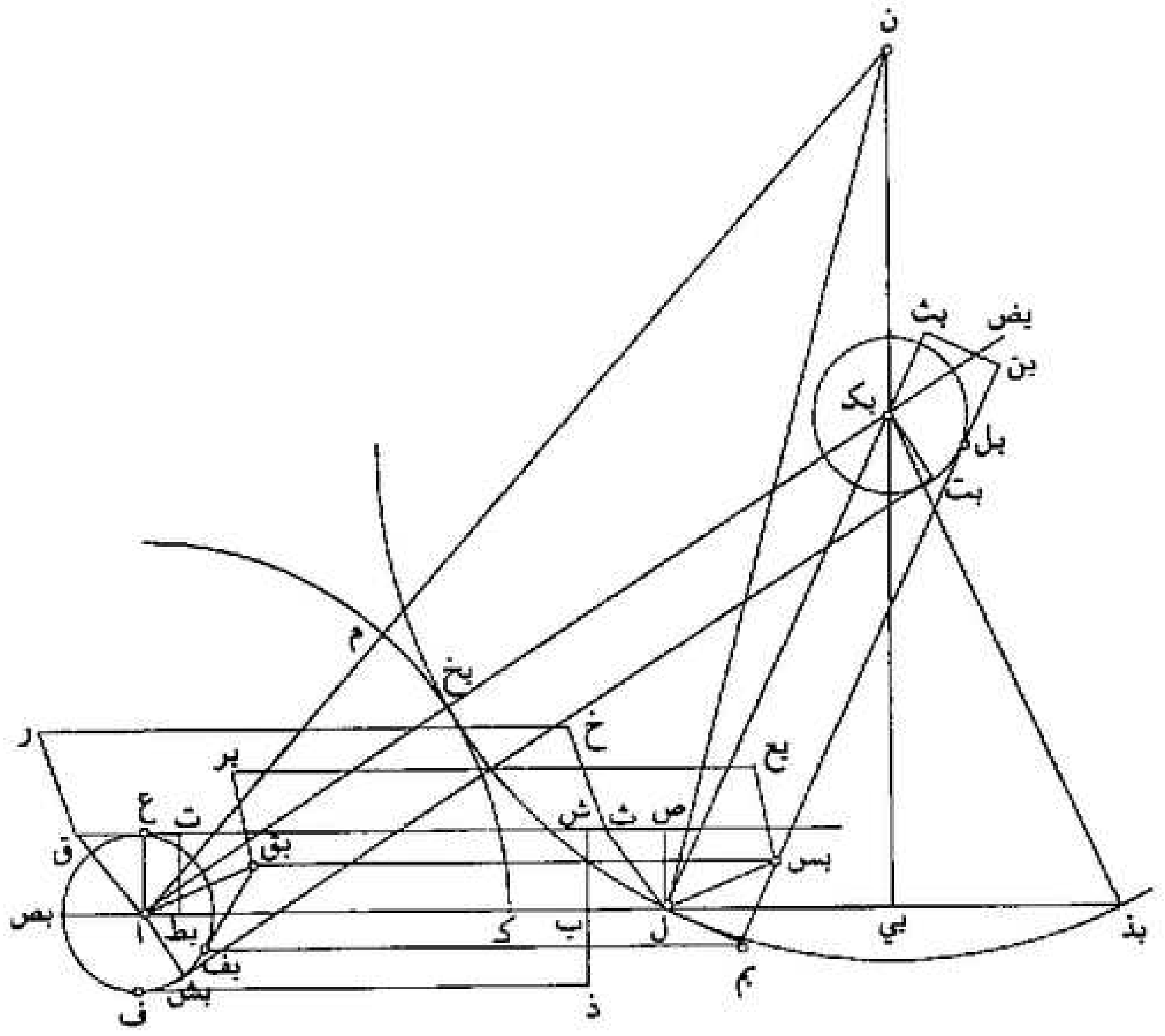
5 ض به: ض بد – 9 ل ن (الأولى): ا ن – 12 ا ب: ا ل.

ص ث ث خ ومجموعَ نصف دائرة ع وخطي ع ق ق ر ومجموعَ خط ف ذ ونصف دائرة شَ وخط ش ت وخط ر خ طابقتْ نظائرها عند نقطة بكـ قبل أن تطابق نظائرها عند نقطة ن. فليكن نظائرها التي طابقتها عند نقطة بكـ نقطةَ بكـ ودائرة بل ومجموعَ خطوط ل بم بم بس بس بع ومجموعَ نصف دائرة بف وخطي بف بق بق بر ومجموعَ قوس بص بش وخط بش بت وقوس بل بت وخط بل بن وخط بع بر. فمجموعُ قوس بص بش وخط بش بت وقوس بل بت وخط بل بن مثل مجموع خط / ف ذ ونصف دائرة شَ وخط ش ت. ونُخرج خط ل بكـ بث وخطَّ بن بث قائمًا على خط ل بث، ونصلُ خط بس بق. فلأن خط بس بع مثل خط ث خ، وخطَّ ث خ مثل خط ق ر وخطَّ ق ر مثل خط بق بر، فخطّ بس بع مثل خط بق بر وهما قائمان على سطح ا ل م. فخط بس بق مثل خط بع بر، وخط بع بر مثل خط ر خ وخط ر خ مثل ‹خط› ا ل، فخط بس بق مثل خط ا ل. ونصل خطي ل بس ا بق وخطي ل ث ا ق فيُطابق مثلثُ ل بم بس مثلثَ ل ص ث ومثلثُ ل ص ث مثلثَ ا ع ق ومثلثُ ا ع ق مثلث ا بف بق، فيطابق مثلثُ ل بم بس مثلثَ ا بف بق، فخطّ ل بس مثل خط ا بق وخط بس بق مثل خط ا ل. فخط ل بس موازٍ لخط ا بق، وزاوية بم ل بس مثل زاوية بف ا بق، فخط ا بف موازٍ لخط ل بم. فمجموع قوس بص بش وخطٍّ بش بت وقوسِ بل بت وخطِّ بل بن مثل مجموع خطي ا بكـ بكـ بث ونصفِ دائرة بف لمثل ما بيّنا فيما تقدم. ت - ١٧ - ظ

ومجموعُ خط ف ذ ونصفِ دائرة شَ وخط ش ت مثل مجموع خطي ا ب ب بط ونصفِ دائرة ع، فمجموع خطي ا بكـ بكـ بث ونصفِ دائرة بف مثلُ مجموع خطي ا ب ب بط ونصف دائرة ع. ونصفُ دائرة بف مثل نصف دائرة ع، فمجموع خطي ا بكـ بكـ بث مثل مجموع خطي ا ب ب بط. وليلق خط ا بكـ دائرة كـ م على نقطة بخ، فخط ا بخ مثل خط ا كـ، فمجموعُ خطي بكـ بخ بكـ بث مثل مجموع ب كـ ب بط. / ومجموع خطي ب كـ ب بط مثل خط ل بط، وخط ل بط مثل خط ص ت، وخط ص ت مثل خط بم بن، وخط بم بن مثل خط ل بث. فمجموع خطي بكـ بخ بكـ بث مثل خط ل بث، فخط بكـ بخ مثل خط ل بكـ. ونجعل خط بي بذ مثلَ خط ل بي، ونصلُ خط بكـ بذ. فلأن خطَّ بكـ بي قائم على خط ل بذ فخطّ بكـ بذ مثل خط ل بكـ. ونخط حول نقطة بكـ ببُعد ل بكـ دائرةً، فتمرّ بنقط ل بخ بذ. ونُخرج خط بكـ بض على استقامة خط ت - ١٨ - و

2 وخط ش ت: أثبتها الناسخ في الهامش مع بيان موضعها – 4 بم بس: بم بن – 5 بع بر: بع بو – 8-9 بق بر فخط... مثل خط (الثانية): أثبتها الناسخ في الهامش مع بيان موضعها – 13 بس ب ق: بش بق – 23 ل بث: ل ب بث.

ا بك، وليلْقَ دائرة ل على نقطة بض، فخط ل بك مثل خط بك بض، فمجموعُ خطي ا بك ل بك مثل خط ا بض. وسطحُ ا بض في ا بخ مثل سطح ا ل في ا بذ، فسطح مجموع خطي ا بك ل بك في ا بخ مثل سطح ا ل في ا بذ. وكذلك نبيّنُ أنّ سطح مجموع خطي ا ن ل ن في ا م مثل سطح ا ل في ا بذ. فسطح مجموع خطي ا بك ل بك في ا بخ مثل سطح مجموع خطي ا ن ل ن في ا م. وخط ا بخ مثل خط ا م، فمجموع خطي ا بك ل بك مثل مجموع خطي ا ن ل ن، وخط ا بك أصغر من خط ا ن لأنه أقرب إلى خط ا بي القائم على خط ن بي من خط ا ن، فخط ل بك أعظم من خط ل ن، وهو أقرب إلى خط ل بي من خط ل ن، وهذا محال. / ت – ١٨ – ظ



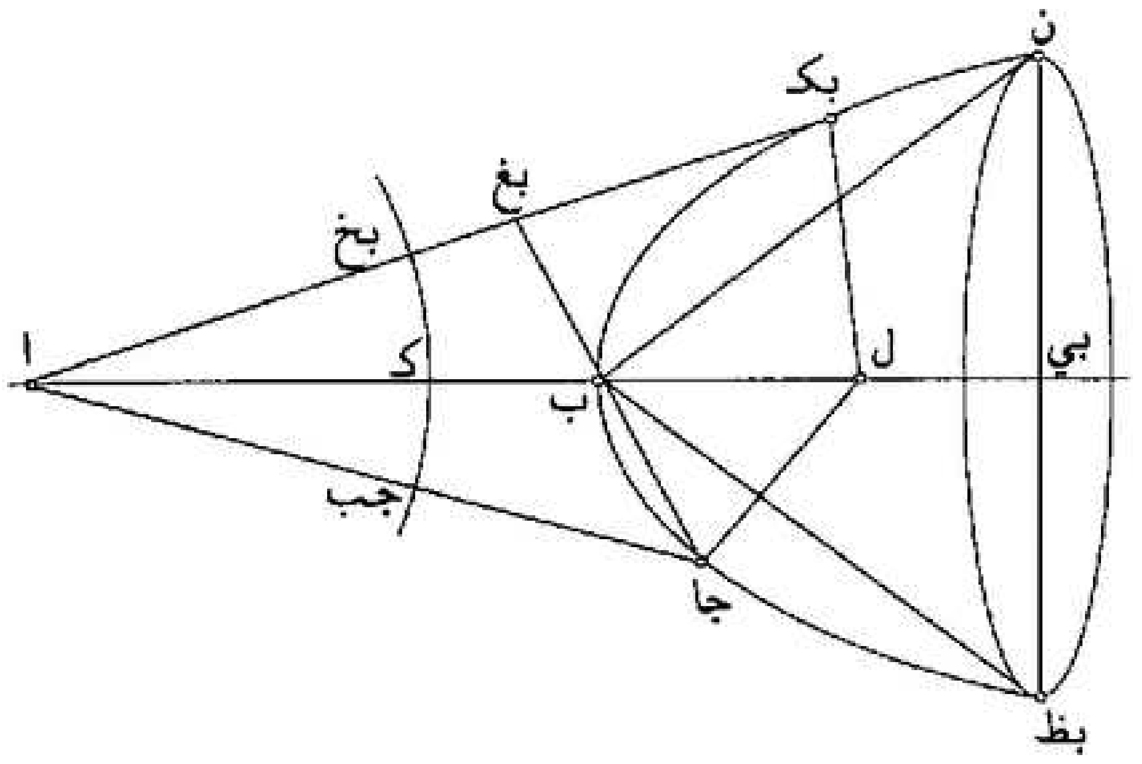
/ فخط ن بي لا يلقى ممرّ ب ن على غير نقطة ن. ت – ٢٠ – و

ثم نُثبت خط ب بي ونُدير حوله السطحَ الذي يحيط به رسمُ ب ن وخطّا ب بي ن بي حتى تقطع نقطة ن دائرة ن بظ، ويحدُث مجسَّم ب ن بظ. فنخرُط مثلَه مع هدفين على ما وصفنا من الجوهر الذي اعتبرنا به، ونجلوه سوى الهدفين وما فوقهما. وينبغي أن يكون ضوء الشمس إذا نفذ من جميع بسيط بي إلى جميع بسيط ب سوى موضع الهدفين فما فوقهما، ومن جميع بسيط ب سواه إلى نقطة ا أحرق عندها. ونستعمله على ما قدّمنا وصفه.

أقول: إن ضوء الشمس ينفُذ من جميع سطح بي إلى جميع سطح ب سوى موضع الهدفين فما فوقهما ومن جميع بسيط ب سواه إلى نقطة ا فيُحرِق عندها.

5 ل ن: ك ن – 12 ونجلوه: ويجلوه – 15-16 سوى ... بسيط ب: أثبتها الناسخ في الهامش مع بيان موضعها.

برهان ذلك: أنا ننزل على بسيط ب نقطةً، فإما أن توافق نقطة ب أو لا توافقها؛ فإن وافقت النقطةُ المنزلةُ نقطةَ ب فإنا نخرج سطح ب ن بي، وليُحدِث في بسيط ب رسمَ ن ب بظ وفي سطح بي خطَّ ن بظ. ونُخرج في سطح ب ل ن خطَّ بغ ب قائمًا على خط ب ل، فخطُّ بغ جا يماسّ رسم ن ب بظ على نقطة ب. لأنه إن لم يماسّه عليها فليقطعْه عليها، فلا بد من أن ينتهي من خط بغ جا إلى نقطة ب جزءٌ يكون داخل السطح الذي يحيط به رسم ن ب بظ وخط ن بظ. فليكن ذلك الجزءُ خطَّ ب جا. ونصل خط ب بظ، فلأن زاوية ل ب بظ مثل / زاوية ل ب ن وزاوية ل ب ن حادّةٌ، فزاوية ل ب بظ حادّة ت-٢٠-ظ وزاوية ل ب جا قائمة، فزاوية ل ب جا أعظم من زاوية ل ب بظ فخطّ ب جا داخل السطح الذي يحيط به رسم ب بظ وخط ب بظ. فسيلقى خط ب جا رسمَ ب بظ، فليلقَه على نقطة جا. ونصل خطي ا جا جا ل. وليلْق خط ا جا دائرةَ كـ على نقطة جب. فلأن رسمَ ب ن يُطابق رسمَ ب بظ ونقطتي ا ل مشتركتان لهما وخط بكـ بخ مثل خط ل بكـ، فخط جا جب مثل خط ل جا، فزاوية ل ب جا حادّة لمثل ما بيّنا فيما تقدّم، ولكنها قائمة، وهذا محال.



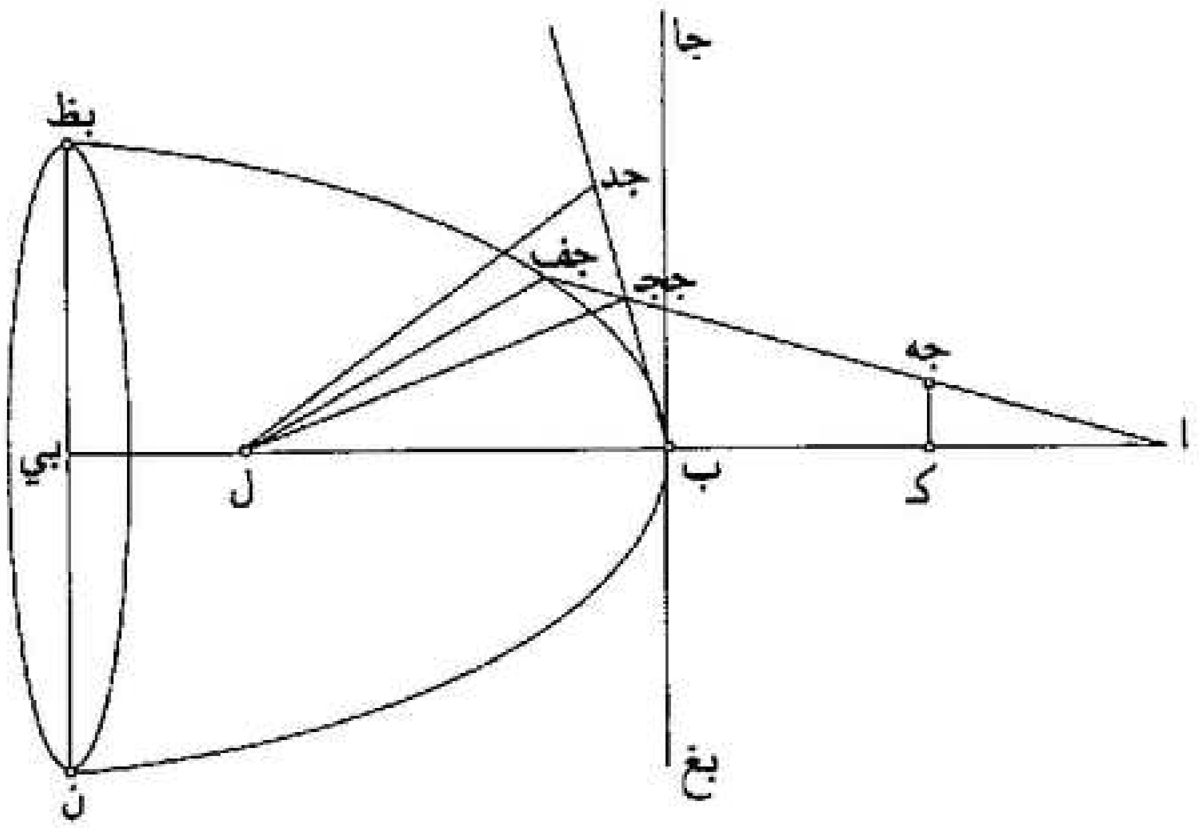
فخط بغ جا يماسّ رسمَ ن ب بظ على نقطة ب. ولا يماسّ رسمَ ن بظ ب / على نقطة ت-٢١-و ب خطٌّ مستقيمٌ غيرُ خط بغ جا. لأنه إن ماسَّه عليها خطٌّ مستقيمٌ غيرُه فليماسَّه عليها خط ب جـجـ بينه وبين خط ل ب. فلأن زاوية ل ب جا قائمةٌ، فزاويةُ ل ب جـجـ حادّة. ونخرج خطّ ل جـد قائمًا على خط جـجـ ب، فلا بد من أن ينتهي من خط ب جـجـ إلى نقطة ب جزء يكون خارج السطح الذي يحيط به رسم ن ب بظ وخط ن بظ. ونُنزل على هذا الجزء

4 يماسه: يماسها – 10 ا جا جا ل: ا جا ل – 11 مشتركتان: مشتركتين – 16 ل ب: جا ب.

نقطة جج ونصل خط ل جج. فلأنه أقربُ إلى خط ل جد القائم على خط ب جد من خط ب ل فخطّ ل جج أصغر من خط ب ل، ونخرج خطاً ا جج وليلْقَ دائرة كـ على نقطة جه ورسمَ ن ب على نقطة جو، ونصل خط ل جو، فخط جه جو مثل خط ل جو، فخط جج جه أصغر من خط ل جج. وخط ل جج أصغر من خط ب ل، وخط ب ل مثل خط ب كـ فخط جج جه أصغر من خط ب كـ، وخط ا جه مثل خط ا كـ، فمجموع خطي ا جج ل جج أصغر من خط ا ل، ولكنه أعظم منه، وهذا محال، فليس يماسّ رسمَ ن ب بظ على نقطة ب خطٌّ مستقيمٌ غيرُ خط بغ جا.

ونُخرج على خط بغ جا سطحًا مستويًا قائمًا على سطح ب ل ن فهو يماسّ بسيط ب على نقطة ب ولا يماسّه عليها سطحٌ مستوٍ غيرُه لمثل ما بيّنا فيما تقدم.

ولا يلقى خطٌّ ا ل بسيطَ ب على نقطة غير نقطة ب لأنه إن لقيه على غيرها فسيلقى رسمَ ن ب بظ / على غير نقطة ب، فينقسم به خط كـ ل نصفين على غير نقطة ب، وهذا ت-٢١-ظ محال، فلا يلقى خطُّ ا ل بسيطَ ب على غير نقطة ب.



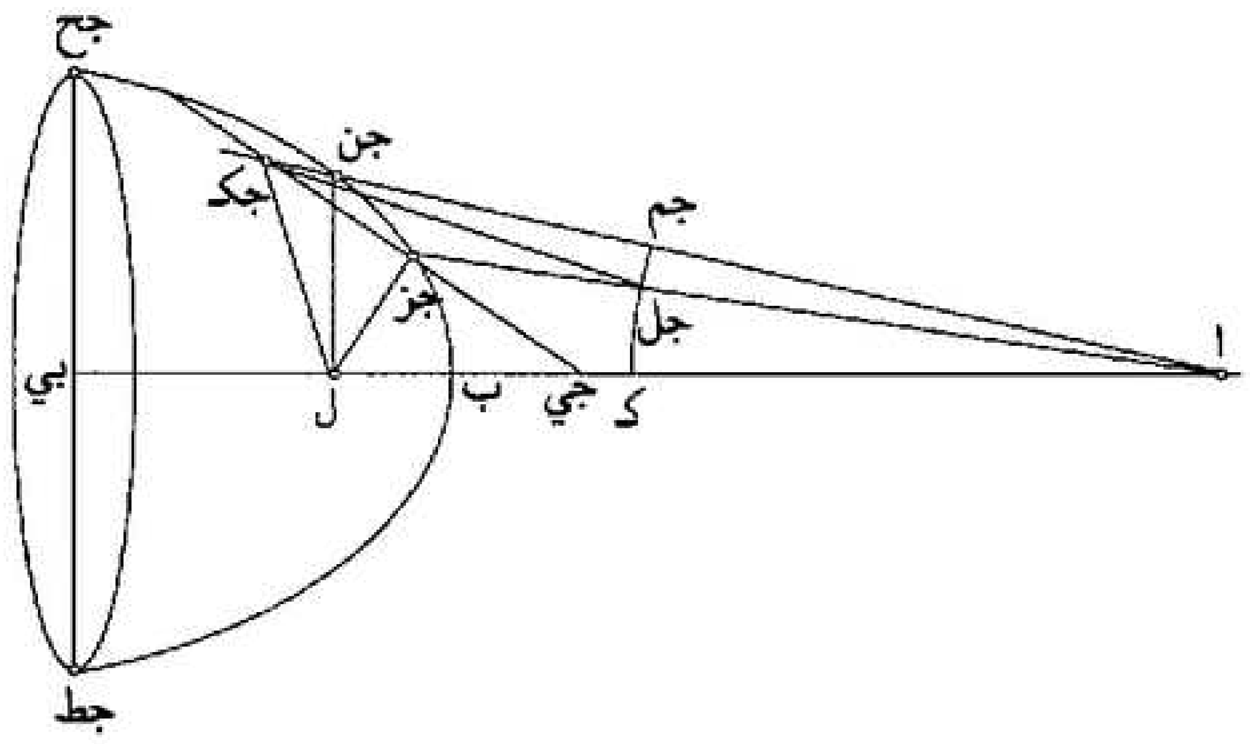
فضوءُ الشمس يخرج على استقامة خط ب بي إلى نقطة بي وعلى خط ب بي إلى نقطة ب وعلى خط ا ب إلى نقطة ا.

وإن لم يوافق النقطةُ المنزلةُ نقطةَ ب فلتكن جز. ونُخرج سطحَ ب ل جز وليُحدِث في بسيط ب رسمَ جح ب جط وفي سطح بي خطاً جح جط. ونصل خطي ا جز ل جز ونقسم زاوية ا جز ل نصفين بخط جي جز جك، فهو يماس رسم جح ب جط على نقطة جز. لأنه إن لم يماسه فليقطعه عليها، فلا بدّ من أن ينتهي من خط جي جك إلى نقطة / جز ت-٢٢-و جزءٌ يكون داخل السطح الذي يحيط به رسمُ جح ب جط وخطّ جح جط. ونُنزل على

10 نقطة (الأولى): أثبتها الناسخ في الهامش ولكنه أخطأ في الإشارة إلى موضعها.

هذا الجزء نقطةَ جک ونجعل خط ا جل مثلَ خط ا ک، فخطّ جز جل مثل خط ل جز. ونصل خطي جک جل ل جک، فخط جز جک ضلعٌ مشترك لمثلثي جز جک جل ل جز جک وزاوية جک جز جل مثل زاوية ل جز جک لأن زاوية ا جز جي مثل زاوية ل جز جي فخط جک جل مثل خط ل جک. ونصل خط ا جک، ونجعل خط ا جم منه مثلَ خط ا جل.

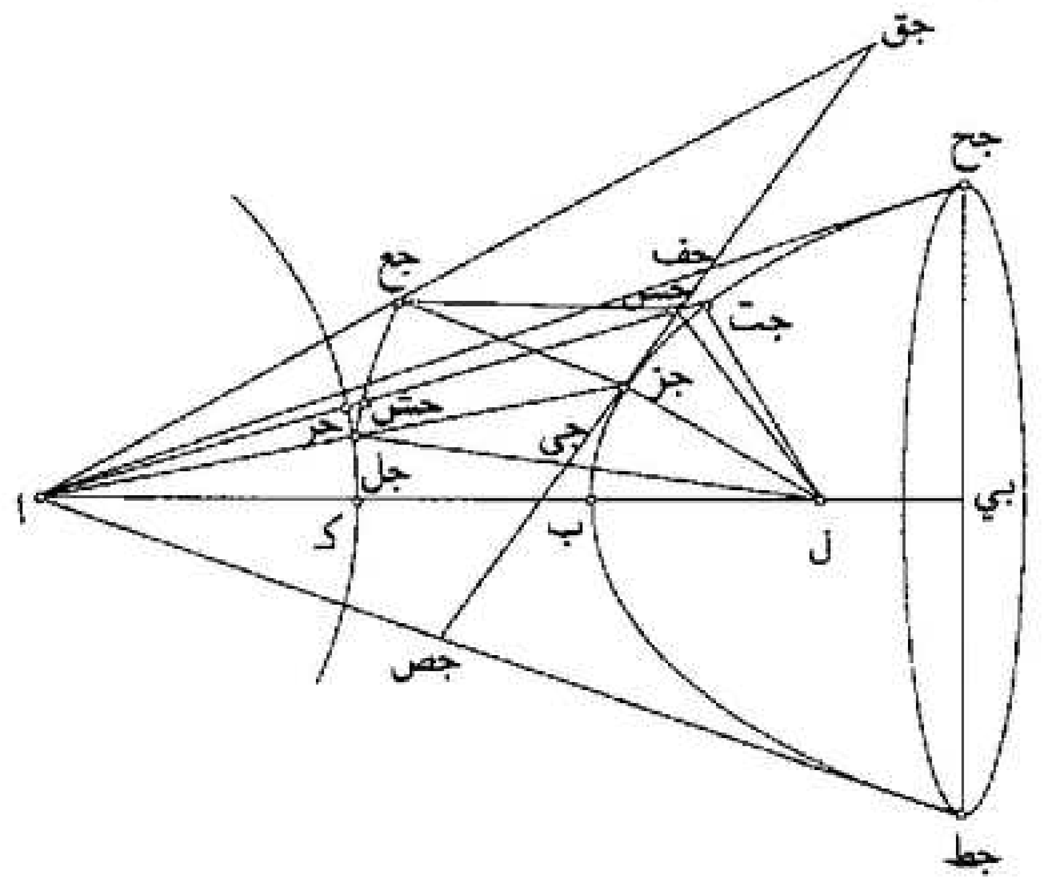
فلأن خط ا جک أصغر من مجموع خطي ا جل جک جل، فخط جک جم أصغر من خط جک جل، فخط جک جم أصغر من خط ل جک. وليلقَ خطُّ ا جک رسمَ جح ب جط على نقطة جن، ونصل خط ل جن، فخطُّ جم جن أصغر من خط / ل جن، ولكنه مثله، وهذا محال، فخط جي جک يماسّ رسم جح ب جط على نقطة جز. ت – ٢٢ – ظ



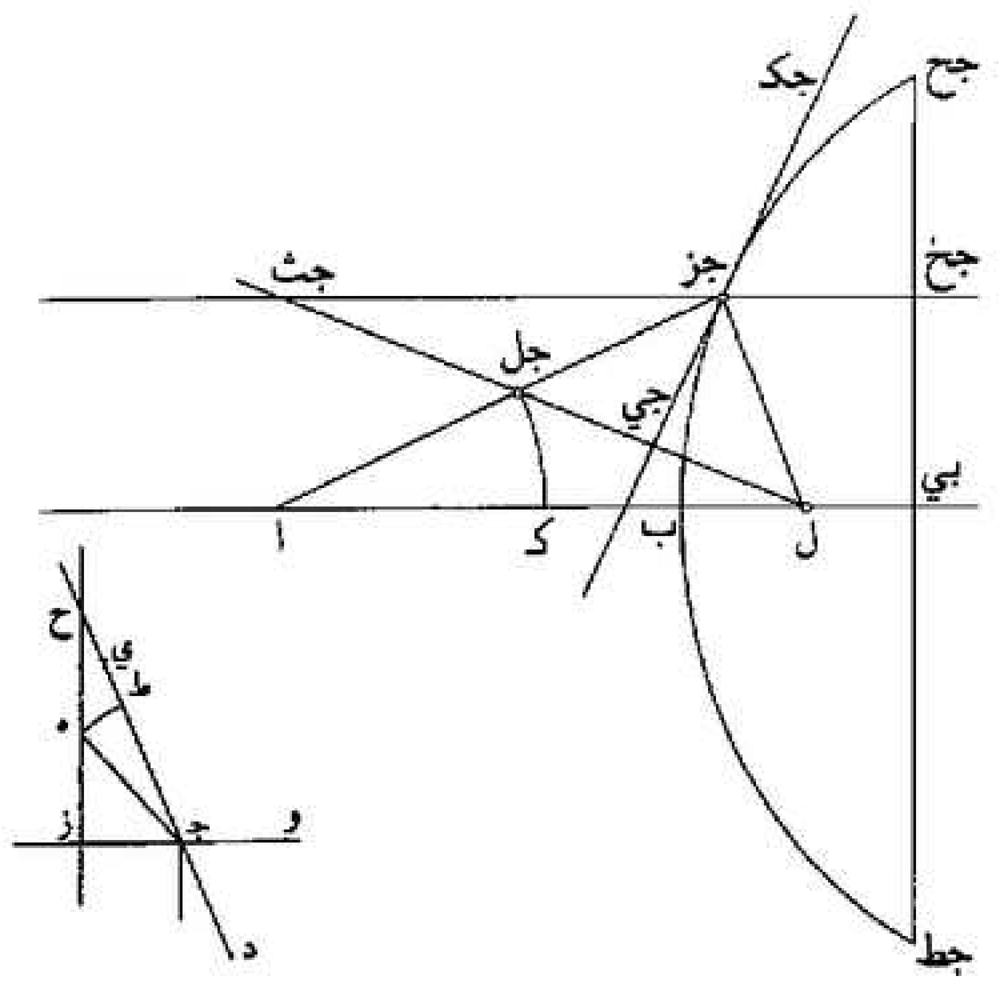
ولا يماسّ رسمَ جح ب جط على نقطة جز خطٌّ مستقيمٌ غيرُ خط جي جک. لأنه إن ماسّه عليها خطّ مستقيمٌ غيرُه فليكن ذلك الخط جز جس، ونجعل زاوية جس جز جع مثلَ زاوية ل جز جس وخطَّ جز جع مثلَ خط ل جز، ونُخرج خطوط ا جح ا جط ا جع. وليلق خطُّ جز جس خطّاً ا جح على نقطة جف وخطّاً ا جط على نقطة جص وخطّاً ا جع على نقطة جق. فلا بدّ من أن ينتهي من خط جز جس إلى نقطة جزءٌ يكون خارج السطح الذي يحيط به رسم جح ب جط وخط جح جط. ونُنزل على هذا الجزء نقطةً تكون بين نقطة جز ونقطة جق وإحدى نقطتي جف جص ولتكن جس. ونصل خطي ل جس جس جع. فلأن خط جز جع مثل خط ل جز وخط جز جس ضلعٌ مشتركٌ لمثلثي جز جس جع ل جز جس، وزاوية جس جز جع مثل زاوية ل جز جس، فخط جس جع مثل خط ل جس. ونخط حول نقطة ا ببُعد خط ا جل دائرةَ جر وحول نقطة جز ببُعد خط جز جل دائرةَ جش. فلأن كل واحد من خطي جز جل جز جع مثل خط ل جز، فخطٌّ جز جل مثل خط جز جع، فدائرة جش تمرّ بنقطتي جل جع، وهي تماسّ دائرة جر على نقطة / جل. ونصل خط ا جس، وليلْق ت – ٢٣ – و

2 لمثلثي: ولمثلثي – 15 ولتكن: وليكن.

دائرة جر على نقطة جر ودائرةَ جش على نقطة جش، فخطّ جس جر أعظم من خط جس جش، وخط جس جش أعظم من خط جس جع لأن خط جس جش أقرب إلى خط جز جس المارّ بمركز دائرة جش من خط جس جع. وخط جس جع مثل خط ل جس، فخطٌّ جس جر أعظم من خط ل جس.

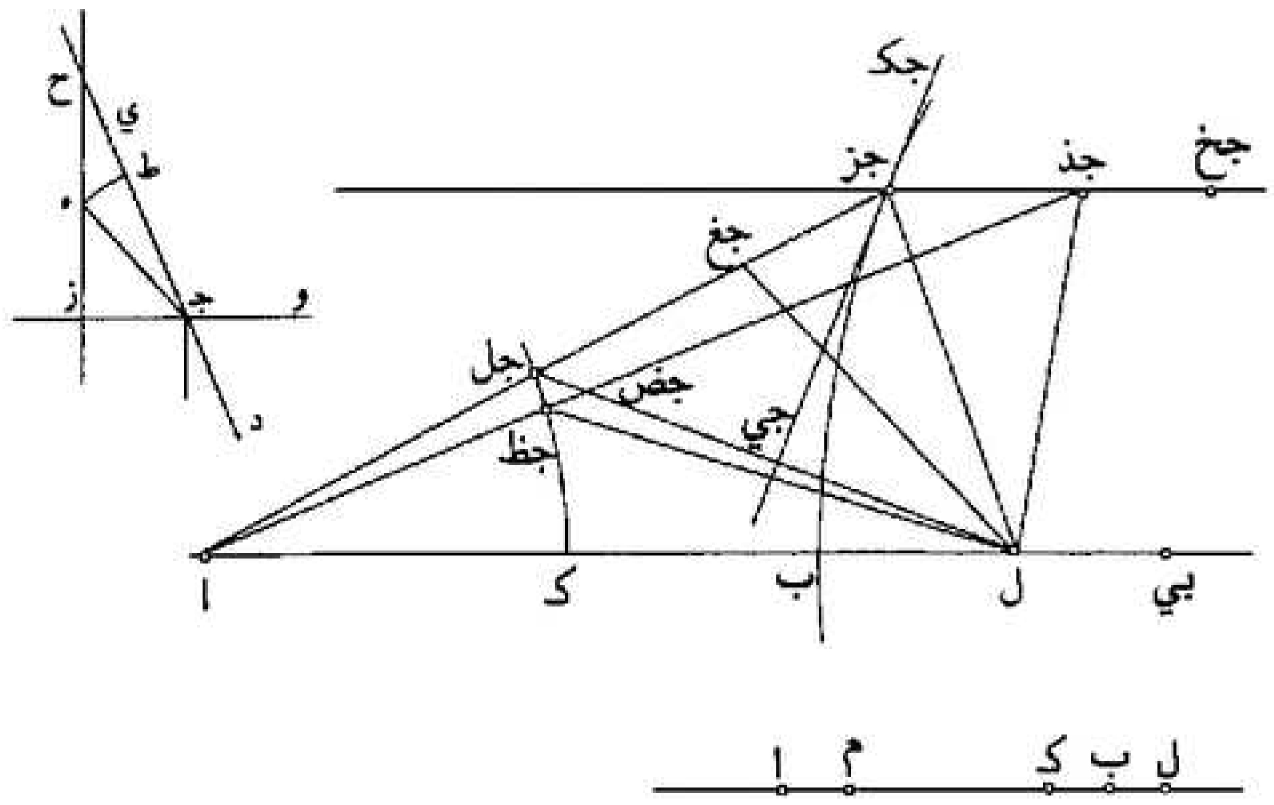


وليلْقَ خطٌّ ا جس رسمَ جح ب جط على نقطة جت. ونصل خط ل جت، فخط جر جت أعظم من خط ل جت؛ ولأن خط ا جر مثل خط ا جل وخطّ ا جل مثل خط ا ك، فخطّ ا جر مثل خط / ا ك، فخط جر جت مثل خط ل جت، وهذا محال، فلا يماسّ رسمَ جح ب جط على نقطة جز خطٌّ ‹غير خط جز جي، ونخرج على خط جز جي سطحًا مستويًا قائمًا على سطح ا ل جز›، فهو يماسّ بسيط ب على نقطة جز ولا يماسّه عليها سطحٌ مستوٍ غيره بمثل ما بيّنا فيما تقدم. ت-٢٣-ظ



1 جش (الأولى): جس – 3 جش: جس – 8 جز خط: جز جط – الشكل الأسفل ليس في المخطوطة.

ونخرج خط ل جل، وليلْق خط جي جك على نقطة جي. فلأن خط جز جل مثل خط ل جز وخطاً جز جي ضلعٌ مشترك لمثلثي جز جي جل ل جز جي وزاوية جي جز جل مثل زاوية ل جز جي، فزاوية جز جي جل مثل زاوية ل جي جز، فزاوية جز جي جل قائمة، فخط جي جل قائمٌ على السطح المماسّ لبسيط ب على نقطة جز. ونُخرج خط جز جث موازيًا لخط ا ل، وليلْق خط ل جل على نقطة جث، فمثلث جز جل جث شبيه بمثلث ا ل جل، فنسبة خط جز جل إلى خط جز جث كنسبة خط ا جل إلى خط ا ل، وخط / ا جل مثل ت-٢٤-و
خط ا ك، كما أن خط جـ ه مثل خط جـ ط، ونسبة خط ا ك إلى خط ا ب كنسبة خط جـ ط إلى خط جـ ي وخط ب ك مثل خط بل، كما أن خط ط ي مثل خط ح ي، فنسبة خط ا جل إلى خط ا ل كنسبة خط جـ ه إلى خط جـ ح. فنسبة خط جز جل إلى خط جز جث كنسبة خط جـ ه إلى خط جـ ح. وليلْق خطُ جز جث سطحَ بي على نقطة جخ، فخط جث جخ لا يلقى بسيطَ ب على غير نقطة جز. لأنه إن لقيه على غيرها فسيلقى رسمَ جح ب جط على غيرها، فليلْقه على نقطة جذ. فلأن خط جز جل مثل خط ل جز، فزاوية ل جل جز مثل زاوية جز ل جل، فزاوية ل جل جز حادّةٌ، فزاوية ا جل ل منفرجةٌ. ونصل خط ا جذ، وليلْق خط ل جل على نقطة جض، فخط ا جض أعظم من خط ا جل. ونفصل من خط ا جض خطاً ا جظ مثلَ خط ا جل، فلأن خط ا جل مثل خط ا ك، فخط ا جظ مثل خط ا ك. ونصل خط ل جذ، فخط جذ جظ مثل خط ل جذ. ونصل خط ل جظ؛ فلأن نقطة جـظ داخل مثلث ا ل جل، فزاوية ا جظ ل أعظم من زاوية ا جل ل، فزاوية ل جظ جذ – وهي مثل زاوية جذ ل جظ – أصغر من زاوية ل جل جز، وهي مثل زاوية جز ل جل، فزاوية جذ ل جظ أصغر من زاوية جز ل جل. ولكنها أعظم منها، وهذا محال.



2-1 خط ل جز ... وزاوية جي جز جل مثل: أثبتت في الهامش بخط آخر – 11 جث جخ: جز جخ – 13 ل جل جز (الأولى): آخر حرفين فوق السطر.

فخط جز جخ لا يلقى بسيط ب على غير نقطة جز، وخط ا جز لا يلقى بسيط ب على / غير نقطة جز. لأنه إن لقيه على غيرها فسيلقى رسمَ جح ب جط على غيرها، فليلقه على ت-٢٤-ظ نقطة جغ ونصل خطاً ل جغ فخط جل جغ مثل خط ل جغ، فخط جز جل أعظم من خط ل جز، ولكنه مثله، وهذا محال.

فخط ا جز لا يلقى بسيط ب على غير نقطة جز.

فضوءُ الشمس يخرج على استقامة خط جز جخ إلى نقطة جخ وعلى خط جز جخ إلى نقطة جز وعلى خط ا جز إلى نقطة ا. وكذلك سائر النقط المُنزلة على بسيط ب سوى موضع الهدفين فما فوقهما. فضوء الشمس ينفُذ من جميع سطح / بي إلى بسيط ب سوى موضع ت-٢٥-و الهدفين فما فوقهما، ومن جميع بسيط ب سِواه إلى نقطة ا فيُحرق عندها؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

‹العدسة المحدبة الوجهين›

وإن لم يكن الأضواءُ الخارجةُ من نقطة على وجه المُضيء إلى جوانب الآلة متوازيةً في الحس – وعلى ذلك كل ضوء يأتيها من الأماكن المطيفة بها – فإنا نحدّ رسمًا يبتدئ من نقطة ب على ما قدّمنا وصفَه، وليكن ب م، ونُنزل على استقامة خط ا ب نقطتي ن س، ونجعل نسبة خط ن ع إلى خط ن س كنسبة خط جـ ط إلى خط جـ ي، وخط س ف مثل خط س ع، ونحدّ في سطح ا ل م رسمًا يبتدئ من نقطة س على ما قدّمنا وصْفه، وليكن س ص. ونُنزل على رسم ب م نقطة م ونصل خطي ا م ل م ونقسم زاوية ا م ل نصفين بخط م ق فهو يماس رسمَ ب م وليلْق خط ا ب على نقطة ق ونجعل خط م ر مثلَ خط ل م، ونصل خط ل ر وليلْقَ خط م ق على نقطة ش، فزاوية ل ش ق قائمة، فزاوية ل ق ش حادّة. ونُنزل على رسم س ص نقطة ص ونصل خطي ن ص ف ص، ونقسم زاوية ن ص ف نصفين بخط ص ت، فهو يماسّ رسم س ص، وليلْق خط ن س على نقطة ت، فزاوية ف ت ص حادّةٌ، فخط م ق يلقى خط ص ت، فليلْقه على نقطة ث. فلأن رسم ب م لا يلقى خط ق ب على غير نقطة ب ولا خطاً ق ث على غير نقطة م فسيلقى

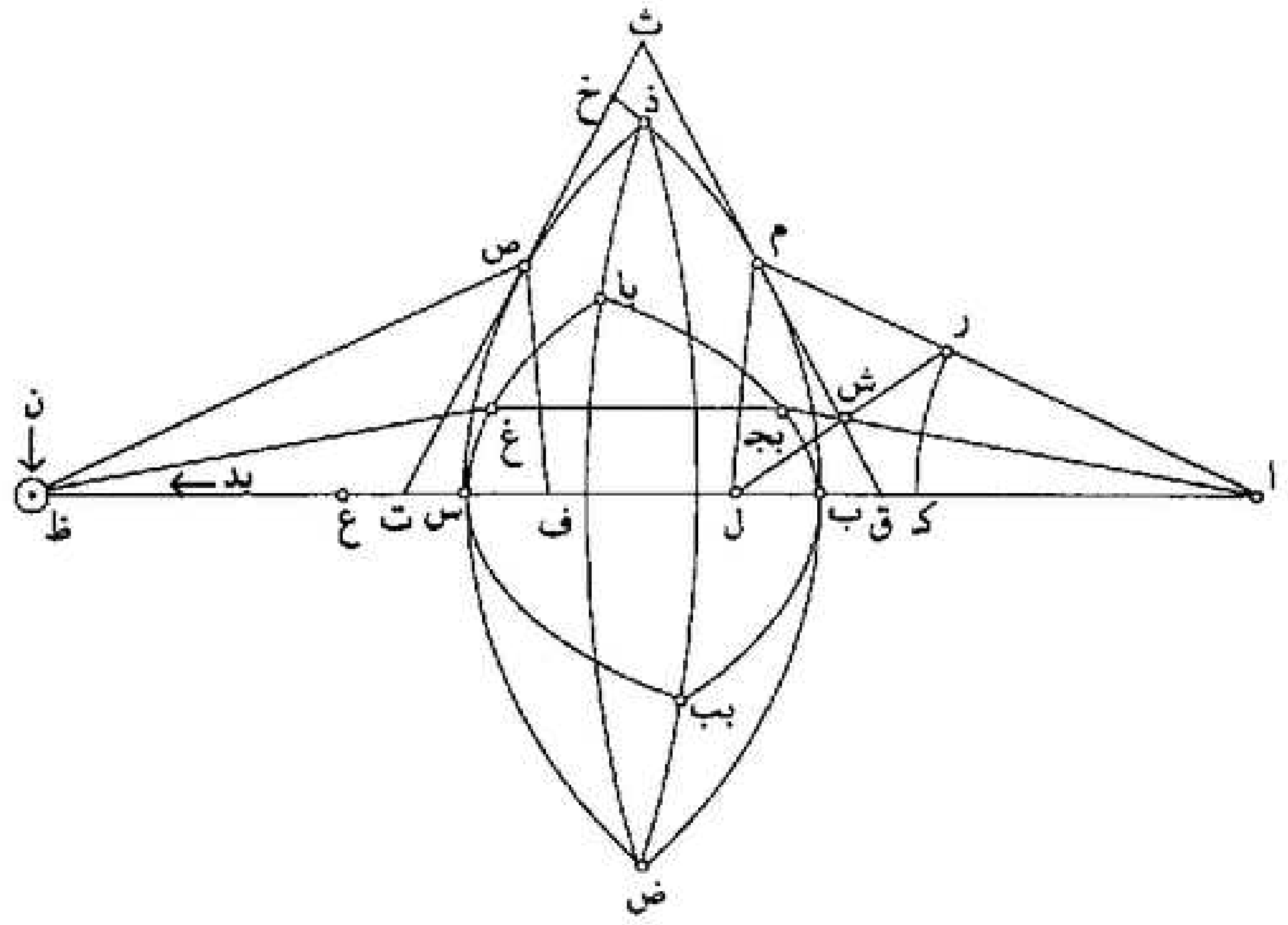
3 ونصل خط ل جغ: أثبتها الناسخ في الهامش مع بيان موضعها – 13 نحدّ: نجد – 16 ونحدّ: ونجد / ا ل م: ا ل.

خطَّ ت ث فليلْقه على نقطة / خ. ولأن رسم س ص لا يلقى خط ب ت على غير نقطة ت-٢٥-ظ س ولا خطَّ ت خ على غير نقطة ص فسيلقى رسمَ ب خ، فليلْقه على نقطة ذ. ونُثْبت خط ب س ونُدير حوله السطح الذي يحيط به رسْما ب ذ س ذ وخط ب س حتى تقطع نقطة ذ دائرةَ ذ ض ويحدُث مجسّم ب ذ س ض فنخرُط مثلَه من الجوهر الذي اعتبرناه ونجلوه. وينبغي أن يكون ضوءه إذا نفذ من جميع بسيط ذ س ض إلى جميع بسيط ذ ب ض ومن جميع بسيط ذ ب ض إلى نقطة ا أحرَق عندها. ثم نُقِرُّ الجسمَ المضيءَ في موضع نقطة ن.

أقول: إن ضوء الجسم ينفذ من جميع بسيط ذ س ض إلى جميع بسيط ذ ب ض ومن جميع بسيط ذ ب ض إلى نقطة ا فيُحرِق عندها.

برهان ذلك: أنا نُنزل على بسيط ذ س ض نقطةً، فإما أن توافق نقطة س أو لا تُوافقها.

فإن وافقتْ النقطةُ المنزلةُ نقطة س فليلْق خطُّ ن س الجسمَ المضيء على نقطة ظ، فخط ا ظ لا يلقى بسيطَ ب ذ س ض على غير نقطتي ب س، فضوء نقطة ظ يخرج على خط س ظ إلى نقطة س وعلى خط ب س إلى نقطة ب وعلى خط ا ب إلى نقطة ا.



وإن لم توافق النقطةُ المنزلةُ نقطةَ س فلتكن غ، ونُخرج سطح ب س غ وليحدث في مجسّم ذ س ض رسم با س بب وفي مجسّم ذ ب ض رسم با ب بب. ونخرج خط غ بجـ موازيًا / لخط ب س. فلأن خط غ بجـ لا يلقى خط ب س ورسمَ س با على غير نقطة غ ت-٢٦-و فسيلقى رسمَ ب با فليلْقَه على نقطة بجـ. ونصل خط ن غ وليلْق الجسم المضيءَ على نقطة بد و‹نصل› خطَّ ا بجـ. فخطوط غ بد غ بجـ ا بجـ لا تلقى بسيط ب ذ س ض على غير

12 س ظ: س ض – 17 تلقى: يلقى.

نقطتي غ بجـ. فضوء نقطة بد يخرج على خط غ بد إلى نقطة غ وعلى خط غ بجـ إلى نقطة بجـ وعلى خط ا بجـ إلى نقطة ا، وكذلك سائر النقط المنزلة على بسيط ذ س ض. فضوء الجسم ينفذ من جميع بسيط ذ س ض إلى جميع بسيط ذ ب ض ومن جميع بسيط ذ ب ض إلى نقطة ا فيُحرق عندها، وذلك ما أردنا أن نبيّن.

بلغنا المقابلة بالنسخة المنقولة عنها وكانت بخط أحمد بن أحمد بن جعفر الغُنْدِجاني. فرغ من تشكيله علي بن يحيى بن محمد بن أبي الشكر المغربي يوم الخميس حادي عشر ربيع الآخر سنة تسعين وستمائة، وصلى الله على سيدنا محمد وآله أجمعين.

ل – ١٣٢ – ظ
ا – ٩٣ – و
د – ٨٣ – ظ

بسم الله الرحمن الرحيم
وبه أستعين

العلاء بن سهل
البرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء

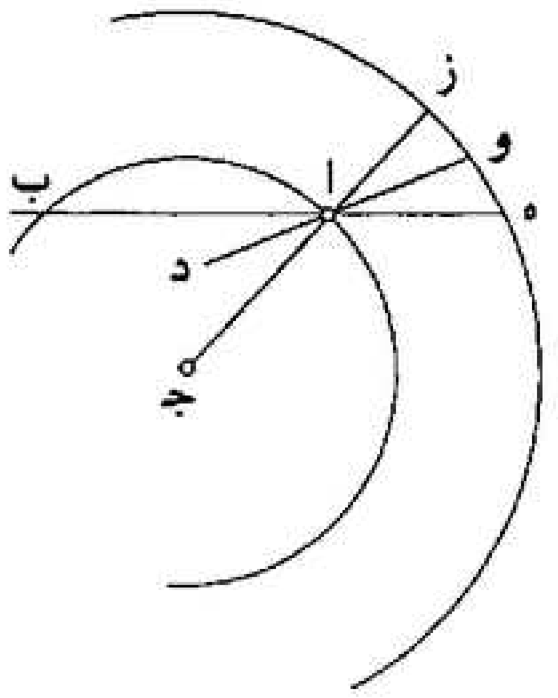
البرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء، استخرجه أبو سعد العلاء بن سهل عند تصفحه كتاب بطلميوس في *المناظر* وأراد أن يُضمّنه جملة التصفح للمقالة الخامسة من هذا الكتاب.

قال: ليكن كرة العناصر ا ب ومركزها نقطة جـ وسطح الفلك ز ه، ونخرج سطح ا ب جـ وليكن الفصل المشترك بينه وبين سطح كرة ا ب دائرة ا ب. ونخرج خطي جـ ا ز ب ا ه. وليكن نقطة ثابتة في وجه كوكب يخرج ضوءها على خط ا ب، وهي نقطة و. فنقطة و في جانب خط ا جـ الذي فيه نقطة ه، لما بيّنه بطلميوس في المقالة الخامسة من كتابه في *المناظر*. فإما أن يكون نقطة و بين خطي ا ز ا ه أو على خط ا ه أو في جانب خط ا ه الذي فيه نقطة جـ.

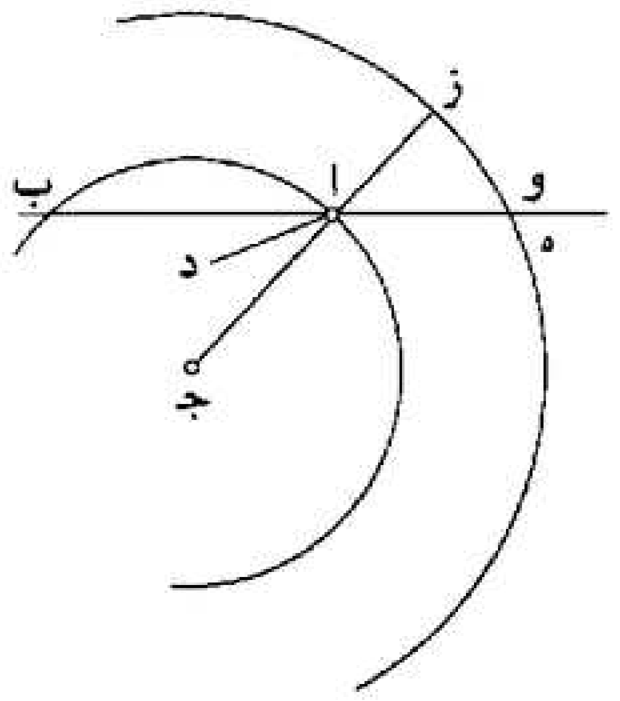
فإن كانت نقطة و بين خطي ا ز ا ه، فإنا نصل خط ا و ونخرجه على الاستقامة إلى نقطة د. فلأن خط ا ب – وهو الذي ينعطف عليه ضوء نقطة و في العناصر – أبعدُ من خط ا جـ / – وهو العمود الخارج من نقطة ا في العناصر على الفصل المشترك بين العناصر وبين الفلك – من خط ا د وهو الذي يخرج على استقامة خط ا و الذي يخرج ل – ٤٨ – و

سبق أن أشرنا إلى أن نسخة [ا] ينقصها كلمات: «نقطة» و«خط» ومثنى كل منهما، ولن نثبت هذا في ملاحق التحقيق بعد ذلك – 1-2 بسم ... أستعين: ناقصة [ا] – 6 كتاب: لكتاب [ا، د] – 7 من هذا الكتاب: منه [ا] – 8 قال: ناقصة [ا] / كرة: كتبها أولاً «دائرة» قبل أن يثبتها فوقها [د] / ومركزها: على مركز [ا] – 9 كرة: كتبها أولاً «دائرة» قبل أن يثبتها فوقها [د] / ونخرج: مكررة [ا] / جـ ا ز: جـ ا ه [ا] جـ ا ب [د] – 10-11 نقطة و فنقطة: ناقصة [ا] – 12 كتابه في المناظر: مناظره [ا] / على: ناقصة [ا، د] / خط: خطى [د] / أو: ا و [ا، د] – 14 فإنا نصل: فنصل [ا] – 15 ضوء: ناقصة [ا، د] / نقطة: ناقصة [ا] – 17 وبين: وهو [د] وهذا [ا].

عليه ضوء نقطة و في الفلك، فما يخرج فيه خط ا ب من العناصر أصفى مما يخرج فيه خط ا و من الفلك، لما بيّنه بطلميوس في المقالة المذكورة؛ فالفلك ليس هو في غاية الصفاء.

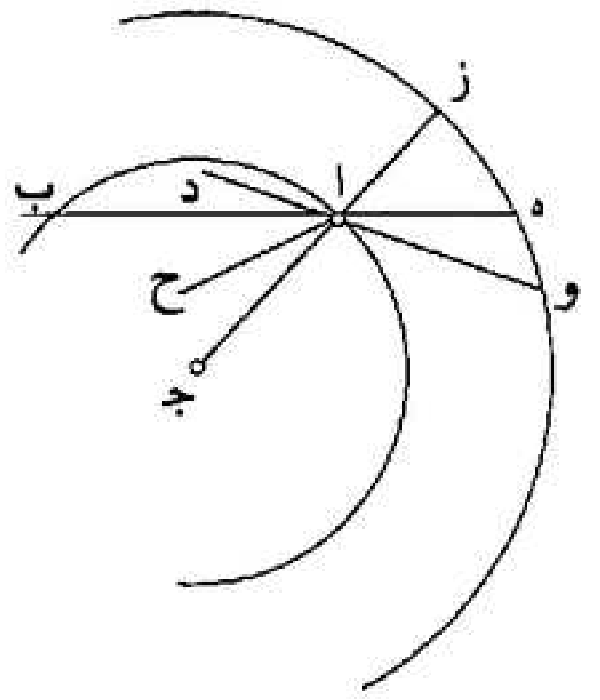


وإن كانت نقطة و على خط ا ه، فإنا نخرج خط ا د بين خطي ا ب ا جـ. فلأن خط ا د أقرب إلى خط ا جـ – وهو العمود الخارج من نقطة ا في العناصر على الفصل المشترك بينها وبين الفلك – من خط ا ب وهو الذي يخرج عليه ضوء نقطة و في العناصر، فإذا بقيت العناصر بحالها، فما يخرج فيه ضوء نقطة و على / خط ا و لو ل-٤٨-ظ انعطف على خط ا د أصفى مما يخرج فيه ضوء نقطة و على خط ا و إذا خرج على خط ا ب، لما بيّنه بطلميوس في المقالة المذكورة. لكن ما يخرج فيه ضوء نقطة و على خط ا و إذا خرج على خط ا ب هو الفلك. فما يخرج فيه ضوء نقطة و على خط ا و لو انعطف على خط ا د هو أصفى من الفلك. وكل صافٍ هو ما له في الوهم أصفى منه، فليس هو في غاية الصفاء، كما أن كل عظيم أو كبير يفوقه في الوهم أعظم أو أكبر منه، فليس هو في غاية العظم والكبر. فالفلك إذًا ليس هو في غاية الصفاء.



4 فإنا نخرج: فنخرج [ا] / ا د: ا ب [ا، د] – 5 ا د: مكررة [ل] – 6 بينها: بينهما [د] – 10 فيه: ناقصة [ا، د] / ا و: ناقصة [ا، د] – 11 خط: ذكرها ناسخ [ا] على غير عادته / ما له في: توهم في [ا]، كتب ناسخ [ا] كلمة في الهامش يبدو أنها متعلقة بهذه الأخيرة، ولعلها «له هو» – 12 يفوقه: يفوق [ا، د].

وإن كانت نقطة و في جانب خط ا ه الذي فيه نقطة جـ، فإنا نصل خط ا و ونخرجه على الاستقامة إلى نقطة د ونخرج خط ا ح بين خطي ا جـ ا ب. فلأن خط ا ح أقرب إلى خط ا جـ – وهو العمود الخارج من نقطة ا في العناصر على الفصل / المشترك بينها وبين الفلك – من خط ا ب وهو الذي ينعطف عليه ضوء نقطة و في ل-٤٩-و العناصر، فإذا بقيت العناصر على حالها فما يخرج فيه ضوء نقطة و على خط ا و لو انعطف على خط ا ح أصفى مما يخرج فيه ضوء نقطة و على خط ا و إذا انعطف على خط ا ب لما بيّنه بطلميوس في المقالة المذكورة. لكن ما يخرج فيه ضوء نقطة و على خط ا و إذا انعطف على خط ا ب هو الفلك، فما يخرج فيه ضوء نقطة و على خط ا و لو انعطف على خط ا ح هو أصفى من الفلك؛ فالفلك إذًا ليس هو في غاية الصفاء. فالفلك على الوجوه كلها ليس هو في غاية الصفاء./



آخر ما وجدت من هذه المقالة وكتبته من خط القاضي ابن المرخم ببغداد، وذكر في ل-٤٩-ظ آخره أنه كتبه وقابله من خط أبي علي بن الهيثم رحمه الله، والحمد لله رب العالمين وصلواته على سيدنا نبيّه محمد وآله أجمعين.

1 فإنا نصل: فنصل [ا] – 4 وَ: جَـ [ا، د] – 5 ضوء: صورة [د] – 6 مما: فيما [د] / على (الثانية): ممحوة [ا] – 7 لكن: الى [ا، د] – 8 فما يخرج: ممحوة [ا] – 9 أصفى: اصغر [د، ل] – 10 هو: ناقصة [ل] / الصفاء: يتبعها في [ا] «تمت الرسالة» – 11-13 آخر ... أجمعين: ناقصة [ا]، ونجد في [ل] «فالحمد لله وصلواته (وصلو في المخطوطة) على سيدنا محمد، بلغت المقابلة (العاه في المخطوطة) وصح، فالحمد لله رب العالمين وصلواته (صلواة في المخطوطة) على سيدنا محمد النبي وآله الطاهرين» – 12 بن: ابن [د].

الهندسة وعلم المناظر
في
ضحى الإسلام

الفصل الثالث
البحوث الانكسارية عند ابن الهيثم و الفارسي

رشدي راشد

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz
منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

الفصل الثالث

البحوث الانكسارية عند ابن الهيثم والفارسي

تفرض علينا أعمال ابن سهل في المناظر، وبصورة خاصة رسالته *الحراقات*، مراجعة معرفتنا بعلم الانكساريات عشية مساهمة ابن الهيثم[1]. إذ لم يعد جائزاً تقديم هذا الإنجاز كامتداد لكتاب *المناظر* لبطلميوس وحده وبشكلٍ ما في تعارض معه. ذلك أن هذا العمل المكتشف حديثاً يرسم هيكلاً جديداً للإطار الذي من دونه لبقي تراث ابن الهيثم معزولاً في التاريخ. وباستطاعتنا، منذ الآن، إدراك إحدى نتائج الوضع الجديد، وطرح تساؤل كان متعذراً طرحه سابقاً. ففي المقام الأول تكشف لنا معرفتنا بأعمال ابن سهل مواضيع بحث درسها ابن الهيثم ولكنها غابت عن أذهان المؤرخين الذين لم يحققوا في دراساته حول الكواسر والعدسات إيماناً منهم بانتماء دراسات كهذه إلى عصر بعيد لاحق. إن السؤال الذي يطرح نفسه الآن يتعلق بقانون سنيلليوس: إذ على الرغم من اكتشاف ابن سهل له، لم يأخذ به ابن الهيثم، مفضلاً العودة إلى النِّسَب بين الزوايا. فلماذا اختار هذا المُجدِد موقفاً محافظاً حيال هذه النقطة؟ هذان الموضوعان سيكونان شغلنا الرئيسي في هذا الفصل.

من المعروف أن المقالة السابعة من *كتاب المناظر* لابن الهيثم مخصصة للانكسار. ولا يمكن القيام بدارسة دقيقة كاملة للانكساريات عند ابن الهيثم من دون إخضاع هذه المقالة لفحص مفصّل يملأ مجلداً كاملاً. وقد قام مصطفى نظيف[2] بالجزء الأكبر منه. غير أن مشروعنا هنا أقل شمولية، إذ إننا ننوي التطرق إلى أكثر أبحاث ابن الهيثم الانكسارية تقدماً، أي التي خصصها المؤلف للكواسر والعدسات سواء وجدت في المقالة السابعة هذه أو في غيرها. لذلك سنكتفي بعرض مختصر جداً لأكثر نتائجه أهمية في دراسته للانكسار والضرورية لفهم بحثه في الانكساريات فلنذكِّر أولاً بها.

بادئ ذي بدء، يبرهن ابن الهيثم في المقالة السابعة هذه، بوجود الشعاعين الوارد والمنكسر، والناظم في نقطة الانكسار، في المستوي نفسه. كما يبرهن بأن الشعاع المنكسر يقترب من الناظم إذا نفذ الضوء من وسط أقل كمدةً إلى وسط أكثر كمدة ويبتعد عنه في الحالة المعاكسة. وكما رأينا سابقاً، فقد صيغ هذا القانون، عند ابن سهل، بل وعند

---

[1] بشأن حياة ابن الهيثم وأعماله البصرية، انظر: E. Wiedemann, 'Ibn al-Haytham, ein arabischer Gelehrter', *Festeschrift für J. Rosenthal* (Leipzig, 1906) ; reprod. In *Gesammelte Schriften zur arabisch-islamischen Wissenschafts-Geschichte*, 3 vols. (Frankfurt-am-Main, 1984), vol. 1, pp. 117-146؛ مصطفى نظيف، *الحسن بن الهيثم، بحوثه وكشوفه البصرية*، 2 ج (القاهرة: جامعة فؤاد الأول، 1942–1943)؛

M. Schramm, *Ibn al-Haythams Weg zur Physik* (Wiesbaden, 1963); A. I. Sabra, 'Ibn al-Haytham', *Dictionary of Scientific Biography* (New York, 1972), vol. 6, pp. 189-210 ; and R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e et XI^e siècle*, vol. 2 : *Ibn al-Haytham* (London, 1993).

[2] نظيف، المصدر نفسه، ص. 682–856.

بطلميوس كذلك على نحو ما. إلا أن هناك اختلافاً كبيراً في التعبير بين ابن سهل وابن الهيثم، سنعود إليه لاحقاً: فلكونه هندسياً فقط، يكتفي الأول بالصياغة النظرية للقانون وبتطبيقاته، بينما يعمل الثاني على التحقق منه بالتجربة؛ وفي حين يتابع الهندسي فيصل إلى قانون سنيلليوس، يكتفي الفيزيائي بالنسب بين زوايا الورود وزوايا الانحراف، ليصوغ لها القواعد ويمحّصها بالتجربة. يحدث كل هذا وكأن الضرورة التجريبية لذلك العصر قد ولدت تقهقراً نظرياً، وسنعود إلى هذه الملاحظة لاحقاً. أما الآن فنذكّر بالقواعد التي أوردها ابن الهيثم[3].

1 – تتغير زوايا الانحراف d بتناسب طردي مع زوايا الورود i : فإذا كانت $i' > i$ في وسط n_1؛ يكون $d' > d$ في الوسط n_2. (i زاوية الورود، r زاوية الانكسار و $d = |i - r|$).

2 – إذا زادت زاوية الورود بمقدار ما، تزيد زاوية الانحراف بمقدار أقل: إذا كان $i' > i$ و $d' > d$، يكون $d' - d < i' - i$.

3 – تزيد زاوية الانكسار بزيادة زاوية الورود: فإذا كانت $i' > i$، نحصل على $r' > r$.

4 – إذا نفذ الضوء من وسط أقل كمدةً إلى وسط أكثر كمدةً، $n_1 < n_2$، فإن $d < \frac{i}{2}$؛ وفي الانتقال المعاكس، فإن $d < \frac{i + d}{2}$ ونحصل على $2i > r$.

5 – يستعيد ابن الهيثم القواعد التي صاغها ابن سهل في رسالته *البرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء* ويؤكد أنه إذا دخل الضوء انطلاقاً من وسط n_1، بحسب زاوية الورود نفسها، إلى وسطين مختلفين n_2 وn_3، عندها تختلف زاوية الانحراف d لكل من هذين الوسطين، بحسب اختلاف الكمدة. فتكون مثلاً $d_3 > d_2$ إذا كانت n_3 أشد كمدة من n_2. وعلى العكس (انظر القاعدة 4)، إذا كانت n_1 أشد كمدة من n_2 التي هي أشد كمدة من n_3 فإن زاوية الانحراف $d_2 > d_3$.

وخلافاً لما اعتقده المؤلف عند صياغتها، ليست جميع هذه القواعد الكمية صحيحة بوجه عام[4]. فهذا هو شأن الحالتين الثانية والرابعة. يبقى أن نذكر أنها جميعاً تصمد أمام الفحص التجريبي ضمن حدود الظروف التجريبية التي استخدمها ابن الهيثم في الأوساط الثلاثة، الهواء والماء والزجاج، وبزوايا ورود لا تتعدى 80°.

6 – يصوغ ابن الهيثم أخيراً مبدأ الرجوع المعاكس الذي عرفه أسلافه وطبقوه[5].

---

[3] ابن الهيثم، *كتاب المناظر*، المقالة السابعة، مخطوطات استانبول، آيا صوفيا 2248، الورقات 630^ظ وما بعدها، ومخطوطات استانبول فاتح 3216، الورقات 43^ظ وما بعدها.

[4] R. Rashed, '*Le Discours de la lumière* d'Ibn al-Haytham : traduction française critique', Revue d'histoire des sciences, 21 (1968), pp.197-224, on pp. 202-204.

(اقرأ على الصفحة 0,203،648 بدلاً من 48،6 وعلى ص. 204، sin r بدلاً من sin 2)؛ أعيد طبعه في *Optique et Mathématiques : Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe*, Variorum Reprints (Aldershot, 1992), V.

[5] وبالفعل وجدنا هذا المبدأ عند ابن سهل وعند بطلميوس قبله، انظر:

وهكذا وقد رأينا نص قواعد الانكسار كما استعملها ابن الهيثم. فلنأت الآن إلى دراساته عن الكواسر والعدسات.

1. الكاسر الكروي

يعالج ابن الهيثم الكاسر الكروي في المقالة السابعة من مؤلفه كتاب *المناظر*. ونلاحظ أولاً أن هذه الدراسة تندمج في الفصل المخصص لمسألة الخيال، وليست بالتالي مستقلة هنا عن مسألة الرؤية. يميز ابن الهيثم حالتين، بحسب موضع المنبع، وهو نقطة ضوئية على مسافة متناهية، تكون إما من الجهة المقعرة أو من الجهة المحدبة لسطح الكاسر الكروي.

لنتفحص هذين الوضعين تباعاً، بدءاً بالحالة التي يأتي فيها الضوء المنكسر من نقطة B موجودة في الوسط الأكثر كمدة، نحو نقطة A، موجودة في الوسط الأقل كمدة، ويكون تحدب الكرة لجهة A.

لتكن G مركز الكرة. يذكرنا ابن الهيثم أن انكسار شعاع منطلق من B وينكسر نحو A، يحتم وجود النقاط A، B و G في مستو متعامد مع السطح الكروي. فإذا كانت النقاط A، B و G موجودة على الخط المستقيم نفسه، فكل مستو يمر في AB يفي بشروط المسألة؛ أما إذا كانت غير ذلك، فإنها تحدد مستوياً قطرياً، وبالتالي متعامداً مع السطح الكروي.

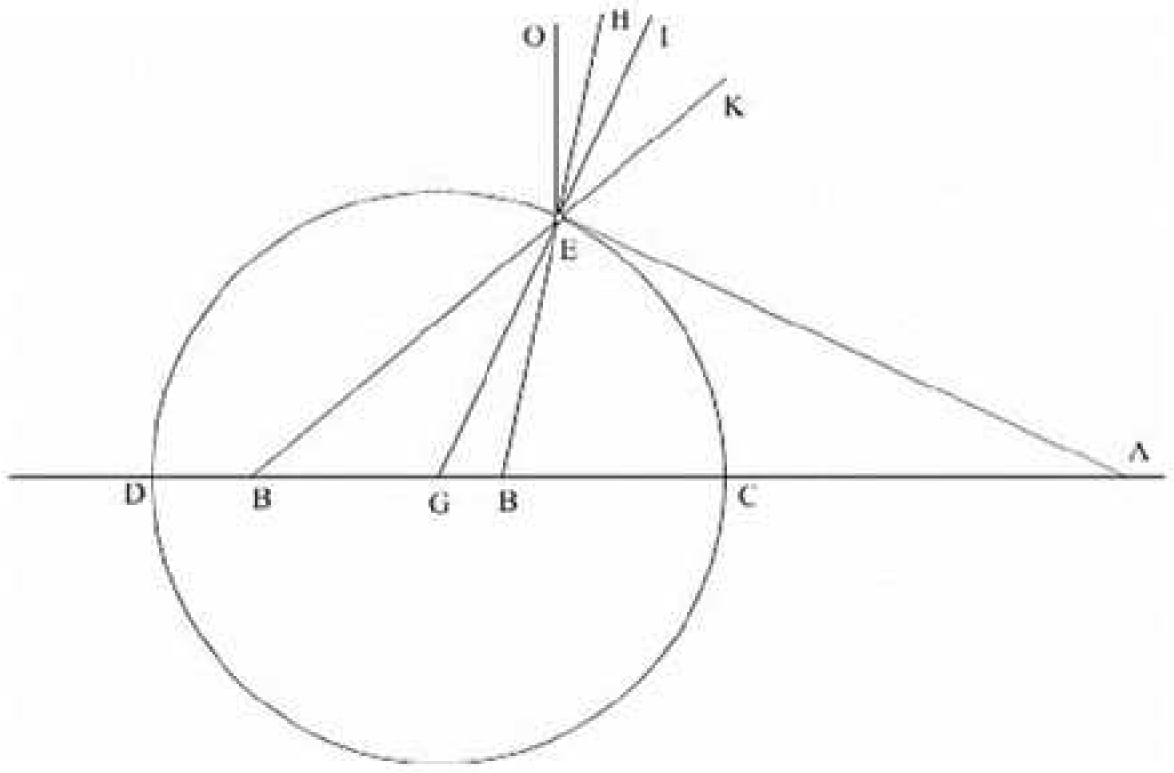
يتفحص ابن الهيثم، تباعاً، حالتين تبعاً لانتماء النقطتين A و B إلى نفس القطر أو عدم انتمائهما له. لنفترض أولاً أن A و B هما على نفس القطر CD. يبرهن ابن الهيثم عندئذ أن BC وحده ينفذ إلى A من دون أن ينكسر؛ وعندما تكون B على $[C, D]$، فإنها لا ترى إلا من النقطة C باتجاه BCA. ولإثبات هذه النتيجة، يعرض الحالات التالية:

إذا كانت $B = G$، فكل شعاع منطلق من B هو عمودي على الكرة ولا ينكسر؛ وشعاع BC وحده يمتد إلى العين A.

إذا كانت $B \in]G, C[$، ينكسر أي شعاع BE مبتعداً عن الناظم باتجاه EO ولا يمر في A.

L'Optique de Claude Ptolémée, ed. A. Lejeune, 4ᵉ sér., fasc. 8 (Louvain, 1956), pp. 242-243; A. Lejeune, 'Recherche sur la catoptrique grecque, d'après les sources antiques et médiévales', *Mémoires de l'Académie royale de Belgique. Classe des Sciences*, 52, 2 (1957), p. 158.

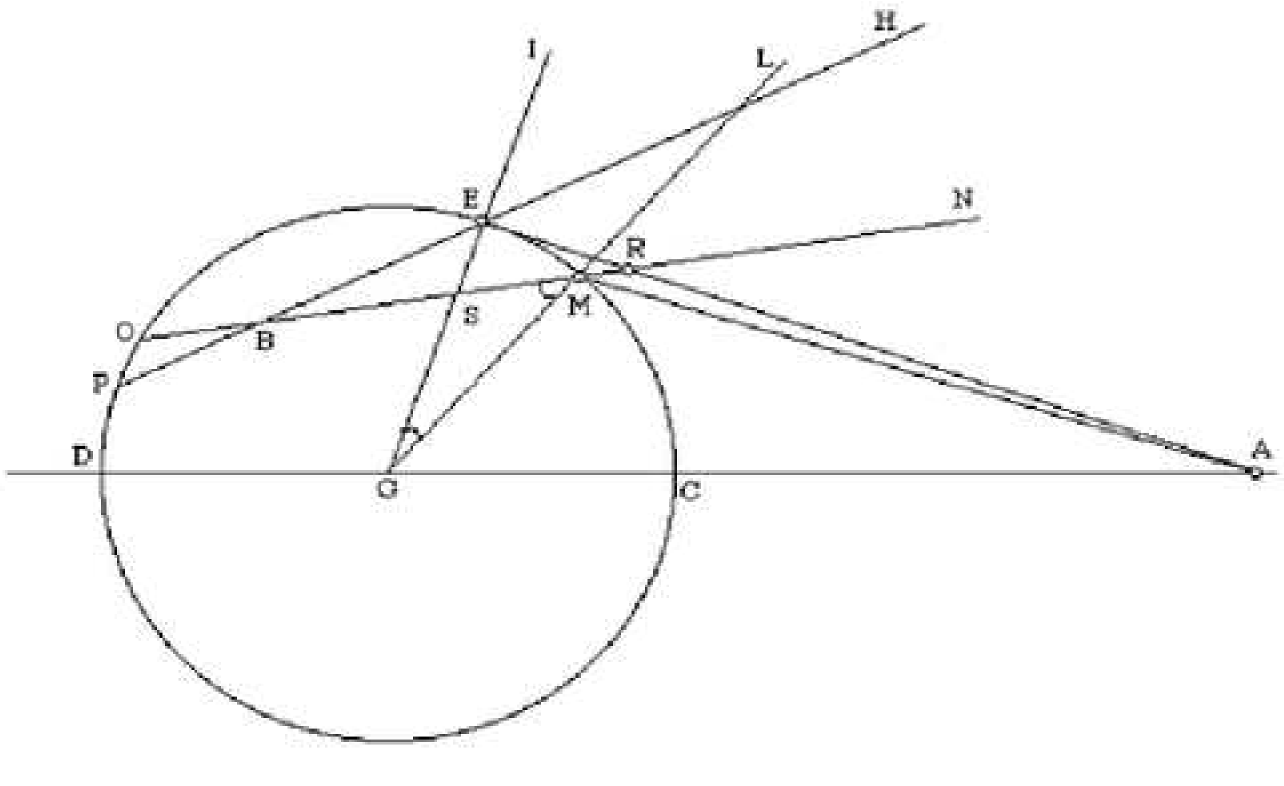
أما بالنسبة إلى ابن سهل فإنه يستعمل في أبحاثه، كدراسته في العدسة محدبة الوجهين مثلاً، هذا المبدأ الذي أعطاه بطلميوس ودرسه في المقالة الخامسة من كتابه *المناظر*.



الشكل. 1

إذا كانت $B \in]D, G[$، عندها لا ينكسر BE نحو النقطة A. لبرهان هذه الحالة، يفترض ابن الهيثم أن BE ينكسر في E طبقاً لـ EA؛ فتكون زاوية الانحراف $KEA = d$ في هذه الحالة زاوية خارجية للمثلث EBA، وتكون بالتالي $K\hat{E}A > K\hat{B}G$. لكن $GE > GB$، أي أن $E\hat{B}G > B\hat{E}G$، ومنه $K\hat{E}A > B\hat{E}G$؛ وهذا يعني أن $d > i$؛ ومنه $I\hat{E}A = r = d + i > 2i$؛ وهذه النتيجة هي، بنظر ابن الهيثم، مستحيلة حسب القاعدة 4 – يجب بالتالي أن يكون $d < i$. نذكر مجدداً أن هذه النتيجة ليست عامة، ولكنها صحيحة بالنسبة إلى وسطي ابن الهيثم الهواء – الزجاج، حيث $n = \frac{2}{3}$.

لنأت الآن إلى الحالة الثانية عندما لا تكون A و B على القطر نفسه. يأخذ ابن الهيثم B داخل الكرة [الشكل. 2]. في هذه الحالة، يكون المستوي DAB قطرياً؛ وكل شعاع آت من B ومنكسر نحو A، هو بالضرورة في هذا المستوي. يعمل ابن الهيثم على برهان واحدية الشعاع BE المنكسر نحو A. قبل أن نعلق على هذا التأكيد لنعد برهان ابن الهيثم.



الشكل. 2

لنفترض وجود شعاع آخر BM ينكسر في $M \neq E$ ويتجه نحو A. يقطع نصف القطر GE الشعاع BM في S. لتكن H و N على امتدادي BE و BM على التوالي؛ لدينا:

$$B\hat{E}A = \pi - d \text{ ،} G\hat{E}A = \pi - r \text{ ،} H\hat{E}A = d \text{ ،} B\hat{E}G = H\hat{E}I = i$$

$$B\hat{M}A = \pi - d_1 \text{ ،} G\hat{M}A = \pi - r_1 \text{ ،} N\hat{M}A = d_1 \text{ ،} B\hat{M}G = N\hat{M}L = i_1$$

لدينا في المثلثين BEA و BMA :

إذا كانت $i = i_1$، أي $d = d_1$، وبالتالي $B\hat{E}A = B\hat{M}A$ ، وهذا مستحيل.

وكذلك إذا كانت $i < i_1$، أي $d < d_1$، وبالتالي $B\hat{M}A < B\hat{E}A$ ، وهذا مستحيل[6].

وإذا كانت $i > i_1$، أي $H\hat{E}I > N\hat{M}L$ أو $G\hat{E}B > G\hat{M}B$ ، ومنه $M\hat{G}E > M\hat{B}E$ ، إذ لدينا في المثلثين BES و MGS:

$$G\hat{M}B + M\hat{G}E = G\hat{E}B + M\hat{B}E$$

لكن $M\hat{G}E = \widehat{EM}$ و $M\hat{B}E = \frac{1}{2}\left(\widehat{EM} + \widehat{OP}\right)$ [7]

فإذا كانت $M\hat{G}E > M\hat{B}E$ ، يصبح $\widehat{2EM} > \widehat{EM} + \widehat{OP}$ و

$$M\hat{G}E - M\hat{B}E = \frac{1}{2}\left(\widehat{EM} - \widehat{PO}\right) < \frac{1}{2}\left(\widehat{EM} + \widehat{PO}\right)$$

ونحصل حينئذ على:

$$M\hat{G}E - M\hat{B}E < M\hat{B}E$$

و

$$G\hat{E}B - G\hat{M}B < M\hat{B}E$$

أو بشكل آخر

$$H\hat{E}I - N\hat{M}L < M\hat{B}E$$

أي

$$\left(i - i_1 < M\hat{B}E\right)$$

ومنه $H\hat{E}A - N\hat{M}A < M\hat{B}E$ لأن $d - d_1 < i - i_1$ [8]، وبالتالي

---

[6] يفترض البرهان بأن تكون النقطتان E و A من الجهة نفسها بالنسبة إلى المستقيم BA؛ يقطع BM عندئذ EA في R:

$$B\hat{E}A = B\hat{R}A - E\hat{B}R$$
$$B\hat{M}A = B\hat{R}A + M\hat{A}E$$

فتكون إذاً:

$$B\hat{E}A < B\hat{M}A$$

[7] يفترض هنا النقطة B في داخل الدائرة. أثبت ابن الهيثم المبرهنات المتعلقة بالزوايا الداخلية والخارجية للدائرة. انظر المقالة السابعة من : أبو علي محمد بن الحسن بن الهيثم، كتاب *المناظر*، استنبول، فاتح، 3261، ص. 75^ظ^-77^ظ^.

[8] لقد برهنّا أن هذه المتراجحة غير مثبتة من أجل كل زوايا الورود. انظر:
Rashed, '*Le Discours de la lumière* d'Ibn al-Haytham', pp. 202-203.

إن زاوية الورود من أجل قرينة انكسار $n < 1$ هي بحيث:

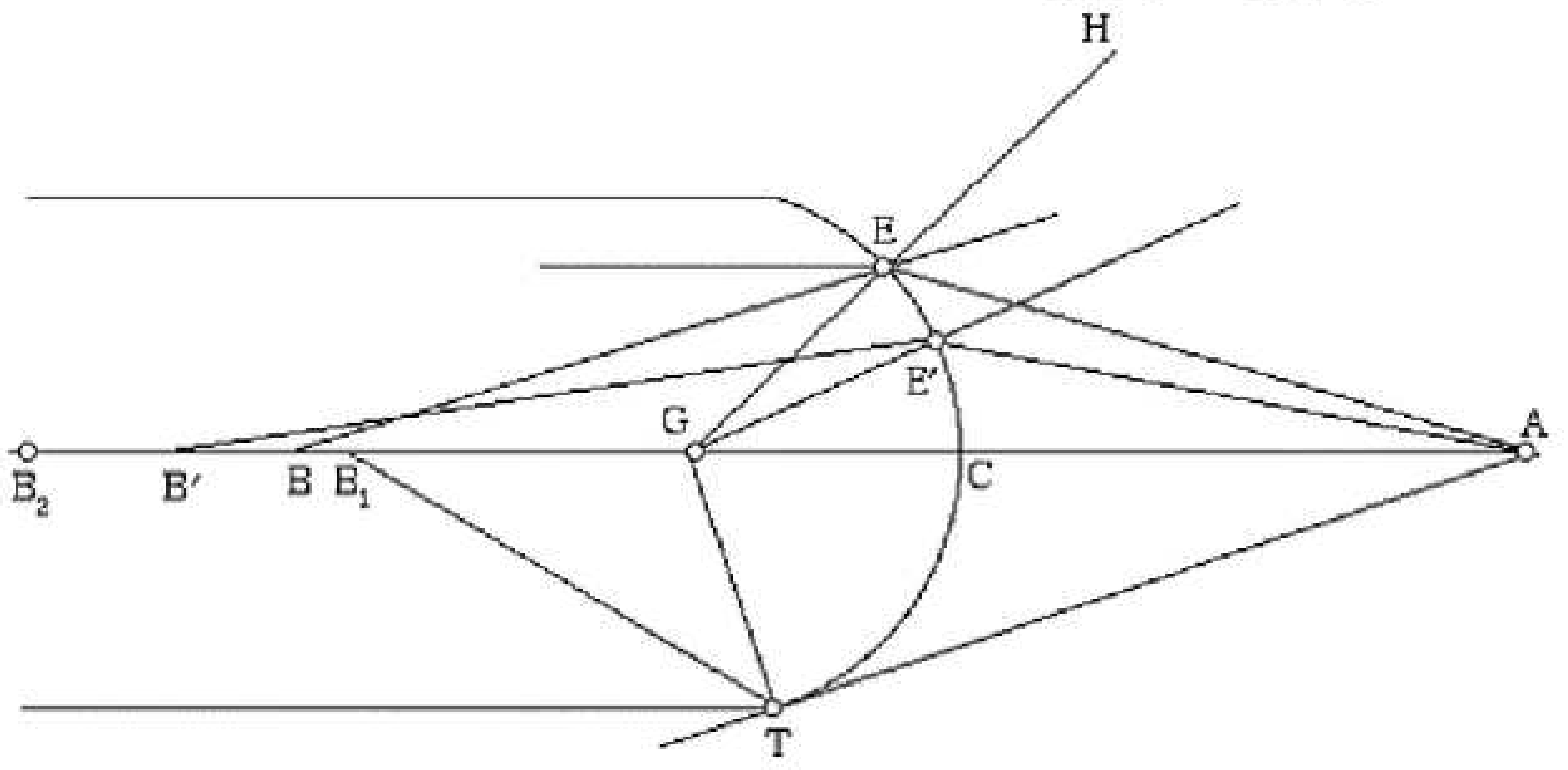
$$A\hat{M}B - A\hat{E}B = (\pi - d_1) - (\pi - d) = d - d_1 < M\hat{B}E$$

وهذا أمر مستحيل لأن

$$A\hat{M}B - A\hat{E}B = E\hat{B}M + E\hat{A}M$$

ومنه النتيجة : لا يوجد شعاع غير BE ينطلق من B وينكسر نحو A.

وهذه النتيجة ليست هي الأخرى صحيحة بوجه عام، بل تصحّ للنقاط الواقعة على مقطع $[B_1, B_2]$ من المستقيم AD[9]. لنأخذ كابن الهيثم حالة الزجاج $n > 1$[10]؛ ولنفرض $GA =$ ، α_1 زاوية شعاع مماس للكرة. لدينا $> R$ ولتكن $\alpha = G\hat{A}E$ زاوية الشعاع AE، بحيث $(0 < \alpha < \alpha_1)$ و $\sin\alpha_1 = \frac{R}{\ell}$. وترتبط الزاويتان α و $A\hat{E}H = i$ بالعلاقة : $\frac{\ell}{\sin i} = \frac{R}{\sin\alpha}$



الشكل. 3

$$i < \arc\sin\sqrt{\frac{4n^2 - 1}{3}}$$

هذا يعطي للحالة التي تهمنا هنا $\left(n = \frac{2}{3}\right)$:

$$i < \arc\sin\sqrt{\frac{7}{27}}$$

أي أنها مشروطة بـــ : $i < i_0 \approx 30°36'$. ومن جهة أخرى إن زاوية الحد التي تقابل الشعاع المنكسر المماس للكرة هي $i'_0 = \arc\sin n$، أي أنها في حال $n = \frac{2}{3}$، تساوي $i'_0 \approx 41°48'$. تفترض قاعدة ابن الهيثم $i < 30°36'$، ولكنها غير صحيحة في المجال $30°36' < i < 41°48'$.

[9] انظر الصفحتين 199، 201 والملاحظة الإضافية المقابلة رقم 10.

[10] الشعاع آت من A في هذه الحالة.

$\alpha < i$ في المثلث AEG.

لنضع $GB = y$ و $E\hat{B}G = \beta$ و $r = G\hat{E}B$ و $\omega = i - \alpha$ ؛ لدينا في المثلث EGB:

$$\frac{y}{\sin r} = \frac{R}{\sin \beta}$$

ومنه

$$y = \frac{R \sin i}{n \sin \beta} = \frac{R \sin i}{n \sin (i - r - \alpha)} = \frac{R \sin i}{n \sin (d - \alpha)} = \frac{R \sin i}{n \sin (\omega - r)}$$

إذا تناهت i إلى $\frac{\pi}{2}$، تتناهى α إلى $\alpha_1 = \arc \sin \frac{R}{\ell}$، وتتناهى ω إلى $\omega_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$ وتتناهى r إلى $r_1 = \arc \sin \frac{1}{n}$، وأخيراً تتناهى y إلى:

$$y_1 = \frac{R}{n \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 - r_1\right)} = \frac{R}{n \cos (\alpha_1 + r_1)}$$

أما إذا تناهت i إلى الصفر، فيكون لدينا $r \cong \frac{i}{n}$، $\alpha \cong \frac{Ri}{\ell}$ و $y \cong \frac{Ri}{n\left(i - \frac{i}{n} - i\frac{R}{\ell}\right)}$ وبالنتيجة تتناهى y إلى

$$y_2 = \frac{R}{n - 1 - n\frac{R}{\ell}}$$

يسعى ابن الهيثم في الواقع إلى تفحّص اتجاه تغيّر GB بالنسبة إلى ω، لدينا:

$$\frac{AE}{GA} = \frac{\sin \omega}{\sin i} \quad \text{و} \quad \frac{EB}{GB} = \frac{\sin \omega}{\sin r}$$

وبذلك تكون الكمية

$$\frac{EB}{GB} \cdot \frac{GA}{AE} = \frac{\sin i}{\sin r} = n \quad \text{ثابتة}$$

إذا زاد القوس $CE = \omega$، يزيد الطول AE، وبالتالي تنقص $\frac{GA}{AE}$ وتزيد النسبة $\frac{EB}{GB}$. والخلاصة أن $\frac{EB^2}{GB^2}$ تزيد مع زيادة ω. لكن

$$EB^2 = R^2 + GB^2 + 2R \cdot GB \cos \omega$$

وبما أن $\cos \omega$ ينقص فمن الضروري إذاً زيادة $\frac{R}{GB}$؛ وزيادة ω تستتبع بالتالي تناقص GB.

القيمتان القصويان للزاوية ω هما ω_1 بحيث تكون $\omega_1 = \arc \cos \frac{R}{\ell}$ و $\omega_2 = 0$ وتقابلهما القيمتان y_1 و y_2 اللتان تثبتان طرفي المجال $[B_1, B_2]$. لنشر إلى أن الدالة $y = f(\omega)$ هي دالة رتيبة؛ لذا تقابل كل نقطة من المقطع

$[B_1, B_2]$، نقطة وحيدة E بحيث ينكسر BE تبعا لــ EA. يبدو أن ابن الهيثم استعمل هذه الخاصة بالذات في دراسة الكاسر الكروي من دون أن يعين المجال $[B_1, B_2]$.

غير أننا نستطيع أن نبرهن أن مجموعة النقاط B على المستقيم CD، حيث يوجد شعاع وحيد BE قابل للانكسار نحو A، تشكل مقطعاً $[B_1, B_2]$ من هذا المستقيم. يقابل الطرف B_1 زاوية الورود $i = 90°$، وفي هذه الحالة يكون المستقيم AE مماساً للكرة في T. ويقابل الطرف B_2 زاوية الورود $i = 0$ ونحصل عليها عندما يتناهى القوس CE نحو الصفر. إذاً تتناقص المسافة GB عندما تتباعد E عن C. فعندما ترسم E القوس CT من C إلى T، ترسم B المقطع $[B_1, B_2]$، من B_2 إلى B_1، مقتربة بالتالي من G. وبالعكس، تقابل كل نقطة من هذا المقطع نقطة E وحيدة بحيث ينكسر BE نحو A[11]. ولكن لا يقابل النقطة B، الموجودة على AG أبعد من B_1، أية نقطة E. إذا انكسر الآن شعاعان BE وB'E' ليمرا في A، فإنهما يتقاطعان في M التي يمكن أن تكون داخل الكرة أو عليها أو في خارجها. يقترن بنقطة الالتقاء M هذه نقطتان متميزتان E و'E تعطيان انكساراً نحو A، مما يوضح أن استنتاج ابن الهيثم المتعلق بنقطة B داخل الكرة غير صحيح. ومن المدهش، من جهة أخرى، أن دراسة ابن الهيثم هذه، وأكثر من ذلك الحلول التي حصل عليها في دراسته الكرة المحرقة، ولا سيما تلك التي تمس وضع نقطة الانكسار الثانية[12]، لم توح إليه بإعادة النظر في هذا الاستنتاج – هذا على الأقل في الكتابات التي وصلت إلينا.

من جهة أخرى، فإن استنتاج ابن الهيثم القائل بوجود نقطة وحيدة E مقابل كل نقطة B بحيث إن BE ينكسر نحو A ليس عاماً، فهو خلافاً لما يؤكده، لا يصح إلا للنقاط B المنتمية إلى المقطع $[B_1, B_2]$ من المستقيم AD. ويبدو بوضوح أن ابن الهيثم قد لمس هذه الصعوبة في دراسة لاحقة. فهو يعود إلى دراسة النقاط B من المستقيم AD التي تقابل أقواساً CE قريبة من الصفر، ليقول بأن النقطة الواحدة A تقترن بنقاط عديدة، مقترباً بذلك من مفهوم الزيغ الكروي بالنسبة إلى النقطة A. ثم يؤكد فعلاً: "فيكون على خط د ب نقط كثيرة تمتد صورها إلى قوس جــهــ وتنعطف إلى نقطة ا"[13].

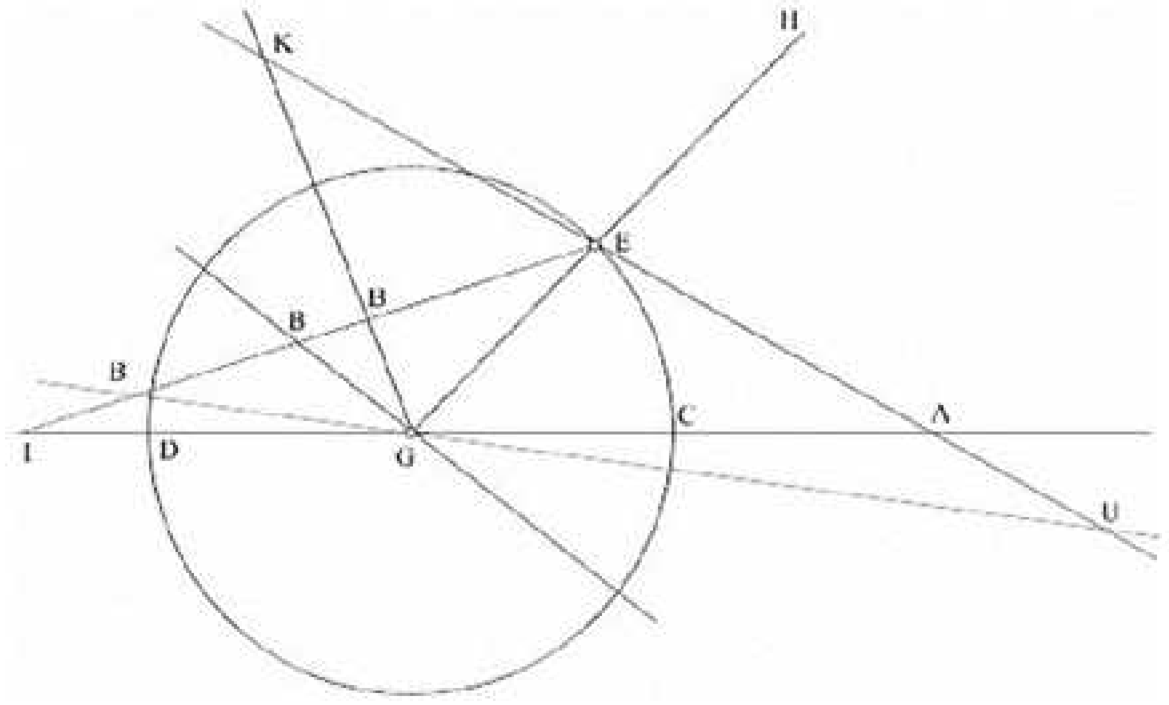
بعد دراسة الكاسر مباشرة، تأتي دراسة صورة النقطة التي يعطيها هذا الكاسر بحسب ظروف الحالة الأولى. ويبرهن ابن الهيثم أنه عندما ينكسر الشعاع BE متجهاً نحو A فلنقاط المستقيم BE المختلفة صور مختلفة. ويمكن إيجاز محاكمته كالتالي: إذا كان GB موازياً لــ EA، تكون صورة B في اللانهاية على EA، وإلا فستقع في نقاط مثل K أو U.

---

[11] بالفعل يبرهن ابن الهيثم أنه إذا انكسر شعاع BE ماراً في A يكون هذا الشعاع وحيداً، ولكنه لا يبرهن في المقابل وجود هذا الشعاع من أجل كل نقطة محددة B.

[12] انظر الصفحتين 193، 195 أدناه، وكذلك القضية 5 من *الكرة المحرقة*.

[13] انظر أبو علي محمد بن الحسن بن الهيثم، *كتاب المناظر*، المقالة السابعة (استانبول، سليمانية، فاتح 3216)، ص. 85ر.



الشكل. 4

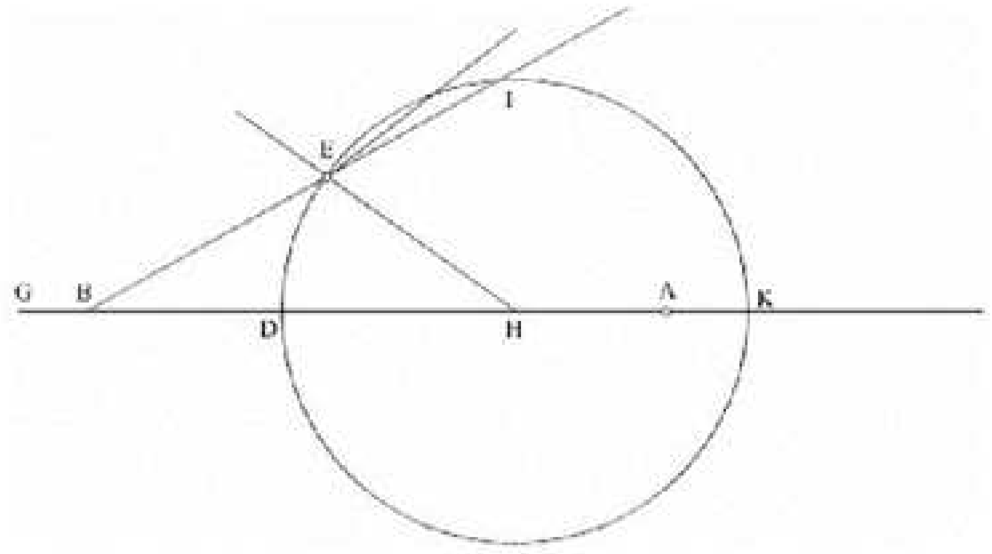
لنشر هنا إلى أن بحثه الهندسي لنقطة التقاء الشعاع المنكسر EA بالشعاع GB الناظم على الكرة صحيح؛ على عكس النتائج الفيزيائية المستخلصة منه. ويرجع الخطأ كما يشرحه مصطفى نظيف إلى أن:

"ابن الهيثم يعتبر موضع الخيال على العمود الواقع من النقطة المبصَرة على السطح عند نقطة التقاء المنعكس إلى البصر أو المنعطف إليه بالعمود المذكور. وليس هذا صحيحاً إلا في الانعكاس عن السطوح المستوية. أما في الانعكاس عن غيرها من السطوح أو في الانعطاف، سواء عند السطوح المستوية أو غير المستوية، فلا يصح إلا إذا كانت نقاط السقوط قريبة جداً من مسقط العمود الخارج من مركز البصر، قائماً على السطح"[14].

وقد وجه الانتقاد نفسه لابن الهيثم قبل ستة قرون من قبل كمال الدين الفارسي[15].

ومع ذلك يجب ألا تخفي عدم الدقة هذه أهمية الدراسة، إذ إنها الأولى عن الكاسر الكروي، وقد تناولت انتشار الضوء داخل الكاسر بقدر ما تناولت الصورة وموضعها.

تناولت الحالة الثانية من دراسة الكاسر وجود المنبع الضوئي B في وسط كامد، والعين في وسط أقل كمدةً، والكرة محدبة من جهة المنبع.

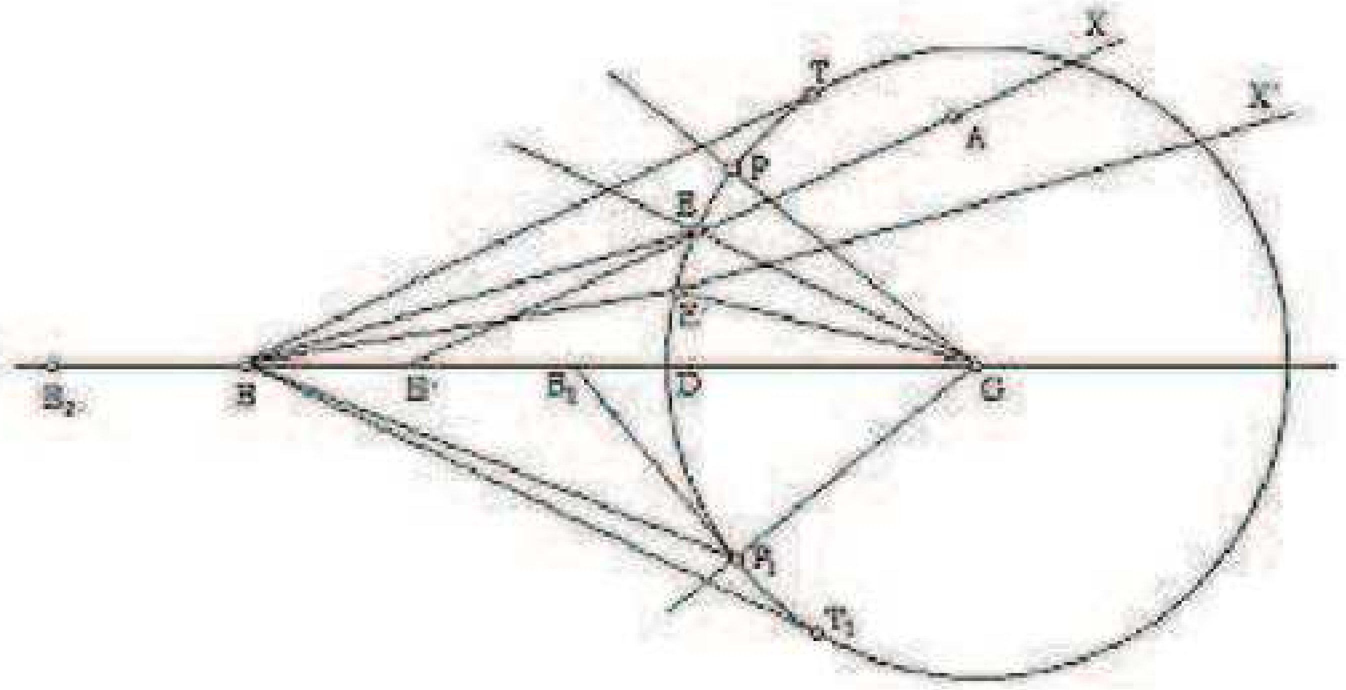


الشكل. 5

[14] نظيف، *لحسن بن الهيثم*، ص. 781.

[15] يصف الفارسي، في معرض تعقيبه على *كتاب المناظر* لابن الهيثم، تجربة للبرهان بأن الصورة الفيزيائية لا تطابق الشروط الهندسية. انظر كمال الدين الفارسي، *تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر* (ج. 2، ص. 172).

معالجة ابن الهيثم لهذه الحالة تشابه معالجته للحالة السابقة؛ لذا سنكتفي بإيجازها. يأخذ ابن الهيثم، أولاً، B و A على القطر نفسه ويبرهن أن الشعاع المنتشر وفق هذا القطر هو الوحيد الذي يتجه نحو A من دون انكسار. ثم يعتبر الحالة حيث B و A ليستا على القطر نفسه؛ وبما أن المنبع B هو في وسط أكثر كمدةً، فلزاوية الورود حدّ أقصى، والشعاع BE لا ينكسر إلا إذا كانت $i < i_1$، حيث i_1 هي زاوية الحد: $\sin i_1 = n$ (إذا كانت $n = \frac{2}{3}$ فإن $i_1 = 41°48'$). ولا تتمكن من الانكسار إلا الأشعة الساقطة على القوس PDP_1. وهو قوس أصغر من القوس TT_1 الذي يحدده المماسان الممدودان من B.



الشكل. 6

ما من شعاع ينكسر نحو القطر. يبرهن إضافة إلى ذلك أن الشعاعين EX و E'X' لا يتقاطعان داخل الكرة. فإذا كانت A داخل الكرة، أو على وجه أعم في الوسط الأشف، استحال وجود شعاعين منكسرين مارّين بـــ A، وإن مرَّ فشعاع واحد على الأكثر.

لذلك لا يوجد على الأكثر إلا نقطة واحدة E بحيث ينكسر الشعاع BE باتجاه EA.

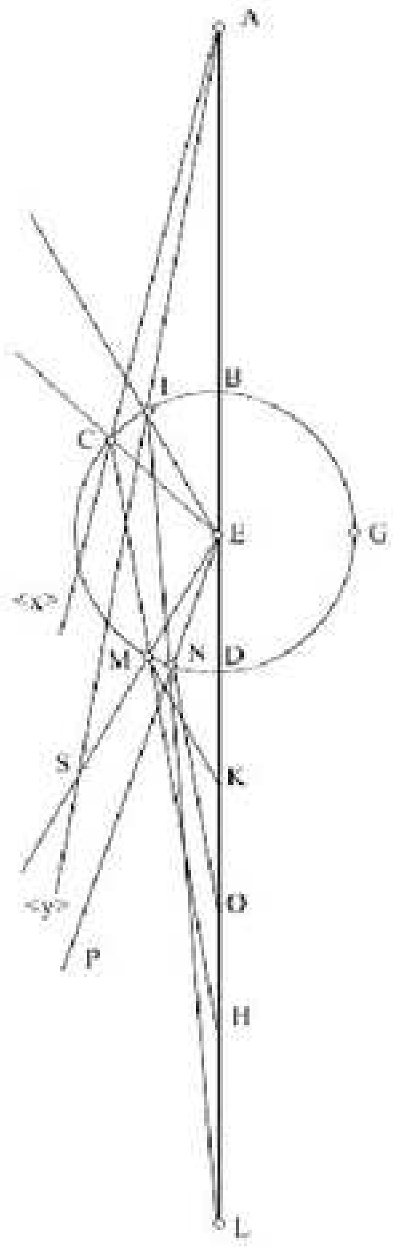
هذه هي إذاً دراسات الكاسر الكروي التي نجدها في *كتاب المناظر* لابن الهيثم. ومن الممكن إضافة حالة تطرّق إليها بشكل غير مباشر في رسالته عن *الكرة المحرقة*، وهي حالة عبور أشعة متوازية وسطاً أكثر كمدةً. أما حالة عبور أشعة متوازية وسطاً أقل كمدة فهي لا تدخل في هذه الرسالة.

2. العدسة الكرويـــة

بعد دراسة الكاسر الكروي يعرض ابن الهيثم لكرة البلّور الشفافة والمتجانسة، أو العدسة الكروية مهتماً بشكل خاص بصورة الجسم التي تعطيها هذه العدسة. غير أنه يكتفي بتفحص حالة واحدة، تكون فيها العين والجسم على القطر

نفسه، أي أنه بعبارة أخرى يدرس الصورة الناجمة من خلال عدسة كروية لجسم وُضع في موضع خاص على القطر الذي يمر بالعين. وسنرسم هنا الخطوط العامة لعرض ابن الهيثم[16].

تذكرنا إجراءاته بالطريق الذي سلكه ابن سهل في دراسته عدسة محدبة الوجهين زائدية المقطع. يدرس ابن الهيثم كاسرين كلا على حدة، ويطبق النتائج التي حصل عليها قبلاً. فالكاسر ذو الرأس B يعطي الحالة الأولى التي سبق تفحصها؛ ينطلق إذاً من نتائجه في الزيغ الكروي. يأخذ قطعة مستقيمة HL تعطي نهايتانها H و L شعاعاً منكسراً نحو A. ليكن هذان الشعاعان HC و LI. ينطلق من كل نقطة من المقطع HL شعاع واحد فقط ينكسر في نقطة من القوس CI ويتجه نحو A. ونذكر هنا أن ابن الهيثم لم يبرهن في هذه الحالة تقاطع الشعاعين HC و LI.



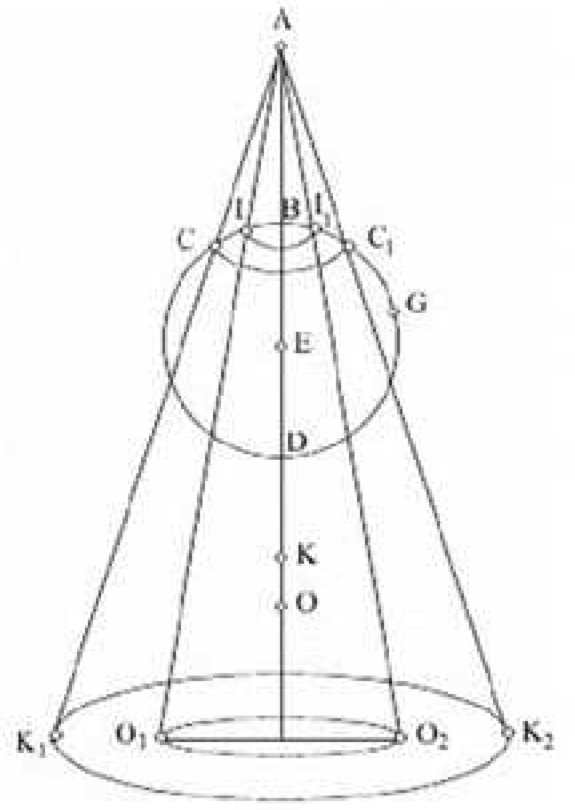
الشكل. 7

يلتقي الشعاعان HC و LI بالكاسر ذي الرأس D على التوالي في M و N. فالشعاع IN داخل الكرة يأتي من الشعاع NO الأبعد منه عن الناظم EN، وكذلك يأتي الشعاع CM من الشعاع MK. وينطلق إذاً من كل نقطة من المقطع KO شعاع يخضع لانكسارين، الأول على القوس MN، والثاني عل القوس CI، ومن ثم يصل إلى النقطة A.

يولّد دوران كل من هذين القوسين حول AD قطاعاً كروياً. ينكسر كل شعاع آت من نقطة من الجسم KO وساقط على القطاع الذي يولده القوس MN على هذا القطاع أولاً ثم ينكسر على القطاع الذي يولده القوس CI ليصل في النهاية إلى A. إن الأشعة المنطلقة من K والساقطة على الدائرة التي ترسمها M، تنكسر بالفعل، أولاً نحو نقطة من الدائرة التي ترسمها C، ومن ثم تتكسر مرة ثانية نحو النقطة A. نحصل على نتيجة مشابهة من أجل كل نقطة من

[16] نشير مع ذلك إلى أن ابن الهيثم قد خصص فصلاً كاملاً لدراسة صورة جسم مرئي بالانكسار على سطح كروي، جسم عمودي أو غير عمودي على القطر الذي يمر بالعين. انظر ابن الهيثم، *كتاب المناظر*، المقالة السابعة، مخطوطات – استنابول، فاتح 3216، الورقات 117ʳ وما بعدها. انظر أيضاً نظيف، المصدر نفسه، ص. 812 وما بعدها.

KO، فصورة المقطع KO هي إذاً النقطة A. وترى العين، إذا كانت في A، المقطع KO على شكل حلقة، لأن الأشعة النافذة إلى العين هي بين المخروط المتولّد من المستقيم AC والمخروط المتولد من المستقيم AI.



الشكل. 8

ثم يذكر ابن الهيثم التجربة التالية: لنأخذ كجسم كرة من الشمع، صغيرة جداً ومطلية بالأسود؛ وكعدسة كرة من الزجاج أو البلّور تكون كرويتها أفضل ما يمكن؛ ونضع العين على مستقيم مركزَي هاتين الكرتين. يرى الناظر إلى الكرة في وضع معين حلقة سوداء. وإذا اقتضى الأمر يقرّب أو يبعّد الكرة كي يحصل على هذا الوضع.

يتحقّص ابن الهيثم بعد ذلك ما ينتج إذا أُبدلت الكرة الشفافة بأسطوانة دليلها دائري BCD، ومولداتها عمودية على المستوي BCD. فلا ترى العين حينذاك المقطع KO على شكل حلقة، بل على شكل مقطعين منفصلين.

ولنلاحظ هنا أن ابن الهيثم، في دراسته العدسة الكروية، يستعمل الزيغ الكروي لنقطة على مسافة متناهية في حالة الكاسر، كي يدرس صورة مقطع هو جزء من المقطع الذي يحدده الزيغ الكروي.

3. الكرة المحرقـــة

بعد أبحاثه في *كتاب المناظر* عن الكاسر والعدسة الكروية يعود ابن الهيثم إلى الكرة المحرقة في رسالة قام الفارسي (المتوفى 718هـ/1319م) بالتعليق عليها، وكان تعليقه هذا هو المصدر الوحيد لتعرّف مؤرخي المناظر العصريين عليها[17]. ولحسن الحظ، غالباً ما ينقل الفارسي في هذا التعليق نقلاً حرفياً أفكار ابن الهيثم، ليعطي بعده تفسيره الخاص، حيث يعمل، كما سنرى لاحقاً على دفع البحث الانكساري نحو مزيد من الدقة. فلم يكن عمل الفارسي

[17] E. Wiedemann, 'Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften –XIX– Über die Brechung des Lichtes in Kugeln nach Ibn al-Haiṯam und Kamāl al-Dīn al-Fārisī', *Sitzungsberichte der physikalische-medizinischen Sozietät in Erlangen*, Bd XIII, (1910), pp. 15-58; reprod. In *Aufsätze zur arabischen Wissenschafts-Geschichte*, 2 vols. (Hildesheim / New York, 1970), vol. 1, pp. 597-640; M. Schramm, 'Steps towards the Idea of Function : A Comparison between Eastern and Western Science in the Middle Ages', *History of Science*, vol. 4 (Cambridge, 1965), pp. 70-103.

مقتصراً على التعليق بالمعنى المألوف للكلمة، بل نراه يتصرف في مجمل مناقشته أعمال ابن الهيثم كأفضل من فهم طريقة العالم، وعرف كيفية استعمالها ليدفع قدماً إلى الأمام بعض فصول المناظر: كقوس قزح والهالة مثلاً[18].

ويتفق الجميع على اعتبار رسالة ابن الهيثم هذه كإحدى قمم البحث المناظري الكلاسيكي. وهي تهمنا هنا لأكثر من غرض. فهو يستعيد فيها موضحاً، وبدقة أكبر، بعض نتائجه السابقة للعدسة الكروية. كما يعود إلى مسألة الإحراق بواسطة العدسة، وهو ما يسمح لنا بمتابعة تطور فكر ابن الهيثم حول العدسة الكروية، وذلك بتفحصنا كيفية عودته إلى مسألة الإحراق بالانكسار، وهي المسألة التي سبق لابن سهل أن طرحها.

يبدأ ابن الهيثم في هذه الرسالة بإدخال مقدمات عدة، اثنتين منها غاية في الأهمية.

مقدمة أولى: إن زاوية الانحراف في الزجاج أصغر من نصف زاوية السقوط وأكبر من ربعها.

هذه القضية مستقاة، كما يذكر ابن الهيثم، من المقالة الخامسة من *كتاب المناظر* لبطلميوس. فمع القرينة $n = \frac{3}{2}$ تكون زاوية الانحراف

$$\frac{i}{4} < d < \frac{i}{2}$$

وفي حين أن الجزء الأيسر من هذه المتراجحة صحيح لجميع زوايا السقوط، فليس الجزء الأيمن صحيحاً دائماً[19].

مقدمة ثانية: ليكن α و β قوسين من دائرة، بحيث $\alpha > \beta$، و $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ و $\beta = \beta_1 + \beta_2$ حيث

$$\alpha_1 < \frac{\pi}{2} \text{ و، } \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = k < 1$$

(لذلك $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ و $\beta_2 < \beta_1 < \frac{\pi}{2}$)،

عندئذ

---

[18] R. Rashed, 'Optique géométrique et doctrine optique chez Ibn al-Haytham', *Archives for History of Exact Sciences*, 6, 4 (1970), pp. 271-298 ; reprint in *Optique et Mathématiques : Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe*, Variorum Reprints (Aldershot, 1992), III.

[19] لدينا: $d + r = i$ و $\sin i = n \sin r$

نستنتج أن $d < \frac{i}{2} \Leftrightarrow r > \frac{i}{2} \Leftrightarrow \sin r > \sin\frac{i}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sin i > \sin\frac{i}{2}$

لذلك $\frac{2}{n}\cos\frac{i}{2} > 1$ أو $2\cos\frac{i}{2} > n$

نعلم أن $0 < i < \frac{\pi}{2}$ لذلك $\sqrt{2} < 2\cos\frac{i}{2} < 2$

إذا كان $n < \sqrt{2}$، تكون المتراجحة $d < \frac{i}{2}$ صحيحة لكل $i \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

أما إذا كان $\sqrt{2} < n < 2$، فالمتراجحة صحيحة لكل $0 < i < i_0$ (حيث i_0 توافق $\cos\frac{i_0}{2} = \frac{n}{2}$)

وإذا كان $n > 2$، فلا يصح $d < \frac{i}{2}$ مهما كانت قيمة زاوية الورود i.

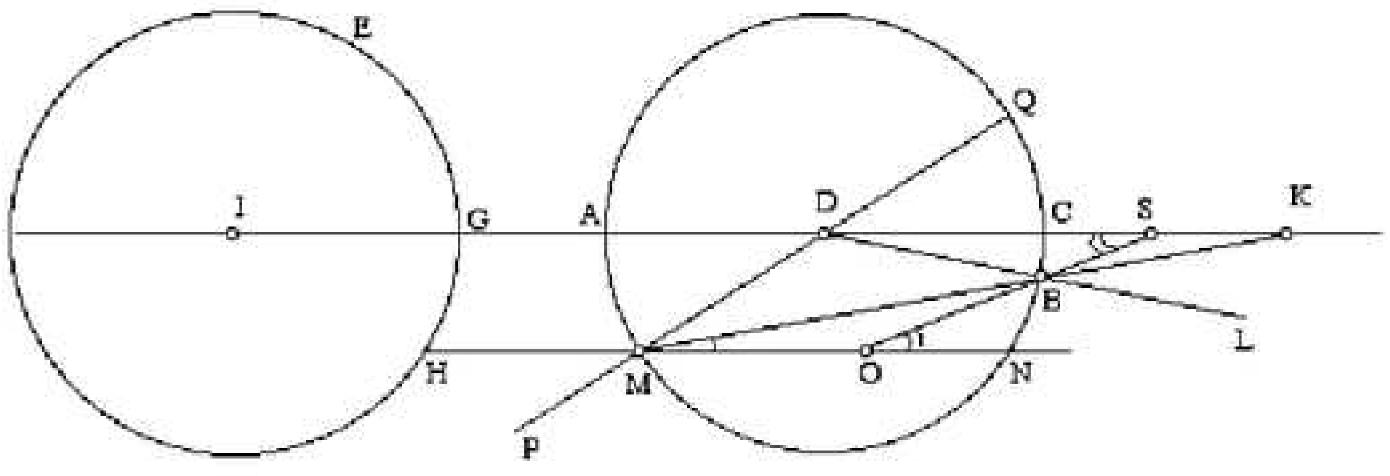
$$\frac{\sin\ \beta_1}{\sin\ \beta_2} > \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \qquad (1)$$

يصوغ ابن الهيثم نفسه في هذه المقدمة على النحو التالي:

"كل دائرة يخرج فيها وتران متوازيان يفصلان من الدائرة قوسين تكون أعظمهما ليست بأعظم من نصف دائرة، ونفرض على أصغر القوسين نقطة كيفما اتفق، ويخرج من النقطة عمود على الوترين، فإن نسبة جميع العمود إلى ما ينفصل منه في القوس الصغرى أعظم من نسبة ما ينفصل من القوس العظمى إلى ما ينفصل من القوس الصغرى، وإن نسبة ما ينفصل من القوس العظمى إلى ما ينفصل منها بين الوترين أعظم من نسبة العمود إلى ما ينفصل منه في ما بين الوترين"[20].

انطلاقاً من هاتين المقدمتين ومن قواعد الانكسار، يدرس ابن الهيثم انتشار حزمة من الأشعة المتوازية الساقطة على كرة من الزجاج أو من البلور. فلننظر إلى طريقة عمله.

يبرهن ابن الهيثم، في قضية أولى، أن جميع الأشعة المتوازية والساقطة بالزاوية i نفسها على كرة شفافة تتقارب بعد انكسارين في النقطة نفسها على القطر الموازي لمنحى هذه الأشعة. هذه النقطة هي البؤرة الخاصة بزاوية الورود i. وعليه يتفحص شعاعاً موازياً للقطر AC، يسقط في M على الكرة ويلتقي بعد انكساره الأول بالكرة في B وبالمستقيم AC في K. ينكسر ثانية في B ويلاقي المستقيم AC في S. S هي البؤرة الخاصة بالسقوط i وتنتمي إلى المقطع [CK].



الشكل. 9

ونسجل هنا أن ابن الهيثم، في رسالته هذه كما في كتاباته الأخرى، لم يدرس الكاسر الكروي للأشعة المتوازية.

ويبرهن في قضية ثانية أن الانحراف الكلي يساوي ضعف أحد الانحرافين: $D = 2d$. إن الزاوية $B\hat{S}D$ التي تقابل الانحراف الكلي هي كالتالي: $B\hat{S}D = B\hat{O}N = 2O\hat{M}B = 2d$

انطلاقاً من المقدمتين السابقتين، يبين ابن الهيثم، بالخلف، بأنه لا يمكن الحصول على نقطة محددة S، وراء C على القطر، إلا انطلاقاً من نقطة واحدة M، أي أن S تقابل زاوية سقوط واحدة.

---

[20] MMS Istanbul, Askari Museum 3025 (folios not numbered) and Atif 1714, fol. 60^V.

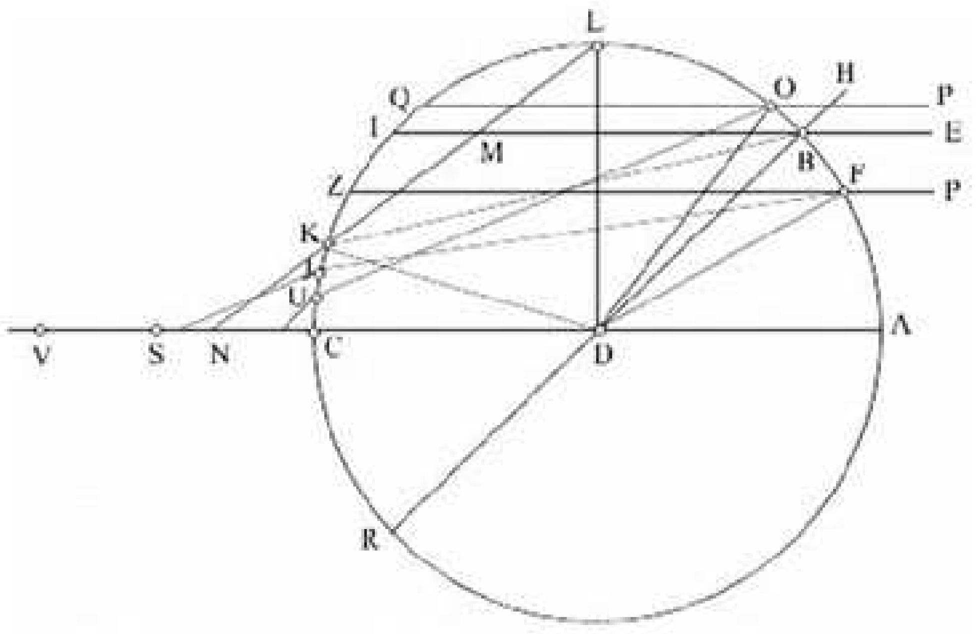
انظر أيضاً الملاحظات الإضافية [6].

يبين في قضية ثالثة أن نقطتين منفصلتين S وS' تقابلان زاويتي سقوط مختلفتين i وi'.

ثم يتوصل، في قضية رابعة، إلى النتيجة التالية: إذا كانت $i' > i$، تكون النقطتان S' وS بحيث $CS' < CS$؛ فمع زيادة i تصغر المسافة CS. وبالتالي تقابل كل نقطة S معينة زاوية سقوط واحدة.

يأخذ ابن الهيثم بعد هذا في تحديد نهايتي المقطع الذي تقع عليه النقط S. فيدرس، لهذا الغرض، مواضع النقطة B – نقطة الانكسار الثاني – عندما تتغير زاوية السقوط. إنها، على حد علمنا، الدراسة المتأنية الأولى في مجال الزيغ الكروي لأشعة متوازية ساقطة على كرة والتي تتعرض لانكسارين.

يلجأ ابن الهيثم، في هذه الدراسة، إلى المعطيات العددية في *كتاب المناظر* لبطلميوس $i = 40°$ و$i = 50°$؛ ويستنتج بأن الشعاعين المنكسرين – BK للزاوية $50°$ و$B'K$ للزاوية $40°$ – يسقطان في النقطة K نفسها، بحيث يكون القوس $CK = 10°$. ثم ينكسر الشعاع BK نحو النقطة N بحيث تكون النقاط N، K وL على استقامة واحدة.



الشكل. 10

لا يحدد ابن الهيثم موضع النقطة N' المقرونة بـــ $i = 40°$؛ بل يكتفي بإثبات أن $N' \neq N$. ثم يبرهن:

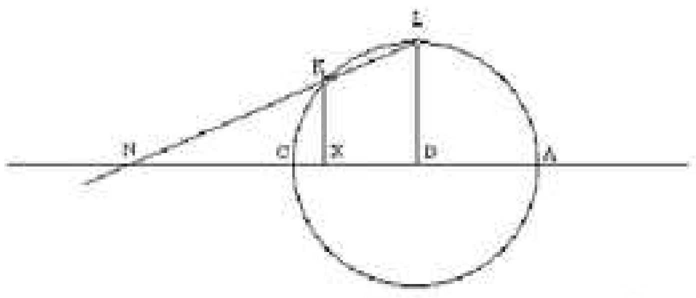
- يقابل كل نقطة O ذات قوس $AO > 50°$، ($i > 50°$)، شعاع منكسر OU[21] (U بين K وC) ونقطة S بين N و C حيث $CS < CN$[22]؛

---

[21] $G = U$ في تعليق الفارسي.

[22] لم يعط ابن الهيثم تفاصيل حساباته لتحديد طول CN، حيث N نقطة تقاطع المستقيمين AC و KL وحيث نصف قطر الكرة يساوي $60°$.

فهو يشير أن $\frac{DN}{NX} = \frac{LD}{KX}$ (1) و $KX = KD \sin 10° = 10{,}419 \approx 10{,}5$ (2) ثم يعطي بدون تفسير $CX > 0{,}5$ (3)



يمكن الوصول إلى هذه النتيجة كما يلي: نلاحظ أولاً أن $CX = KX \cdot tg\, C\hat{K}X$ ولحساب $C\hat{K}X$ نلاحظ أن $C\hat{D}K = 10°$ وبالتالي $K\hat{C}X = \frac{1}{2} K\hat{D}A = 85°$ وأخيراً $C\hat{K}X = 5°$. لدينا إذاً

$CX = 10{,}5 \cdot tg\, 5° \approx 10{,}5 \cdot 0{,}09 \approx 0{,}9$ و CX أكبر من 0,5 وضوحاً.

- ويقابل كل نقطة F قوسها $AF < 40°$ شعاع منكسر $FJ - J$ بين K و C – ونقطة S وراء N' حيث $CS > CN'$.
- معنا دائماً $CS < CV\ (= R)$.

وهكذا نستنتج إنه عندما تزيد الزاوية من صفر إلى 90°، تنتقل S على المقطع VC من V إلى C.

نلاحظ أن ابن الهيثم لم يهتم بالأشعة ذات $40° < i < 50°$ (وتكون معها S منتمية إلى $[N, N']$)، بل اكتفى بالإشارة إلى أن N' مختلفة عن N من دون أن يعير ذلك أي اعتبار.

ثم يحسب CN ويجد أن $CN \cong \frac{1}{5} R$؛ ولا يحسب CN'. ويكتب عندئذ: "فتكون الشعاعات التي تنعطف إلى خط CN أكثر بكثير من الشعاعات التي تنعطف إلى خط NV'". يجب تصحيح النص وقراءة CN' و N'V، إذ تنكسر على N'V الأشعة ذات الورود بين $0° < i < 40°$، أما الأشعة ذات الورود $40° < i < 90°$ فتنكسر على CN'.

إذا أخذنا S_0 وسط CV تكون الأشعة المنكسرة على CS_0 أكثر عدداً من تلك المنكسرة على S_0V، ويكون بالتالي الإحراق أفضل على CS_0 الذي يساوي ربع القطر.

نحصل من (1) و(2) على $\frac{10,5}{60} = \frac{NX}{ND}$ ومنه $NX \approx \frac{1}{6} ND$ والفرق الموجب $CX = NX - NC$ يكفي لكتابة $NC < \frac{1}{6} ND$ أي $NC <$

12. فهذه النتيجة مستخلصة إذاً من الشروط (1) و(2) و(3) التي أعطاها ابن الهيثم في بدء حسابه. ومنه $(NC + CD) \frac{1}{6} > NC$ أي

$NC < \frac{1}{5} CD$. لنلاحظ باستعمال القضية 2 أن الزاوية KND هي ضعف الانحراف وأن لدينا هنا $K\hat{N}D = 2d_{50} = 40°$ وبالتالي $ND = LD \cot g\, 40° = CD\, tg\, 50°$. ومنه

$$NC = ND - CD\left(tg\, 50° - 1\right) = CD \cdot 0,1917... < \frac{1}{5} CD$$

وهي طريقة أدق وأسرع من السابقة.

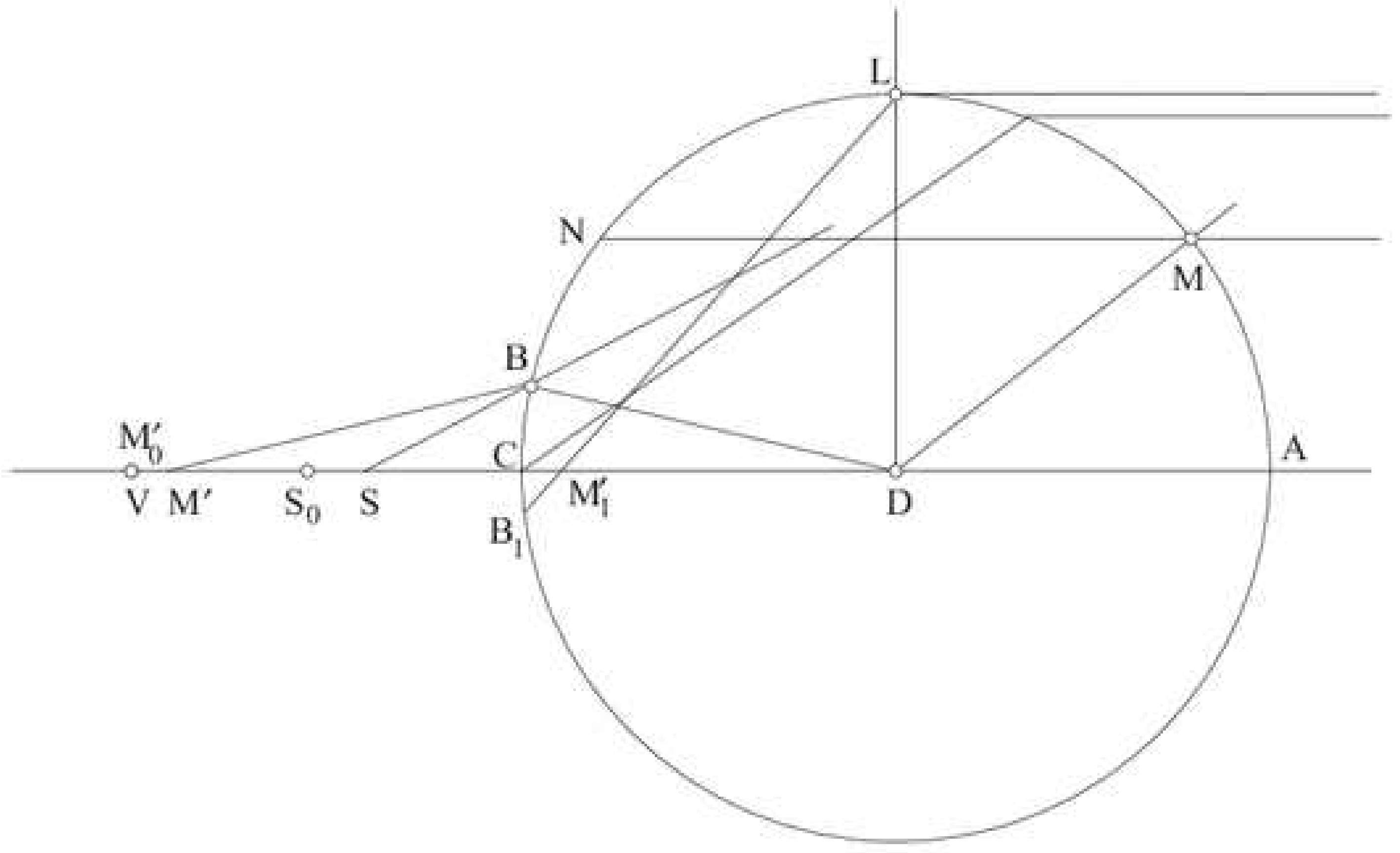
لم يحدد ابن الهيثم وضع N' المرتبطة بـــ $i = 40°$. لدينا $XN' = KX \cdot \cot g\, KN'C$ حيث $K\hat{N}'C = 2d_{40} = 30°$ ومنه $XN' \approx 10,419 \cdot \sqrt{3} \approx 18,05$ و $CN' = XN' - XC \approx 18,05 - 0,91 \approx 17,14$ لدينا إذاً $\frac{1}{4} R < CN' < \frac{1}{3} R$.

إذا كانت النقطة S وسط CV، فإن $SC = \frac{1}{2} R$. يستخلص ابن الهيثم أن "الشعاعات التي تنعطف إلى خط $\overline{\text{س جـــ}}$ (CS) أكثر بكثير من الشعاعات التي تنعطف إلى $\overline{\text{س ث}}$ (SV)" ويحدث الإحراق على CS.

تبين دراسة وضع البؤر أن كل هذه البؤر واقعة على SC من أجل $n = \frac{3}{2}$، أما إذا كانت $n = \sqrt{2}$، على سبيل المثال، فإن البؤر تقع خلف S، من أجل i في جوار الصفر، وتصل حتى النقطة S' حيث $CS' = \frac{\sqrt{2}R}{2} \approx 0,7 \cdot R$.

لنلاحظ أن ابن الهيثم لم يقل إن كل البؤر تقع على مقطع CS مساوٍ لربع القطر. ولكنه ألح على وقوع أغلبها على هذا المقطع. تبين هذه المناقشة أنه من غير الإنصاف لومه على عدم البرهان على وقوع كلّ البؤر بالفعل على CS. مع أنه استطاع تجريبياً ملاحظة وقوعها على هذا الخط في حالة الهواء–الزجاج، $n = 3/2$.

لنستعد الآن بلغة حديثة دراسة ابن الهيثم للقوس CB عندما ترسم النقطة M القوس AL، كي نتمكن من الحكم على نتائجه.



الشكل. 11

لنعتبر القوس $AM = i$، $0 < i < \frac{\pi}{2}$؛ يكون معنا :

$$\text{arc } BC = i - 2d = 2r - i = \phi(i)$$

نحصل، من جهة أخرى، من القانون $n \sin r = \sin i$ على

$$\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r}$$

وبالتالي :

$$\frac{d\phi}{di} = \frac{2 \cos i}{n \cos r} - 1$$

ومنه

$$\frac{d\phi}{di} = 0 \Leftrightarrow 2 \cos i = n \cos r \Leftrightarrow 4\cos^2 i = n^2 \cos^2 r$$

$$\Leftrightarrow 4\left(1 - \sin^2 i\right) = n^2 - \sin^2 i \Leftrightarrow \sin^2 i = \frac{4 - n^2}{3}$$

لنفترض أن $n = \frac{3}{2}$، نحصل على

$$\sin^2 i = \frac{7}{12} \quad \text{و} \quad \sin i \cong 0{,}76376$$

أي أن

$$\frac{d\phi}{di} = 0 \quad \text{من أجل} \quad i = i_0 \cong 49°48' \cong 50°$$

نبرهن أيضاً أن $\frac{d\phi}{di} > 0$ للزوايا $i < i_0$، وبالتالي تمثل $i = i_0 \cong 49°48'$ النهاية العظمى للدالة ϕ؛ نجد عندئذ $r_0 \cong 30°36'$ و $2r_0 - i_0 = \widehat{CB_0} \cong 11°25'$.

نحصل على وجه الدقة في حال $i = 50°$، $r = 30°43'$،

$$2r - i = 11°26' = \widehat{CK}$$

وفي حال $i = 40°$، و $r = 25°22'$، نحصل على:

$$2r - i = 10°44' = \widehat{CK}'$$

وهما نتيجتان مختلفتان اختلافاً ملموساً عن نتيجتي ابن الهيثم السابق ذكرهما $\widehat{CK} = \widehat{CK}' = 10°$.

لنأت الآن إلى دراسة حدود $\widehat{CB}$. لدينا الحالتان التاليتان:

1 – إذا كانت i قريبة من الصفر فإن $r \cong \frac{i}{n}$، وعليه: $\widehat{CB} \cong i\left(\frac{2}{n} - 1\right)$، وبالنتيجة إذا أخذنا $n = \frac{3}{2}$ يكون معنا $\widehat{CB} \cong \frac{i}{3}$. إذا اقتربت i من الصفر بقيم موجبة تقترب $\widehat{CB}$ من الصفر على نفس النحو وتكون B عندئذ قريبة من C ولكن فوقها.

2 – إذا مالت i إلى $\frac{\pi}{2}$، تميل sin i إلى 1، وتميل r إلى r_1 حيث $\sin r_1 = \frac{1}{n}$، وبالنتيجة في حال $n = \frac{3}{2}$ ، يكون $\sin r = \frac{2}{3}$ و $r \cong 41°48'$ ؛ ويتناهى $\widehat{CB}$ نحو $\widehat{CB_1}$ حيث $\widehat{CB_1} \cong 83° 36' - 90° \cong -6° 24'$؛ إذاً $\widehat{CB_1} < 0$ وتقع B_1 تحت النقطة C.

لنلاحظ أن $\widehat{CB} = 0$ عندما تكون $2r = i$؛ أي

$$2r = i \Leftrightarrow \sin 2r = \sin i \Leftrightarrow \frac{2}{n} \sin i \cos r = \sin i$$

تتحقق هذه العلاقة عندما يكون $\sin i = 0$ $(i = 0)$ وهذا ما حصلنا عليه في الحال (1) أو عندما يكون $\cos r = \frac{n}{2} = 0,75$ و $r = r_1 \cong 41°24'$. وتقابل هذه الزاوية عندئذ الزاوية $i_1 = 2r_1 \cong 82°49'$، وهكذا يكون القوس $\widehat{CB}$ سالباً في حال $82°49' < i < 90°$؛ ويتناقص من الصفر إلى $-6°24'$.

تقع إذاً الأشعة المنكسرة MB، والمقابلة لزوايا السقوط $82°49' < i \leq 90°$، في نقطة من القوس CB_1، إنها تنكسر مبتعدة عن الناظم فلا تعطي أية نقطة S.

وبهذا يبطل تأكيد ابن الهيثم بوقوع النقطة B، في حال $i > 50°$، بين K و C، لأن النقطة B، كما رأينا، يمكن أن تأخذ موضعاً تحت C.

يبقى علينا أن نناقش المواضع الحدية للنقطة S التي شغلت ابن الهيثم بشكل خاص. لقد رأينا عند دراسة الكاسر أن:

$$DM' = \frac{R \sin i}{n \sin d}$$

وأن DM' تتناقص عندما تتزايد i من الصفر إلى $\frac{\pi}{2}$. لدينا من أجل $n = \frac{3}{2}$،

$$DM_1' = \lim_{i\to\pi/2} DM' = \frac{2R}{\sqrt{5}} \cong 0,89\,R \quad \text{و} \quad DM_0' = \lim_{i\to 0} DM' = 2R$$

وتقع M_1' داخل الدائرة.

رأينا في الملاحظة السابقة، أنه في حال $i = i_1 \cong 82°49'$، تنطبق النقطة B على C. وكذلك تنطبق M' على C. إذاً في حال $i_1 < i < 90°$، تكون M' داخل الدائرة، على المقطع CM_1'.

لندرس الآن DS مع افتراض $0 < i < i_1$. تقع M' في هذه الحالة خارج الدائرة، بين M_0' و C. من جهة أخرى، نحصل في المثلث BSD على:

$$DS = \frac{R \sin i}{\sin 2d}$$

أو

$$DS = DM' \cdot \frac{n}{2 \cos d}$$

لنضع بغرض دراسة تغيرات DS في المجال $[0, i_1]$

$$f(i) = \frac{\sin i}{\sin 2d}$$

ومنه

$$DS = Rf(i)$$

ولدينا

$$f'(i) = \frac{2\sin i}{n\sin^2 2d}(n\cos r - \cos i)\left(\cos d \cdot \cos i - \frac{\cos 2d}{\cos r}\right)$$

لدينا، على $[0, i_1]$، $\sin i > 0$[23] و $(n \cos r - \cos i) > 0$؛ لدينا، من جهة أخرى، حسب دراسة القوس CB $\widehat{CB} > 0$ على هذا المجال، وبالتالي $2d < i$ و $\cos 2d > \cos i$. لكن

$$\frac{\cos 2d}{r} > \cos 2d \quad \text{و} \quad \cos i > \cos i \cdot \cos d$$

أي أن

$$\frac{\cos 2d}{\cos r} > \cos i \cdot \cos d$$

نستخلص من ذلك أن $f'(i) < 0$ على المجال المأخوذ هنا.

أضف إلى هذا أنه عندما $i \to 0$ فإن $r \to 0$ و $d \to 0$؛ ومنه

$$\sin i \cong i \text{ ، } \sin r \cong r = \frac{i}{n} \text{ ، } \sin 2d \cong 2d = 2i\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

لأن

$$d = i - r = i\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

والنتيجة هي

$$DS = \frac{R \sin i}{\sin 2d} \cong \frac{iR}{2d}$$

---

[23] تكافئ هذه المتراجحة $n > 1$ وهو محقق في حالة الهواء–الزجاج.

ولذا

$$DS \rightarrow DS_0 = \frac{Rn}{2(n-1)}$$

ومن أجل $n = \frac{3}{2}$

$$DS_0 = \frac{3R}{2}$$

في الحالة $i = i_1$ تكون $i = 2r$ و $\cos r = \frac{n}{2}$؛ لدينا $d = r$، وبالتالي: $i = 2d$؛ والنتيجة $DS = DS_1 = R$.

إذا $i \rightarrow i_1$، عندئذ $DS \rightarrow DS_1 = R$، وتكون S_1 إذاً في C.

نستطيع من جهة أخرى، إيجاد نهايات DS انطلاقاً من نهايات 'DM، لأن:

$$DS = \frac{n \cdot DM'}{2 \cos d}$$

وهذه خلاصة النتائج:

i	0	$i_0 \approx 49°48'$	$i_1 \approx 82°49'$	90°
$\widehat{CB}$	0	11°25'	0	-6°24'
DM'	2R		R	0,89R
DS	$\frac{3}{2}$ R		R	لا وجود للنقطة S

خلافاً لما كان يظن ابن الهيثم، إن نهايتي S ليستا إذاً النقطتين C و V. فقد رأينا أن تزايد i من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$، يناقص SD من $DS_0 = 3\frac{R}{2}$ إلى $DS_1 = R$، حيث S_1 في C مع القرينة $n = \frac{3}{2}$، وترسم S حينها المقطع S_0C ذا الطول $\frac{R}{2}$.

تبدي هذه المقارنة بجلاء أن ما تحويه دراسة ابن الهيثم من نتائج غير دقيقة لا يقلّل من أهمية الأسس المفهومية المطبقة على تفاصيل ظاهرة التركيز البؤري للضوء المنتشر بحسب مسارات موازية لقطر الكرة. وتعود عدم الدقة هذه على ما يبدو، إلى الطابع التقريبي للقيم العددية التي اختارها، وكذلك إلى استعماله نسب الزوايا عوضاً عن قانون سنيلليوس. غير أن الزيغ الكروي لهذا الصنف من الأشعة بات منذئذ معروفاً. وعلى الرغم من قلة ثقته بالقيم العددية فقد حاول ابن الهيثم إعطاء وصف كمي فعمل على تحديد مجال النقاط S، مكتفياً باستعمال قيمتي الانكسار المقابلتين لزاويتي السقوط 40° و50°، اللتين اقتبسهما من كتاب *المناظر* لبطلميوس. فضلاً عن ذلك، ينطوي عرض ابن الهيثم لأبحاثه سواء في مذكرته هذه حول الكرة المحرقة، وكذلك في الفصل السابع من كتاب *المناظر* أو في مقالات أخرى تتعلق بالانكسار، على نوع من المفارقة: فبينما نراه يبذل عناية فائقة في اختراع أجهزة تجريبية جد متقنة بالنسبة إلى عصره، قادرة على تحديد القيم العددية، فيقوم باستكشافها وتركيبها ووصفها، نجده غالباً ما يتجنب إعطاء هذه القيم.

فإذا ما اضطر إلى ذلك، كالحالة هذه، فإنه يستعملها بإيجاز وبتحفظ. وقد يرتبط هذا الموقف، الذي لاحظه شرام، بسببين على الأقل[24]. يتعلق الأول بنمط الممارسة العلمية نفسه: إذ يبدو أن الوصف الكمي لم يصبح بعد معياراً ملزماً. أما الثاني وهو مرتبط، من دون شك، بالأول، فيتعلق بمقدرة الأجهزة التجريبية التي لا تستطيع أن تعطي إلا قيماً تقريبية؛ وبهذه الصفة استخدم ابن الهيثم القيم العددية المقتبسة من كتاب *المناظر* لبطلميوس. وسيعود الفارسي لاحقاً إلى هذا البحث الكمي ليفيه حقه ومداه، دافعاً بذلك مشروع سلفه إلى التمام.

4. الكرة المحرقة ودراسة الفارسي الكمية لها

في تعليقه على الكرة المحرقة لابن الهيثم، يركز الفارسي بشكل خاص على الدراسة الكمية التي بدأها الأول. ويعتبر المؤرخون النص الذي يخصصه لهذا الموضوع أحد أكثر النصوص تأثيراً في تاريخ المناظر، إذ لا نجد فيه إحدى أكثر الدراسات المناظرية توسعاً في تلك الحقبة فحسب، بل نجد فيه أيضاً بوادر التمثيل الدالي[25]. يبتدئ هذا القسم، وهو الأهم، باعتبارات نظرية للعلاقات بين زوايا الورود والانحراف والانكسار، وحول فروقات من الرتبة الأولى. ويُتبعها المؤلف بجدول، يتفحّص فيه القيم العددية لهذه المقادير في حال زوايا الورود الواقعة بين $0°59'$ و $89°59'$ من خمس درجات إلى خمس أخر مذكراً بأنه استعان، في هذا الحساب، بطريقة بارعة، على شاكلة طريقة "قوس الخلاف". وكانت معلومات المؤرخين عن هذه الطريقة مقتصرة على اسمها، وكانوا يحاولون تحديدها انطلاقاً من القيم العددية المعطاة في هذا الجدول بالذات. وكانت هذه حالنا أيضاً إلى أن اكتشفنا حاشية في إحدى مخطوطات تعليق الفارسي، وهي على الأرجح للمؤلف نفسه، تفسر هذه الطريقة الاستكمالية المستعارة، كما يوحي اسمها، من علم الفلك. وأضحى بإمكاننا اليوم، فهم تعليق الفارسي هذا، من دون اللجوء إلى أي تخمين.

رأينا أن ابن الهيثم قد أثبت أن سقوط الشعاع IM بزاوية i وانكساره تبعاً لـــ MB يعطي قوساً $\widehat{CB} = 2r - i = i - 2d$، ووجد، انطلاقاً من قيم بطلميوس، في حالتي $i = 40°$ و $i = 50°$ أن $2r - i = 10° = \widehat{CK}$، ليحصل على النقطة K نفسها في كلتا حالتي الورود. غير أننا نحصل مع $n = \dfrac{3}{2}$، في حال $i = 40°$، $2r - i \cong 10°44'$ وفي حال $i = 50°$، $2r - i \cong 11°26'$ وقد رأينا أننا إذا سمينا

$$\widehat{CB} = 2r - i = r - d = \phi(i) \qquad (1)$$

فإن للدالة ϕ قيمة عظمى عند زاوية السقوط $i = i_0 = 49°48'$.

ما هي الأسباب التي دفعت ابن الهيثم لاعتماد النقطة K نفسها لزاويتي السقوط $40°$ و$50°$؟ أو يكون قد اعتمد قيم بطلميوس العددية من دون إعادة لقياسها؟ أم أن الوسائل التجريبية التي بحوزته منعته من بلوغ دقة أكبر؟

---

[24] Schramm, 'Steps towards the Idea of Function', p. 81.

[25] نفس المصدر.

لقد أشرنا أيضاً إلى أن ابن الهيثم لم يدرس موضوع النقطة B في حالة i بين °40 و °50، أي سلوك الدالة ϕ على هذا المجال. وفي هذه النقطة بالذات تدخّل الفارسي ليدقق في هذه التغيرات لكل من d و r وبالتالي للقوس CB.

يبدأ الفارسي بدراسة الفرق من الرتبة الأولى:

$$\Delta(2r - i) = \Delta r - \Delta d$$

ليستنتج وجود زاوية "الفصل"، كما سماها ما بين °40 و °50، بحيث:

إذا كانت $i < i + \Delta i < i_0$، يكون $\Delta r > \Delta d$ ويتناقص الفرق $\Delta r - \Delta d$ متجهاً نحو الصفر عندما تتناهى i إلى i_0.

وإذا أخذنا : $i_0 < i < i + \Delta i$، فيكون $\Delta r < \Delta d$ وتزيد $\Delta d - \Delta r$ مع زيادة i. يكون معنا إذاً

$$\Delta(r - d) = \Delta(2r - i) > 0 \quad \text{في الحالة الأولى،}$$

و

$$\Delta(r - d) < 0 \quad \text{في الحالة الثانية}$$

وهذا يبيّن وجود قيمة عظمى لزاوية الورود هي i_0.

بعد إعطائه لهذه النتائج، يعرض الفارسي جدوله ويتفحّص قيم d، r، Δd و Δr تبعاً لتغيّر i مقسماً الجدول إلى قسمين، حسبما تكون $i < i_0$ أو $i > i_0$. نلاحظ أن نتائج الفارسي تتطابق مع نتائج بطلميوس بالنسبة إلى قيم زوايا الورود المأخوذة كل °10 من °40 إلى °90، وتغيب هذه المطابقة للزوايا التي هي دون °40. وللإحاطة بأسباب هذا التباين، لابد من العودة إلى طريقة الفارسي المطبّقة في إنشاء هذا الجدول، والتي يصفها نفسه بـــ "اللطيفة".

هدف الفارسي الواضح هو حساب d للزوايا i المتغيّرة من خمس درجات إلى خمس درجات، بين °0 و °90، وبشكل أعمّ، للزوايا التي تتغير من درجة إلى درجة على هذا المجال نفسه. غير أنه أخضع الحساب لإلزامين: الأول هو الانطلاق من معطيات بطلميوس لــ $i = 40°$ و $i = 50°$، تماماً كما فعل ابن الهيثم، والثاني هو تطبيق المتراجحة $\frac{i}{4} < d < \frac{i}{2}$ التي صاغها هذا الأخير.

يعطينا هذا الإلزامان مجموعة أولى من القيم:

$$\frac{d}{i} \cong \frac{1}{4} = 0°15' \qquad i \cong 0°$$

$$\frac{d}{i} \cong \frac{3}{8} = 0°22'30'' \qquad i \cong 40°$$

$$\frac{d}{i} \cong \frac{2}{5} = 0°24' \qquad i \cong 50°$$

$$\frac{d}{i} \cong \frac{1}{2} = 0°30' \qquad i \cong 90°$$

ثم يقسّم الفارسي المجال [0°, 90°] إلى 18 مجالاً صغيراً، يوزعها على مجموعات ثلاث: 8 مجالات من صفر إلى 40°، مجالين من 40° إلى 50° و8 مجالات من 50° إلى 90°. فيكون متوسط زيادة $\frac{d}{i}$ على 18 مجالاً هو :

$$\Delta\left(\frac{d}{i}\right) = \frac{1}{4} : 18 = 0°0'50''$$

غير أنه في حال:

$$i \in [0°, 40°]،\quad \Delta\left(\frac{d}{i}\right) = 56''15'''$$

$$i \in [40°, 50°]،\quad \Delta\left(\frac{d}{i}\right) = 45''$$

$$i \in [50°, 90°]،\quad \Delta\left(\frac{d}{i}\right) = 45''$$

ولتجنّب حدوث انقطاعات كبيرة في تتالي الزيادات على مجالات 5°، كان من الضروري إجراء تصحيح ما. لكن الفارسي كان يعرف بأن كل تصحيح على $\Delta\left(\frac{d}{i}\right)$ بين 40° و90° يغير قيمة d عندما تكون $i = 50°$ التي هي قيمة معطاة. لذلك قرّر الاحتفاظ بـ $\Delta\left(\frac{d}{i}\right)$ ثابتة على المجال [40°, 90°]، أي $\Delta\left(\frac{d}{i}\right) = \Delta_0 = 45''$، وإجراء تصحيح على [0°, 40°] مقداره $\Delta\left(\frac{d}{i}\right) - \Delta_0 = 11''15'''$ من أجل كل مجال $\Delta i = 5°$، مما يعطي للمجالات الثمانية الفرق 1'3''. يفترض الفارسي أن $\Delta\left(\frac{d}{i}\right)$ تنقص بشكل منتظم بكمية $\Delta_2 = \Delta\left[\Delta\left(\frac{d}{i}\right)\right]$ في المجال الواحد، لتصل إلى $\Delta_0 = 45''$ في المجال التاسع. يجب أن يكون لدينا:

$$(1 + 2 + ... + 8)\Delta_2 = 1'30''\quad \text{أي}\quad 36\,\Delta_2 = 1'30''\quad \text{و}\quad \Delta_2 = 2''30'''$$

وهكذا يحصل الفارسي على زيادات مصحّحة على المجالات الثمانية الأُول. وانطلاقاً من هذه الزيادات المصححة ومن الزيادات الثابتة على المجالات العشر التالية يحسب النسب $\frac{d}{i}$، حيث i هي من أضعاف الزاوية 5؛ ليستنتج منها حساب قيم d المدرجة في الجدول. نشير إلى حساب d للزاويتين $i = 15°$ و $i = 35°$ يعطي على التوالي $d= 4°31'52''30'''$ و $d= 12°39'47''30'''$، يجبرهما الفارسي إلى القيمة الأعلى.

وكما رأينا، تتمفصل طريقة الفارسي كالتالي: فهو يفترض أن:

1 - $\Delta\left(\frac{d}{i}\right)$ ثابتة على المجال [40°, 90°].

2 - $\Delta\left(\Delta\left(\frac{d}{i}\right)\right)$ ثابتة على المجال [0°, 40°].

واضح أن طريقته هذه تقود إلى التعبير عن $\frac{d}{i}$ كتابع لـــ i. وهكذا:

1 – على المجال [40°, 90°] يكون معنا، في حالة كانت i من أضعاف 5

$$\frac{d}{i} = \left(\frac{d}{i}\right)_{40} + k\,\Delta_0 \quad \text{حيث} \quad k = \frac{i - 40}{5}$$

$$\frac{d}{i} = 22'30'' + k \cdot 45'' = \frac{3}{8} + \frac{i - 40}{5} \cdot \frac{1}{80}$$

$$\frac{d}{i} = \frac{i + 110}{400} \quad \text{و} \quad d = \frac{i^2 + 110\,i}{400}$$

نتعرّف هنا على الصيغة التي أعطاها كبلر (Kepler)، الكامنة في لوائح بطلميوس التي عاد إليها فيتليون[26] (Vitellion). فهي تتيح إعادة إنشاء كامل لجدول بطلميوس لقيم الزوايا i من 10° إلى 10°. كما تعطي قيم d للزوايا i التي تتغيّر من 5° إلى 5° في جدول الفارسي، ولكن على المجال [40°, 90°] فقط.

2 – تكون $\Delta_2 = 2''30'''$ ثابتة على المجال [0°, 40°]، وباعتبار $\Delta_{40}^{45} = 45''$، تصبح قيم Δ_{i-5}^{i} كالتالي:

$$\Delta_{i-5}^{i}\left(\frac{d}{i}\right) = 45'' + k \cdot \Delta_2 \quad \text{حيث} \quad k = \frac{45 - i}{5} \quad \text{و} \quad \Delta_2 = 2''3''' = \frac{2{,}5}{3600}$$

$$\Delta_{i-5}^{i}\left(\frac{d}{i}\right) = \frac{1}{80} + \frac{45 - i}{7200} = \frac{135 - i}{7200}$$

ولدينا بالتالي إذا كانت i من أضعاف 5:

$$\frac{d}{i} = \frac{1}{4} + \Delta_0^5 + \Delta_5^{10} + \ldots + \Delta_{i-5}^{i}$$

لنفترض أن $i = 5x$ حيث $x \in \{1, 2, \ldots, 8\}$

فنحصل على:
$$\Delta_{i-5}^{i} = \frac{135}{7200} - \frac{5x}{7200}$$

ومنه:

$$\frac{d}{i} = \frac{1}{4} + \frac{135\,x}{7200} - \frac{5}{7200}\left(1 + 2 + \ldots + x\right)$$

$$\frac{d}{i} = \frac{1}{4} + \frac{135\,x}{7200} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5x(x+1)}{7200}$$

$$\frac{d}{i} = \frac{18000 + 265\,i - i^2}{72000}$$

[26] المصدر نفسه، ص. 75 وما بعدها.

من الواضح إذاً أن طريقة الفارسي ترتكز على مقاربة الدالة $\frac{d}{i} = \phi(i)$ بدالة تآلفية على المجال $[40°, 90°]$، وبدالة كثير الحدود من الدرجة الثانية على المجال $[0°, 40°]$، وهو ما يسمح بالتعبير عن d بدالة كثير الحدود من الدرجة الثانية في الحالة الأولى، ومن الدرجة الثالثة في الحالة الثانية. وتصبح عندئذ، عملية الحساب أكثر بساطة:

1) في حال $i \in [40°, 90°]$

$$\frac{d}{i} = ai + b \qquad d = ai^2 + bi$$

ومن أجل $i = 40°$، $d = 15°$ ومنه $15 = 1600a + 40b$،

و $i = 50°$، $d = 20°$ ومنه $20 = 2500a + 50b$،

فنستنتج أن:

$$a = \frac{1}{400} \quad \text{و} \quad b = \frac{11}{40}$$

وبالتالي:

$$d = \frac{110\,i + i^2}{400}$$

2) في حال $i \in [0°, 45°]$، يمكننا إدراج المجال $[40°, 45°]$ في الحالة الثانية أو في الحالة الأولى على السواء وفقاً لمنهج الفارسي من أجل تصحيح المجالات:

$$\frac{d}{i} = ai^2 + bi + c \qquad d = ai^3 + bi^2 + ci$$

في حال

$i = 0°$ يكون $\frac{d}{i} = \frac{1}{4}$

$i = 40°$ يكون $\frac{d}{i} = \frac{3}{8}$

$i = 45°$ يكون $\frac{d}{i} = \frac{31}{80}$ (محسوبة على أساس: $\frac{d}{i} = \frac{110 + i}{400}$)

ومنه جملة المعادلتين:

$$\frac{3}{8} = 1600\,a + 40\,b + \frac{1}{4}$$
$$\frac{31}{80} = 2025\,a + 45\,b + \frac{1}{4}$$

والتي تكتب:

$$40\,a + b = \frac{1}{320}$$

$$45\,a + b = \frac{11}{3600}$$

ومنها نحصل على:

$$a = -\frac{1}{20 \cdot 3600} \quad \text{و} \quad b = \frac{53}{4 \cdot 3600}$$

وكذلك على:

$$d = \frac{-i^3 + 265i^2 + 18000i}{72000}$$

تسمح هذه الصيغ، كما وعد الفارسي، بحساب قيمة d التقريبية عندما تتغير i درجة فدرجة، أو من أجل أية قيمة لزاوية الورود i. كما أشار إلى إمكانية الحصول على هذه القيم باستعمال الاستكمال الخطي على كل واحد من المجالات المؤلفة من $\Delta i = 5°$ والمحددة في جدوله.

لنحسب، على سبيل المثال، d للزاوية $i = 120°$ بهاتين الطريقتين:

إننا نحصل بواسطة الصيغة على:

$$d = \frac{-12^3 + 12^2 \cdot 265 + 12 \cdot 18000}{72000} = 3 + \frac{253}{500} = 3°30'22''$$

ونحصل بالاستكمال الخطي على:

$$d_{10} = 2°51'15''\text{، } \quad d_{15} = 4°31'53''\text{، } \quad \Delta d = 1°40'38''\text{، }$$

$$\Delta_{12} = d_{10} + \frac{2}{5}\,\Delta d = 2°51'15'' + 40'14'' = 3°31'29''$$

تختلف هاتان النتيجتان، كما نرى، بدقيقة واحدة تقريباً.

ونلاحظ أن الفارسي؛ خلافاً لما قد يظنه بعضهم[27]، لا يُدخل في عرضه الفروق من الرتبة الثانية للزوايا $40° < i < 90°$، أي Δ_2، والفروق من الرتبة الثالثة للزوايا $0° < i < 40°$، أي $\Delta_3 = \Delta(\Delta_2)$؛ إذ تتطلب الطريقة التي أتينا على عرضها استعمال هذه القيم. إضافة إلى أنه من البديهي أن تقودنا دالتان من الدرجتين الثانية والثالثة الأولى إلى Δ_2 ثابتة، والثانية إلى Δ_3 ثابتة أيضاً. سنجد لاحقاً طريقة الاستكمال هذه نفسها بالرتبة الثانية، تحت الاسم نفسه تقريباً في *زيج الخاقاني* للكاشي، ويبدو أن أصلها يعود إلى القرن العاشر عند الخازن[28].

---

[27] هذا ما اقترحه Schramm، المصدر نفسه، ص. 82–84.

[28] لنلاحظ في البداية أن اسمي طريقة الاستكمال المقترحة من قبل الفارسي وتلك التي استعملها الكاشي بعد ذلك في كتابه *زيج الخاقاني* شبه متطابقين. يطبق الكاشي في الزيج طريقة استكمال تعود إلى القرن العاشر تعرف باسم قوس الاختلاف (E. S. Kennedy, 'A Medieval Interpolation Scheme using Second Order Differences', in A. Locust's leg : *Studies in Honour of S. H. Taqigadeh* [London, 1962], pp. 117-120). ويبدو أن أحد أشكال هذه الطريقة كان معروفا عند الخازن (J. Hamadanizadeh, 'Interpolation Schemes in Dustūr al-Munajjimīn', *Centaurus*, 22, 1 [1978], pp. 44-52). إلا أن الفارسي يتكلم عن هذه الطريقة كخوارزمية معروفة عند الرياضيين مبديا الرغبة في تطبيق أحد أشكالها فهو يكتب : "لقد اتبعنا مسلكا دقيقا من نوع قوس الاختلاف". إنها في واقع الأمر طريقة معروفة في زمن الفارسي وتعود على الأغلب إلى القرن العاشر. ولذا فإننا سنذكر باختصار بهذه الطريقة كما وردت عند الكاشي، لنبين بعد ذلك تطابقها مع طريقة الفارسي. منشأ هذه الطريقة تحديد خطوط الكواكب بدليل الزمن وهي كالتالي:

يظهر التحليل السابق بدقة ماهية طريقة الفارسي من خلال إيضاح هدف مؤلفها. فهذا الفيزيائي، الذي كان من علماء الجبر ونظرية الأعداد (كما أظهرت الدراسات الحديثة)[29]، كان يبحث عن خوارزمية تترجم الارتباط الدالي بين زوايا السقوط وزوايا الانحراف، كي يستنتج بالتالي قيم الانحراف لأي سقوط كان بين وسطين محددين. يقسم الفارسي،

ليكن $x \in [x_{-1}, x_p]$ بحيث تكون القيم $y_{-1} = f(x_{-1})$، $y_0 = f(x_0)$ و $y_p = f(x_p)$ معلومة ولتكن المجالات $[x_{k-1}, x_k]$ من أجل $k = 0, 1, \ldots, p$ متساوية. نريد حساب قيم f من أجل $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$.

نفرض $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ وليكن $m(\Delta y_k) = \frac{y_p - y_0}{p}$ متوسط الزيادات من الرتبة الأولى على المجال $[x_0, x_p]$.

فإذا فرضنا أن الزيادة من الرتبة الأولى ثابتة، مساوية لوسطي الزيادات على المجال $[x_0, x_p]$، فإننا نحصل على الاستكمال الخطي $y_k = y_0 + k\,m(\Delta y_k)$ من أجل $k = 0, 1, \ldots, p$. أما إذا كان $m(\Delta y_k) \neq \Delta y_0$ فإننا نأخذ استكمالاً من الرتبة الثانية. وهكذا نعرّف في طريقة الكاشي عدداً e هو تصحيح المتوسط:

$$e = \frac{m(\Delta y_k) - \Delta y_0}{q} \qquad \text{حيث} \qquad q = \frac{p+1}{2}$$

ونفرض أن $e = \Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$؛ فالزيادة من الرتبة الثانية ثابتة من أجل كل k، $k = 0, 1, \ldots, p$ ونكتب $\Delta y_m = \Delta y_0 + me$. أي أن

$$y_k = y_0 + \sum_{m=1}^{k} \Delta y_m \qquad \text{من أجل} \quad k = 1, 2, \ldots, p$$

ومنه

$$y_k = y_0 + k\,\Delta y_0 + \frac{k(k+1)}{2} e \qquad (2)$$

ولدينا وضوحاً y_p من أجل $k = p$.

لنعد إلى حساب $f(i) = \frac{d}{i}$ عند الفارسي (ص. 197 وبعدها). يحسب الفارسي في المجال $[40°, 90°]$ $i \in$ المقسم إلى مجالات متساوية طول كل منها 5° متوسط الزيادة لمجالات الخمس درجات ويجد $m(\Delta y_k) = 45'' = \frac{1}{80}$.

إلا أن $y_0 = \frac{3}{8}$ $f(40°) =$ و $k = \frac{i-40}{5}$ وتعطي العلاقة (1) $f(i) = \frac{i+110}{400}$. نفرض على المجال $[0°, 40°]$ $x_{-1} = 45°$ و $x_0 = 40°$ و $k = \frac{40-i}{5}$. يفرض الفارسي $\Delta y_0 = 45'' = \frac{1}{8}$، وهي قيمة الوسطي السابق، ويلاحظ أنها تختلف عن الوسطي على المجال $[0°, 40°]$ التي هي $m(\Delta y_k) = 56''\,15'''$. ليستنتج

$$e = \frac{(56''\,15''' - 45'') \cdot 8}{8(8+1)/2} = 2''\,30''' = \frac{5}{7200}$$

تصبح العلاقة (2) عندما نكتب $y_k = f(i)$

$$f(i) = \frac{3}{8} - \frac{40-i}{5} \cdot \frac{1}{80} - \frac{(40-i)(45-i)}{50} \cdot \frac{5}{7200}$$

$$f(i) = \frac{1}{4} + \frac{265}{72000} i - \frac{i^2}{72000}$$

وهكذا نرى أن الأمر يتعلق بنفس الطريقة مطبقة مع الإلزامات التي تحددها المعطيات الفيزيائية.

[29] لقـد أثبتنا وحللنا مساهمة الفارســي الرئيسية في نظــرية الأعــداد (انظر 'Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse combinatoire', *Journal for the History of Arabic Sciences*, 6 [1982], pp. 209-278; and *The Development of Arabic Mathematics : Between Arithmetic and Algebra, Boston Studies in the Philosophy of Science*, 156 [Dordrecht / Boston / London, 1994]). كما أن م. موالدي، أثبت وحلل رسالته المهمة في الجبر في أطروحته في جامعة باريز III، 1988.

كما رأينا، المجال [°0, °90] إلى مجالين جزيئيين، حيث يقارب الدالة $f(i)=\frac{d}{i}$ بدالة تآلفية على [°40, °90]، وبدالة كثير الحدود من الدرجة الثانية على المجال [°0, °40]. ثم يصل بالتالي بين الاستكمالين فارضاً على الفرق الأول أن يكون نفسه في النقطة $i = 40°$، أو بعبارة أخرى، يفرض على المنحنيين أن يكونا مماسين في هذه النقطة. وبصورة أدق، فإنه يجعل القطع المكافئ والمستقيم يتقاطعان في نقطتين متجاورتين إحداثياتهما $i = 40°$ و $i = 50°$. فإذا فتشنا عن المشتقين بدل استعمال طريقة المؤلف في البحث عن الفروقات المنتهية للدالتين اللتين تؤلفان الخــوارزمية، لوجدنا، على التوالي 37/14400 و37/14800؛ وفي هذا إثبات استدلالي لمقدار دقة حساب الفارسي.

إلا أنه لا يجوز الخلط بين هذه الطريقة وطريقة بطلميوس، أو طريقة عالم مخبري متملك من قانون سنيلليوس. لا شك أن الفارسي وبطلميوس يلجآن إلى طرق مستوحاة من طرق الفلكيين؛ غير أن طريقة الفارسي، خلافاً لعلم الفلك القديم، لا تقتصر على تحويل متتالية من قيم عددية ناتجة من الملاحظة إلى متسلسلة حسابية[30] فهي، إضافة إلى كونها أدق رياضياً، فإنها تعتمد في آخر التحليل على ملاحظتين فقط لزاويتي السقوط °40 و°50، مستعارتين من بطلميوس عبر ابن الهيثم وعلى تقديرين لــ $\frac{d}{i}$، هما $\frac{1}{4}$ جوار الصفر و $\frac{1}{2}$ في جوار °90. وبغية تحديد الرتبة الثانية للفرق على المجال [°0, °40]، يستعمل الفارسي خوارزميته المتعلقة بالمجال [°40, °90] ليحسب الرتبة الأولى للفرق على [°0, °40]. وهكذا، فانطلاقاً من قيمتين ملاحظتين يطبق خوارزميته ليحصل على كل القيم غير المقاسة التي يرى أن على الحساب التنبؤ، وبدقة كبيرة، بها. وهكذا فإن جدول الفارسي لا يهدف إلى تدوين نتائج الملاحظة، الخام والمصححة، بل تكمن وظيفته في إعطاء نتائج يسمح الحساب الجبري بالحصول عليها انطلاقاً من قيمتين ملاحظتين. فالحساب الجبري ليس إذاً أداة بحث كمي دقيق فحسب، بل إنه، بالنسبة إلى الفارسي، ذو قدرة استكشافية، في جزء هو أكثر أجزاء المناظر الهندسية فيزيائية.

غير أن هذه الطريقة تبقى محدودة أصلاً، إذ ترتبط الدالة التآلفية – وكذلك دالة كثير الحدود من الدرجة الثانية – بشروط تجربة الانكسار في وسطي الهواء والزجاج. وهكذا فالصعوبة لا تكمن مطلقاً في الأداة الرياضية، بل في إطار تفكير الفارسي: إنه يفكر بعبارات صنف خاص من المعطيات الملاحظة من دون البحث عما يميز هذا الصنف ذاتياً عن سواه.

لم يقم الفارسي بهذه الدراسة لمجرد القيام بها، أو بغية التعليق على نص ابن الهيثم فقط؛ بل إنها تندمج في مجموعة أكثر اتساعاً؛ فلقد استخدمها الفارسي في أبحاثه الرئيسية حول قوس قزح والهالة[31]، حيث يسترجع مسألة الإبصار من خلال كرة شفافة، ويبدع في نظرية الألوان.

---

[30] بهذا المعنى فسر A. Lejeune مسعى بطلميوس. انظر Lejeune, 'Recherches sur la catoptrique grecque, d'après les sources antiques et médiévales', p. 161.

[31] Wiedemann, 'Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften'، مصطفى نظيف، "كمال الدين الفارسي وبعض بحوثه في علم الضوء"، في: *Publications of the Egyptian Society for the History of Science*, 2 (Cairo, 1958), pp. 65-100; Rashed, 'Optique géométrique et doctrine optique chez Ibn al-Haytham'.

5. ابن سهل وابن الهيثم وقانون سنيلليوس

لم يكن الحديث عن تطور علم الانكساريات العربي وتقدمه ممكناً قبل التعرف إلى رسالة ابن سهل لاقتصارنا حتى ذلك الحين على مؤلف واحد هو ابن الهيثم. والذي لم نعد نجهله الآن هو وجود سلف لهذا الأخير كان قد عرفه وكان لتراثه وزن كبير، وهو ما يسمح بطرح سؤال على الأقل حول الشوط الذي قطعه هذا العلم خلال نصف قرن من الزمن. إضافة إلى تثبيت نتيجة نهائية، وهي اعتبار نصف القرن هذا، من الآن وصاعداً، كفترة من الفترات التي دمغت بطابعها تاريخ علم المناظر، وبرزت كحقبة تجديد لهذا العلم، في حين بدا علم الانكساريات، بما حققه من تقدم، وقد اتسع مجاله وتغير اتجاهه.

لقد كانت الانكساريات عند ابن سهل، كما بينا، في جوهرها هندسة العدسات المحرقة. غير أن هذا التأكيد يتطلب بعض التخفيف، ذلك أن المهندس كان ملزماً بمراعاة مقتضيات المواد اللازمة لإنشاء هذه الآلات، عاملاً على إخضاع النتائج التي تنبأت بها هندسته للفحص والتحقيق، مستعملاً حينها كلمة "اعتبار"[32]، وقد نوهنا بهذه العبارة وبأهميتها في منهجية ابن الهيثم، وبممارسته العلمية كذلك.

من المؤكد أن البحث في العدسات أحيا موضوع الانكسار، الذي يبدو أنه بقي على حاله على ما يبدو منذ بطلميوس[33]. إلا أن الانكسار يدخل عند ابن سهل، كجزء من مجال أوسع يشمل المرايا كما يشمل العدسات المحرقة. وهكذا فقد بدا بحثه في نشأته كعمل مختص بالانعكاس شديد الاهتمام بالانكسار. غير أن الأمر لم يكن متعلقاً بمختص عادي بالانعكاس، كعطارد أو أحمد بن عيسى[34]، على سبيل المثال، بل بمهندس من الطراز الأول، أحاط بنظرية المخروطات، واهتم على وجه الخصوص بالإنشاء الميكانيكي للمنحنيات. هكذا كان ابن سهل: مهندس يثنى عليه بحرفي يصنع قوالب المرايا والعدسات، أو على الأقل، يصممها. فهو يرمي كأسلافه الانعكاسيين، منذ ديوقليس على الأقل، وكخلفائه إلى ما يعرف اليوم باسم "تقنية الظاهرة" يستغل فيها المهندس نوعاً ما موضوعية الشيء المصنوع.

فإن ما يشغل المهندس، خلال هذا البحث في الآلات المحرقة، وقد زود بقوانين المناظر الهندسية – الانتشار على خطوط مستقيمة والانعكاس والانكسار والرجوع العكسي – هو وقبل كل شيء الخصائص البصرية للمخروطات المرتبطة بالتركيز البؤري للضوء. ويعمل، من ثم، مستعيناً بالمخروطات بشكل رئيسي، على تصميم آلات تحدث تركيزاً للضوء، ثم يخضع هذا التركيز، الذي لا وجود له في الطبيعة، لتحكم مزدوج هندسي وتقني: فنظرية المخروطات تتنبئ به، وتحدثه آلة عليها أن تحرق على مسافة حددت لها سلفاً. لكن الحصول على التركيز وفق الشروط

---

[32] انظر كتاب *الحراقات*، ص. 109 والملاحظة الإضافية [4].

[33] ما دمنا نجهل التاريخ الدقيق للترجمة العربية لـــ *مناظر* بطلميوس، يبقى كل تأكيد حول دراسة الانكسار نوعاً من التخمين. لا نعرف، حتى الساعة، أي نص في المناظر قبل ابن سهل، تم فيه الرجوع إلى كتاب بطلميوس الخامس.

[34] انظر

Les Catoptriciens grecs. I : *Les Miroirs ardents*, textes établis, traduits et commentés par R. Rashed (Paris, 2000).

المطلوبة يتطلب مراعاة شرطين مسبقين؛ يتعلق الأول، وقد وعاه ابن سهل تماماً، باختيار المواد – بلور صخري نقي ومتجانس مثلاً – فضلاً عن الأشكال الهندسية. أما الثاني فلم يدركه ابن سهل بوضوح (شأنه شأن أسلافه، بل وخلفائه أيضاً، حتى القرن الثامن عشر): إذ يفترض أن يحدث الإشعال فور حصول التركيز.

نستطيع القول إن ابن سهل وقد ابتكر مجال البحث هذا في الحراقات، وجد نفسه منقاداً للخوض في علم الانكساريات. لكنه، وقد أجبر على التفكير بقطوع أخرى غير المكافئ والناقص – كالقطع الزائد مثلاً – باعتباره منحنياً انكسارياً، قد انساق بشكل طبيعي إلى اكتشاف قانون سنيلليوس. ونفهم أن الانكساريات، عندما رأت النور على يد ابن سهل، لم تعالج سوى انتشار الضوء، بعيداً عن مسائل الإبصار، بل ولنقل، من دون مبالاة بها. فلا مكان في هذه الانكساريات للعين بين الآلات المحرقة ولا مكان للإبصار كذلك. إننا هنا أمام وجهة نظر موضوعية اعتمد تطبيقها في تحليل الظواهر الضوئية. فهذا العلم الغني بالمادة التقنية، كان، في الواقع، فقيراً جداً بالمحتوى الفيزيائي الذي تلاشى، ليقتصر على بعض الاعتبارات المتعلقة بالطاقة مثلاً. فابن سهل لم يحاول مطلقاً، على الأقل في كتاباته التي وصلتنا، تفسير سبب تغيير الأشعة الموازية لمساراتها وتجمعها عند تغير الوسط: لقد اكتفى بمعرفة كيف أن حزمة من الأشعة الموازية لمحور عدسة مستوية–محدبة زائدية، يتحول بالانكسار إلى حزمة متقاربة. يكتفي ابن سهل رداً على التساؤل عن أسباب الإشعال الناتج من تقارب الأشعة، بتعريف الشعاع الضوئي من حيث فاعليته في الإحراق، مسلماً، كخلفائه من بعده ولزمن طويل، بتناسب التسخين مع عدد الأشعة المجتمعة.

بعد انقضاء نصف قرن على ذلك، توسع مجال بحث الانكساريات التي احتلت مكانة مختلفة تماماً عما كانت عليه. فمع ابن الهيثم، غاب مفهوم الانكساريات كمجرد هندسة للعدسات. وباتت واضحة، بحسب كلمات المؤلف، ضرورة "تركيب الرياضيات والفيزياء" لدرس الكواسر والعدسات، محرقة كانت أم لا. إن أهمية هذه الخطوة التي تم اجتيازها، تعادل صعوبة تفسيرها. فهي توحي منذ الآن، بأن المجال الذي حدده ابن سهل من خلال دراسته الحراقات لم يعمر طويلاً، وانتهى بعد خمسين سنة من ذلك على الأكثر، متلاشياً تحت ضربات الفيزيائي الأول. وواقع الأمر أن الأهداف العملية لا تكفي وحدها لتحديد مجال ما. ولكن، ما هو على وجه الدقة التحول الذي أجراه ابن الهيثم؟

لقد تابع ابن الهيثم، على أثر ابن سهل، البحث في المرايا والآلات المحرقة. ولم يكن ذلك مجرد بحث تمهيدي لـــ كتاب *المناظر* على الإطلاق، إذ إنه كتب رسالته في الكرة المحرقة بعد هذا الكتاب. كما ابتدأ بالكتابة عن المرايا المحرقة المكافئية، التي سبق وأشرنا إلى تأثير ابن سهل فيها على الرغم من كون دراسة ابن الهيثم أكثر تفصيلاً. لقد قام ابن الهيثم، بشكل عام، بالتوقف عند الحالات التي لم يعالجها ابن سهل، أو بتوسيع البحث في ما درسه سلفه. فدراسته للمرآة الكروية المحرقة تجاوزت بعيداً كل ما سبقها من أبحاث، من ديوقليس إلى الكندي، مبرزاً فيها ظاهرة

الزيغ الكروي. أما معالجته للكرة المحرقة، فإنها تشبه دراسة سلفه للعدسة محدبة الوجهين، الزائدية، لكنها أكثر صعوبة، ويثير فيها كذلك ظاهرة الزيغ الكروي[35].

لقد سار ابن الهيثم من دون ريب، على خطى ابن سهل متجاوزاً له على الدوام ومفترقاً عنه بوضوح في نقطتين: أولاهما، أنه خلافاً لابن سهل لا يستعمل نسب المقاطع التي يعطيها قانون سنيلليوس، بل يحسب أطوال المقاطع منطلقاً من القيم العددية للزوايا كما وردت عند بطلميوس في حالة الهواء والزجاج. وثانيتهما تميزه باختيار السطوح الكروية المقعرة، مكتشفاً بذلك خاصة فيزيائية مهمة، وهي الزيغ البصري.

كثف ابن الهيثم البحث في الانكسار سائراً على خطى ابن سهل – ومستشهداً به – لكنه، عوضاً من تعميق الفكرة التي طرحها ابن سهل، بأن يأخذ قانون سنيلليوس ليشذب صياغته مثلاً، يرجع إلى نسب الزوايا، ليزيد عدد القواعد الكمية للانكسار، ويدقق فيها كالنسبة بين زوايا الورود والانحراف أو الانكسار، الخ. وقبل إيضاح، أو محاولة إيضاح، ما يجب أن نسميه حقاً خطوة إلى الوراء، علينا أولاً تقدير البون الذي يفصل ابن الهيثم عن سابقه. فبحثه لم يعد مقتصراً على المرايا والعدسات، بل تعداها إلى المناظر أيضاً. يضاف إلى هذا، إصلاحه لهذا العلم فاصلاً بوضوح، وللمرة الأولى في تاريخه، بين شروط انتشار الضوء، وشروط رؤية الأشياء. لقد شرحنا هذا الإصلاح في موضع آخر[36]. فلنكتف مذكّرين أنه قاد ابن الهيثم، من ناحية، إلى إعطاء مرتكز فيزيائي لقواعد الانتشار (المقصود هنا التماثل المضمون رياضياً بين أنموذج ميكانيكي تمثله حركة كرة صلبة ترمى على حاجز وبين انتشار الضوء)، وقاده من، ناحية أخرى، إلى الجمع على الدوام بين الهندسة والملاحظة والتجربة. لقد فقدت المناظر المعنى الذي كانت تعرف به سابقاً[37]. فباتت تشمل قسمين: نظرية الإبصار مقرونة بالفيزيولوجيا وعلم النفس، ونظرية الضوء وأنماط انتشاره، الخ. ومن الممكن من دون شك، ملاحظة بقايا من المناظر القديمة في المصطلحات، أو أيضاً في النزعة التي أشار إليها نظيف، لطرح مسائل من دون حاجة حقيقية لها في موضوع الرؤية[38]. ولكن، يجب ألا ننخدع ببقايا الأشكال القديمة هذه، إذ لم يعد لها الوقع نفسه، ولا المعنى نفسه. لقد عكس تنظيم *كتاب المناظر* الوضع الجديد. ففيه فصول مخصصة

---

[35] كما رأينا بالفعل، يبرز ابن الهيثم، في دراسته *الكرة المحرقة* بشكل جلي جداً الزيغ الكروي لحزمة من الأشعة المتوازية. نشير إلى أن ابن الهيثم لم يتفحص، في الفصول المخصصة للكواسر الداخلة في المقالة السابعة من *كتاب المناظر*، حالة حزمة من الأشعة المتوازية والساقطة على كاسر كروي، لكنه يتفحص هذه الحالة في *الكرة المحرقة*، ويبرز الزيغ الكروي في حالة الكاسر.

[36] R. Rashed, 'Lumière et vision : l'application des mathématiques dans l'optique d'Alhazen', in R. Taton (ed.), *Roemer et la vitesse de la lumière* (Paris, 1978), pp. 19-44; repr. In *Optique et Mathématiques : Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe*, Variorum Reprints (Aldershot, 1992), IV; and 'Optique géométrique et doctrine optique chez Ibn al-Haytham'.

[37] أي كهندسة للإبصار، أو كتحليل هندسي للرؤية كما كتب حديثاً ج. سيمون، في:
Le Regard, l'être et l'apparence dans l'optique de l'Antiquité [Paris, 1988], pp. 187 ff.

[38] "ومما تجدر الإشارة إليه هنا أن ابن الهيثم يسمي السطح الذي يحدث عنده الانعطاف بحسب هيئته إلى النقطة التي يرد إليها الضوء المنعطف لا بحسب هيئته بالنسبة إلى النقطة المضيئة التي هي مصدر الضوء. ولعل ذلك من جراء انصراف عنايته في موضوعات الانعطاف أيضاً إلى الناحية الشخصية أكثر منه إلى الناحية الموضوعية، فالنقطة التي يرد إليها الضوء يتصورها دائماً مركزاً للبصر، فإن كان تحدب السطح مما يليها عده محدباً، وإن كان تقعره مما يليها عده مقعراً". (نظيف، الحسن بن الهيثم، *بحوثه وكشوفه البصرية*، ص. 763). مناقشة نظيف هذه صحيحة، لكن موقف ابن الهيثم هذا لا يتعدى بقاء أثر من المصطلحات القديمة. فهذه العين المفترضة لا تتدخل أكثر من نقطة هندسية تصل الأشعة إليها. فابن الهيثم لم يعد مهندس الإبصار.

بأكملها للانتشار، كالفصول الثلاثة الأولى من الكتاب الأول، والقسم الأعظم من الكتابين الرابع والسابع؛ وفي فصول أخرى يبحث في الإبصار وما يتعلق به من مسائل. ومن نتائج هذا الإصلاح، يجب الإشارة إلى بروز مسائل جديدة، لم تطرح مطلقاً في السابق. ففي هذا السياق، لم تعد الكواسر والعدسات تدرس كمجرد حراقات، بل كأجهزة بصرية أيضاً. وأصبح من الواجب، في هذه الظروف، الانكباب على مسائل تكون الأخيلة وتحديد أمكنتها باستخدام الوسائل الجديدة؛ وهذا ما لم يغفل ابن الهيثم عن القيام به.

وهكذا فإن كل أعمال ابن الهيثم مشوبة بالانكساريات. ونال بحثه في الكواسر والعدسات المدفون في القسم السابع من *كتاب المناظر* ما يستحقه من أهمية، بفضل معرفته بابن سهل، واتخذ مكانته إلى جانب رسالته في *الكرة المحرقة*.

يبقى السؤال حول قانون سنيلليوس مطروحاً. ولا يتعلق الأمر بالسؤال العام عن سبب عدم اكتشاف ابن الهيثم له – وهو سؤال مشروع، إلا أنه لا يمكن تسويته كما حاول مصطفى نظيف أن يفعل بعزوه ذلك إلى لجوء ابن الهيثم إلى زوايا الانحراف بدلاً من زوايا الانكسار[39] إن السؤال هو لماذا لم يستفد ابن الهيثم من نتيجة ابن سهل؟ وتبقى، بالتأكيد، هذه التساؤلات السلبية من أصعب الأسئلة بالنسبة إلى المؤرخ. فأجوبته دائماً غير مؤكدة، وهي في أحسن الأحوال، تخمينات متفاوتة الاستحسان. وعلى الرغم من ذلك، طرحنا لها هنا، منبعه رغبتنا في إبراز هذه المسائل وإحياء البحث فيها.

نذكر أولاً بالحجج التي سبق وقدمناها لتبيان معرفة ابن الهيثم برسالة ابن سهل *الحراقات*. ترتكز المجموعة الأولى من هذه الحجج على الاهتمام الذي أولاه لكتاب ابن سهل *البرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء*، عند دراسته الانكسار. وتظهر المجموعة الثانية اهتمامه الخاص برسالة ابن سهل *الحراقات*: إذ يتبع ابن الهيثم ابن سهل في تحليل المرآة المكافئية وفي دراسة العدسات، وهما بالتحديد، جزء من *الحراقات*. أما المجموعة الثالثة من الحجج، فترتكز على التقارب الجغرافي والزمني لهذين المؤلفين. في ضوء مجمل الملاحظات هذه، ليس مبالغاً تقبل كون ابن الهيثم قد قرأ جيداً أجزاء رسالة ابن سهل المخصصة للعدسات وللانكسار؛ فتجاهله قانون سنيلليوس الموجود في هذا النص، لا يرتبط إذاً بمجرد واقع ظرفي، بل هو تعبير لمفهومه للمناظر ولتصوره لتطور هذا العلم.

لقد كان ابن الهيثم، خلافاً لابن سهل وكما بينا مراراً، مجرباً. بل إنه أول فيزيائي أعرفه لا يرى في التجربة أحد عناصر المنهجية التجريبية وحسب وإنما ينظر إليها كجزء ضروري لا يتجزأ من البرهان في الفيزياء، معطياً بهذه الصفة للمعرفة المناظرية قيمتها القطعية. وترتدي هذه النقطة أهمية أساسية بعيدة عن موقف بطلميوس، على الرغم من لجوء هذا الأخير أحياناً إلى التجربة. لقد فرض هذا التصور الجديد قيوداً متعددة أبرزها التالية: العمل في الانكسار

---

[39] كتب نظيف: "ولكن ابن الهيثم لم يوجه جل عنايته إلى زاوية الانكسار، بل وجهها إلى زاوية الانعطاف، وعني بأن ينص على العلاقة بين زاويتي السقوط والانعطاف، فلم يوفق إلى الكشف عن قانون عام يتضمن في صيغة موجزة بسيطة هذه العلاقة على تصاريف الأحوال" [المصدر نفسه، ص. 717]. لكننا نعلم أن ابن سهل، وكذلك سنيلليوس اهتما بزاوية الانحراف، من دون أن يمنعهما هذا من اكتشاف القانون.

بقوانين قابلة للتحقق بالتجربة، وقادرة، من ناحية أخرى، على تفسير جميع نتائج التجارب. غير أن الخضوع لهذه الضرورات التقنية والمنطقية قد استتبع نتيجة مهمة تاريخياً لم تؤخذ بعين الاعتبار: بعض التنازل من قبل المجدد لصالح التقليد، وعودة بالتالي، إذا صح القول، إلى بطلميوس.

وضع بطلميوس جهازاً لقياس زوايا الانكسار تبعاً لزوايا الورود في الحالات الثلاث: هواء–ماء، هواء–زجاج وماء–زجاج. وسجل نتائجه في جداول في المقالة الخامسة من *كتاب المناظر*[40]. يتألف كل جدول من هذه الجداول من عمودين؛ نجد في أولهما زوايا السقوط أضعاف 10° حتى 80°، وفي الآخر زوايا الانكسار المقابلة. هذه المعطيات هي، بالنسبة إلى ابن الهيثم، تجارب ومعطيات عددية يجب أخذها في الحسبان. وقد قام ابن الهيثم بابتكار آلة أكثر تعقيداً ومهارة من آلة سلفه، لكنها ترتكز على المبدأ نفسه: قياس مقادير الزوايا. وعلى الرغم من إمكانيات هذه الآلة المتقدمة، فقد اكتفى ابن الهيثم بإعادة تجارب بطلميوس، واحتفظ بقيمها العددية. وعلى الرغم من كتابته بخصوص تجربة الانكسار في حالة هواء–ماء:

"وإن أحب المختبر أن يعتبر الزوايا خمسة أجزاء بخمسة أجزاء فعل ذلك على مثل ما تقدم شرحه، وإن أحب أن يعتبر ما هو أدنى من خمسة أجزاء فعل ذلك على الترتيب الذي ركبناه"[41].

فقد استمر، قياساً على بطلميوس، على الاكتفاء بأضعاف 10° حتى 80° لزوايا السقوط، وعلى "هواء–ماء–زجاج" كأوساط. وقد منعه هذا المسلك من التوصل إلى اكتشاف لم يكن ليفوته لو أنه طبق اقتراحه وعمل بالزوايا من 5° إلى 5°: إنه ظاهرة زاوية الحد[42].

وهكذا يكتشف ابن الهيثم المجرب صلة قربى مع بطلميوس ويحاول استملاكه إن صح التعبير. فيقوم بهدف التحقق تجريبياً من القوانين وبتأثير من سلفه باستعمال جهاز لقياس الزوايا. كما يأخذ في الحسبان قيم نتائج بطلميوس العددية، وهي قيم للزوايا. وهكذا، ففي مقالته السابعة، وبعد التعريف بجهازه التجريبي، كان لزاماً عليه إعطاء القوانين الكمية للانكسار – التي تشكل بعضها تقدماً أصيلاً – مصاغة بلغة مقاسات الزوايا ونسبها. فليس من المستغرب إذاً أن نرى أن مجال تطبيق بعض هذه القوانين الكمية لا يتعدى الأوضاع الاختبارية المدروسة دون غيرها.

---

[40] *L'Optique de Ptolémée*, ed. A. Lejeune, pp. 227-234; Lejeune, 'Recherches sur la catoptrique grecque', pp. 153 ff.

[41] ابن الهيثم، *كتاب المناظر*، المقالة السابعة (استانبول، سليمانية، فاتح، 3216)، ص. 38^r.

[42] يبرهن فعلا أننا لو اعتبرنا قرينة الانكسار n هواء–زجاج مساوية لــ 3/2 تكون $\sqrt{2} < n < 2$ وإذا اعتبرنا $i > i_0$ حيث $\cos\frac{i_0}{2} = \frac{n}{2}$ تكون عندئذ المتراجحة $d < \frac{i}{2}$ غير صحيحة ولدينا $d > \frac{i}{2}$. لقد برهنا أن $i_0 \approx 83°$. نبرهن أن زاوية الانحراف تقترب من القيمة الحد كلما اقتربت i من $\frac{\pi}{2}$. انظر نظيف، *الحسن بن الهيثم، بحوثه وكشوفه البصرية*، ص. 720–723، و Rashed, *'Le Discours de la lumière d'Ibn al-Haytham'* ص. 204.

لنأخذ مثلاً على ذلك، قانون ابن الهيثم الثاني القائل: "إذا كبرت زاوية السقوط كمية ما، تكبر زاوية الانحراف كمية أصغر"؛ ويصح هذا القانون عموماً مع $n > 1$. أما عندما تكون $n < 1$، فنبين بأنه لا يصح مع $\frac{1}{2} \leq n$، أما في حال $\frac{1}{2} > n$ فلا يصح إلا لزوايا السقوط $\sin i < \sqrt{\frac{4n^2 - 1}{3}}$.

وبعبارة أخرى، فإن هذا القانون، الذي صاغه ابن الهيثم بشكل عام وشامل، ليس صحيحاً إلا للأوساط التي اعتبرها هو وبطلميوس وللزوايا التي اختاراها.

نرى إذاً أن التساؤل الذي أثرناه بخصوص قانون سنيلليوس يرجع في الحقيقة إلى نمط مناظر العصر بالذات. فابن سهل الرياضي، غير المكترث بالتجربة كضرب من ضروب البرهان، وغير المبالي بالقيم العددية، يدرس، في حال سطح زائدي، وسطين مختلفي الشفافية من دون أدنى تحديد إضافي، فيتوصل بذلك مباشرة إلى فكرة مقدار ثابت لقرينة الانكسار. وبالمقابل، فابن الهيثم، المأخوذ بجدة مفهومه للبرهان في الفيزياء وبدور "التجربة"، يعود إلى مدرسة نسب الزوايا ليستخرج منها قوانين كمية لا يصح بعضها خارج أوضاع تجريبية جزئية. وهكذا يقف بطلميوس عائقاً أمام ابن الهيثم، حاجباً عنه أهمية نتيجة ابن سهل وجدتها. إلا أن هذا الرجوع إلى بطلميوس دفع ابن الهيثم إلى متابعة البحث الكمي؛ إذ كان عليه، على الرغم من امتلاكه جداول سلفه، حساب قيم أخرى، كزوايا الانحراف وفروقات الرتبة الأولى، مزوداً بمناظر وبنظرية للبرهان جديدتين. سيتخذ هذا البحث، المعتدل والمخفف عند ابن الهيثم، بعداً أكثر عمقاً عند الفارسي، الذي على ما أعلم، لن يعود إلى اكتشاف قانون سنيلليوس.

ابن الهيثم

‹كتاب المناظر – المقالة السابعة›

‹الكاسر الكريّ›

‹آ› وإذ قد تبين ذلك، فليكن البصر نقطة آ، ولتكن نقطة ب في مُبْصِرٍ من المبصرات وليكن من وراء جسم مُشفٍ أغلظ من الجسم الذي يلي البصر، وليكن سطح الجسم المشف الذي يلي نقطة ب سطحًا مستديرًا محدّبه يلي البصر. (ف-٧٨-و، ك-٦٧-ظ)

فنقطتا آ ب يمرّ بهما سطحٌ قائمٌ على سطح الجسم المشف، لأنه إن لم يمرّ بهما سطحٌ قائمٌ على سطح الجسم المشف الذي تنعطف فيه صورة نقطة ب إلى بصر آ ‹لم يدرك البصر صورة المبصر ويكون الفصل المشترك بين هذا السطح› وبين سطح الجسم المشف دائرة جـ ه د. وليكن مركزها ز، ونصل ا جـ ز ونخرجه على استقامة إلى د؛ فيكون خط جـ ز د عمودًا على / سطح الجسم المشف، ونقطة ب إما أن تكون خارجة عن خط جـ د وإما أن تكون على خط جـ د. (ف-٧٨-ظ)

فإن كانت نقطة ب على خط جـ د، فإن بصر آ يدرك نقطة ب على استقامة ومن غير انعطاف، لأن الصورة التي تمتد على خط د جـ تمتد على استقامتها في الجسم المشف الذي يلي بصر آ، لأن خط د جـ عمود على سطح الجسم المشف الذي يلي البصر. فبصر آ يدرك نقطة ب التي على خط ‹جـ د› / في موضعها وعلى استقامة. فأقول: إن صورة نقطة ب التي على خط جـ د ليس تنعطف إلى بصر آ. (ك-٦٨-و)

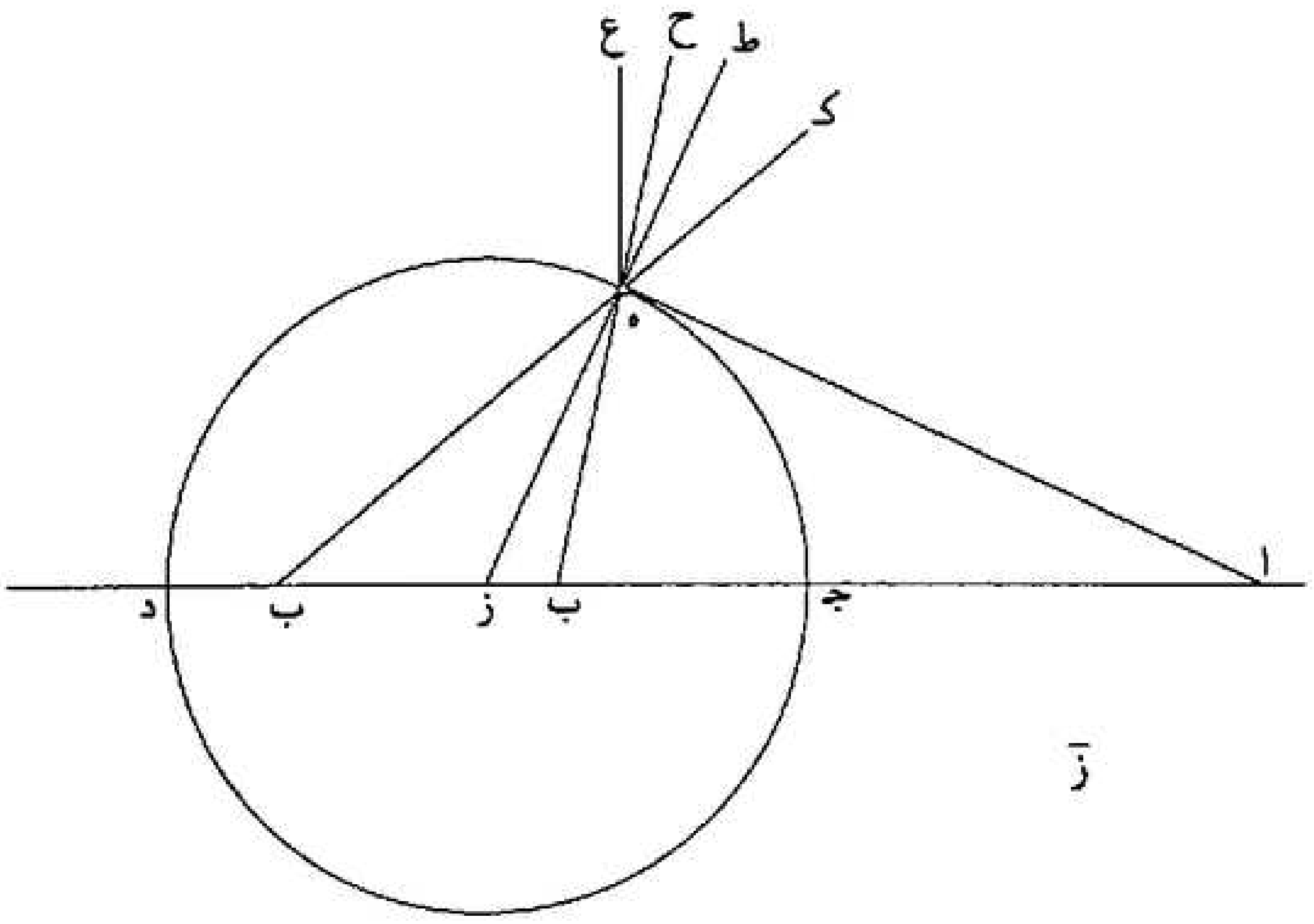
9 وبين: وتبين، وكتبت مهملة [ف، ك] – 12 وإما ... جـ د: ناقصة [ف] وفي [ت] in ipsa وفي «التنقيح»: أو لا – 14 استقامتها: استقامة [ك] – 15 عمود على سطح: يمر به لخروج [ف] وفي [ت] est perpendicularis super superficiem مما يتفق مع [ك] – 16 التي على خط: ناقصة [ف] وكذلك في [ت].

برهان ذلك: أن نقطة بَ إذا كانت على خط جـ دَ، فهي إما على المركز أو خارجة عن المركز. فإن كانت على المركز، فإن كل خط تمتد عليه صورة نقطة بَ إلى محيط دائرة جـ ه دَ، فإنها تمتد على استقامتها في الجسم المشف الذي يلي البصر، لأن كل خط يخرج من مركز دائرة جـ ه د فهو عمود على سطح الجسم المشف، وليس يخرج من مركز دائرة جـ ه دَ إلى بصر آ خطٌ مستقيمٌ غير خط زَ آ. فليس تنعطف صورة نقطة بَ التي على / المركز إلى بصر آ من محيط دائرة جـ ه دَ، فليس تنعطف صورة نقطة بَ إلى بصر آ إذا كانت نقطة بَ على المركز. ف-٧٩-و

وإن كانت نقطة بَ خارجة عن المركز، فهي إما على خط زجـَ، وإما على خط زدَ. فلتكن أولاً على خط زجـ، فأقول: إنه ليس تنعطف صورة نقطة بَ إلى بصر آ.

فإن أمكن ذلك، فلتنعطف صورة نقطة بَ إلى بصر آ من نقطة هَ. ونصل ب ه ونخرجه إلى حَ ونصل ز هَ ونخرجه إلى طَ، فيكون خط ز ه طَ عمودًا على سطح الجسم المشف الذي يلي البصر. فصورة نقطة بَ إذا امتدت على خط ب ه فهي تنعطف عند نقطة هَ وتبعد عن عمود ه طَ إلى جهة حَ التي هي خلاف جهة العمود. فليس تصل صورة نقطة بَ إلى بصر آ بالانعطاف، إذا كانت نقطة بَ على خط زجـ.

وأيضًا فلتكن نقطة بَ على خط دَ زَ، فأقول: إنه ليس تنعطف صورة نقطة بَ إلى بصر آ.



1 برهان: قبلها كلمة غير مقروءة ولعلها «الا من» [ك] – 3 جـ ه د: جهز [ك] – 5 زآ: آ ز [ك] – 10 ونصل: وتصل به [ف]، عادة ما يأخذ ناسخ [ف] بصورة المخاطب المفرد، ولن نشير لذلك فيما بعد – 12 ب ه: آ ه [ك] ر ه [ف] – 13 وتبعد: وتنفذ [ف، ك] / ه ط: ط [ف، ك] – 14 زجـ: رح ه [ف] – 15 بَ (الأولى): رَ [ف].

فإن أمكن، فلتنعطف / صورة نقطة ب إلى بصر ا من نقطة ه. ونصل ب ه ونخرجه إلى كـ، ونصل ز ه ونخرجه إلى ط، ولتنعطف صورة نقطة ب إلى بصر ا على خط ه ا؛ فتكون زاوية كـ ه ا هي زاوية الانعطاف وزاوية كـ ه ط هي الزاوية التي يحيط بها الخط الذي عليه امتدت الصورة والعمود الخارج من موضع الانعطاف. فزاوية كـ ه ا أصغر من زاوية كـ ه ط وخطُّ ب ز: إما أصغر من خط ز ه وإما مساوٍ له، لأن نقطة ب: إما فيما بين نقطتي د ز وإما على نقطة د. فزاوية ه ب ز: إما أعظم من زاوية ب ه ز وإما مساوية لها. وزاوية ا ه كـ أعظم من زاوية ه ب ز، فزاوية ا ه كـ أعظم من زاوية ب ه ز، / فزاوية ا ه كـ أعظم من زاوية كـ ه ط، وقد كانت أصغر منها، وهذا محال. ف-٧٩-ظ ف-٨٠-و

فليس تنعطف صورة نقطة ب إلى بصر ا من نقطة ه ولا من غيرها من النقط التي على محيط دائرة جـ ه د ولا من محيط غيرها من الدوائر التي تحدث في سطح الجسم المشف الذي فيه نقطة ب إذا كان كرّيًا. فنقطة ب إذا كانت على خط جـ د، فليس يدركها البصر بالانعطاف، وليس يدركها إلاّ على استقامة فقط، فليس يدركها إلاّ نقطة واحدة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ولنعد الصورة، وليكن نقطة ب خارجة عن خط جـ د ونخرج السطح الذي فيه عمود ز ا ونقطة ب، فيكون هذا السطح قائمًا على سطح الجسم المشف، وتكون نقطة ب لا تنعطف صورتها إلى بصر ا إلاّ في هذا السطح، لأنه ليس يمرّ بنقطتي ا ب سطح قائم على سطح الجسم المشف إلا سطحٌ يمرّ بخط ا د، وليس يخرج من خط ا د سطح يمرّ بنقطة ب إلاّ سطح واحد فقط؛ وليحدث هذا السطح في سطح الجسم المشف دائرة جـ ه د. وليس تنعطف صورة نقطة ب إلى بصر ا إلاّ من محيط دائرة جـ ه د. ولتنعطف صورة نقطة ب إلى بصر ا من نقطة / ه. فأقول: إنه ليس تنعطف صورة نقطة ب إلى بصر ا من نقطة غير نقطة ه. ف-٨٠-ظ

برهان ذلك: أنه لا يمكن. فإن أمكن، فلتنعطف صورة نقطة ب إلى بصر ا من نقطة أخرى، فليس تكون النقطة الأخرى إلاّ على محيط دائرة جـ ه د لِما تبين من قبل؛ فلتكن النقطة الأخرى نقطة م، ونصل خطوط ب ه ه ا ب م م ا ز ه ز م. وليتقاطع خطّا

2 ز ه: و ه [ف] / ولتنعطف: ولتعطف [ف] – 3 كـ ه ا: كـ ا ه [ك] – 5 ز ه: د ه [ف] ه ز [ك] – 6 ب ه ز: ب ه [ف] – 7 لها: له [ك] – 10 ولا من: ولان [ف] – 11 إذا كانت: إذًا [ف] وفي [ت] نجد existente مما يتفق مع [ك] – 13 أن نبين: ناقصة [ف] – 15 ز ا: ل ا [ف] ا د [ك] – 19 وليس: فليس [ك] ونجد في [ت] non ... ergo مما يتفق مع [ك] / ولتنعطف: ولتعطف [ف] – 20 بصر ا: كرر بعدها ناسخ [ف] «إلا من محيط» وفي [ت] نجد ترجمة العبارة هكذا refringatur ergo ex *e* مما يتفق مع [ك] – 21 ا: ناقصة [ف].

زه ب م على نقطة س. ونخرج ب ه إلى ح وب م إلى ن وزه إلى ط وزم إلى ل، فتكون زاوية ح ه ط هي التي يحيط بها الخط الذي امتدت عليه الصورة والعمود الخارج من موضع الانعطاف، وتكون زاوية ح ه ا هي زاوية الانعطاف، وتكون زاوية ن م ل هي / الزاوية التي يحيط بها الخط الذي امتدت عليه الصورة والعمود الخارج من موضع (ك-٦٨-ظ) الانعطاف، وتكون زاوية ن م ا هي زاوية الانعطاف. وزاوية ح ه ط: إما أن تكون مساوية لزاوية ن م ل وإما أن تكون أصغر من زاوية ن م ل وإما أن تكون أعظم من زاوية ن م ل.

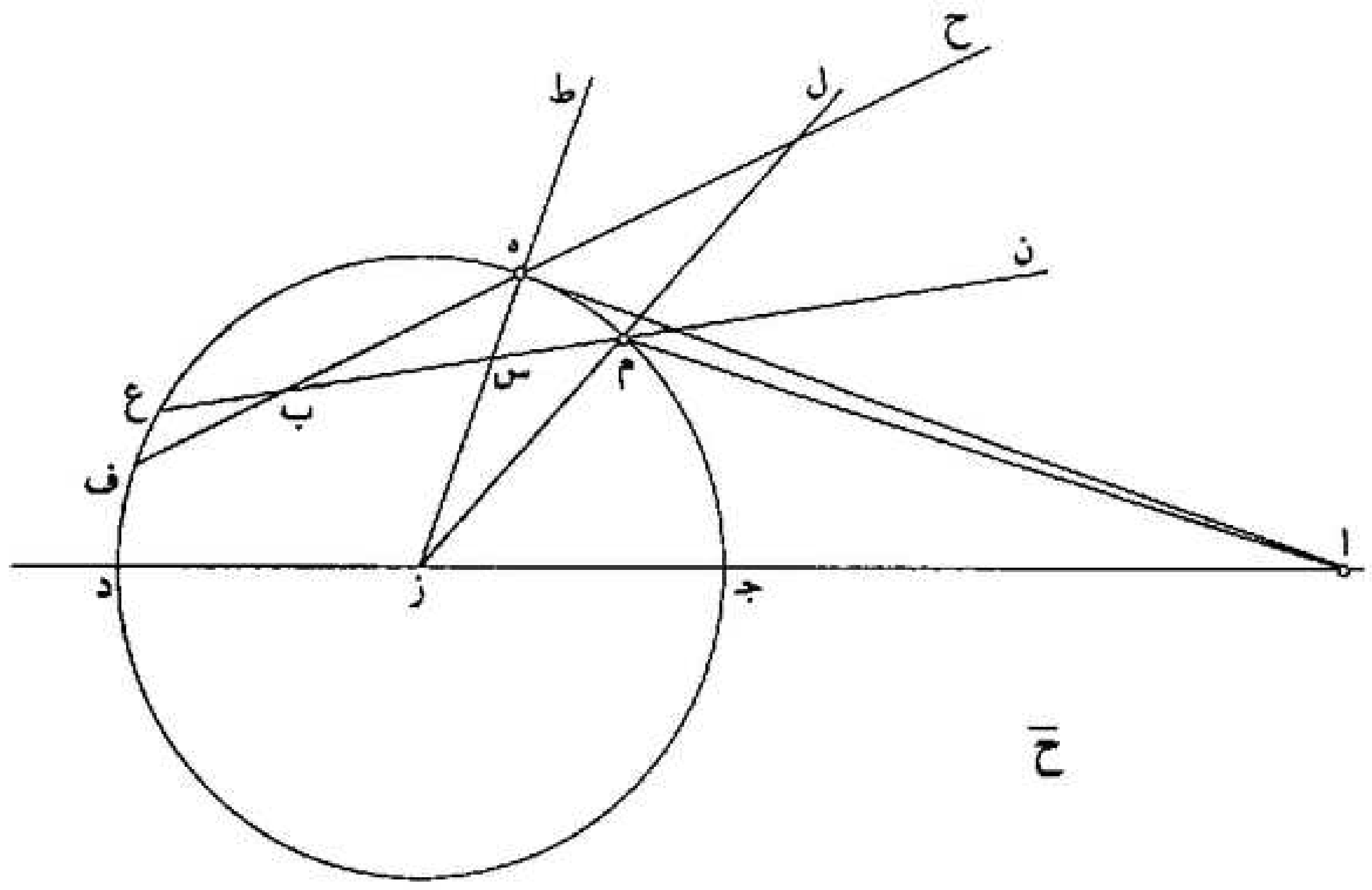
فإن كانت زاوية ح ه ط مساوية / لزاوية ن م ل، فإن زاوية ح ه ا التي هي زاوية (ف-٨١-و) الانعطاف – مساوية لزاوية ن م ا – التي هي زاوية الانعطاف، فتكون زاوية ا م ب مساوية لزاوية ا ه ب، وهذا محال.

وإن كانت زاوية ح ه ط أصغر من زاوية ن م ل، فإن زاوية ح ه ا أصغر من زاوية ن م ا، فتكون زاوية ا م ب أصغر من زاوية ا ه ب، وهذا محال.

وإن كانت زاوية ح ه ط أعظم من زاوية ن م ل، فإنا نخرج خط ه ب في جهة ب إلى ف، ونخرج م ب إلى ع، فتكون زاوية ه ب م مساوية للزاوية التي عند محيط الدائرة التي توترها قوسا م ه ف ع. وإذا كانت زاوية ح ه ط أعظم من زاوية ن م ل، كانت زاوية ز ه ب أعظم من زاوية ز م ب. فإذا كانت زاوية ز ه ب أعظم من زاوية ز م ب، فإن زاوية م ز ه أعظم من زاوية م ب ه، وتكون زيادة زاوية م ز ه على زاوية م ب ه مساوية لزيادة زاوية ز ه ب على زاوية ز م ب، لأن الزاويتين اللتين عند نقطة س متساويتان. فزاوية م ز ه، إذا كانت عند محيط الدائرة، فإن القوس التي توترها تكون ضعف قوس م ه. فإذا كانت زاوية م ز ه أعظم / من زاوية م ب ه، فإن ضعف قوس م ه (ف-٨١-ظ) أعظم من قوسي م ه ف ع؛ وتكون زيادة ضعف قوس م ه على قوسي م ه ف ع هي زيادة قوس م ه على قوس ف ع، فزيادة زاوية م ز ه على زاوية م ب ه هي ‹الزاوية›

1 وزه: وه ز [ك] – 2 الذي: ناقصة [ك] – 3 ح ه ا: ه ح ا [ف] / ن م ل: عادة ما يكتب ناسخ [ف] وناسخ [ك] النون راءً أو زايًا، ولن نثبت هذا فيما بعد – 7 فإن (الثانية): وان [ف] – 8 ن م ا: د م ا [ف] – 11 ن م ا: ن م ل [ك] / زاوية (الثانية): ناقصة [ف] – 13 ف: و [ك] – 14 وإذا: إذا [ف] – 15 فإذا: وإذا [ك] – 18 متساويتان: متساويتين [ف] / عند: كتب أولاً «على»، ثم أثبت الصواب فوقها [ك] – 20 أعظم: كرر بعدها ناسخ [ف] جزءًا من العبارة السابقة وجزءًا من العبارة اللاحقة مع الخطأ فكتب «من زاوية ب ه فإن ضعف قوس م ه أعظم». ونجد في [ت] tunc arcus *me* duplicatus erit maior duobus arcubus *me, fo* مما يتفق مع [ك] / م ه: ه ه [ف] / وتكون ... م ه ف ع: كرر الناسخ هذه العبارة، ولم يسلم من الخطأ، فكتب ما يلي «وتكون زيادة ضعف قوس م ه على قوس ف ع» [ف] / م ه (الثانية): م [ف] – 21 م ز ه: ز ه [ف].

التي توترها عند محيط الدائرة زيادة قوس م ه على قوس ف ع. وزيادة قوس م ه على قوس ف ع هي أصغر من قوسي م ه ف ع. فزيادة زاوية م ز ه على زاوية م ب ه هي أصغر من زاوية م ب ه. فزيادة زاوية ز ه ب على زاوية ز م ب هي أصغر من زاوية م ب ه. فزيادة زاوية ح ه ط على زاوية ن م ل هي أصغر من زاوية م ب ه. فزيادة زاوية ح ه ا – التي هي زاوية الانعطاف – على زاوية ن م ا – التي هي زاوية الانعطاف – أصغر بكثير من زاوية م ب ه. لكن زيادة زاوية ح ه ا على زاوية ن م ا هي زيادة زاوية ا م ب على زاوية ا ه ب، وزيادة زاوية ا م ب على زاوية ا ه ب أصغر من زاوية م ب ه، لكن زيادة زاوية ا م ب على زاوية ا ه ب هي زاويتا م ا ه م ب ه؛ فزاويتا / م ا ه ف-٨٢-و م ب ه أصغر من زاوية م ب ه؛ وهذا محال.



فليس تنعطف صورة نقطة ب إلى بصر ا من نقطة غير نقطة ه؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

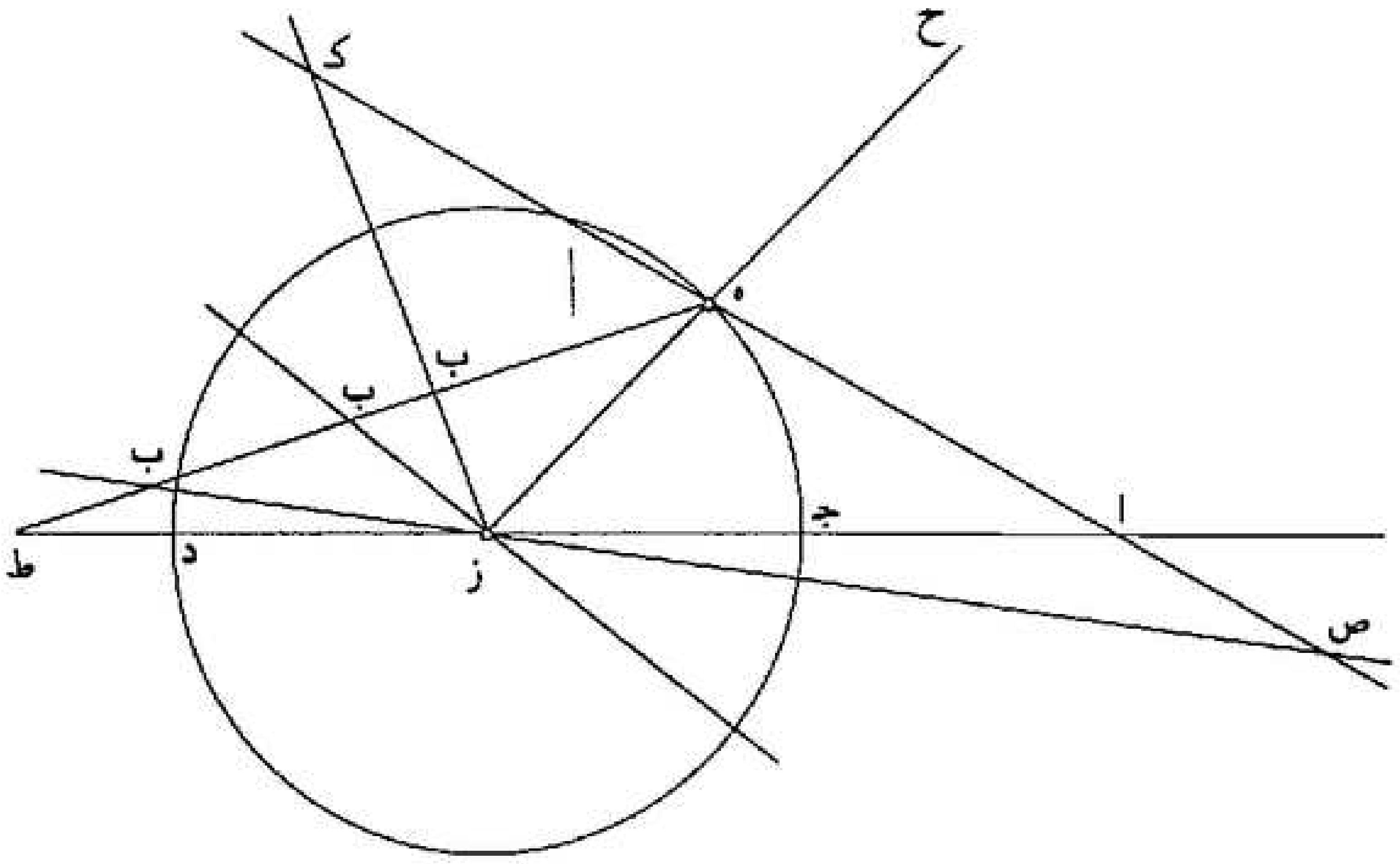
وإذا كانت صورة نقطة ب ليس تنعطف إلى بصر ا إلا من نقطة واحدة، فليس يكون لها إلاّ خيالٌ واحد، إلاّ أن موضع الخيال يختلف بحسب اختلاف موضع نقطة ب.

5 ح ه ا: ح ه ل [ك] – 6 م ب ه: م ز ه م ب ه [ف] / زيادة (الأولى): أثبتها في الهامش [ك] – 7 وزيادة ... ا ه ب: ناقصة [ف]، وهي مثبتة في [ت] مما يتفق مع [ك] – 8 لكن: الى [ف] وفي [ت] sed كما في [ك] / ا م ب: ا م ب ه [ف].

وذلك أنا نصل ب ز، فخط ب ز: إما أن يلقى خط ه ا وإما أن يكون موازيًا له. وإذا لقيه: فإما أن يلقاه إذا خرجا في جهة / ه ب، على مثل نقطة ك، وإما أن يلقاه إذا ف-٨٢-ظ خرجا في جهة د ا، مثل خط ب ز ص ‹على› مثل نقطة ص.

وإذا كان ب ز موازيًا لخط ه ا، كان مثل ب ز المتوسط بين خطي ك ب ز ب ز ص. فإن كان التقاء هذين الخطين على نقطة ك، كان الخيال قدّام البصر وكانت الصورة بيّنة وأدركها البصر على نقطة ك، وإن كان التقاء الخطين على نقطة ص، كان الخيال نقطة ص، وأدرك البصر الصورة مقابلة له، إلاّ أنها لا تكون في غاية البيان، بل تكون مشتبهة، لأن البصر يدركها في غير موضعها، وقد تبيّن هذا المعنى عند كلامنا في الانعكاس.

وإن كان خط ب ز موازيًا لخط ه ا، فإن الخيال يكون غير محدود، ويدرك البصر الصورة في موضع الانعطاف، وعلة ذلك شبيهة بالعلة التي ذكرناها في الانعكاس، إذا كان الانعكاس على خط موازٍ للعمود.



وقد تبيّن مما بيّناه أن المبصر الذي يدركه البصر من وراء جسم مشف أغلظ من الجسم الذي يلي البصر، فإنه ليس يكون له إلاّ خيال واحد، / وليس يدركه البصر إلاّ ف-٨٣-و واحدًا فقط.

1 أنا: أيضا [ف] وفي [ت] enim كما في [ك] – 2 مثل: أثبتها في الهامش [ك] – 3 د ا: ا [ك] / مثل خط ب ز ص: ناقصة [ك] وكذلك في [ت] / مثل نقطة ص: ناقصة [ف] ونجد في [ت] a, ut in r وهو قريب من [ك] – 5 التقاء: التقى [ف] – 6-7 كان الخيال ... ص: مكررة [ف] وأشار الناسخ إلى هذا في الهامش – الشكل ليس في المخطوطتين – 13-14 أغلظ من الجسم: ناقصة [ف] وفي [ت] grossius corpore كما في [ك] – 14 البصر (الأولى): المبصر [ف، ك] – 14-15 وليس ... واحدًا: أثبتها في الهامش [ك].

وهذا الانعطاف هو عن تقعير سطح الجسم المشف الذي يلي البصر المحيط بمحدب الجسم المشف الذي يلي المبصر؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وإن كان الجسم المشف الأغلظ يلي البصر، وكان شكلا الجسمين على ما هما عليه، وكان الجسم الألطف يلي المبصر، فليس يكون للمبصر إلاّ خيال واحد، ولا يدرك البصر للمبصر إلا صورة واحدة فقط؛ وذلك أن البصر، إذا كان / في الجسم الأغلظ وكان ك-٦٩-و المبصر في الجسم الألطف وكان شكلا الجسمين على ما هما عليه، فإن البصر يكون بمنزلة نقطة ب والمبصر يكون بمنزلة نقطة ا، وإذا انعطفت صورة نقطة ا إلى بصر ب، فإنها تنعطف في السطح القائم على سطح الجسم المشف، ويكون الفصل المشترك بين ذلك السطح وبين سطح الجسم المشف دائرة بمنزلة دائرة جـ ه د، وتكون نقطة الانعطاف بمنزلة نقطة ه، ويكون الخط المنعطف بمنزلة خط ا ه ب، فيلزم / من ذلك أن تكون الصورة ف-٨٣-ظ التي تمتد على خط ا ه وتنعطف على خط ب ه، إذا امتدت من نقطة ب على خط ب ه، انعطفت على خط ه ا. فإن انعطفت صورة نقطة ا إلى نقطة ب من نقطة أخرى غير نقطة ه، لزم من ذلك أن تنعطف صورة نقطة ب إلى نقطة ا من تلك النقطة الأخرى. وقد تبيّن أن الصورة، إذا امتدت على خط ب ه وانعطفت على خط ه ا، فليس تنعطف من نقطة ب صورة أخرى إلى نقطة ا. فليس تنعطف صورة نقطة ا إلى بصر ب إلا من نقطة واحدة، ولا يكون لها إلا خيال واحد.

وإن كانت نقطة ا على العمود الخارج من نقطة ب إلى مركز الكرة فإن بصر ب يدرك نقطة ا على استقامة العمود؛ ويتبيّن أن صورة نقطة ا لا تنعطف إلى بصر ب، لأنه قد تبيّن أن صورة نقطة ب، إذا كانت على العمود، لم تنعطف إلى نقطة ا. فإذا كان الجسم الأغلظ يلي البصر، وكان الجسم الألطف يلي المبصر، فليس يكون للمبصر إلاّ خيال واحد، ولا يدرك البصر للمبصر إلاّ صورة واحدة فقط؛ وذلك / ما أردنا أن نبيّن. ف-٨٤-و

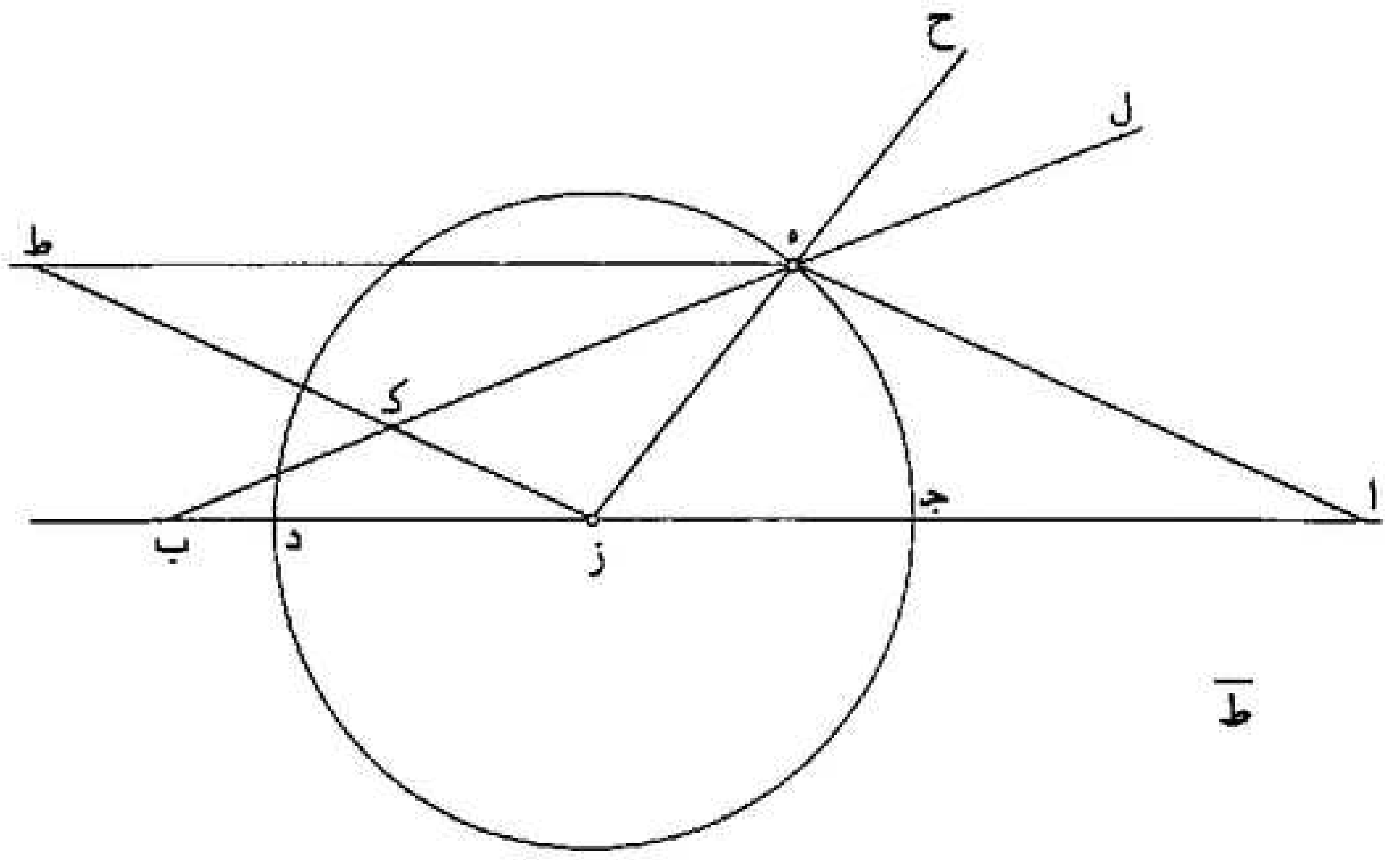
وأيضًا، فلنعد الشكل ز، ونفرض على محيط دائرة جـ ه د نقطة مما يلي جهة جـ، ولتكن نقطة ه، ونخرج منها خطًا موازيًا لخط ا د، وليكن ه ط، ونصل ز ه ونخرجه إلى ح. وليكن نسبة زاوية ز ه ك إلى ضعف زاوية ك ه ط أعظم نسبة تكون للزاوية التي

1 وهذا: فهذا [ف] وفي [ت] Vero كما في [ك] / سطح: أثبتها فوق السطر [ك] – 3 يلي: الذي يلي [ك] / الجسمين: ناقصة [ف] في الهامش [ك] / هما: بينا [ف] وهي مهملة – 4 المبصر: البصر [ك] – 5 للمبصر: المبصر [ك] – 6 شكلا الجسمين: شكل الجسم [ف] شكلا الجسم [ك] – 7 نقطة (الأولى): نقط [ف] – 10 خط: في الهامش [ك] / ا ه ب: ا ه ك [ت، ك] – 12 ه ا: ا ه [ك] – 16 ولا: لا [ف] – 17 فإن: الى [ف] وفي [ت] tunc مما يتفق مع [ك] – 18 ويتبين: وتبين [ف] – 20 وكان: فان [ف، ك] – 22 ز: ناقصة [ك] د [ف] – 24 نسبة (الأولى): ناقصة [ك] ولكنها مثبتة في [ت].

يحيط بها الخط الذي تمتد عليه الصورة والعمود إلى زاوية الانعطاف التي تُوجبها تلك الزاوية بالقياس إلى الحس. وذلك أن كل جسمين مشفين مختلفي الشفيف، فإن زوايا الانعطاف التي يحدث بينهما الضوء النافذ فيهما تختلف، ويكون لاختلافهما بالقياس إلى الحس غاية إذا تجاوزها، لم يدرك الحس مقدار الانعطاف، أعني أنه يدرك الحس مركز الضوء النافذ في الجسمين كأنه على استقامة الخط الذي امتد عليه الضوء، أعني عند اعتباره بالآلة.

ونجعل زاوية د ز ط مثل زاوية ط ه ك، فتكون زاوية / ز ك ه ضعف زاوية ك ه ط، ف-٨٤-ظ فتكون نسبة زاوية ز ه ك إلى زاوية ز ك ه هي أعظم نسبة تكون بين الزاوية التي يحيط بها الخط الأول والعمود وبين زاوية الانعطاف. وخط ه ك يلقى خط ا د، فليلقه على نقطة ب. ونخرج من نقطة ه خطًا موازيًا لخط ز ط، فهو يلقى خط د جـ خارج الدائرة مما يلي نقطة جـ، فليلقه على نقطة ا. ونخرج ب ه إلى ل، فيكون زاوية ل ه ا مساوية لزاوية ز ك ه وزاوية ل ه ح مساوية لزاوية ز ه ك؛ فتكون زاوية ل ه ا هي زاوية الانعطاف التي تُوجبها زاوية ل ه ح.

فإذا كانت نقطة ب في مبصر من المبصرات، وكان الجسم المشف – الذي محدبه يلي نقطة ا – متصلاً ملتئمًا من نقطة ه إلى نقطة ب وغيرَ منفصل عند محيط دائرة جـ ه د مما يلي نقطة ب، فإن صورة نقطة ب تمتد على خط ب ه وتنعطف على خط ه ا ويُدركها بصر ا من سمت خط ا ه.



ط

1 الصورة: الصور [ف] – 3 يحدث: مهملة [ف، ك] / الضوء: للضوء [ف]؛ ولهذا يمكن أن نقرأ «تحدث بينهما للضوء»، ولكن آثرنا ما أثبتناه – 6 اعتباره: اعتبابه [ف] ابن الهيثم يشير هنا إلى الآلة التي اعتبر بها، فيما سبق من كتابه، انعطاف الضوء – 7 ط ه ك: ك ه ط [ك] – 8 هي: ناقصة [ك] – 9 ه ك: ه ح [ف، ك] – 10 ب: وكتب فوقها كلمة «صح»، مما يعني أنه راجعها على الأصل ه [ك] / ه: ب وكتب فوقها ه مع كلمة «صح» [ك] / ز ط: ط ز [ك] / د جـ: ز ح [ك] – 11 جـ: ح [ك].

وتكون زاوية ا ه ح ونظائرها تنقسم بنسب كثيرة من النسب التي بين زوايا الانعطاف / والزوايا التي تحيط بها الأعمدة والخطوط الأول التي تحدث بين الجسمين المشفين. ف-٨٥-و فيكون على خط د ب نقط كثيرة تمتد صورها إلى قوس جـ ه، وتنعطف إلى نقطة ا. ويكون الخط – الذي عليه تلك النقط – تنعطف صورة جميعه إلى بصر ا من قوس جـ ه. فإذا كان البصر في جسم مشف، وكان المبصر في جسم مشف أغلظَ من الجسم الذي يلي البصر، وكان سطح الجسم المشف الأغلظ – الذي يلي البصر – كريًا محدبه يلي البصر، وكان / المبصر خارجًا عن الدائرة – التي حدبتها تلي البصر – وأبعدَ عن البصر ك-٦٩-ظ من أبعد نقطتي التقاطع بين العمود وبين محيط الدائرة، وكان الجسم المشف الغليظ – الذي يلي المبصر – متصلاً إلى الموضع الذي فيه المبصر وغير منقطع / عند الاستدارة التي ف-٨٥-ظ تلي المبصر، فإنه قد يمكن أن يدرك البصر ذلك المبصر بالانعطاف مع إدراكه له على استقامة. وإذا أدرك البصر المبصر على هذه الصفة، فإن خياله يكون مركز البصر.

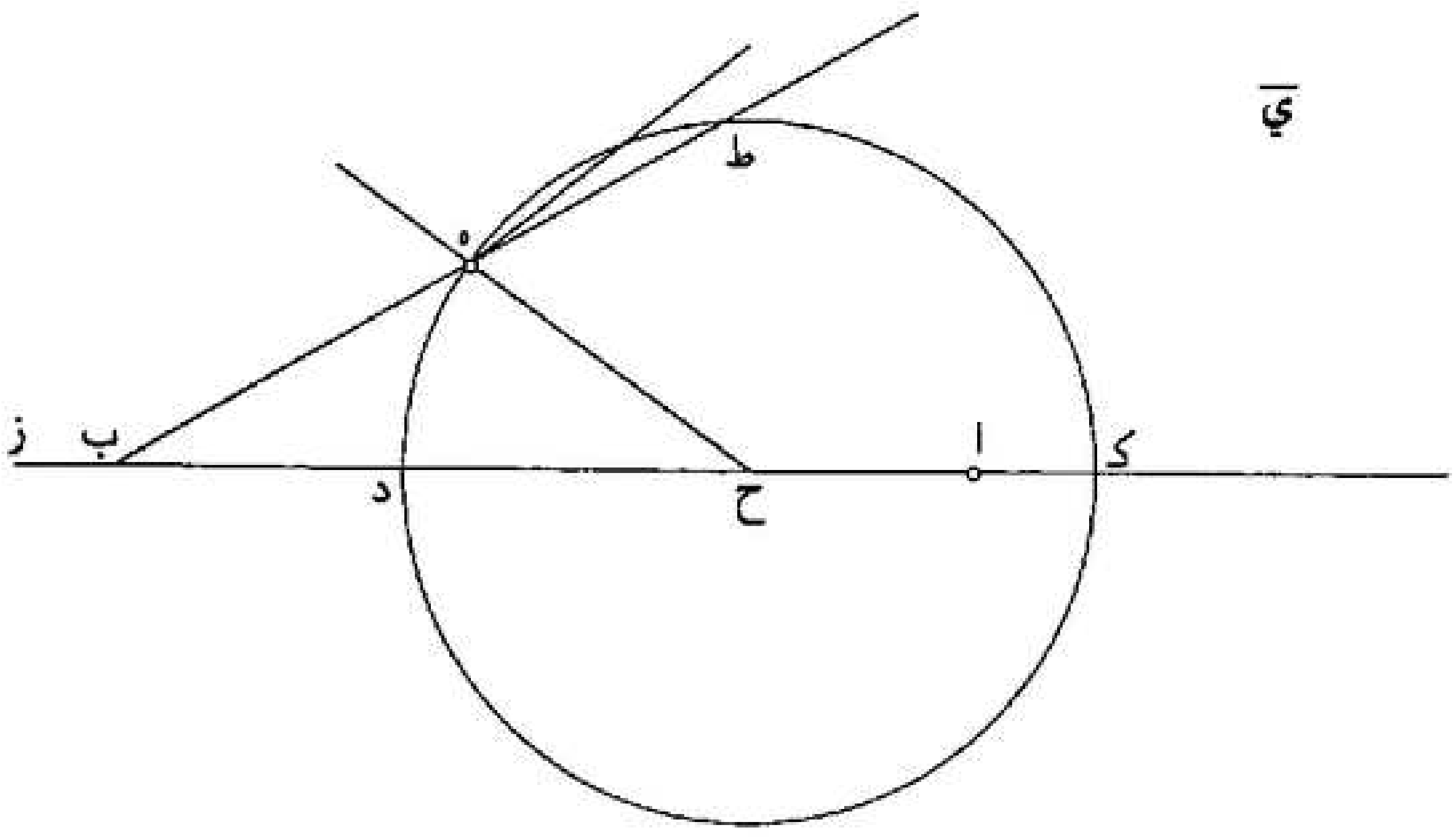
ثم إذا أثبتنا خط ا ب جـ، وأدرنا شكل ا ه ب حول خط ا ب، وكان الجزء من سطح الجسم المشف الذي يلي البصر كريًا، رسمت نقطة ه دائرة في السطح المستدير المحدب الذي يلي البصر، وانعطفت صورة نقطة ب إلى بصر ا من جميع محيط الدائرة التي تحدث، إلاّ أن الخيال يكون عن جميع دائرة الانعطاف يكون نقطة واحدة هي مركز البصر. فخيال المبصر الذي بهذه الصفة أيضًا هو نقطة واحدة، إلاّ أنه يعرض من هذا الوضع أن يكون البصرُ يدرك صورة المبصر عند موضع الانعطاف، للعلة التي ذكرناها في الانعكاس عن المرايا إذا كان الانعكاس عن محيط دائرة في كرة وكان الخيال مركز البصر. فالمبصر الذي بهذه الصفة، يدرك البصر صورته مستديرةً عند دائرة الانعطاف، ويدرك صورته أبدًا على استقامة العمود المارّ بالبصر والمبصر معًا؛ وذلك ما أردنا / أن نبيّن. ف-٨٦-و

‹ب› وأيضًا، فليكن البصر نقطة ا، ولتكن نقطة ب في مبصر من المبصرات، وليكن من وراء جسم مشف أغلظ من الجسم المشف الذي يلي البصر، وليكن سطح الجسم المشف الذي يلي البصر سطحًا مستديرًا مقعرًا، تقعيره يلي البصر، فأقول: إن نقطة

4 النقط: النقطة [ك] / جميعه: جميعها [ك] ونجد في [ت] totius lineae مما يتفق مع [ف] – 5 أغلظ: أغلظ من شفيف [ك] وكلمة «شفيف» زائدة، وجد في [ت] ما يؤكد هذا: alio diaphano grossiore – 6-7 سطح ... البصر وكان: كررها ناسخ [ك] وأشار إلى ذلك – 7 المبصر: البصر [ك] – 9 المبصر (الأولى): البصر [ف، ك] وكذلك في [ت] vuisus – 12 ا ب: ز د [ك] – 20 والمبصر: وبالمبصر [ك] – 21 البصر: ناقصة [ك] – 22 يلي: في الهامش [ك] – 23 البصر (الأولى): ناقصة [ف] المبصر [ك] وهي مثبتة في [ت].

ب ليس يكون لها إلاّ خيال واحد، وليس يكون لها ‹عند› بصر ا إلاّ صورة واحدة فقط.

وليكن مركز التقعير نقطة ح، ونصل ا ح ونخرجه على استقامة إلى ز، فيكون خط ا ز عمودًا على السطح المقعر ونقطةُ ب: إما أن تكون على خط ا ز أو تكون خارجة عن خط ا ز.



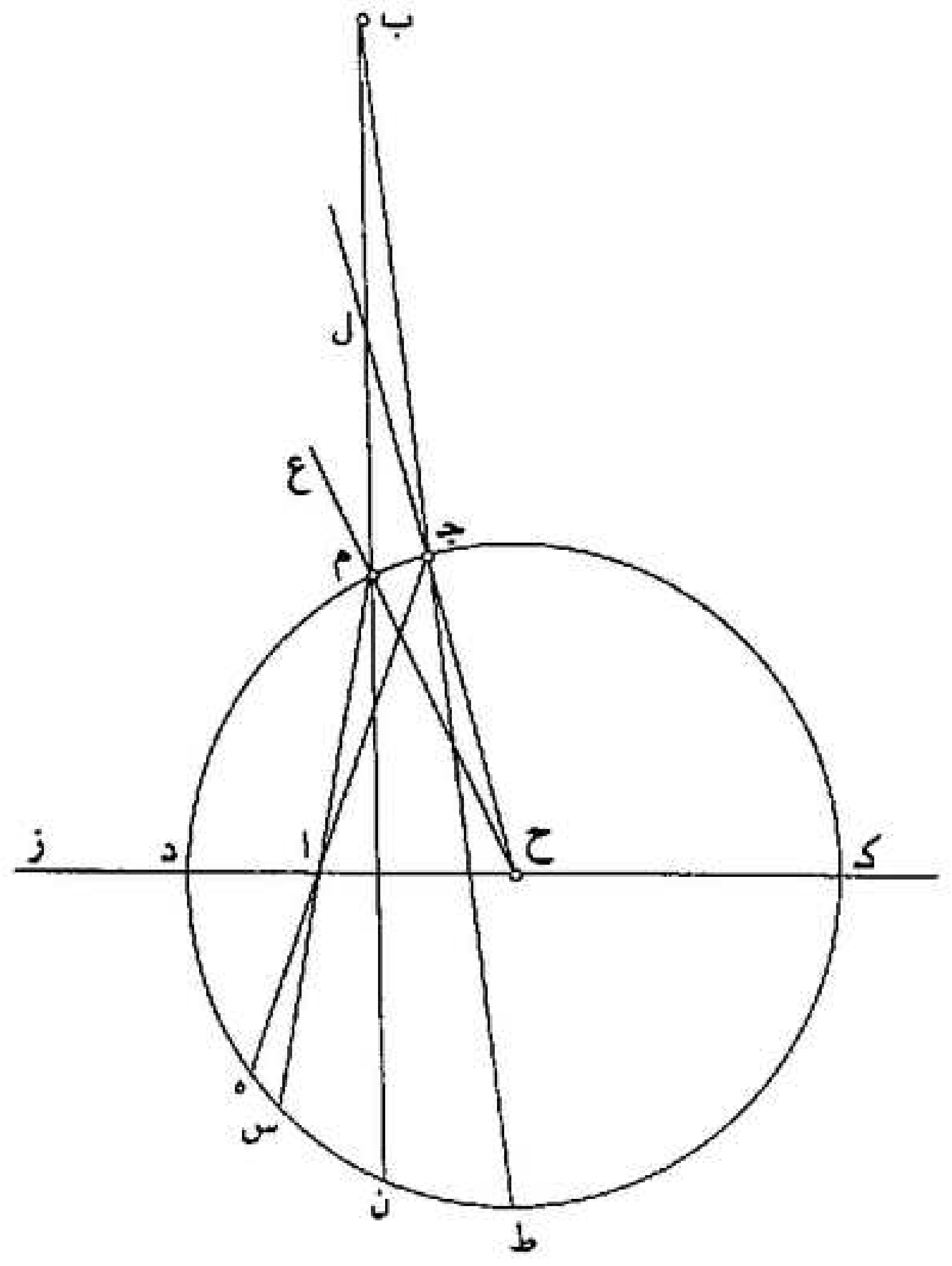
فلتكن أولاً على خط ا ز، فبصر ا يدرك نقطة ب على استقامة خط ا ب، لأن ا ب عمود على السطح المقعر. فأقول: إن بصر ا لا يدرك نقطة ب بالانعطاف.

فإن أمكن، فلتنعطف صورة نقطة ب إلى بصر ا من نقطة ه، ونصل ب ه ح ه، ونخرج ب ه إلى ط، فيكون زاوية ط ه ح هي التي يحيط بها الخط – الذي امتدت عليه الصورة – والعمود الخارج من موضع الانعطاف؛ ولأن الجسم الذي يلي نقطة ا ألطف من الجسم / الذي يلي نقطة ب، يكون الانعطاف إلى خلاف جهة العمود الذي ف-٨٦-ظ هو خط ه ح. فخط ه ط إذا انعطف، بَعُدَ عن خط ه ح، وخط ه ط لا يلقى خط ب ا؛ فخط ه ط إذا انعطف، لم يلق خط ب ا على تصاريف الأحوال. فليس تنعطف صورة نقطة ب إلى بصر ا، فليس يدرك بصر ا نقطة ب بالانعطاف، وهو يدركها على استقامة، فليس يدرك بصر ا لنقطة ب إلا صورة واحدة فقط؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ولنعد الصورة، وليكن نقطة ب خارجة عن خط ا ز، ونخرج السطح الذي فيه خط ا ز ونقطة ب. فيكون هذا السطح قائمًا على السطح / المقعر؛ ولا تنعطف صورة ف-٨٧-و

3 ا ح: ا جـ [ك] وكثيرًا ما يكتب الحاء جيمًا وبالعكس، ولا نشير لهذا إلا عند وضوح الاختلاف والأهمية – 12 بَعُدَ عن: عن بُعد [ف] وفي [ت] removetur مما يتفق مع [ك].

نقطة ب إلى بصر ا إلاّ في هذا السطح، لأنه ليس يقوم على السطح المقعر سطح مستوٍ يمرّ بنقطة ا إلاّ سطح يمرّ بخط ا ز. وليس يمر بخط ا ز وبنقطة ب إلا سطح واحد فقط، فليس تنعطف صورة نقطة ب إلى بصر ا إلا في السطح المارّ بخط ا ز وبنقطة ب. وليكن الفصل المشترك بين هذا السطح وبين السطح المقعر قوس جـ د ه، ولتنعطف صورة نقطة ب إلى بصر ا من نقطة جـ؛ فأقول: إنه ليس تنعطف / صورة نقطة ب إلى بصر ا من نقطة ك-٧٠-و أخرى غير نقطة جـ.



فإن أمكن، فلتنعطف من نقطة أخرى، ولتكن نقطة م. ونصل خطوط ا جـ ب د ح جـ ا م ب م ح د، ونخرج ب جـ على استقامة إلى ط وب م على استقامة إلى ن، ونخرج ح جـ على استقامة إلى ل وح م على استقامة إلى ع، ونتمم دائرة جـ د ه، ولتقطع خط ا ح على نقطة ك. فنقطة ا: إما أن تكون على خط ك د أو خارجة عن خط ك د في جهة ك.

1 ب: في الهامش [ك] – 2 يمرّ (الثانية): ثم [ف] ونجد في [ت] transit per *a z* مما يتفق مع [ك] / ب: ز [ف] – 3 وبنقطة: فسعطه [ف] – 4 ولتنعطف: ولتعطف [ف] وهي مهملة – الشكل ليس في المخطوطتين – 7-8 ا جـ ب ... ا م ب: ا ح ب ح ح جـ ا م ب م [ك] وهذا أيضًا ما نجده في [ت] – 8 م ح د: م ح م [ف] ح م د [ك] / ب جـ: ب ح [ك] / إلى (الثانية): ناقصة [ف] – 9 ع: غين [ف] – 10 ك د: ك ز [ك].

فإن كانت نقطة ا على خط كـ د، فهي: إما على نقطة ح أو على أحد خطي د ح ح كـ.

فإن كانت نقطة ا على ح، فليس تنعطف / إليها صورة نقطة ب، لأن الخطوط ف-٨٧-ظ التي تصل بين الجسم المستدير وبين نقطة ح هي أعمدة على سطح الجسم المشف الذي يلي نقطة ا والانعطاف ليس يكون على العمود نفسه بل إنما يكون ‹خارجًا› عن العمود، فليس تنعطف صورة نقطة ب إلى بصر ا، إذا كان بصر ا على نقطة ح.

وإن كانت نقطة ا على خط ح د، فإن خط جـ ط يكون فيما بين خطي جـ ا جـ ح وكذلك خط م ن يكون فيما بين خطي م ا م ح، لأن الانعطاف هو إلى خلاف جهة العمود، لأن الجسم المشف الذي يلي البصر ألطف من الجسم الذي يلي المبصر. وإذا كان خط جـ ط فيما بين خطي جـ ا جـ ح وكانت نقطة ا على خط ح د، فإن زاوية ب جـ ا تكون مما يلي نقطة د وكذلك زاوية ب م ا تكون مما يلي نقطة د، وتكون نقطة ب من وراء خط ح جـ ل، أعني مما يلي نقطة كـ عن خط ح جـ ل. وتكون زاوية ط جـ ح هي الزاوية التي يحيط بها الخط الذي امتدت عليه الصورة والعمودُ الخارج من موضع الانعطاف، وكذلك زاوية ن م ح، وتكون زاوية / ط جـ ا هي زاوية الانعطاف، ف-٨٨-و وكذلك زاوية ن م ا. وزاوية ن م ح: إما أن تكون مساوية لزاوية ط جـ ح وإما أن تكون أعظم منها وإما أن تكون أصغر منها.

وإن كانت زاوية ن م ح مساوية لزاوية ط جـ ح، فإن زاوية ا م ن مساوية لزاوية ا جـ ط، فتكون زاوية ب م ا مساوية لزاوية ب جـ ا، وهذا محال.

وإن كانت زاوية ن م ح أعظم من زاوية ط جـ ح، فإن زاوية ا م ن أعظم من زاوية ا جـ ط، فتكون زاوية ب م ا أصغر من زاوية ب جـ ا، وهذا محال.

وإن كانت زاوية ن م ح أصغر من زاوية ط جـ ح، فإن زاوية ا م ن أصغر من زاوية ا جـ ط، ويكون جميع زاوية ا م ح أصغر من جميع زاوية ا جـ ح، ويكون نقصان زاوية ا م ن عن زاوية ا جـ ط أقل من نقصان زاوية ا م ح عن زاوية ا جـ ح. ونقصان زاوية

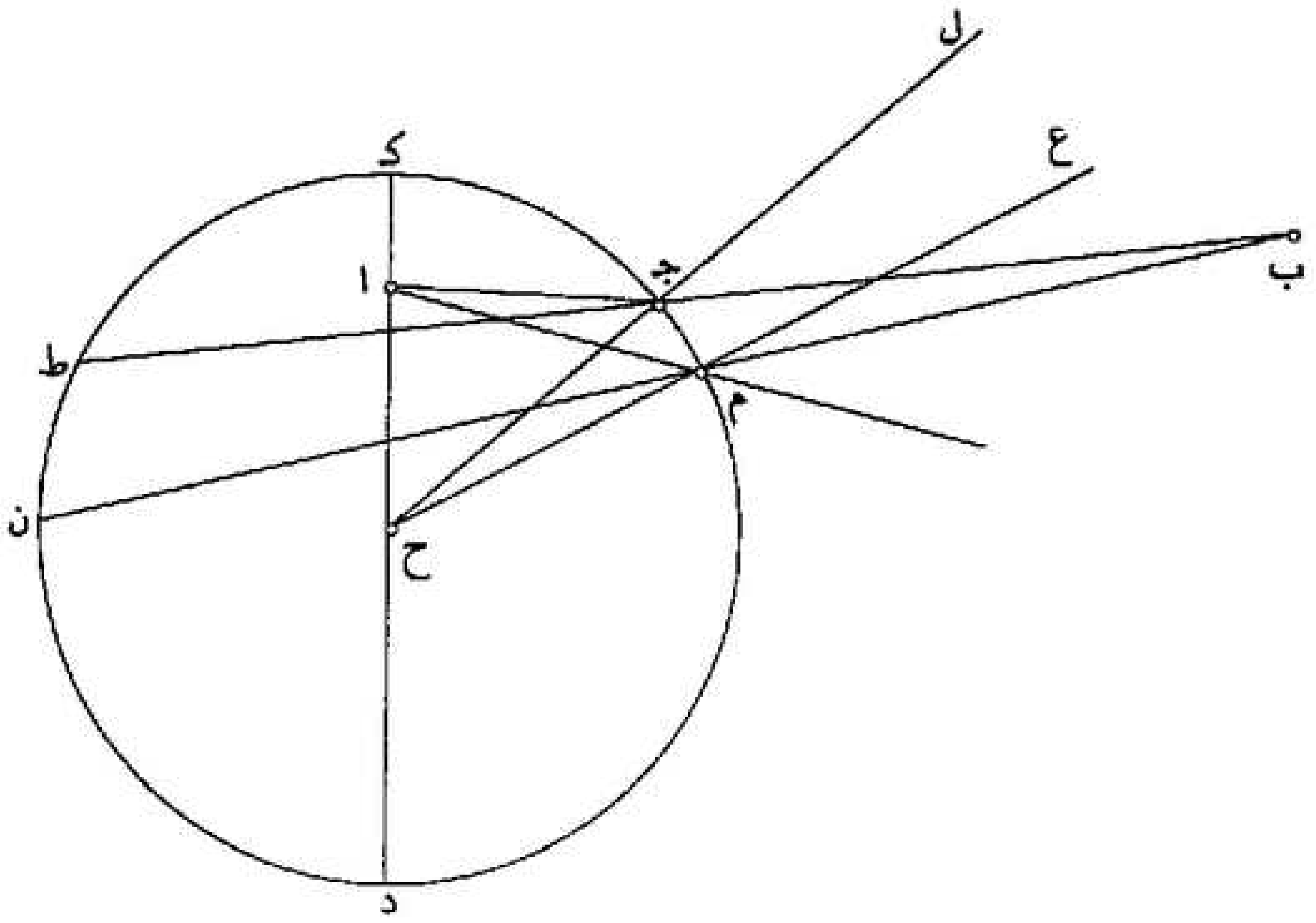
2 د ح: ز حـ [ك] – 5 ‹خارجًا›: ونجد في [ت] extra – 7 جـ ط: ح ط [ف] – 8 وكذلك: ولذلك [ك] وهذا ما نجده في [ت] ideo – 10 جـ ح: د ح [ف] – 11 تكون (الأولى): تكون زاوية [ك] – 12 خط ح جـ ل (الأولى): نقطة جـ د ل [ف] / خط (الثانية): أثبتها في الهامش [ك] / ح جـ ل: ح د ل [ف] – 14 ن م ح: ن م ا [ف] / وتكون زاوية ط جـ ا هي ز: مكررة في الهامش [ف] ٨٨-و، ويبدو أنها بخط آخر – 17 وإن: فان [ك] – 19 ا م ن: ا حـ ر [ك] – 22 جميع: أثبتها في الهامش [ك] / جميع: ناقصة [ك] وهي مثبتة في [ت] / ويكون: و [ك] – 23 ا جـ ط: ا ح ط [ف].

ا م ح عن زاوية ا جـ ح هو نقصان زاوية جـ ح م عن زاوية جـ ا م لأن الزاويتين اللتين عند تقاطع خطي ا جـ م ح متساويتان؛ فنقصان زاوية ا م ن عن زاوية / ا جـ ط هو أصغر ف-٨٨-ظ من نقصان زاوية جـ ح م عن زاوية جـ ا م. ونخرج خطي جـ ا م ا إلى نقطتي ه س. فتكون زاوية جـ ا م هي الزاوية التي توترها عند محيط الدائرة قوسا جـ م ه س، وزاوية جـ ح م هي التي يوترها عند محيط الدائرة ضعف قوس جـ م. وإذا كانت زاوية جـ ح م أصغر من زاوية جـ ا م، فإن ضعف قوس جـ م أصغر من قوسي جـ م ه س، ويكون نقصان ضعف قوس جـ م عن قوسي جـ م ه س هو نقصان قوس جـ م عن قوس ه س. فنقصان زاوية ا م ن عن زاوية ا جـ ط أصغر من الزاوية التي يوترها عند محيط الدائرة نقصان قوس جـ م عن قوس ه س، فهو أصغر من زاوية جـ ا م. فزيادة زاوية ب م ا على زاوية ب جـ ا هي أصغر من زاوية جـ ا م. لكن زيادة زاوية ب م ا على زاوية ب جـ ا هي زاويتا جـ ا م جـ ب م، فزاويتا جـ ا م جـ ب م أصغر من زاوية جـ ا م، وهذا محال.

وإن كانت نقطة ا على خط ح ک، فإن خط جـ ط يكون فيما بين خطي جـ ح جـ ا، وكذلك خط م ن يكون فيما بين خطي م ح م ا، فتكون زاوية ب جـ ا مما يلي نقطة ک، / وكذلك زاوية ب م ا تكون مما يلي نقطة ک وتكون نقطة ب تحت خط ف-٨٩-و ح م ع، أعني مما يلي نقطة د عن خط ح م ع، وتكون كل واحدة من زاويتي ط جـ ح ن م ح هي الزاوية التي يحيط بها الخط الذي امتدت عليه الصورة والعمودُ الخارج من موضع الانعطاف، وتكون كل واحدة من زاويتي ط جـ ا ن م ا هي زاوية الانعطاف. فإن كانت زاوية ط جـ ح مساوية لزاوية ن م ح، فإن زاوية ط جـ ا مساوية لزاوية ن م ا، فتكون زاوية ب جـ ا مساوية لزاوية ب م ا، وهذا محال.

وإن كانت زاوية ط جـ ح أعظم من زاوية ن م ح، فإن زاوية ط جـ ا أعظم من زاوية ن م ا، فتكون زاوية ب جـ ا أصغر من زاوية ب م ا، وهذا محال.

1 جـ ا م: ح ا م [ف] – 2 متساويتان: متساويان [ك] / عن: عن نقصان [ك] – 4 قوسا جـ م ه س: قوس حمطس [ك]، والعبارة صحيحة في [ت] – 5 الدائرة: للدائرة [ف] / ضعف: ناقصة [ك] وهي مثبتة في [ت] – 6 ه س: طس [ك] – 6-7 ويكون ... قوس ه س: ناقصة [ك] وهي مثبتة في [ت] – 10 هي: هو [ف، ك] – 11 هي: هو [ف] – 16 أعني ... ح م ع: ناقصة [ك] وهي مثبتة في [ت] / واحدة: واحد [ف] – 17 الخط: نقطة، ثم صححها عليها [ك] – 19 مساوية ... ط جـ ا: في الهامش [ك].



ك – ٧٠ – ظ
ف – ٨٩ – ظ

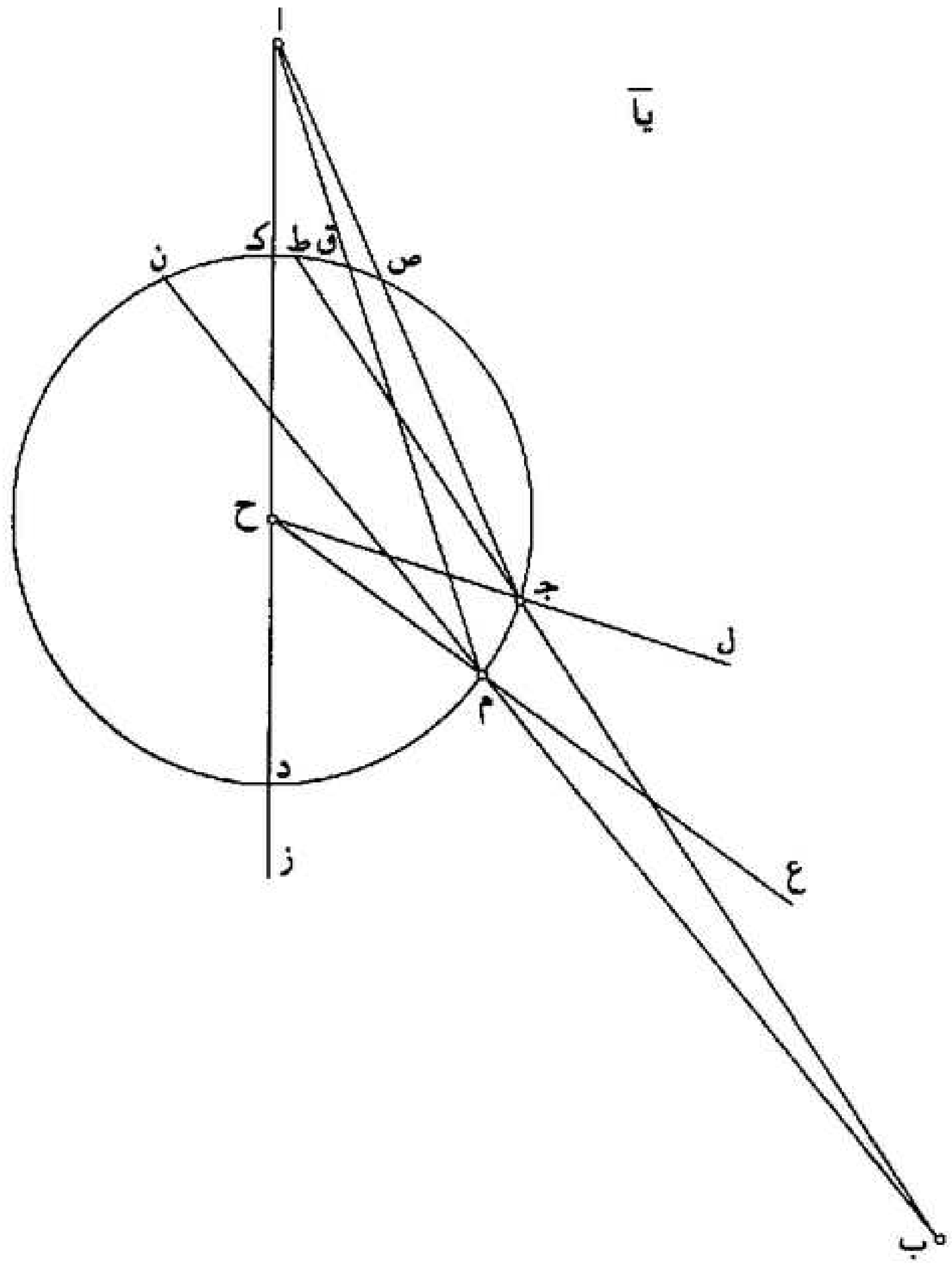
وإن كانت زاوية ط جـ ح أصغر من زاوية ن م ح، فإن زاوية ط جـ ا أصغر من زاوية ن م ا، فيكون جميع زاوية ح جـ ا أصغر من جميع زاوية ح م ا، فتكون زاوية جـ ح م أصغر من زاوية جـ ا م، ويكون نقصان زاوية جـ ح م عن زاوية جـ ا م أصغر من زاوية جـ ا م، كما تبين / من قبل. ونقصان / زاوية ط جـ ا عن زاوية ن م ا هو أصغر من نقصان زاوية ح جـ ا عن زاوية ح م ا، فهو أصغر من نقصان زاوية جـ ح م عن زاوية جـ ا م، فنقصان زاوية ط جـ ا عن زاوية ن م ا أصغر من زاوية جـ ا م. ونقصان زاوية ط جـ ا عن زاوية ن م ا هو زيادة زاوية ب جـ ا على زاوية ب م ا، فزيادة زاوية ب جـ ا على زاوية ب م ا هي أصغر من زاوية جـ ا م. لكن زيادة زاوية ب جـ ا على زاوية ب م ا هي زاويتا جـ ا م جـ ب م، فزاويتا جـ ا م جـ ب م أصغر من زاوية جـ ا م، وهذا محال.

وإن كانت نقطة ا خارجة عن خط كـ د إلى ما يلي نقطة كـ، وكان الجسم المشف الذي فيه بصر ا متصلاً إلى موضع نقطة ا، فإنا نصل خطي ا جـ ا م، فهما يقطعان محيط دائرة جـ كـ د، فليقطعاها على نقطتي ص ق. وإن كانت زاوية ط جـ ح مساوية لزاوية ن م ح، فإن زاوية ب جـ ا مساوية لزاوية ب م ا، وهذا محال.

وإن كانت زاوية ط جـ ح أعظم من زاوية ن م ح، فإن زاوية ط جـ ا أعظم من زاوية ن م ا، فتكون زاوية ب جـ ا أصغر من زاوية ب م ا، وهذا محال.

1 ط جـ ح: ط د ح [ف] ط ح جـ [ك] – 2 جميع (الثانية): ناقصة [ك] وهي مثبتة في [ت] – 3 جـ ح م: د ع م [ف] – 5 ح جـ ا: جـ د ا [ف] / ح م ا: جـ م ا [ف] – 7 ب جـ ا (الأولى): ب جـ ا ه [ف] – 7-8 فزيادة ... زاوية ب م ا: ناقصة [ك] ناقصة في [ت] أيضًا – 8 هي: هو [ف] / زيادة: أثبتها في الهامش [ف]. الشكل ليس في المخطوطتين – 9 هي: هو [ف، ك] / جـ ب م (الأولى): جـ ب ا [ك] – 10 كـ د: كـ ز [ك] – 12 جـ كـ د: جـ كـ ز [ك] / فليقطعاها: فليقطعانها [ف] / ط جـ ح: ط د ح [ف، ك] – 15 ب جـ ا: ب ا [ف].

وإن كانت زاوية ط جـ ح أصغر من زاوية ن م ح، فإن زاوية / ط جـ ا أصغر من زاوية ن م ا، وجميع زاوية ح جـ ا أصغر من جميع زاوية ح م ا، فتكون زاوية جـ ح م أصغر من زاوية جـ ا م. لكن زاوية جـ ح م هي التي يوترها عند محيط الدائرة ضعف قوس جـ م وزاوية جـ ا م ‹هي› التي يوترها عند محيط الدائرة زيادة قوس جـ م على قوس ص ق. / فضعف قوس جـ م أصغر من زيادة قوس جـ م على قوس ص ق، وهذا محال. ف-٩٠-و ف-٩٠-ظ



يا

وإذا كانت نقطة ب خارجة عن خط ا ح، فليس تنعطف صورتها إلى بصر ا إلاّ من نقطة واحدة فقط. وإذا لم تنعطف صورتها إلاّ من نقطة واحدة، فليس يكون لها إلاّ خيال واحد؛ ويكون خيالها: إما قدّام البصر وإما من وراء البصر وإما في موضع الانعطاف كما تبيّن فيما تقدّم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

1 ط جـ ح: ط جـ ا [ك] – 2 ح جـ ا: ح د ا [ك] – 3 جـ ح م: جـ م ح [ف] م جـ ح [ك] – 8 واحدة (الأولى): واحد [ك] – 9 واحد: واحد فقط [ك].

وإن كان الجسم المشف الأغلظ يلي البصر، وكان الجسم الألطف يلي المبصر، وكان شكلاهما على ما هما عليه، أعني إذا كانت نقطة $\overline{ب}$ هي المبصر، فليس يكون للمبصر أيضًا إلاّ خيال واحد، وبرهان ذلك مثل ما بيناه في عكس الشكل الثامن.

2 للمبصر: المبصر [ف] – 3 خيال واحد: خيالاً واحدًا [ف، ك] / الثامن: نجد في [ت] «عكس الشكل السابع».

‹كتاب المناظر – المقالة السابعة›

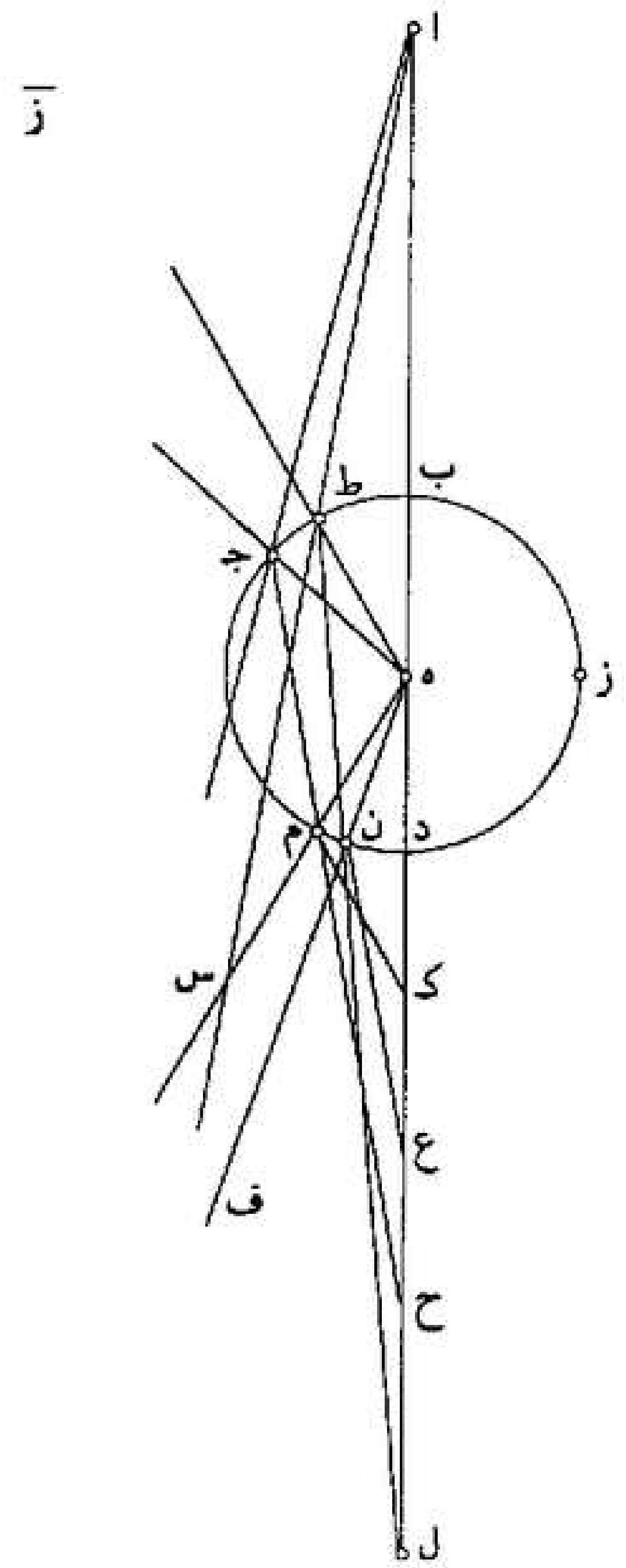
‹العدسة الكرية›

إلاّ أنه قد يكون في المبصرات المألوفة ما يُرى من وراء جسم مشف كري أغلظ من الهواء ف-١٢١-ظ ك-٨٦-و ويكون محدبه يلي البصر إذا كان المبصر من وراء كرة من البلور أو الزجاج أو ما يجري مجراهما وكان ذلك المبصر في الهواء لا في داخل الكرة. وأوضاع المبصرات التي بهذه الصفة أيضًا كثيرةٌ وكثيرةُ الفنون، إلاّ أن هذه المبصرات قلّما يدركها البصر، وإذا أدركها فقلّما يتأملها ويميّز اختلاف صورها. فليس في ذكر جميع فنونها كثيرُ حظ، إلاّ أنّا نقتصر على وضع واحد مخصوص من أوضاعها، وهو أن يكون البصر والمبصر على عمود واحد قائم على سطح الجسم الكري.

فليكن البصر نقطة ا، وليكن الجسم الكري الذي محدبه يلي البصر جسم ب جـ د ز، وليكن مركزه نقطة ه. ونصل ا ه ونخرجه على استقامة، وليقطع سطح الكرة على نقطتي ب د، ونخرجه في جهة د إلى نقطة ح. ونخرج من خط ا ح سطحًا مستويًا يقطع الكرة، فهو يحدث في سطح الكرة دائرةً، فليكن / دائرة ب جـ د ز. ف-١٢٢-و وقد تبين في الشكل التاسع من أشكال فصل الخيال أن خط د ح عليه نقط كثيرة تنعطف صورها إلى بصر ا من محيط دائرة ب جـ د ز، وأن الخط الذي عليه تلك النقط تنعطف صورة جميعه إلى بصر ا إذا كان ب جـ د ز متصلاً وغير منقطع في جهة د. فليكن خط ح ل تنعطف صورته إلى بصر ا من محيط دائرة ب جـ د ز. وإذا كان الجسم المشف متصلاً في جهة د، فلتكن النقطة التي

5 كرة: الكرة [ف] – 6 لا: الا [ف] – 9 من: ومن [ك] – 11 الذي: الذي يلي [ك] / ب جـ د ز: ب ح د ز [ك] وهنا يخلط الناسخ عادة بين الجيم والحاء ولن نشير لهذا مرة أخرى – 13 في: من [ك] / خط: كتب «سطح» ثم كتب فوقها «خط» [ك] – 16 النقط: النقطة [ف، ك] – 17 فليكن: وليكن [ك] – 18 فلتكن: ولتكن [ف، ك].

تنعطف منها صورة نقطة ح إلى بصر ا نقطة جـ والنقطةُ التي تنعطف منها صورة نقطة ل إلى بصر ا نقطة ط. فتكون صورة خط ح ل تنعطف إلى بصر ا من قوس جـ ط.



ونصل خطوط ح م جـ ح ا ل ن ط ط ا ‹جـ ا›، فصورة نقطة ح تمتدّ على خط ح جـ
وتنعطف على خط جـ ا وصورةُ نقطة ل تمتدّ على خط ل ط وتنعطف على خط ط ا. ونصل
خطوط ه جـ ه ط ه م ه ن، ونخرج ه م إلى س ونخرج ه ن إلى ف. فالصورة التي تمتدّ
على خط ا جـ تنعطف على خط جـ ح وتنتهي إلى نقطة ح، والصورة / التي تمتد على خط ف-١٢٢-ظ
ا ط تنعطف على خط ط ل وتنتهي إلى نقطة ل؛ هذا إذا كان الجسم المشف متصلاً إلى
نقطة ح. فإذا كان جسم الكرة منفصلاً عند السطح الكري، فإن الصورة التي تمتدّ على خط
ا جـ تنعطف على خط جـ م، فيكون انعطافها إلى جهة العمود الذي هو ه جـ. وإذا انتهت

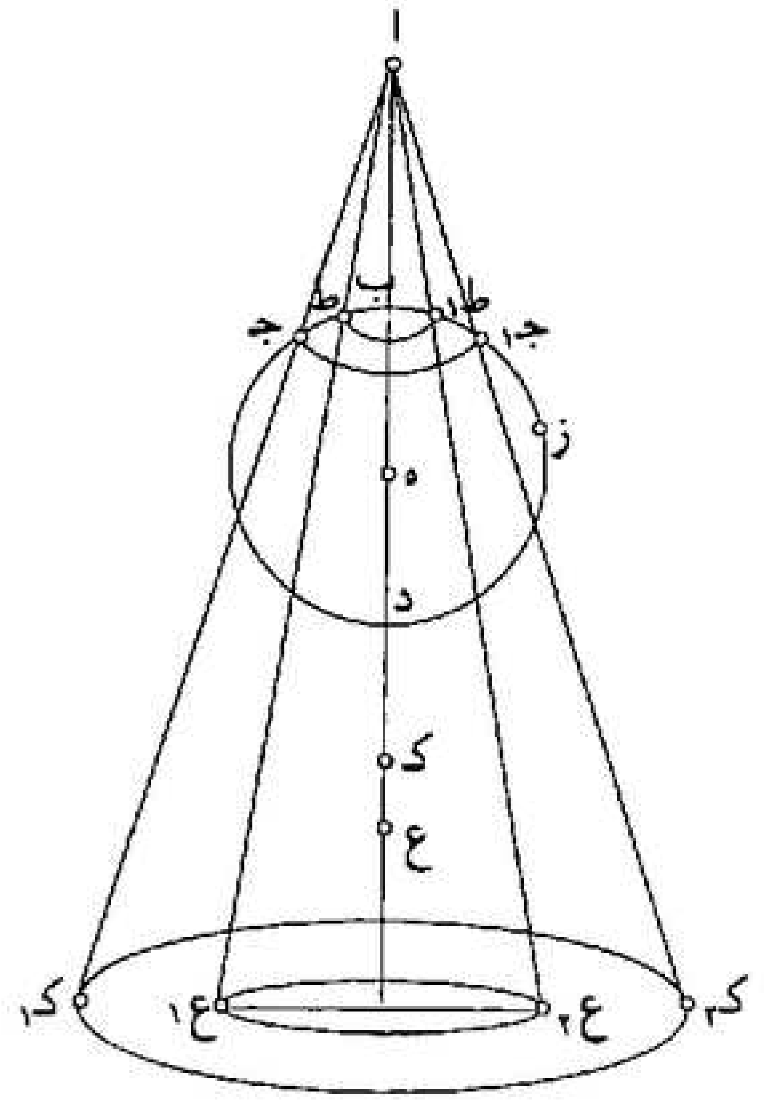
1 النقطة: ناقصة [ك] / صورة: ناقصة [ك] – 1-2 إلى بصر ا: ناقصة [ك] وهي مثبتة في [ت] – 2 ط: ه [ك] / صورة: صورته [ك] / جـ ط: ح ط [ف، ك] – 9 فيكون: ويكون [ك].

الصورة إلى نقطة م، انعطفت انعطافًا ثانيًا إلى خلاف جهة العمود الذي هو خط ه م س، فلتنعطف إلى نقطة كـ. وكذلك الصورة التي تمتدّ على خط ا ط تنعطف على خط ط ن، وإذا انتهت إلى نقطة ن ‹انعطفت› انعطافًا ثانيًا إلى خلاف جهة العمود الذي هو خط ه ن ف. فليكن انعطاف الصورة التي تنتهي إلى نقطة ن على خط ن ع، فصورة نقطة كـ تمتدّ على خط كـ م وتنعطف على خط م جـ ثم تنعطف انعطافًا ثانيًا على خط جـ ا، وكذلك صورة نقطة ع تمتدّ على خط ع ن وتنعطف على خط ن ط ثم تنعطف انعطافًا ثانيًا على خط ط ا. فصورة جميع خط كـ ع تنعطف إلى بصر ا من قوس جـ ط. وإذا أثبتنا خط ا كـ وتوهمنا شكل / ا جـ م كـ مستديرًا حول خط ا كـ، حدث من قوس جـ ط شكلٌ مستديرٌ ف-١٢٣-و كالحلقة. فتكون صورة خط كـ ع منعكسة من جميعه إلى بصر ا، ويكون خيال خط كـ ع هو مركز البصر الذي هو نقطة ا، فتُرى صورة كـ ع في جميع السطح المستدير الذي هو موضع الانعطاف الذي على استقامة خطوط الشعاع الذي هو على شكل الحلقة. فتكون صورة خط كـ ع أعظم منه، ويكون شكل الصورة مخالفًا لشكل خط كـ ع الذي هو المبصر.

وإذا اعتبر هذا المعنى وجد على ما ذكرناه. فإذا أراد المعتبر أن يعتبر هذا المعنى، فليعتمد كرةً من البلور أو الزجاج النقي، ولتكن صحيحة الاستدارة بغاية ما يمكن، وليكن جزء من الشمع يسيرًا، وليكن في قدر الحمّصة، فإن الاعتبار بالجسم الصغير يكون أبين، وليسوده بسواد، فإن السواد الصغير في الجسم المشف يكون أظهر؛ وليفتل القطعة الشمع حتى تستدير وتصير على / شكل الكرة، ثم يغرز هذا الشمع على رأس إبرة، ثم يجعل الكرة المشفة مقابلة ف-١٢٣-ظ لإحدى عينيه ويغمض العين الأخرى، ويرفع الإبرة ويجعلها من وراء الكرة المشفة وينظر إلى وسط / الكرة المشفة، ويجعل القطعة الشمع مقابلة لوسط الكرة حتى تصير القطعة الشمع ك-٨٦-ظ والبصر ومركز الكرة المشفة على خط واحد مستقيم بالقياس إلى الحس، وينظر إلى سطح الكرة المشفة فإنه يرى في سطحها سوادًا مستديرًا على شكل الحلقة. / فإن لم يره، فليقدم ف-١٢٤-و القطعة الشمع ويؤخرها إلى أن يرى السواد المستدير. فإذا رأى السواد المستدير، فليحط الشمع فإنه يبطل ذلك السواد المستدير، ثم يرد الشمع إلى موضعه فإنه يرى ذلك السواد المستدير.

2 فلتنعطف إلى نقطة كـ: ناقصة [ف] / وكذلك: ولذلك [ف، ك] – 3 انتهت: انعطفت [ك] وفي [ت] cum fuerit refracta – 4 ه ن ف: ه ن كـ [ف] – 8 حول: مكررة [ك] / شكل مستدير: شكلا مستديرا [ف، ك] – 9 فتكون: تكون [ك] / منعكسة: هكذا، والمقصود منعطفة [ف، ك] وفي [ت] refringetur – 11 على (الثانية): ناقصة [ك] – 12 مخالفًا: مخالفة [ف، ك] – 13 أن: بأن [ك] – 14 صحيحة: صحيح [ك] / بغاية: لغاية [ك] / جزء: جزا [ف، ك] – 16 أظهر: ناقصة [ك] / القطعة: النقطه [ك] / القطعة الشمع: وردت هكذا [ف، ك] والأفصح «قطعة الشمع» – 17 يغرز ... إبرة: غرز الإبرة في الشيء «أدخلها»، وبالتالي لا يصح القول «غرز الشمع» وإن فهم المعنى.

فيتبيّن من هذا الاعتبار أن المبصر إذا كان من وراء جسم كري مشف أغلظ من الهواء، وكان البصر وذلك المبصر ومركز الجسم الكري على خط واحد مستقيم، فإن البصر يدرك ذلك المبصر على شكل الحلقة.



وإن كانت ب جـ د ز في جسم أسطواني أيضًا، وكان شفيف ذلك الجسم أغلظ من شفيف الهواء، فإن صورة خط كـ ع ترى عند قوس جـ ط وعلى القوس المساوية لها النظيرة لها التي من قوس ب ز. ولكن ليس تكون هذه الصورة مستديرة، لأن شكل ا جـ م كـ إذا دار حول خط ا كـ فليس يمرّ قوس جـ ط بجميع سطح الأسطوانة، ولكن ربّما انعطفت الصورة من بعض قطوع الأسطوانة، إلاّ أنها لا تكون متصلة على استقامة، لأن السطح الذي يخرج من خط ا كـ ويمرّ بسهم الأسطوانة يحدث في سطح الأسطوانة / الذي يلي بصر ا خطًا ف – ١٢٤ – ظ مستقيمًا يمرّ بنقطة ب ممتدًّا في طول الأسطوانة. ولا تنعطف صورة خط كـ ع من ذلك الخط المستقيم، لأن خط كـ ب يكون عمودًا على ذلك الخط المستقيم. فليس تكون الصورة مستديرةً إذا كان الجسم أسطوانيًا، بل تكون صورتين، منقطعة إحداهما عن الأخرى. فيرى خط كـ ع اثنين، وكلٌ واحد من الاثنين أعظم من خط كـ ع، وتكون كلٌّ واحدة من الصورتين مخالفة لصورة كـ ع، ومع ذلك فإن الصورتين تكونان نقطة واحدة هي مركز البصر.

الشكل ليس في المخطوطتين – 7 يمرّ: ثم [ف] يمرّ به [ك] – 8 لا: ناقصة [ك] وكذلك في [ت] / لأن: أثبتها في الهامش [ف] – 10 ب: ف، مهملة [ف] – 11 كـ ب: كـ ز [ك] – 12 منقطعة: منعطفة [ف، ك] / عن: على [ك] وفي [ت] refringitur super alteram – 14 تكونان: تكون [ف، ك].

ابن الهيثم

رسالة في الكرة المحرقة

٧٤ - ظ *بسم الله الرحمن الرحيم*

رب يسّر وتـمّم بالخير والسعادة

شعاع الشمس يخرج من الشمس على خطوط مستقيمة، وينفذ في كلّ جسم مشف مقابل للشمس. فإذا نفذ في جسم مشف، ثم لقي جسمًا آخر مشفًا مخالف الشفيف لشفيف الجسم الذي هو فيه ولم يكن قائمًا على سطح الجسم الثاني على زوايا قائمة، انعطف ولم ينفذ على استقامته.

وإذا كان قائمًا على سطح الجسم الثاني، امتدّ على استقامة ولم ينعطف. وإذا كان الجسم الثاني أغلظ من الجسم الأول، كان انعطاف الشعاع إلى جهة العمود القائم على سطح الجسم الثاني. وإن كان الجسم الثاني ألطف من الجسم الأول، كان انعطاف الشعاع إلى خلاف جهة العمود القائم على سطح الجسم الثاني، وقد بيّنا هذا المعنى في المقالة السابعة من كتابنا في *المناظر* وأوضحنا الطريق إلى سبره واعتباره. وتبيّن هذا المعنى أيضًا في المقالة الخامسة من كتاب بطلميوس في *المناظر*.

13-14 «وإذا صادفت الأضواء الممتدة في الجسم المماس للضوء الذي هو مبدأها جسمًا مخالف الشفيف لشفيف الجسم الذي هي فيه، فإن ما كان منها على خطوط قائمة على سطح الجسم الثاني امتد على استقامته في الجسم الثاني، وما كان منها على خطوط مائلة على سطح الجسم الثاني انعطف في الجسم الثاني ولم ينفذ على استقامته وامتد في الجسم الثاني على سموت خطوط مستقيمة غير الخطوط الأول التي كان ممتدًا عليها في الجسم الأول. وأن الضوء إذا كان منعطفًا يكون الخط الذي امتد عليه الضوء في الجسم الأول والخط الذي انعطف عليه في الجسم الثاني في سطح واحد مستوٍ، وأن انعطاف الضوء إذا خرج من الجسم الألطف إلى الجسم الأغلظ يكون إلى جهة العمود الخارج من موضع الانعطاف القائم على سطح الجسم الأغلظ على زوايا قائمة، وإذا خرج من الجسم الأغلظ إلى الجسم الألطف كان انعطافه إلى ضد الجهة التي فيها العمود الخارج من موضع الانعطاف القائم على سطح الجسم الألطف على زوايا قائمة.» — 13 سبره: أثبتها الناسخ مرة أخرى في الهامش.

والزجاج والبلور والماء وما جرى مجراها أغلظ من الهواء. فإذا امتدّ شعاع الشمس في الهواء وانتهى إلى جسم من الزجاج أو البلور أو الماء أو ما جرى مجرى ذلك، ولم يكن قائمًا على سطحه على زوايا قائمة، فإنه ينعطف ولا يمتدّ على استقامة، ويكون انعطافه إلى جهة العمود القائم على سطح ذلك الجسم، ثم ينفذ في الجسم الثاني الذي هو الزجاج وما يجري مجراه على استقامة الخط الذي انعطف عليه، فإذا انتهى إلى آخره وكان من ورائه هواء، فإنه ينعطف أيضًا ويكون انعطافه إلى خلاف جهة العمود القائم على سطح الهواء المحيط بذلك الجسم. وإذا انعطف الشعاع من الهواء إلى الزجاج، كانت زاوية انعطافه أقلّ من نصف الزاوية التي يحيط بها الشعاع مع العمود وأكثر من ربعها. وقد / بيّن ذلك بطلميوس في المقالة الخامسة من كتابه في *المناظر*. ٧٥ - و

وإنّ الزاوية التي يحيط بها الشعاع مع العمود كلّما عظمت عظمت زاوية الانعطاف، وكانت نسبة زاوية الانعطاف إلى الزاوية التي يحيط بها الشعاع مع العمود قبل الانعطاف أعظم. وإذا كانت زوايا الشعاع والعمود متساوية، كانت زوايا الانعطاف متساوية.

وكل قوسين مختلفتين تقسمان على نسبة واحدة، فإن نسبة جيب الجزء الأعظم من القوس الصغرى إلى جيب الجزء الأصغر منها أعظم من نسبة جيب الجزء الأعظم من القوس العظمى إلى جيب الجزء الأصغر منها، وهذا المعنى قد بيّناه في كتابنا في *خطوط الساعات*. وكل شعاع من شعاعات الشمس إذا حصل في نقطة من النقط، فإنه يحدث عند تلك النقطة حرارة ما؛ فإذا انعطف إلى نقطة واحدة شعاعات كثيرة، حصل في تلك النقطة حرارات كثيرة. وإذا كثرت الحرارة عند نقطة من النقط وتضاعفت، حدث عند تلك النقطة إحراق لفرط الحرارة.

‹آ› وإذ قد قدمنا هذه المقدمات، فإنا نقول: إن كل كرة من الزجاج أو البلور أو ما يجري مجراهما إذا قوبل بها جرم الشمس، فإن شعاع الشمس ينعطف على محيط دائرة في الكرة إلى نقطة واحدة.

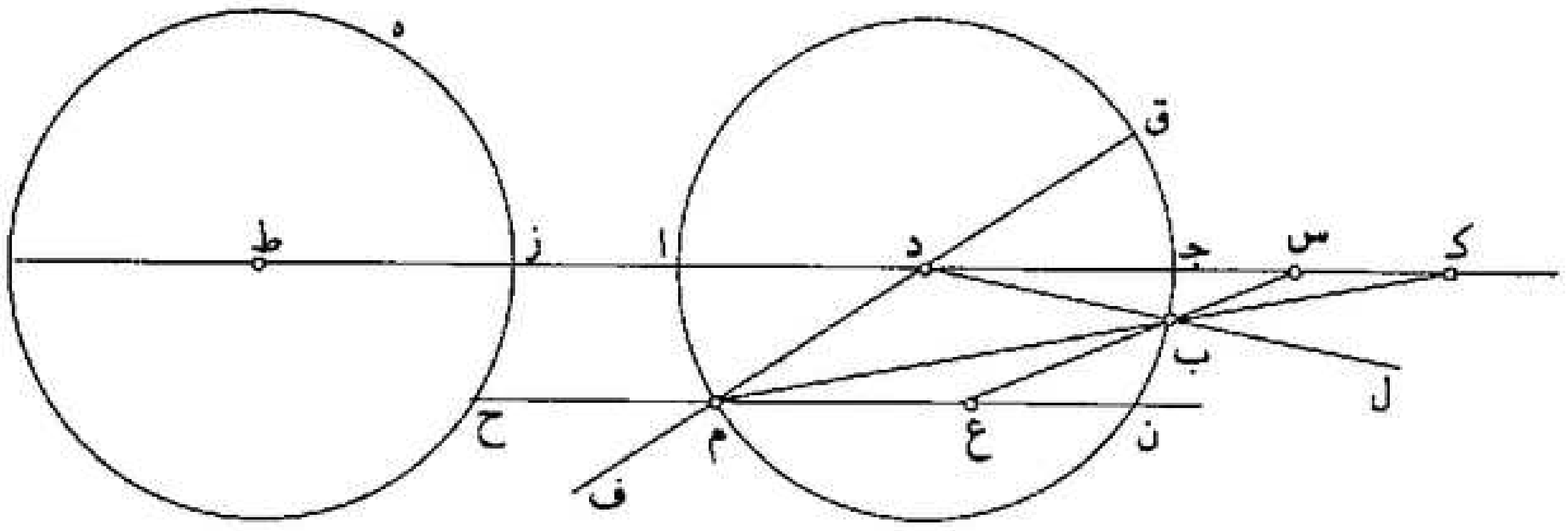
فلنبيّن ذلك بالبرهان: وليكن كرة من الزجاج أو ما يجري مجراه عليها آ بَ جـَ، فهذه الكرة إذا قوبل بها الشمس وأشرق عليها ضوء الشمس، فإنّ بين مركز الكرة وبين

20 فإنا: كررها في الهامش.

مركز الشمس خط متخيّل على جميع الأحوال. فإذا تُوهم سطح يخرج من ذلك الخط ويقطع جرم الشمس، فإنه يحدث في الكرة دائرة ويحدث في جرم الشمس دائرة.

فلتكن الدائرة التي في الكرة دائرة ا ب جـ، ولتكن الدائرة التي في الشمس دائرة ه ز ح، وليكن مركز الكرة نقطة د، ومركز الشمس نقطة ط، وليكن الخط الذي يمرّ بمركزيهما – الذي فيه خرج السطح – خط ط ز ا د جـ / ولينفذ على استقامة إلى ك. ٧٥-ظ ونتوهم نقطة على محيط دائرة ا ب جـ قريبة من نقطة ا ولتكن نقطة م، ونتوهم خطًّا يخرج من نقطة م في سطح دائرة ا ب جـ، ويكون موازيًا لخط ا ط، وننفذه في الجهتين، فهو ينتهي إلى محيط دائرة ه ز ح، فلينته إلى نقطة ح، ولينته في الجهة الأخرى إلى محيط دائرة ا ب جـ، فلينته إلى نقطة ن، فيصير هذا الخطّ خط ح م ن. ونصل د م وننفذه إلى ف، فيكون د م عمودًا على سطح كرة ا ب جـ التي من الزجاج أو البلور، وتكون زاوية ح م ف مثل زاوية ن م د.

وشعاع الشمس يمتدّ ‹من كلّ نقطة› منها [شعاع] على كل خط يخرج من تلك النقطة في كل جسم مشف مقابل لتلك النقطة.



وإذا حصل الشعاع عند نقطة م، انعطف إلى جهة خط د م. لأن د م هو العمود القائم على سطح الكرة، وجسم الكرة أغلظ وأقلّ شفيفًا من جسم الهواء، ويكون انعطافه بحسب مقدار زاوية ح م ف، لما تبيّن في المقدمات. فإن كانت زاوية ح م ف عظيمة المقدار، كان الانعطاف كثيرًا، وإن كانت هذه الزاوية صغيرة المقدار، كان الانعطاف يسيرًا. وزاوية ح م ف مساوية لزاوية ا د م، وزاوية ا د م بحسب قوس ا م. فالشعاعات التي تخرج من الشمس إلى النقط القريبة من نقطة ا يكون انعطافها يسيرًا، والشعاعات التي تخرج إلى النقط البعيدة من نقطة ا يكون انعطافها كثيرًا، ومقدار الانعطاف يكون أبدًا

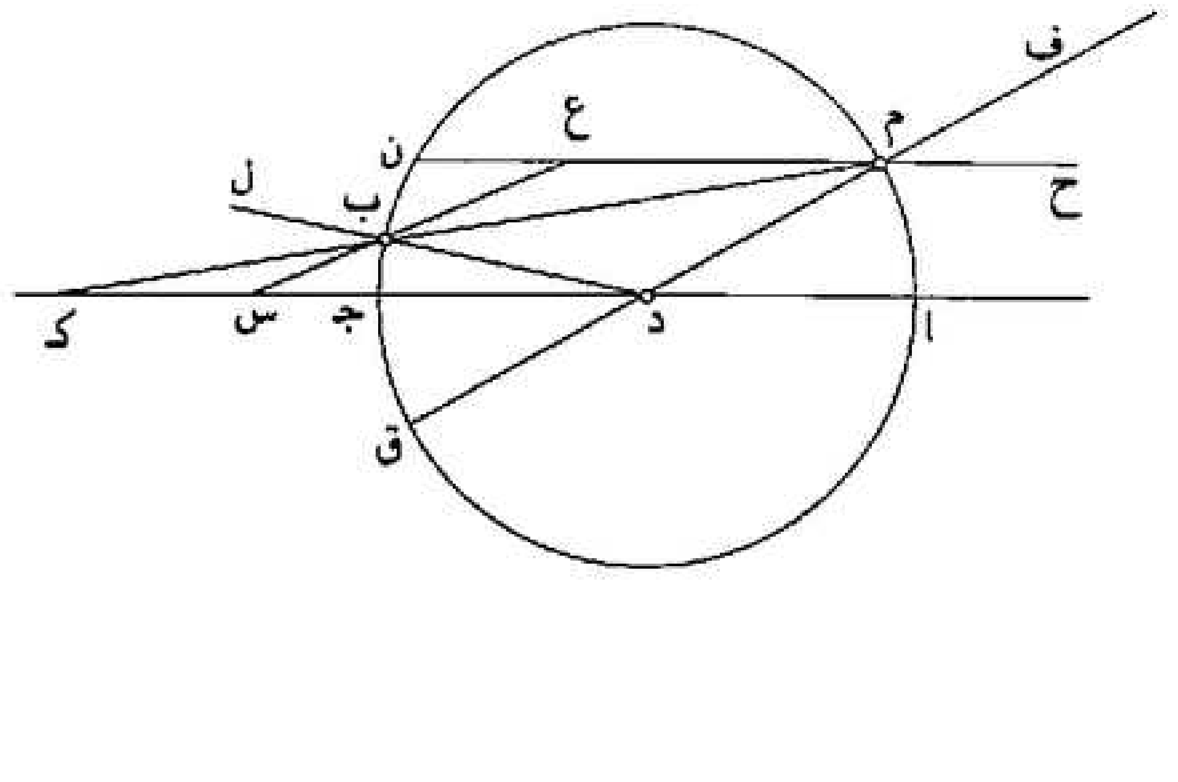
12 وشعاع: يستعمل المؤلف كلمة شعاع هنا كسابقيه على أنها جمع.

أقلّ من نصف الزاوية النظيرة لزاوية ح م ف وأكثر من ربعها، وكلّما كانت الزاوية النظيرة لزاوية ح م ف أعظم، كانت زاوية الانعطاف أعظم نسبة إليها. فشعاع ح م ن ينعطف عند نقطة م ويكون انعطافه إلى جهة عمود د م، فلينعطف على خط م ب، فتكون زاوية د م ب أقلّ من نصف زاوية ح م ف وأكثر من ربعها. ونخرج م د إلى ق، فيكون قوس ق جـ مثل قوس جـ ن، لأن كل واحدة منهما مساوية / لقوس ا م، فقوس ن ب أصغر ٧٦-و من قوس ب ق، فنقطة ب فيما بين نقطتي جـ ن. ونخرج م ب فهو يلقى خط جـ ك، فليلقه على نقطة ك، ونصل د ب وننفذه إلى ل. فلأن نقطة ب عند نهاية الكرة، يكون خط ب ك في الهواء؛ ولأن الشعاع ينتهي إلى نقطة ب، وليس هو عمودًا على سطح الكرة، لأن العمود الذي يخرج من نقطة ب هو خط د ب ل، يكون الشعاع ينعطف عند نقطة ب، ويكون انعطافه إلى خلاف جهة العمود القائم على سطح الهواء المحيط بالكرة الذي هو خط ب ل، فلينعطف الشعاع على خط ب س. فالشعاع الذي يمتدّ على خط ح م ينعطف على خط م ب، ثم ينعطف على خط ب س وينتهي إلى نقطة س.

وإذا توهمنا خط ك ط ثابتًا، وتوهمنا سطح س ب م ح دائرًا حول خط ط ك، أحدثت نقطة ب دائرة في كرة ا ب جـ، وأحدثت نقطة م دائرة في كرة ا ب جـ، وأحدثت نقطة ح دائرة في كرة الشمس، وتكون كل نقطة من الدائرة التي في كرة الشمس يخرج منها شعاع إلى نقطة من الدائرة التي ترسمها نقطة م، وتنعطف إلى نقطة من الدائرة التي ترسمها نقطة ب، وتنعطف إلى نقطة س.

فكل كرة من الزجاج أو البلور إذا قوبل بها الشمس، فإنه ينعطف شعاع الشمس من محيط دائرة منها إلى نقطة واحدة على سهمها؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

‹ب› ولنعد دائرة ا ب جـ والخطوط / التي فيها، فأقول: إن زاوية د س ب هي ٧٦-ظ ضعف زاوية الانعطاف.



6 م ب: من ب.

برهان ذلك: أنا نخرج خط س ب في جهة ب، فهو يلقى خط م ن، فليلقه على نقطة ع.

فلأن شعاع م ب انعطف على خط ب س، يكون متى خرج شعاع على خط س ب، انعطف على ب م. فتكون زاوية د ب م هي التي تبقى بعد زاوية الانعطاف، وزاوية د ب م مثل زاوية د م ب وزاوية د م ب هي التي تبقى بعد زاوية الانعطاف التي عند نقطة م. وإذا كانت هاتان الزاويتان متساويتين، فزاوية الانعطاف التي عند نقطة ب مساوية لزاوية الانعطاف التي عند نقطة م، لأن شفيف الكرة متشابه وشفيف الهواء متشابه، فزوايا الانعطاف تكون متساوية. وزاوية الانعطاف التي عند نقطة ب هي زاوية كـ ب س، لأن الشعاع الذي انعطف هو شعاع م ب، وزاوية الانعطاف التي عند نقطة م هي زاوية ب م ن، فزاوية كـ ب س مثل زاوية ب م ن، فزاوية م ب ع مثل زاوية ب م ع، فزاوية س ع ن ضعف زاوية ب م ع. وزاوية ب م ع هي زاوية الانعطاف، وزاوية س ع ن مثل زاوية د س ب لأن خطيْ د س م ن متوازيان، فزاوية د س ب ضعف زاوية الانعطاف؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

‹جـ› ولنعد الصورة، فأقول: إنه ليس ينعطف إلى نقطة س شعاع آخر من الشعاعات الموازية لخط ا د جـ التي في سطح دائرة ا ب جـ.

برهان ذلك: أنه لا يمكن، فإن أمكن، فلينعطف إليها شعاع آخر، وليكن شعاع ه ن ع س، فتكون زاوية / ع س د ضعف زاوية الانعطاف التي عند نقطة ن. ونصل د ن ٧٧-و د ع ونخرج ن د إلى ص، فتكون زاوية ص د ع ضعف زاوية د ن ع التي هي الباقي بعد زاوية الانعطاف. وزاوية ص د جـ مساوية لزاوية ا د ن المساوية للزاوية التي يحيط بها شعاع ه ن مع عمود د ن، إذا خرج د ن في جهة ن. فزاوية جـ د ع هي زيادة ضعف الزاوية الباقية بعد الانعطاف على الزاوية التي يحيط بها الشعاع والعمود. وكذلك زاوية جـ د ب هي زيادة ضعف الزاوية الباقية بعد الانعطاف على الزاوية التي يحيط بها الشعاع والعمود. وقد تبيّن في المقدمات أن الزاوية التي يحيط بها الشعاع والعمود كلّما عظمت عظمت زاوية الانعطاف، وكانت نسبة زاوية الانعطاف إلى الزاوية التي يحيط بها الشعاع والعمود أعظم؛ وأنّ زاوية الانعطاف تكون أبدًا أقلّ من نصف الزاوية التي يحيط بها الشعاع ‹والعمود› وأكثر من ربعها. وقد تبيّن في الشكل الذي قبل هذا الشكل أنّ زاوية ا د م

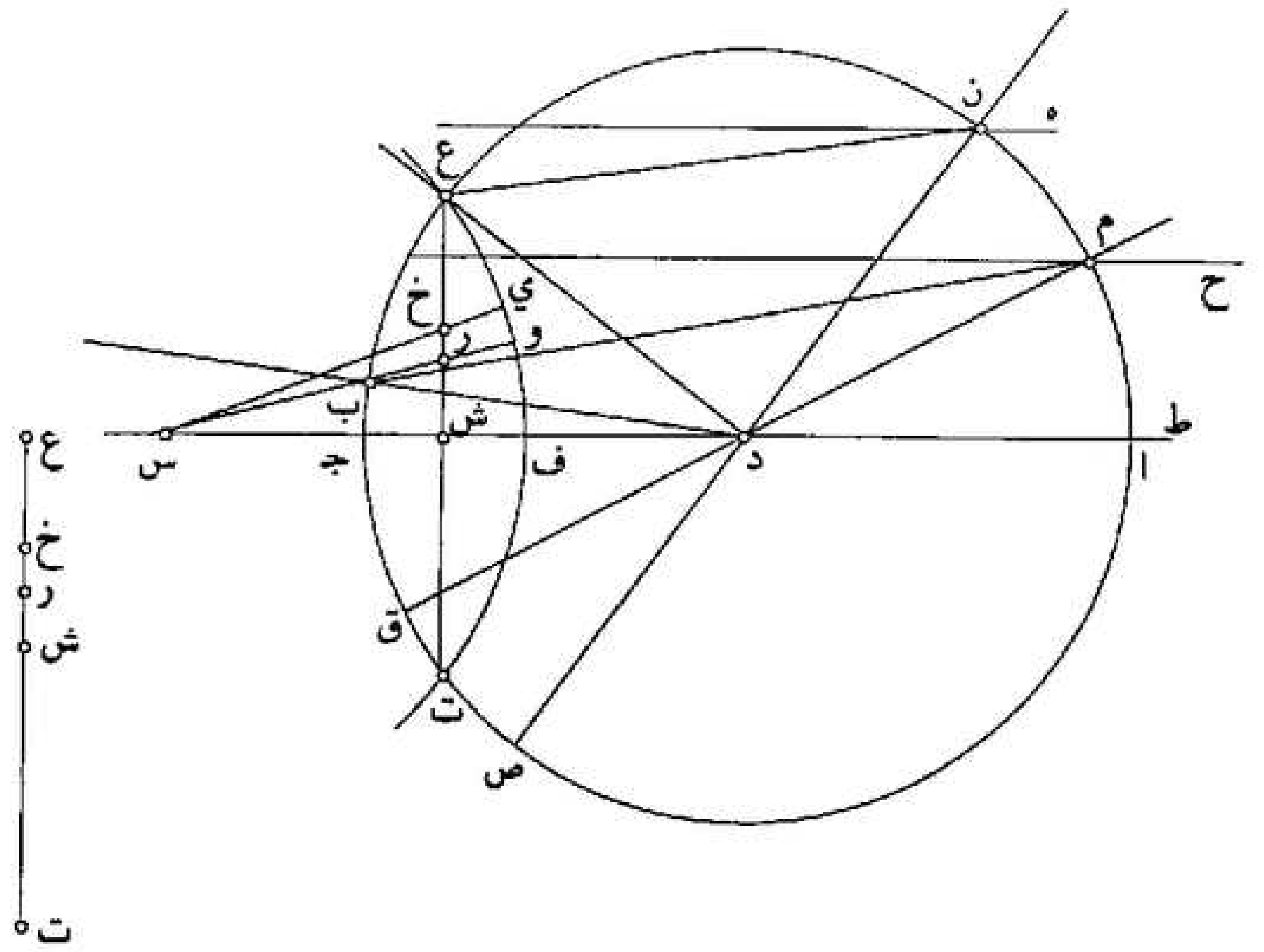
3 م ب: م ن – 10 هي: على – 17 ه ن ع س: ه ر ع س – 18 د ن ع: د ر ع – 26 ا د م: ا د ن.

مساوية للزاوية التي يحيط بها الشعاع والعمود، وكذلك زاوية ا د ن؛ فنسبة زاوية الانعطاف التي عند نقطة ن إلى زاوية ا د ن أعظم من نسبة زاوية الانعطاف التي عند نقطة م إلى زاوية ا د م. فنسبة زاوية الانعطاف التي عند نقطة ن إلى نصف زاوية ا د ن أعظم من نسبة زاوية الانعطاف التي عند نقطة م إلى نصف زاوية ا د م. فبالتفصيل تكون نسبة زاوية الانعطاف التي عند نقطة ن إلى تمام النصف أعظم من نسبة زاوية الانعطاف التي عند نقطة م إلى تمام النصف. وتمام النصف هو زيادة الباقي بعد الانعطاف على النصف. فنسبة زاوية الانعطاف التي عند نقطة ن إلى زيادة الباقي بعد الانعطاف على النصف، ‹بل›، فنسبة ضعف زاوية الانعطاف التي عند نقطة ن إلى ضعف زيادة الباقي بعد الانعطاف على نصف زاوية ا د ن / ٧٧-ظ أعظم من نسبة ضعف زاوية الانعطاف التي عند نقطة م إلى ضعف زيادة الباقي بعد الانعطاف على نصف زاوية ا د م. وضعف زيادة الباقي بعد الانعطاف على نصف زاوية ا د ن هو زيادة ضعف الباقي بعد الانعطاف على زاوية ا د ن. وكذلك ضعف زيادة الباقي بعد الانعطاف على نصف زاوية ا د م هو زيادة ضعف الباقي بعد الانعطاف على زاوية ا د م. وزاوية ع س د هي ضعف زاوية الانعطاف التي عند نقطة ن، وزاوية ب س د هي ضعف زاوية الانعطاف التي عند نقطة م. وزاوية ع د جـ هي زيادة ضعف الباقي بعد الانعطاف على زاوية ا د ن، وزاوية جـ د ب هي زيادة ضعف ‹الباقي› بعد الانعطاف على زاوية ا د م. فنسبة زاوية ع س د إلى زاوية ع د س أعظم من نسبة زاوية ب س د إلى زاوية ب د س. وبالتبديل تكون نسبة زاوية ع س د إلى زاوية ب س د أعظم من نسبة زاوية ع د جـ إلى زاوية ب د جـ. وزاوية الانعطاف أقلّ من نصف الزاوية التي يحيط بها الشعاع والعمود، وأكثر من ربعها، فزاوية الانعطاف أعظم من تمام النصف، فضعف زاوية الانعطاف أعظم من ضعف تمام النصف، فزاوية ع س د أعظم من زاوية ع د جـ، وكذلك زاوية ب س د أعظم من زاوية ب د جـ.

ونجعل نقطة س مركزًا، وندير ببعد س ع قوسًا من دائرة، وليكن قوس ع ف ت، ولتكن نقطة ف على خط د س، ونقطة ت على محيط الدائرة؛ فيكون قوس ع ف مثل قوس ف ت، لأن الخطّ الذي يخرج من نقطة س إلى نقطة ت يكون مساويًا لخط س ع، والخط الذي يخرج من نقطة د إلى نقطة ت يكون مساويًا لخط د ع. ونصل

1 ا د ن: ا د م – 4 فبالتفصيل: بالتفصيل – 10 وضعف: وضعت، ثم اقترح الصواب في الهامش مشيرًا إليه بـ «ظ»، أي «والظاهر» – 13 ع س د: أثبت الناسخ جـ في الهامش لتحل محل د؛ وهي نفس الزاوية – 14 ب س د: ف س – 21 وكذلك: ولذلك – 22 ع ف ت: كتبها ع و ف وأثبت الصحيح في الهامش – 24 ف ت: كتبها ف و وأثبت الصحيح في الهامش.

ت ع، فيكون عمودًا على خط د س، ويُقسم بنصفين على خط د س، ويكون قوس ت جـ مثل قوس جـ ع. ونخرج س ب على استقامة في جهة ب، فهو يقطع خط / ت ع ويلقى قوس ع ف ت. فليقطع خط ت ع على نقطة ر ويلقى القوس على نقطة و، ٧٨-و
فتكون نسبة قوس ع ف إلى قوس ف و كنسبة زاوية ع س د إلى زاوية د س ب، ونسبة قوس ع جـ إلى قوس جـ ب كنسبة زاوية ع د جـ إلى زاوية جـ د ب. وقد تبيّن أن نسبة زاوية ع س د إلى زاوية د س ب أعظم من نسبة زاوية ع د جـ إلى زاوية جـ د ب، فنسبة قوس ع ف إلى قوس ف و أعظم من نسبة قوس ع جـ إلى قوس جـ ب؛ فنسبة قوس و ع إلى قوس ع ف أعظم من نسبة قوس ب ع إلى قوس ع جـ، فنسبة قوس و ع إلى قوس ع ت أعظم من نسبة قوس ب ع إلى قوس ع ت؛ فنسبة قوس ع و إلى قوس و ت أعظم من نسبة قوس ع ب إلى قوس ب ت. فلتكن نسبة قوس ع ي إلى قوس ي ت كنسبة قوس ع ب إلى قوس ب ت؛ فتكون نسبة قوس ت ي إلى قوس ي ع كنسبة ‹قوس› ت ب إلى قوس ب ع. ونصل س ي، فهو يقطع خط ت ع، فليقطعه على نقطة خ، وخط د ب يقطع خط ت ع، فليقطعه على نقطة ش، فتكون نسبة جيب قوس ت ب إلى جيب قوس ب ع كنسبة ت ش إلى ش ع، ونسبة جيب قوس ت ي إلى جيب قوس ي ع كنسبة ت خ إلى خ ع. وقوس ف ع أعظم من الشبيهة بقوس جـ ع، لأن زاوية ع س د أعظم من زاوية ع د جـ، فقوس ت ف ع أعظم من الشبيهة بقوس ت جـ ع. ونسبة قوس ت ي إلى قوس ي ع كنسبة قوس ت ب إلى قوس ب ع، فنسبة ت ش إلى ش ع أعظم / من نسبة ت خ إلى خ ع لما تبيّن في المقدمات، وهذا محال. ٧٨-ظ



13 ش: مهملة، ولن نشير إليها مرة أخرى – 16 ع س د: أثبت في الهامش ع س جـ.

فليس نسبة قوس ع و إلى ‹قوس› و ت أعظم من نسبة قوس ع ب إلى قوس ب ت، فليس نسبة زاوية ع س د إلى زاوية د س ب أعظم من نسبة زاوية ع د جـ إلى زاوية جـ د ب. لكنه قد تبيّن أنّ نسبة زاوية ع س د إلى زاوية د س ب أعظم من نسبة زاوية ع د جـ إلى زاوية جـ د ب، وهذا محال. فليس ينعطف إلى نقطة س شعاع من الشعاعات الموازية لخط ا جـ غير شعاع واحد؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

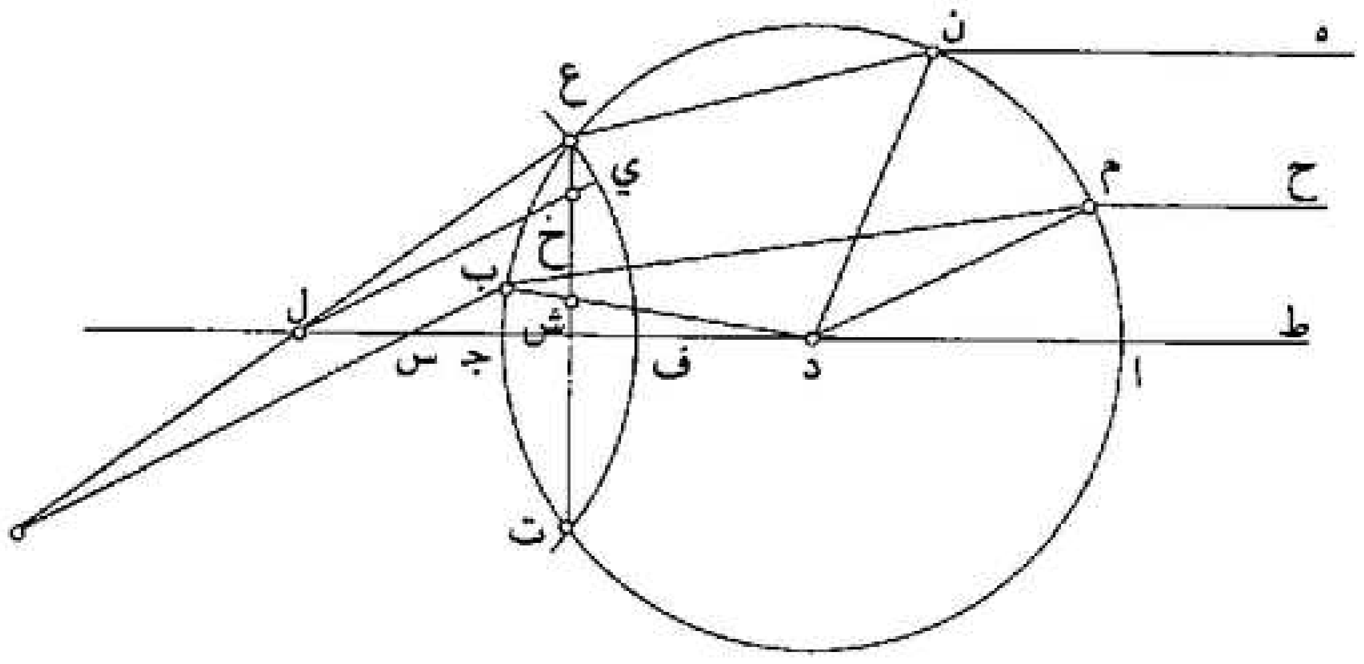
‹د› وإذ قد تبيّن ذلك، فإنا نقول: إن الشعاع الذي ينعطف من نقطة ع ينتهي إلى نقطة من خط جـ س فيما بين نقطتي جـ س، ولا ينتهي إلى نقطة من وراء نقطة س.

وإن أمكن، فلينعطف الشعاع من نقطة ع إلى نقطة من وراء نقطة س. ولنعد الصورة، وليكن الشعاع مثل شعاع ع ل، فتكون زاوية ل ضعف زاوية الانعطاف، وتكون أعظم من زاوية س، وتكون نسبتها إلى زاوية س أعظم من نسبة زاوية ع د جـ إلى زاوية ب د جـ. ولتكن نسبة زاوية ع ل د إلى زاوية د ل ي كنسبة زاوية ع د جـ إلى زاوية ب د جـ. ولتكن نقطة ي على قوس ت ف ع، فتكون زاوية ي ل د أعظم من زاوية ب س د، فخط ي ل يلقى خط ب س من وراء نقطة س، فخط ل ي فيما بين خطي س ب ل ع، فهو يقطع خط ت ع، فليقطعه على نقطة خ، مثل خط ل خ ي. فتكون نسبة قوس ع ف إلى قوس ف ي كنسبة زاوية ع ل د إلى زاوية ي ل د، التي هي نسبة زاوية ع د جـ إلى زاوية ب د جـ؛ فنسبة قوس ع ف إلى قوس ف ي كنسبة قوس ع جـ إلى قوس جـ ب، فنسبة قوس ف ع إلى قوس ع ي كنسبة قوس جـ ع إلى قوس ع ب، فنسبة قوس ت ف ع إلى قوس ع ي كنسبة قوس ت جـ ع إلى قوس ع ب، فنسبة قوس ت ف ي إلى قوس ي ع كنسبة قوس ب جـ ت إلى قوس ب ع، فنسبة جيب قوس ت جـ ب إلى جيب قوس ب ع أعظم / من نسبة جيب قوس ت ف ي إلى جيب قوس ي ع، فنسبة ت ش إلى ش ع أعظم من نسبة ت خ إلى خ ع، وهذا محال. ٧٩-و

فليس ينعطف الشعاع من نقطة ع إلى نقطة من وراء نقطة س، وقد تبيّن أنه ليس ينعطف إلى نقطة س، فالشعاع الذي ينعطف من نقطة ع ينعطف إلى نقطة فيما بين نقطتي س جـ. وإن كان الشعاع الذي ينعطف من نقطة ن يصل إلى نقطة ب، أو إلى نقطة فيما بين نقطتي ب ع، فهو بيّن أنه ينعطف إلى نقطة فيما بين نقطتي س جـ، لأنه يحيط مع خط ا س بزاوية أعظم من زاوية ا س ب.

1 فليس: وليس – 14 ت ع: ز ع / خ: مهملة، ولن نشير إليها مرة أخرى – 20 ت جـ ب: أثبت الناسخ تحتها ت جـ ف – 25 ع: جـ.

فقد تبيّن مما بيّناه أن كلّ شعاع يصل إلى نقطة من كرة ا ب جـ ويكون موازيًا لخط ا جـ، فإنه ينعطف إلى نقطة من خط ا جـ ومن وراء نقطة جـ، وأن كل شعاع أبعد عن نقطة ا ينعطف إلى نقطة أقرب إلى نقطة جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



وقد تبيّن من هذا البيان أنه ليس ينعطف إلى نقطة واحدة من النقط، التي على قطر ا جـ، التي تحت نقطة جـ، إلاّ شعاع واحد فقط من الشعاعات الموازية التي في سطح دائرة ا ب جـ.

وقد تبيّن في الشكل الأول أن كل نقطة من محيط دائرة ا ب جـ، إذا انعطف منها شعاع إلى نقطة من الخط المتصل بخط ا جـ، فإنه ينعطف إلى تلك النقطة شعاعات متصلة من محيط الدائرة التي في الكرة التي ترسمها النقطة التي على محيط الدائرة عند حركة دائرة ا ب جـ حول قطرها.

فيتبيّن من جميع ذلك أنه ليس ينعطف شعاع الشمس المشرق على الكرة إلى نقطة واحدة من النقط التي على استقامة قطر واحد / بعينه من أقطار الكرة إلاّ من محيط دائرة ٧٩-ظ واحدة من الدوائر التي في تلك الكرة.

‹٥› وقد بقي أن نحدّ نهاية الدوائر التي في الكرة التي ينعطف منها الشعاع إلى خط واحد بعينه من الخطوط التي على استقامة أقطار الكرة، ونحدّ نهاية الخط الذي عليه تكون جميع النقط التي تنعطف إليها الشعاعات ليتعين موضع الإحراق.

16 موضع: بوضع، ثم اقترح الصواب في الهامش مشيرًا إليه بـ«ظ»، أي «والظاهر».

فلنعد دائرة ا ب جـ، ونخرج ه ب ط موازيًا لخط ا جـ، فالشعاع الذي يخرج على خط ه ب ينعطف إلى قوس ط جـ، كما تبيّن من قبل. فلينعطف الشعاع على خط ب ك، وينعطف إلى نقطة ن، ونصل د ب وننفذه إلى ح وإلى ر.

وقد بيّن بطلميوس في المقالة الخامسة من كتابه في *المناظر* أن الزاوية التي يحيط بها الشعاع والعمود إذا كانت أربعين جزءًا من الأجزاء التي بها الزاوية القائمة تسعين جزءًا، فإن الزاوية التي تبقى بعد الانعطاف تكون خمسة وعشرين جزءًا بهذه الأجزاء. وإذا كانت الزاوية التي يحيط بها الشعاع والعمود خمسين جزءًا، كانت الزاوية الباقية بعد الانعطاف ثلاثين جزءًا. فيتبيّن من ذلك أن انعطاف الأربعين جزءًا هو خمسة عشر جزءًا، وانعطاف الخمسين جزءًا هو عشرون جزءًا. فيتبيّن من ذلك أن زيادة انعطاف الخمسين على انعطاف الأربعين هو نصف زيادة الزاوية، التي يحيط بها الشعاع والعمود، على الزاوية التي يحيط بها الشعاع والعمود.

ثم بيّن بطلميوس أن زيادة الانعطاف على الانعطاف من بعد الخمسين الجزء تكون أعظم من نصف زيادة الزاوية التي يحيط بها الشعاع والعمود على الزاوية التي يحيط بها الشعاع والعمود. فإذا كانت قوس ا ب أربعين جزءًا بالأجزاء التي بها محيطُ الدائرة ثلاثمائة وستين جزءًا، كانت زاوية ا د ب أربعين جزءًا بالأجزاء التي بها زاوية قائمة تسعين جزءًا، وكانت زاوية ه ب ح أربعين جزءًا، وكانت زاوية د ب ك خمسة وعشرين جزءًا، فتكون زاوية ر د ك خمسين جزءًا / فتكون زاوية جـ د ك عشرة أجزاء. ٨٠-و

وإذا كانت قوس ا ب خمسين جزءًا، كانت زاوية ه ب ح خمسين جزءًا، وكانت زاوية ا د ب خمسين جزءًا، وكانت زاوية د ب ك ثلاثين جزءًا، وكانت زاوية ر د ك ستين جزءًا، فكانت زاوية جـ د ك عشرة أجزاء.

فالشعاع الذي يصل إلى طرف القوس، التي بُعدها عن نقطة ا أربعون جزءًا، ينعطف إلى نقطة بُعدها عن نقطة جـ عشرة أجزاء. فالشعاع الذي يصل إلى طرف القوس، التي بُعدها عن نقطة ا خمسون جزءًا، ينعطف أيضًا إلى النقطة التي بُعدها عن نقطة جـ عشرة أجزاء، ويلتقي الشعاعان على نقطة واحدة مما يلي نقطة جـ، وينعطفان إلى نقطتين مختلفتين من النقط التي تحت نقطة جـ، لأنهما يحيطان مع الخط المتصل بخط ا جـ بزاويتين مختلفتين.

3 ن: ت / ر: ت – 5 تسعين: منصوبة على تقدير أنها جملة اسمية أي: من الأجزاء التي كائن بها الزاوية القائمة، ولن نشير إلى ذلك مرة أخرى – 9 عشرون: عشرين – 17 ر د ك: ر ز ك – 20 فكانت: وكانت – 21 أربعون: اربعين – 23 خمسون: خمسين – 25 لأنهما: لأنها.

فإذا كانت قوس ا ب خمسين جزءًا، فإنا نقول: إن كل شعاع يصل إلى نقطة من وراء نقطة ب، فإنه ينعطف إلى نقطة من قوس جـ ک فيما بين نقطتي جـ ک. وليخرج شعاع على خط ف ع، ولننفذه إلى ق، فأقول: إن شعاع ف ع ينعطف إلى نقطة من قوس جـ ک فيما بين نقطتي جـ ک؛ وذلك أن زيادة قوس ا ع على قوس ا ب هي زيادة زاوية ا د ع على زاوية ا د ب، التي هي زاوية ب د ع، فزيادة انعطاف شعاع ف ع على انعطاف شعاع ه ب هي أكثر من نصف زاوية ب د ع. فالزاوية التي هي زيادة الانعطاف هي ‹التي› تفصل من قوس ب ع أكثر من نصفها. وإذا كانت زاوية الانعطاف على محيط الدائرة، فهي تفصل قوسًا أعظم من قوس ب ع. وقوس ب ع مثل قوس ق ط، فزيادة انعطاف شعاع ف ع على انعطاف شعاع ه ب هي قوس أعظم من قوس ق ط. وانعطاف شعاع ه ب هو قوس ط ک، فانعطاف شعاع ف ع هو أعظم من قوس ق ک.

فقد تبيّن في الشكل الأول أن كل شعاع ينعطف من قوس ب جـ، فإنه يلقى محيط الدائرة على نقطة دون نقطة ک، فشعاع ف ع إذا / انعطف، فهو ينتهي إلى نقطة فيما ٨٠-ظ
بين نقطتي ک جـ. فلينعطف الشعاع على خط ع ص؛ وقد تبيّن في الشكل الرابع أن الشعاع الذي ينعطف من نقطة من وراء النقطة النظيرة لنقطة ب وينتهي إلى نقطة ‹من وراء نقطة› نظيرة لنقطة ط، فإنه ينعطف إلى نقطة فيما بين نقطتي جـ ن.

فقد تبيّن من هذا البيان أن كل شعاع يصل إلى الكرة ويكون موازيًا لقطر الكرة الذي ينتهي إلى الشمس، ويكون بُعده من طرف القطر أكثر من خمسين جزءًا من الأجزاء التي بها الدائرة ثلاثمائة وستين جزءًا، فإنه ينعطف إلى نقطة فيما بين النقطة التي ينعطف إليها الشعاع من طرف القوس، التي هي خمسون جزءًا، وبين طرف القطر، الذي على الأرض من الكرة، النظير لنقطة جـ، ثم ينعطف إلى نقطة من الخط المتصل بالقطر النظير لخط جـ ن فيما بين نقطتي جـ ن. فالنقطة النظيرة لنقطة ک هي التي تحدّ نهاية الشعاعات المنعطفة، والنقطة النظيرة لنقطة ن هي التي تحدّ جميع النقط التي تنعطف إليها الشعاعات التي من وراء الخمسين الجزء. وكل نقطة على قوس ک جـ تحدث في الكرة دائرة إذا حركت دائرة ا ب جـ حول قطر ا جـ، فالدائرة التي ترسمها نقطة ک هي التي تحدّ جميع الدوائر التي تنعطف منها الشعاعات إلى خط جـ ن وما يتصل به.

ونخرج خط ن ک إلى محيط الدائرة، وليلق الدائرة على نقطة ل، وليقطع خط ب ط على نقطة م، فتكون زاوية ب ک م مثل زاوية ک ب م، كما تبيّن في الشكل

4 جـ: د – 6 هي: هو – 11 الشكل الأول: يعني الحالة الأولى من هذا الشكل نفسه / ب جـ: ا ب جـ – 12 ک: جـ – 15 ط: ص – 19 خمسون: خمسين – 20 النظير: النظيرة

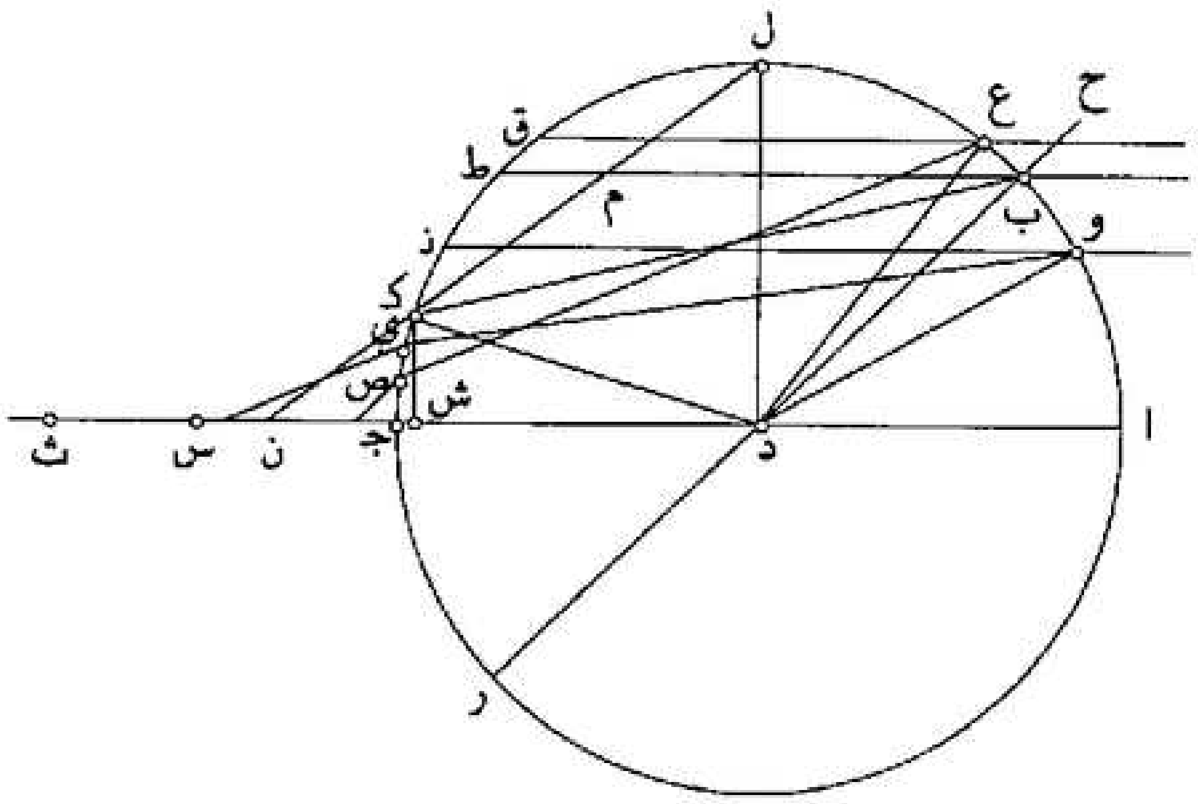
الثاني، فتكون قوس ب ل مثل قوس ط ك؛ وإذا كانت قوس ا ب خمسين جزءًا، فقوس ط ك أربعون جزءًا، وقوس ب ل أربعون جزءًا، فقوس ا ل تسعون جزءًا.

فإذا أخرج قطر الدائرة النظير لقطر ا جـ، وقسمه قوس ا ب جـ بنصفين على نقطة ل، وجعل قوس جـ ك عشرة أجزاء، ووصل ل ك وأخرج على استقامة إلى أن يلقى خط ا جـ، كان الخط الذي ينفصل بين خط ل ك وبين نقطة جـ – الذي هو خط / ن جـ – ٨١-و هو الذي يحيط بجميع نقط الانعطاف التي تنعطف إليها الشعاعات من قوس ب ل. والشعاعات التي تصل إلى القوس، التي هي أربعون جزءًا، تنعطف إلى قوس ك جـ، ثم تنعطف إلى نقطة من وراء نقطة ن، لأن قوس ا ب إذا كانت أربعين جزءًا، كان شعاع ب ط من وراء كل شعاع يصل إلى قوس ا ب. فإذا وصل شعاع إلى نقطة من قوس ا ب، مثل نقطة و، كانت زيادة انعطاف قوس ا ب على انعطاف قوس ا و أقلّ من نصف قوس ب و، إذا كانت زاوية زيادة الانعطاف على المركز، وإذا كانت على المحيط، كان الذي يوترها أقلّ من قوس و ب. ونخرج و ذ موازيًا لخط ب ط، فلينعطف شعاع ف و على خط و ي، فتكون زيادة قوس ط ك على قوس ذ ي أقل من قوس ط ذ، فنقطة ك فيما بين نقطتي ذ ي، فنقطة ي فيما بين نقطتي ك جـ؛ فتكون نقطة ك من وراء النقطة التي ينتهي إليها الشعاع المنعطف من نقطة و، فتكون نقطة ن أقرب إلى نقطة جـ من النقطة التي ينتهي إليها الشعاع المنعطف من نقطة ي، كما تبيّن في الشكل الرابع.

فالشعاعات التي تمتدّ إلى القوس، التي هي أربعون جزءًا، تنعطف جميعها إلى الخط المتّصل بخط جـ ن، وتكون نقطة الانعطاف أبعد عن نقطة جـ من نقطة ن. وكل شعاع ينعطف إلى خط جـ ن وما يتّصل به، فإنه يحدث زاوية – عند النقطة التي ينتهي إليها – هي ضعف زاوية الانعطاف، كما تبيّن في الشكل الثاني. وكل خط يخرج من نقطة د إلى نقطة الانعطاف، التي على محيط الدائرة، فهو يحيط مع خط د جـ بزاوية هي زيادة ضعف الباقي بعد الانعطاف على الزاوية التي يحيط بها الشعاع والعمود، التي قد تبيّن أنها أصغر من ضعف زاوية الانعطاف. فالزاوية التي تحدث على خط جـ ن وما يتّصل به تكون أبدًا أعظم من الزاوية التي تكون عند نقطة د، فنصف قطر الدائرة يكون أبدًا أعظم من خط / الانعطاف الذي ينتهي إلى خط جـ ن وما يتّصل به. وخط ٨١-ظ

2 أربعون (الأولى والثانية): اربعين / تسعون: تسعين – 3 بنصفين: الأفصح «نصفين»، ولن نشير إليها مرة أخرى – 5 ن جـ: ر جـ – 7 هي: قد تقرأ «بين» / أربعون: اربعين – 9 ب ط: ب ك – 12 و ذ: و ر، وبوجه عام يكتب الناسخ الذال راءً، ولن نشير إليها بعد ذلك – 13 ف و: ف / و ي: و ر – 15 ن: ر – 18 أربعون: اربعين – 21 كما: لما.

الانعطاف أعظم من الخط الذي بين النقطة التي ينتهي إليها خط الانعطاف وبين نقطة جـ، فجميع الخط المتّصل بخط ا جـ – الذي ينتهي إليه جميع الشعاعات المنعطفة – هو أصغر من نصف قطر الدائرة، فتكون جميع النقط التي تنتهي إليها الشعاعات المنعطفة أقرب إلى نقطة جـ من نقطة ث. والشعاعات التي تصل إلى القوس – التي هي أربعون جزءاً – هي التي تكون أقرب إلى نقطة ا وتنعطف إلى خط ن ث. فأما الشعاعات التي من وراء الأربعين الجزء، فإن ما يصل منها إلى قوس ك جـ ينعطف إلى خط جـ ن، وهي الشعاعات التي من وراء الخمسين، وما يصل منها إلى نقطة من وراء نقطة ك ينعطف أيضاً إلى خط جـ ن، لما تبيّن في الشكل الرابع.



فالشعاعات التي تنعطف من القوس التي هي ‹وراء› خمسين جزءاً التي هي قوس ب ل، تنعطف إلى خط جـ ن. والشعاعات التي تنعطف من القوس، التي هي أربعون جزءاً، التي تلي نقطة ا، تنعطف إلى خط ن ث. فالشعاعات التي تنعطف إلى خط جـ ن أكثر من الشعاعات التي تنعطف إلى خط ن ث.

ونصل د ل فيكون عموداً على قطر ا د جـ، لأن قوس ا ب ل ربع دائرة وهو ستون جزءاً بالأجزاء التي بها القطر مائة وعشرين جزءاً. ونخرج عمود ك ش، فيكون عشرة أجزاء ونصفاً بالتقريب، لأنه جيب قوس ك جـ التي هي عشرة أجزاء. ونسبة ل د إلى ك ش كنسبة د ن إلى ن ش، فنسبة د ن إلى ن ش هي نسبة ستين إلى عشرة أجزاء ونصف.

4 ث: ي، أدخلنا ث للتمييز بين اليائين / أربعون: اربعين – 5 ن ث: ن ي – 6 ينعطف: فيعطف – 7 يصل: يتصل – 10 من: إلى / أربعون: اربعين – 11 ن ث: ر ي، وأثبت في الهامش ن ي – 12 ن ث: ر ي، وأثبت في الهامش ن ي – 14 مائة وعشرين: على تقدير الكائن بها القطر وإلا لزم الرفع / ك ش: ك و، بدلنا الواو حتى لا تختلط بما قبلها، فلقد استعمل هذا الحرف من قبل، ولن نشير إليها فيما بعد – 15 ونصفاً: ونصف.

وخط ش جـ أكثر من نصف جزء، فخط ن جـ أقلّ من ‹اثني› عشرة أجزاء، فهو أقلّ من سدس خط ن د، فخط ن جـ أقلّ من خمس خط جـ د. ونقسم ث جـ بنصفين على نقطة س، فتكون الشعاعات التي تنعطف إلى خط س جـ أكثر بكثير من الشعاعات التي تنعطف إلى خط س ث؛ وخط س جـ أقرب إلى نقطة الانعطاف من خط س ث، فالحرارة التي تكون عند / خط س جـ أكثر من الحرارة التي تكون عند خط س ث، ٨٢-و فالإحراق إنما يكون على خط جـ س، الذي هو أقل من ربع قطر الدائرة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

‹تكملة›

وكلّ نقطة من الكرة، فإنه يخرج إليها شعاع من جميع سطح جرم الشمس المقابل لتلك النقطة. والشعاع الموازي لقطر الكرة – الذي قدمنا ذكره – هو أحد الشعاعات التي تخرج إلى تلك النقطة. إلا أن كل شعاع يخرج إلى تلك النقطة، فإنه يحيط مع الشعاع الموازي للقطر بزاوية هي في غاية الضيق ليس لها قدر بالقياس إلى الحسّ؛ فإذا انعطف الشعاع الموازي للقطر انعطفت الشعاعات الباقية معه وهي محيطة به؛ والزوايا التي بينها وبينه في غاية الضيق، فإذا انعطفت جميعها فهي تصير إلى النقطة التي ينتهي إليها الشعاع الموازي [كان] للقطر، وتكون محيطة بتلك النقطة. فيصير الموضع الذي يحصل فيه جميع الشعاعات المنعطفة جزءًا من جسم الهواء له قدر، وليس بمقتدر المقدار لضيق رأس المخروط وقرب المسافة التي انتهى إليها المخروط، إلا أنه ليس هو نقطة متوهمة؛ ومن أجل أن هذا الموضع ذو مقدار، صارت فيه حرارة. ولو كانت نقطة متوهمة، لما حصل فيها حرارة. وكذلك النقطة – التي ينتهي إليها الشعاع – التي في السطح الأعلى من الكرة ليست هي نقطة متوهمة، بل إنما هي جزء صغير من سطح الكرة، إلا أنه أصغر من الجزء الذي ينعطف إليه الشعاع، لأن الشعاع / – الذي يخرج من جميع سطح الشمس إلى ٨٢-ظ جزء صغير من سطح الكرة يكون مخروطًا ويكون ذلك الجزء الصغير رأس المخروط إلا أنه يكون ضيق الرأس؛ فإذا انعطف كان من بعد الانعطاف منخرطًا إلى السعة، إلا أنه من أجل أن الموضع الذي ينعطف إليه قريب من رأسه، فليس يتسع اتساعًا له قدر، بل يكون

1 ن جـ: ر جـ – 2 ث جـ: ن جـ – 4 س ث: ش ن / س جـ: ش جـ / س ث: ش ن – 5 س جـ: ش جـ / س ث: ش ن – 6 جـ س: جـ ش – 20 ليست: ليس / هي (الأولى والثانية): هو.

في غاية الضيق، إلا أنه يكون أوسع من رأس المخروط الذي هو الجزء الذي نفذ منه الشعاع إلى داخل الكرة.

وكلّ نقطة على خط جـ س ينعطف إليها شعاع يحيط بها جزء من الهواء له قدر يسير بالقياس إلى الحسّ، فمن أجل ذلك يحصل على خط جـ س أجزاء كثيرة من الهواء كل واحد منها له قدر بالقياس إلى الحس، وفي كل واحد منها حرارة قد وصلت إليه من جميع جرم الشمس؛ فلذلك إذا اجتمعت هذه الحرارات عند خط جـ س – الذي هو جزء يسير – حدث منها الإحراق.

فكل كرة من الزجاج أو البلور أو ما جرى مجراهما، إذا كانت صحيحة الكرية وكانت شديدة الشفيف، إذا قوبل بها جرم الشمس وأشرق عليها ضوء الشمس، فإنه يحدث منها إحراق في الجهة المقابلة لجهة الشمس، ويكون بُعد موضع الإحراق عن سطح الكرة أقل من ربع قطر الكرة.

وكذلك القارورة، إذا كانت من زجاج نقي، وكانت كرية الشكل وصحيحة الكرّية ومُلئت ماءً صافيًا، فإنه يكون منها إحراقٌ كما يكون من الزجاج والبلور؛ وذلك أن الزجاج النقي الشديد الشفيف ليس بين شفيفه وشفيف الماء اختلاف له قدر. وجسم القارورة أيضاً قليل السُمك، والشعاع الذي يصل إلى القارورة وينعطف في جسم القارورة، إذا وصل إلى الماء، امتدّ على استقامة ولم ينعطف، لأن الانعطاف إنما يكون إذا كان بين شفيفي الجسمين اختلاف له قدر يؤثر في الشعاع؛ وإذا امتدّ / الشعاع على استقامة، نفذ في ٨٣–و جسم الماء ووصل على استقامته إلى سطح ظاهر القارورة، ثم ينعطف في الهواء، لأن بين شفيف الهواء وبين شفيف الزجاج اختلاف متفاوت، فلذلك ينعطف؛ فيكون انعطاف الشعاع في القارورة المملوءة ماءً على مثل انعطاف الشعاع في الكرة من الزجاج أو البلور.

فأما لِمَ لا يحدث من القارورة إحراقٌ، إذا لم تكن مملوءةً ماءً، فإن ذلك لأنّ القارورة، إذا كانت فارغةً، كان في داخلها هواء. وبين شفيف الهواء وشفيف الزجاج اختلاف متفاوت؛ فإذا وصل الشعاع إلى ظاهر القارورة، انعطف من أجل أن الزجاج أغلظ من الهواء المحيط بالقارورة. ثم إذا انعطف، نفذ في جسم الزجاج الذي هو سُمك جسم القارورة. فإذا انتهى الشعاع إلى أن ينفذ ‹من سمك جسم› القارورة، انعطف

3 جـ س: جـ ش / جزء: الجزء – 6 جـ س: جـ ش – 20 أو: و – 25 ينفذ: قد تقرأ «يتغير».

أيضًا، لأن الهواء ألطف من الزجاج. ثم إذا انعطف، امتدّ في الهواء الذي في داخل القارورة إلى أن يصل إلى الزجاج. فإذا وصل إلى الزجاج، انعطف أيضًا، من أجل أن الزجاج أغلظ من الهواء الذي هو فيه، ثم ينفذ في سُمك جسم القارورة؛ فإذا انتهى إلى سطحها المحدّب، انعطف أيضًا، من أجل أن الهواء ألطف من الزجاج الذي هو فيه. فإذا خرج إلى الهواء، يكون قد انعطف أربع مرات. والشعاع إذا انعطف، ضعف. وقد بيّنا هذا المعنى في كتابنا في *المناظر*، أعني أن الشعاع إذا انعطف ضعف. فالعلّة التي من أجلها ليس يحدث من القارورة إحراق، إذا كانت القارورة فارغةً، هو أن الشعاع – الذي يصل إليها وينفذ فيها – ليس يخرج من الجهة الأخرى إلا بعد أن ينعطف أربع مرات. والشعاع كلّما انعطف ضعف، فإذا انعطف أربع مرات، لم يبق فيه من الحرارة ما يحدث منه إحراق.

وهذا حين نختم هذه المقالة.

تمت، والحمد لله رب العالمين، والصلاة على رسوله محمد وآله أجميعين.

ابن الهيثم

رسالة في الكرة المحرقة
تحرير كمال الدين الفارسي

الفصل الأول: في أمر الكرة المحرقة

ت – ٢٣١ – و
ل – ٢٧٧ – ظ
ا – ٥٥٥
هذا الفصل هو تحرير رسالة لابن الهيثم رحمه الله في *الكرة المحرقة*، وهي خمسة ك – ٢٧٢ – و
أشكال. وقد صدّرها بمقدمات ذكرت في *المناظر* فلا يحتاج إلى إعادتها وبأخرى تختص س – ١٨٠ – ظ
بتلك الرسالة فنوردها. فمنها أن زاوية الانعطاف في الزجاج أصغر من نصف العطفية / خ – ١
وأعظمُ من ربعها. وأحال ذلك على ما بيّن / بطلميوس في المقالة الخامسة من كتابه في ك – ٢٧٢ – ظ خ – ٢
المناظر.

ومنها أن كل قوسين مختلفتين من دائرة تُقسمان على نسبة واحدة، فإن نسبة جيب أعظم قسمي الصغرى إلى جيب أصغرهما أعظم من نسبة جيب أعظم قسمي العظمى
إلى جيب أصغرهما. وأحال ذلك على كتابه في *خطوط / الساعات*. وقد وجدت ذلك س – ١٨١ – و
الكتاب وأصبت منه هذه الدعوى، وكانت الشكل الثالث من الكتاب، بهذه العبارة: إذا

5 هذا: وهذا [كـ] / لابن: ابن [س] / رحمه الله: رحمة الله عليه [كـ] رح [ح] – 5-6 وهي خمسة أشكال: ناقصة [س] – 6 بمقدمات: مقدمات [س] / يُحتاج: نحتاج [ح] / تختص: سنأخذ بالمذكر أو بالمؤنث حسب القاعدة النحوية ولن نشير إلى ذلك فيما بعد اقتصادًا للكلفة، ولأن مثل هذه الأخطاء التي ارتكبها النساخ لم تساعدنا عند التأريخ لمخطوطات نص الفارسي [ا، ت، ل، كـ] – 7 فنوردها: ناقصة [س] – 10 كل: كان [س] / قوسين: قوس [ت] / مختلفتين: مختلفين [ت، س، ل، كـ] / واحدة: واحد [ا] / جيب: يكتبها كل من ناسخ [ت] و[س] «حيث» ولن نشير لذلك مرة أخرى – 11 قسمي: قسي [كـ] / الصغرى: ناقصة [ا، ت، كـ] أثبتها في الهامش [خ] / قسمي: قسي [كـ] – 12 على: فوق السطر [خ] / الساعات: الشعاعات [ا، ح، س، ل] – 13 الكتاب: فوق السطر [خ] / هذه: ناقصة [س] / وكانت: وكان [ح] / الثالث: الثلاث [ا].

فصل من دائرة قوسان مختلفتان، وقسم القوسان على نسبة واحدة، وكان القسم الأعظم من القوس العظمى ليس بأعظم من ربع دائرة، فإن نسبة جيب القسم الأعظم من القوس الصغرى إلى جيب القسم الأصغر منها أعظمُ من نسبة جيب القسم الأعظم من القوس العظمى إلى جيب القسم الأصغر منها. وأعاد الدعوى أخيرًا بهذه العبارة: فكل قوسين مختلفتين من دائرة تكون أعظمهما أصغر من ربع دائرة، فإن نسبة جيب أعظمهما إلى جيب أصغرهما أعظم من نسبة جيب كل قوس أعظم من الشبيهة بأعظم القوسين – إذا لم يكن أعظم من ربع دائرة – إلى جيب القوس النظيرة لأصغر القوسين، إذا كانتا من دائرة واحدة ومناسبتين للقوسين الأولين، العظمى للعظمى والصغرى للصغرى. وهذه هي المحتاج إليها في هذه المقالة.

ثم لما كانت / النسخة سقيمة جدًا، لم أقدر على حلها، فاكتفيت بإيراد الدعوى. ل – ٢٧٨ – و
وإن اتفق حلها بعد، أضيفها محررة إلى هذا المقام، إن شاء الله تعالى. ومن تأمل جدول الجيب وجد أن حركة القسي في الازدياد إلى الربع متشابهة وحركة جيوبها غير متشابهة، بل مسرعة في الأوائل مبطئة على التدريج إلى الأواخر. وعند ذلك يتحقق الحكم وفيه مقنع.

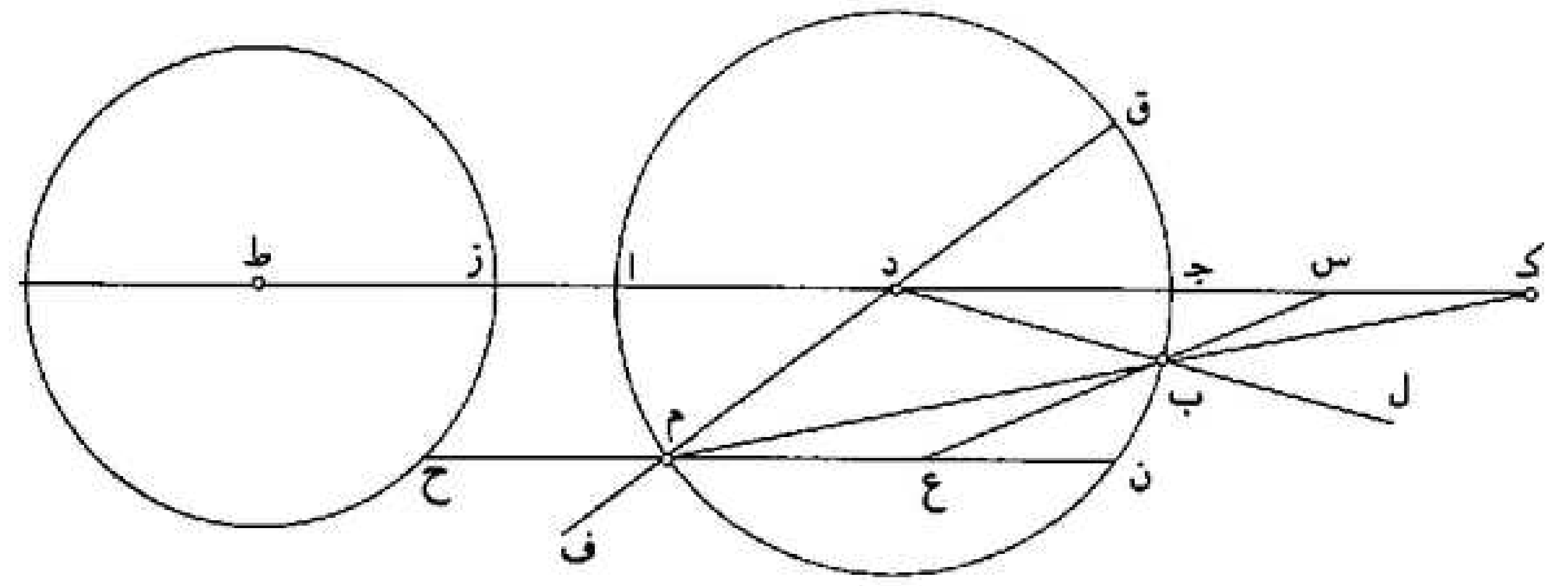
ومنها: أن كل شعاع من أشعة الشمس، إذا حصل عند نقطة، فإنه يحدث عندها حرارة. فإذا حصلت عند نقطة واحدة شعاعات كثيرة، حصلت حرارات بحسبها. وإذا
تناهت في الكثرة، أحدثت عندها / إحراقًا. ت – ٢٣١ – ظ

– آ – كل كرة من الزجاج والبلور وما أشبههما، إذا قوبل بها جرم الشمس فإن /
شعاعها ينعطف عن محيط دائرة في الكرة إلى نقطة واحدة خارج الكرة على الخط ا – ٥٥٦

1 مختلفتان: مختلفان [ا، ت، ک] – 2 ربع: مربع [ا] / فإن: وان [ک] – 3 القسم: القوس [س] – 3-4 أعظمُ ... الأصغر منها: ناقصة [ت، خ، ک] – 4 القسم: ناقصة [س] / الدعوى: الدعاوى [ک] دعوى [خ] / أخيرًا: اخرا [ا، ت، س، ک] آخرًا [ح] آخر [خ] – 5 مختلفتين: مختلفين [س] / أعظمهما: أعظمها [ل، ک] / من: في [س] – 6 جيب (الثانية): حيث [ا] ناقصة [س] / أعظم: ناقصة [ا] / من: في [س] / الشبيهة: الشبيه [ل] – 8 مناسبتين: متناسبتين [ا، خ] / للقوسين: القوسين [ک] / الأولين: الاولتين [ل، ک] – 10 كانت: كان [ک] / سقيمة: سبيهه [س] – 11 بعد: ناقصة [س] بعدًا [ک] / أضيفها: أصفها [س] صفها [ک] / هذا: هذه [ا، ت] / إن شاء: انشاء [ا، ت، ک] / تعالى: ناقصة [ا] تع [ل] تعا [ت] / جدول: حدوث [س] – 12 وجد: وجب [س] / القسي: القبيحة [ا] / وحركة جيوبها غير متشابهة: ناقصة [ا، ت، خ، ک] – 13 الأوائل: الأول ثل [خ] الأول بل [ک] – 15 أن: ناقصة [خ، ک] / إذا حصل عند نقطة: مكررة [ک] / حصل: حصلت [ا، ت، خ، س، ک، ل] – 15-16 فإنه ... واحدة: أثبتها في الهامش [ک] – 17 تناهت: تناهيت [ا] / الكثرة: الكثيرة [ا، ت] / أحدثت: أخذت [ک] – 18 آ: ناقصة [ا، ت] / فإن: ناقصة [ک] – 19 عن: من [س].

الواصل بين مركزيهما. وذلك لأنه يكون بين مركزي الشمس والكرة خط واصل، وإذا فرض سطح مستوٍ يمرّ على ذلك الخط، فإنه يقطع الشمس والكرة ويحدث فيهما عظيمتين.

فليكن عظيمة الكرة ا ب جـ، وعظيمة الشمس ز ح، ومركز الكرة د، ومركز الشمس ط، والواصل بين المركزين ط ز ا د جـ، ونخرجه إلى كـ، ونتوهم خط م ح واصلاً بين المحيطين موازيًا لـ جـ ط، ونخرجه إلى أن يلقى محيط ا ب جـ على ن، ونصل د م، ونخرجه إلى ف. فـ د م عمود على سطح الكرة، وزاوية ح م ف عطفية، وهي مثل ن م د. فشعاع / ح م لا ينفذ على م ن، بل ينعطف إلى جهة العمود، وانعطافيته ك-٢٧٣-و بحسب عطفيته، فلينعطف على مثل م ب. فزاوية ن م ب أقل من نصف ح م ف، بل ا د م، وأعظم من ربعها ونخرج م د إلى ق، فقوس ق جـ مثل جـ ن، لأن كلاً منهما مثل ا م. فقوس ن ب أقل من نصف قوس ن جـ ق، فنقطة ب فيما بين ن جـ. فإذا أخرجنا م ب لاقى جـ كـ، وليكن على كـ، ونصل د ب، وننفذه إلى ل. فلأن نقطة ب عند سطح الكرة، يكون ب كـ في الهواء. ولأن شعاع م ب غير عمود، إذْ العمود د ب ل، فليس ينفذ خارجًا على استقامته، بل ينعطف إلى خلاف جهة العمود، لكون الهواء ألطف. فلينعطف على مثل ب س.

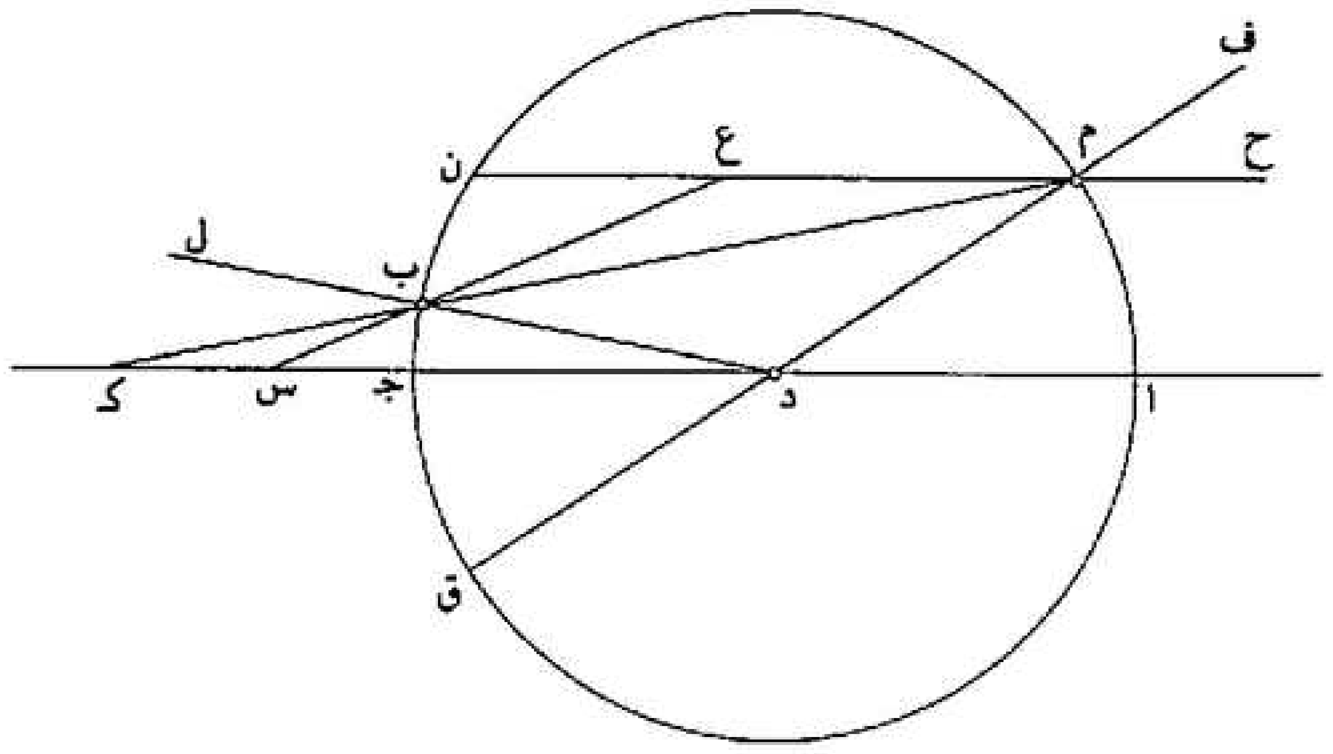


وإذا توهمنا خط كـ ط ثابتًا // وسطحَ س ب م ح دائرًا دورة تامة، أحدث م مبدأ انعطاف أول في القطعة المقابلة ‹للشمس› وب مبدأ ثانيًا في القطعة الأخرى، وح دائرةً ل-٢٧٨-ظ خ-٣

1 مركزيهما: مركزهما [ا] – 2 مستوٍ يمرّ: مستوية [خ، كـ] / فيهما: فيها [ح] – 3 عظيمتين: عظمين [ا] – 4 ا ب جـ: ا ب [س] – 5 ط ز ا د جـ: ز ا د جـ [س] / ونخرجه: ومخرجه [ا] / ونتوهم: ويتوهم [ت، كـ] – 7 ف: ت [كـ] / عمود: فوق السطر [خ] – 8 وانعطافيته: واعطافه [كـ] – 9 م ب: ب م [كـ] – 10 وأعظم: فأعظم [ا] / ق: ن [ا] / ق جـ: ن جـ [ا] – 11 ن جـ ق: ن جـ ن [ا] – 14 على: عن [خ، كـ] / استقامته: استقامةٍ [ح] – 16 ثابتًا: ثانيًا [ا] / دائرًا: دائرة [ت، كـ] / دورة: ناقصة [كـ].

في كرة الشمس. فيمتد من كل نقطة من الدائرة التي على الشمس شعاعٌ إلى المبدأ الأول / موازٍ للواصل بين المركزين وينعطف في الكرة إلى المبدأ الثاني، ثم ينعطف في س-١٨١-ظ الهواء إلى س. وكذلك جميع الأشعة الخارجة من الشمس إلى الكرة على موازاة ط ك بشرط ألا تماس الكرة، فإن الجميع ينعطف ثانيًا إلى نقطة على خط جـ ك؛ وذلك ما أردناه.

– ب – ولنعد دائرة ا ب جـ وخطوطها، فنقول: إن زاوية د س ب ضعف زاوية الانعطاف، أعني التي عند م.



وذلك لأنا نخرج س ب، وليلق خط م ن على ع، فلانعطاف شعاع م ب على ب س يكون انعطاف س ب أيضًا على ب م، / فيكون زاوية د ب م الباقية مثل د م ب ١-٥٥٧ الباقية الأولى، فانعطافية ب – أعني ك ب س بل ع ب م – كانعطافية م – أعني ن م ب لتشابه شفيف الكرة والهواء، فزاويتا ع ب م ع م ب متساويتان، فزاوية س ع ن – أعني ع س د – ضعف زاوية ب م ع؛ وذلك ما أردناه.

أقول: وقد بان من ذلك أن لكل شعاع انعطافين، وانعطافيتيهما أبدًا متساويتان.

1 كرة: مركرة [س]، أولها غير واضح – 2 موازٍ ... المركزين: ناقصة [س] – 3 وكذلك: وذلك [ل]، كتبها ناسخ [ك] «وكك»، ولن نشير إليها فيما بعد – 6 ب: ناقصة [ا، ت] / وخطوطها: مع خطوطها [ك] – 7 أعني: معنى [ا] يعنى [ت، س، ل، ك] ناقصة [ح] – 8 وليلق: وليكن [س] / م ن: ن [خ، ك] – 9-10 مثل د م ب الباقية: ناقصة [س] – 10 ك ب س: د ب س [ح] / ع ب م: ع م ب [س] – 10-11 كانعطافية ... ن م ب: ناقصة [س] – 11 ن م ب: ن [ا] ن م [ت، خ، ك] / ع ب م: ع ب [ت] / ع م ب: م ب [ت] ب م ع [ك] – 12 ع س د: س ع د [ل] ع س ك [ك] / ب م ع: ف م ع [ك] / أردناه: بعدها أزاد «جـ» [خ، ك] – 13 أن: ناقصة [خ] / شعاع: الشعاع [ا] / وانعطافيتيهما: وان انعطافيتهما [س، ك] وانعطافيتها [ا].

– جـ – قال: ولنعد الصورة الأولى، / فأقول: إنه لا ينعطف إلى نقطة س شعاع ت-٢٣٢-و
آخر من التي توازي ا د جـ في سطح دائرة ا ب جـ.

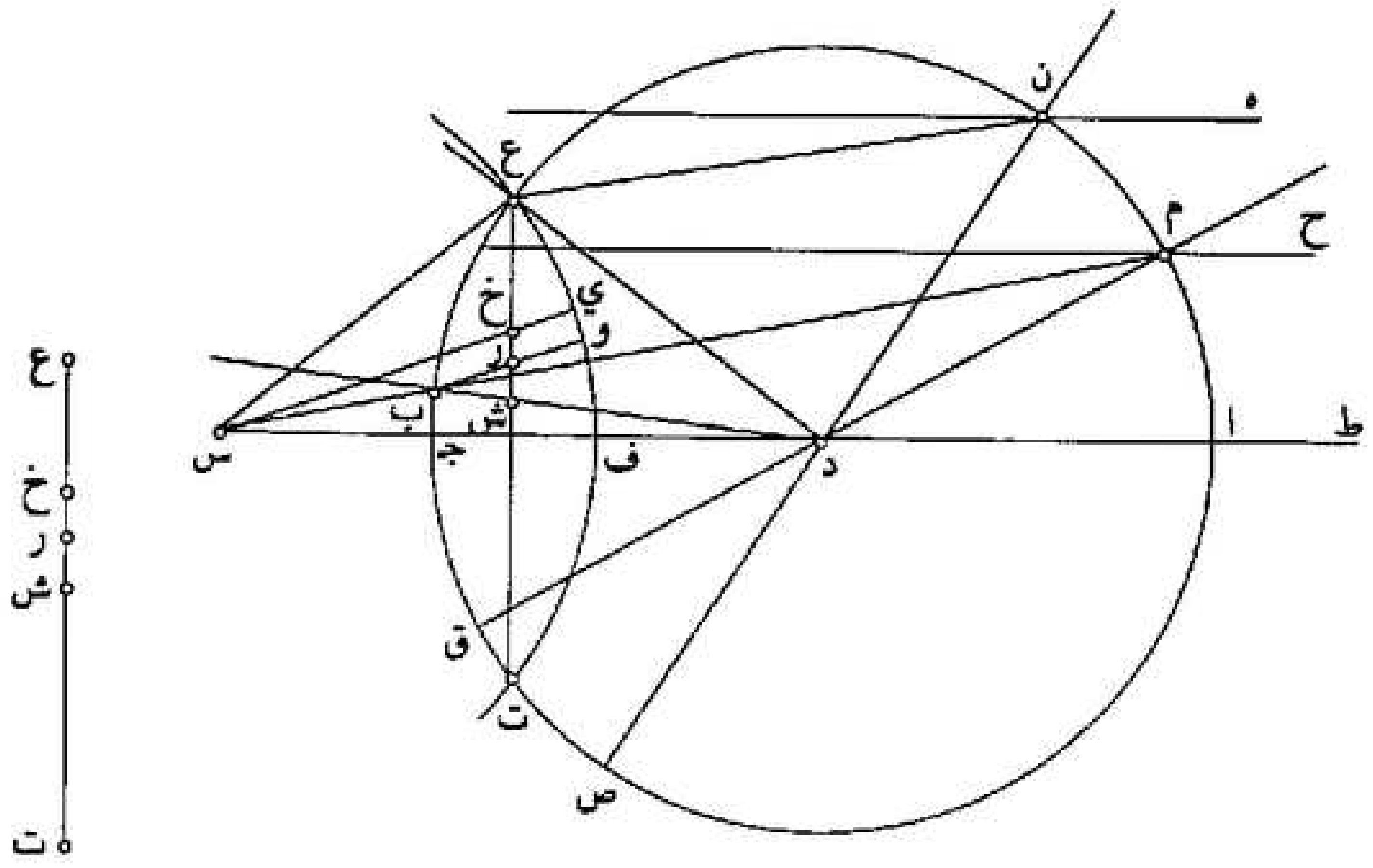
أقول: سوى نظير ح م في الجهة الأخرى لـ ا جـ.

قال: وإلا فلينعطف إليها شعاع ه ن ع س، فيكون زاوية ع س د ضعف انعطافية ن،
ونصل د م د ن د ع، ونخرج م د إلى ق ون د إلى ص، فزاوية ص د ع ضعف د ن ع،
أعني باقية ن، وزاوية ص د جـ مساوية لعطفية ن، فزاوية جـ د ع هي زيادة ضعف باقية
ن على عطفيتها. وكذلك جـ د ب زيادة ضعف باقية م على عطفيتها. ونسبة انعطافية ن
إلى عطفيتها – أعني ا د ن – بل إلى نصفها أعظمُ من نسبة انعطافية م إلى عطفيتها –
أعني ا د م – بل إلى نصفها. فبالتفصيل: نسبة انعطافية ن إلى تمامها من نصف
عطفيتها / أعظم من نسبة انعطافية م إلى تمامها من نصف عطفيتها. وتمام الانعطافية من ك-٢٧٣-ظ
نصف العطفية هو زيادة الباقية على نصف العطفية. فنسبة انعطافية ن إلى زيادة باقيتها
على نصف عطفيتها، بل ضعف / الأولى – أعني ع س د – إلى ضعف الثانية أعظم ل-٢٧٩-و
من نسبة انعطافية م إلى زيادة باقيتها على نصف عطفيتها، بل ضعف الأولى – أعني
ب س د – إلى ضعف الثانية. وضعف زيادة الباقية ن على نصف عطفيتها هو زيادة
ضعف الباقية على العطفية، وكذلك م. فنسبة زاوية ع س د إلى ع د س أعظم من
ب س د إلى ب د س. وبالإبدال ع س د إلى ب س د أعظم من ع د جـ إلى
ب د جـ. والانعطافية أعظم من / تمامها من نصف العطفية، لأنها أعظم من ا-٥٥٨
ربعها؛ فضعف الانعطافية أعظم من ضعف تمامها من النصف، أعني زيادة ضعف
الباقية على العطفية؛ فزاوية ع س د أعظم من ع د جـ. وكذلك ب س د أعظم من
ب د جـ.

1 جـ: ناقصة [ا، ت] / الأولى: الأول [ل] / نقطة: ناقصة [س] / س شعاع: ناقصة [ا] – 3 ح م: حـ م [ك] / في: من [ا، ت، س، ح، خ، ك] / لـ ا جـ: لـ جـ [ا] – 5 د ن: ن د [ح] / د ع: د ح [ل] / ون د: وق د [ك] – 7 عطفيتها: عطفيها [ت] / عطفيتها: عطفيتهما [ك] انتهت مخطوطة [خ] عند هذا الموضع / ونسبة: وكك نسبة [ك] – 8 إلى: ناقصة [ك] / عطفيتها: عطفيتهما [ك] / ا د ن: ا د [ك] – 8-9 أعظم ... نصفها: مكررة [ت] / م إلى ... ن: ناقصة [ك] – 9 فبالتفصيل: فبالصقيل [ا] فبالتصقيل [ت] – 10 م: ناقصة [ا] – 11 نصف (الثانية): نسبة [ح] – 10-12 أعظم ... عطفيتها: ناقصة [ك] – 12 ع س د: ب س د [ح] ع د س [س] – 13 أعني: ناقصة [ك] – 14 ب س د: ع س د [ك] / الثانية: الثانية أعظم [ك] / الباقية: باقية [ا، ت، ح، س، ك] / على: الى [ك] – 15 الباقية: الثانية [ك] / م: في م [ا، ت، س، ك] ف م [ح] ح م [ل] / الى ع د س: ناقصة [س] – 16 ب د س: ب س د [س] – 17 والانعطافية: وانعطافيته [ح] – 18 فضعف: فنضف [ك] – 19 وكذلك: ولذلك [س].

ونجعل س مركزًا، وببعد ع س ‹نرسم› قوس ع ف ت؛ وليكن ف على د س وت على محيط ا ب جـ؛ فقوس ع ف مثل ف ت. ونصل ت ع، فيكون عمودًا على د س وينتصف به، ويكون قوس ت جـ مثل جـ ع، فنخرج س ب إلى أن يلقى وتر ت ع على ر وقوسه على و؛ فنسبة قوس ع ف إلى ف و كنسبة زاوية ع س د إلى زاوية ب س د؛ ونسبة قوس ع جـ إلى قوس جـ ب كنسبة زاوية ع د جـ إلى زاوية ب د جـ. وقد تبيّن أن نسبة زاوية ع س د إلى زاوية ب س د أعظم من نسبة زاوية ع د جـ إلى ب د جـ، فقوس ع ف إلى ف و أعظم من قوس ع جـ إلى جـ ب. فبالتفصيل: نسبة قوس و ع إلى ع ف أعظم من قوس ب ع إلى ع جـ، فنسبة / قوس و ع إلى ع ف ت أعظم من (ت – ٢٣٢ – ظ) ‹نسبة› قوس ب ع إلى ع ب ت؛ فبالتفصيل قوس ع و إلى و ت أعظم من قوس ع ب إلى ب ت. فلتكن ‹نسبة› قوس ع ي إلى ي ت كنسبة قوس ع ب إلى ب ت؛ فبالعكس قوس ت ي إلى ي ع كقوس ت ب إلى ب ع. ونصل س ي، وليقطع ت ع على خ، وليقطعه أيضًا د ب على ش، فنسبة جيب قوس ب ت إلى جيب ب ع كنسبة ت ش إلى ش ع، ونسبة / جيب قوس ت ي إلى جيب ‹قوس› ي ع كنسبة ت خ إلى (س – ١٨٢ – و) خ ع. وقوس ف و ع / أعظم من الشبيهة بقوس جـ ب ع لأن زاوية ع س د أعظم من (ل – ٢٧٩ – ظ) زاوية ع د جـ، فقوس ت ف ع أعظم من الشبيهة بقوس ت جـ ع. ونسبة قوس ت ي إلى قوس ي ع كنسبة قوس ب ت إلى ب ع، فنسبة ت ش إلى ش ع أعظم من نسبة ت خ إلى خ ع للمقدمة الموضوعة؛ وذلك محال.

1 وببعد: وببعد [ح] / ع س: ع [ا، ت، ح، س، ل، كـ] – 2 فيكون: ناقصة [س] – 3 ينتصف به: ينتصف م [ح] / فنخرج: فيخرج [ت] / س ب: س ت [س] – 4 ب س د: ع س د إلى زاوية [ت] – 5 ونسبة: نسبة [ت] / كنسبة: ناقصة [ا] / تبيّن: بيّن [ا] – 4-7 كنسبة ... ف و: ناقصة [كـ] – 6 إلى زاوية ب س د: مكررة [ل] – 7 ع جـ: ب جـ [كـ] – 8-9 أعظم من ‹نسبة› قوس ب ع إلى ع ب ت: أعظم من قوس ع ب إلى ع ب أعظم من قوس ب ع إلى ع ف ب [كـ] – 9 ع ب ت: يُقرأ في [ل] بعدها «فبالتفصيل قوس و ع ر إلى ع و أعظم من قوس ب ع إلى ع جـ فنسبة قوس و ع إلى ع ف ت أعظم من قوس ب ع إلى ع ب ت»، وهذا تكرار مع الخطأ لبعض ما سبق / فبالتفصيل: فالتفصيل [س] / ع و: و ع [كـ] / و ت: ر ب [ح] – 10 فلتكن ... إلى ب ت: ناقصة [ل] / ع ي: ع ب [كـ] / ي ت: ي ب [ح] ع ب [كـ] / ع ب: ع ت [س] / ب ت: ر ب [ح] – 11 ي ع: ع ي [كـ] ع [ا] / ت ع: ت [ت] – 12 أيضًا: ناقصة [ح] / د ب: د ت [كـ] / ش: س [ا، كـ] / ب ت: ر ت [ح] ت ب [ت، س، ل] / ب ع: د ع [ا] ر ع [كـ] – 13 ت ش إلى ش ع: ت س الى س ع [كـ] – 14 ف و ع: و ف ع [ح] / بقوس: فقوس [كـ] – 15 زاوية: زاويتي [كـ] / ت ف ع: ت ف [كـ] / بقوس: فقوس [كـ] – 16 ب ت: ت ب [ا، س، ل] / ت ش إلى ش ع: ب س إلى س ع [ح] ت ش ع [س].



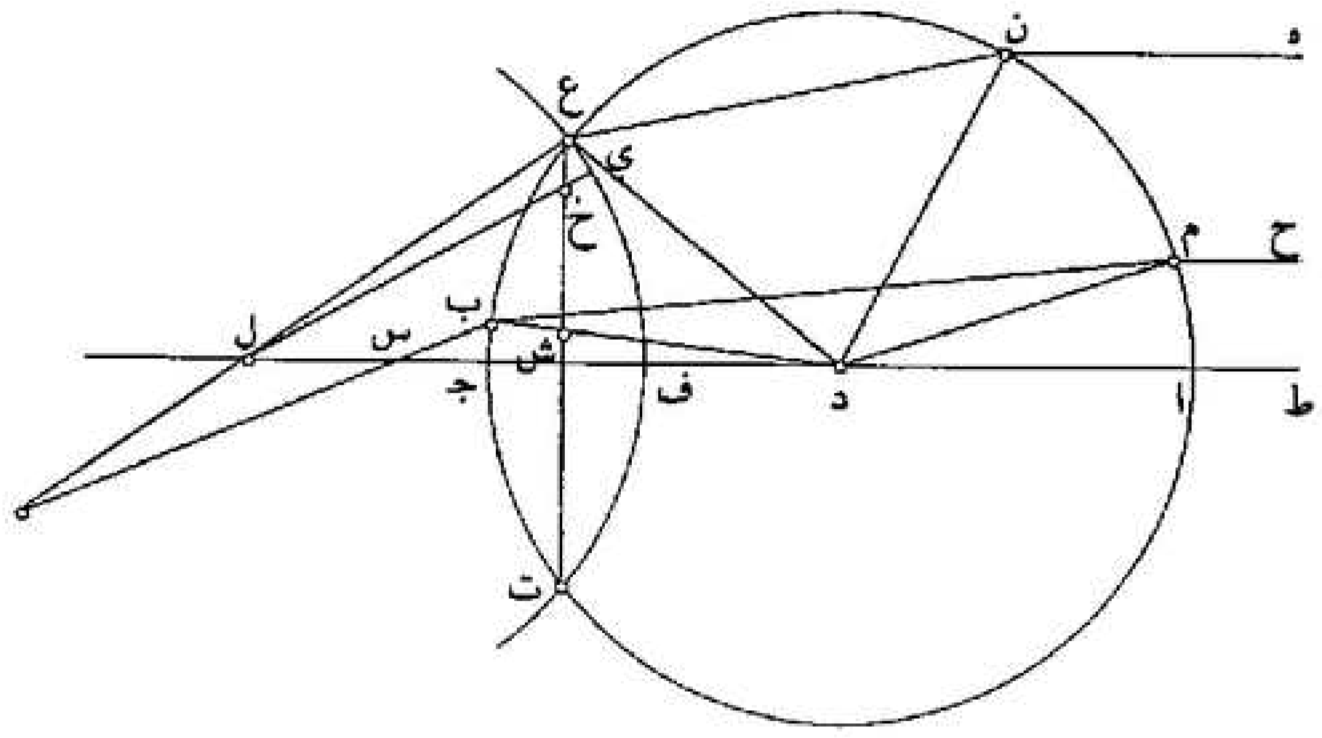
أقول: ولا بد أن نبيّن أن كلا من قوسي ب ت ت ي ليست بأعظم من ربع دائرة ليتم المطلوب؛ فنقول: لأن زاوية س ضعف الانعطافية، والانعطافية أعظم من ربع العطفية، فضعف الانعطافية أعظم / من نصف العطفية. والعطفية وإن كانت / أقل من قائمة فقد تقاربها، وتقارب العطفية إذ ذاك ضعف الانعطافية، فيكون ضعف الضعف حينئذٍ أعظم من قائمة، وهي التي توتر قوس ت ف ع، فيكون قوس ت ف ع أعظم من الربع، فلا جُرْمَ إذن أن قوس ت ي ليست بأعظم من الربع فيحتاج فيه إلى بيان.

ا-٥٥٩
ك-٢٧٤-و

قال: فليست نسبة قوس ع و إلى و ت أعظم من نسبة قوس ع ب إلى ب ت، فليست نسبة زاوية ع س د إلى ب س د أعظم من نسبة زاوية ع د جـ إلى ‹زاوية› ب د جـ. لكن الشعاع لو انعطف من ع إلى س، لكانت نسبة زاوية ع س د إلى ب س د أعظم من نسبة زاوية ع د جـ إلى ب د جـ. فليس ينعطف إلى س شعاع موازٍ لخط ا جـ أكثر من واحد؛ وذلك ما أردناه.

– د – ثم يقول: كل شعاع ينعطف من ع، فإنه ينتهي إلى نقطة من خط جـ س فيما بين جـ س، ولا ينتهي إلى ما وراء س.

1 ولا بد أن: ولا بد من أن [ا، ت، ح، س، كـ] / نبين: يتبين [كـ] / ب ت ت ي: ت و ت ب [ت] ب ت ب و [ح] بعض الحروف ممحو [س] ت و ت ب [ل] ه ب ه د ب [كـ] / دائرة: ذابرحنا [ا] دائرتها [ا، ت، ح، س، ل، كـ] – 2 والانعطافية: ناقصة [ت، كـ] – 4 الضعف: النصف [كـ] – 5 ت ف ع (الثانية): ت وع [ل] – 6 فلا جرم ... الربع: مكررة [ت] / أن قوس: على أن قوس [ا، ت، ل، كـ] على ان فناس [س] / فيحتاج: محتاج [ا] – 7 ع ب: ع ت [س] / ب ت: ب ر [كـ] – 8-9 إلى ‹زاوية› ب د جـ: ناقصة [ح، ل] ولكنها موجودة في التكرار صفحة ٢٨٠–و – 9 انعطف: انعطفت [ت] / ع: ح [ح] / س: ناقصة [ت] / زاوية: ناقصة [س] – 9-10 لكن ... ب د جـ: ناقصة [كـ] – 10 ع د جـ: د جـ ع [ح] – 11 لخط: للخط [كـ] – 12 د: ناقصة [ا، ت، كـ] / يقول: نقول [ح، ل، كـ] / ينعطف: ينعطب [ح] – 12-13 نقطة ... ولا ينتهي إلى: ناقصة [كـ].



وإلا فنعيد الشكل، وليكن مثل ع ل، فيكون زاوية ل ضعف زاوية الانعطاف، فتكون أعظم من زاوية س، لأن انعطافية ع أعظم من انعطافية ب. ‹ونسبة ل إلى س كنسبة ع ل د إلى ب س د، التي هي أعظم من نسبة ع د جـ إلى ب د جـ.› وتكون نسبة زاوية ل إلى زاوية س أعظم من نسبة زاوية ع د جـ إلى ب د جـ. وليكن نسبة زاوية ع ل د إلى د ل ي كنسبة زاوية ع د جـ إلى ب د جـ، وليكن نقطة ي على قوس ت ف ع، فيكون زاوية ي ل د أعظم من ب س د، فخط ي ل يلاقي ب س من وراء نقطة س، فخط ي ل فيما بين خطي س ب ل ع، وهو يقطع ت ع، وليكن على خ مثل ل خ ي، / فنسبة قوس ع ف إلى ف ي كنسبة زاوية ع ل د إلى ي ل د وكنسبة ت – ٢٣٣ – و
زاوية ع د جـ إلى ب د جـ؛ فنسبة قوس ع ف إلى ف ي كنسبة قوس ع جـ إلى جـ ب، فنسبة قوس ف ع إلى ع ي كنسبة قوس ع جـ إلى ع ب، فنسبة قوس ت ف ع إلى ‹قوس› ع ي كنسبة قوس ت جـ ع إلى قوس ب ع، فنسبة قوس ف ي إلى قوس ي ع كنسبة قوس جـ ب إلى ب ع، فنسبة جيب قوس جـ ب إلى جيب قوس ب ع أعظم من نسبة جيب قوس ف ي إلى ‹جيب› قوس ي ع، فنسبة جيب قوس ب جـ ت إلى جيب

1 ع ل: ممحوة [س] – 2 انعطافية ب: بعدها في [ح، ل] «إلى ب د جـ»، وفوق «إلى» أثبت ناسخ [ل] «زايد منه»؛ وكتب «إلى» في التكرار، صفحة ٢٨٠، سطر ١٩ – 3-4 وتكون ... إلى ب د جـ: ناقصة [ل]، ولكنها موجودة في التكرار – 6 ت ف ع: ب ف ع [ح] / ي ل: ل ي [كـ] / ب س: ت س [س] – 8 ع ل د: ب د ل [كـ] / ي ل د: ي د [كـ] / وكنسبة: كنسبة [ل] – 9 ع د جـ: ع جـ [!] ع جـ د [كـ] / إلى ب د جـ : ناقصة [ت] – 9-10 فنسبة ... إلى ع ب: ناقصة [كـ] – 10 فنسبة قوس ف ع ... إلى ع ب: ناقصة [س] / ف ع إلى ع ي كنسبة قوس: ناقصة [ا، ت] / ت ف ع: ب ف ع [ح] – 11 ع ي: ي ع [كـ] / ت جـ ع: ب جـ ع [كـ، ح] / قوس: ناقصة [ح، كـ] / ب ع: ع ب [ا، ت، ح، ل] ع ت [س] / ف ي: ت ف ي [ا، ت، س، ل] ب ف ي [كـ] / قوس: ناقصة [كـ] – 12 جـ ب: ت جـ ب [ا، ت، ح، س] ب جـ [كـ] ب جـ ب [ل] / جـ ب: ت جـ ب [ا، ت، س، ل] ي حـ ب [كـ] – 12-13 فنسبة ... قوس ي ع: ناقصة [ا، ت، س، ل، كـ] – 13 ف ي: ب ف ي [كـ] ت ف ي [ت، ح، س، ل].

قوس ب ع أعظم من نسبة جيب قوس ت ف ي إلى ‹جيب› قوس ي ع، فنسبة ت ش إلى ش ع أعظم / من نسبة ت خ إلى خ ع للمقدمة الموضوعة؛ وذلك محال. / ل – ٢٨٠ – و

فليس ينعطف الشعاع من نقطة ع إلى نقطة من وراء س، وتبيّن أنه لا ينعطف إلى س، فتعين المطلوب. ل – ٢٨٠ – ظ

الحاصل: فقد تبيّن أن كل شعاع موازٍ لـ ا جـ، فإنه إذا وصل من الشمس إلى / كرة ا ب جـ، فإنه ينعطف إلى نقطة من ا جـ من وراء جـ، وأن كل شعاع منها يكون أبعد من ا ينعطف إلى نقطة أقرب من جـ، وأنه لا ينعطف إلى نقطة واحدة وراء جـ إلا شعاع واحد من الأشعة الموازية لـ ا جـ التي في سطح دائرة ا ب جـ، وأن الأشعة المنتهية إلى مبدأ مبدأ تنعطف جميعًا إلى نقطة نقطة / من خط ا جـ وراء نقطة جـ. ا – ٥٦٠ / ك – ٢٧٤ – ظ

أقول: وأنا أسمي تلك النقاط نهايات، فيكون لكل مبدأ منتهى.

قال: وقد بقي أن نحدّ نهاية الخط الذي عليه جميع النهايات ليتعين موضع الإحراق.

– ه – فلنعد دائرة ا ب جـ ونخرج ه ب ط موازيًا لـ ا جـ، فشعاع ه ب ينعطف إلى قوس ط جـ، فليكن على ب ک، ثم إلى ن، ونصل د ب وننفذه إلى ح ور.

وقد بيّن بطلميوس في المقالة الخامسة من كتابه في *المناظر* أن العطفية إذا كانت أربعين على أن / القائمة تسعون، فإن الباقية تكون خمسة وعشرين، وإذا كانت العطفية خمسين، كانت الباقية ثلاثين. س – ١٨٢ – ظ

أقول: ويعني أنه في كرة زجاج على ما يشعر به كلامه في صدر المقالة.

قال: فتبيّن من ذلك أن انعطافية الأربعين جزءًا هي خمسة عشر جزءًا وانعطافية الخمسين عشرون. فتبيّن أن زيادة انعطافية الخمسين على الأربعين نصف زيادة العطفية الأولى على العطفية الثانية.

1 ت ش: ت س [ل، ک] ب س [ح] – 2 ش ع: س [ک] س ع [ح] / ت خ إلى خ ع: ب ح الى ح ع [ح، ک] / للمقدمة الموضوعة: ناقصة [ا، ت، ح، س؛ ک] ناقصة في التكرار (٢٨٠–ظ، سطر ٧) [ل] / وذلك محال: بعدها كرر ناسخ [ل] صفحة 269، سطر ١، ابتداءً من «أقول» – 4 فتعين: فتبين [ک] – 5 الحاصل: ناقصة [س، ک] – 6 فإنه: ناقصة [ا] ما [ک] / من (الثانية): ناقصة [ک] – 7 أقرب: ا جـ ب [ک] / وراء: ورا [ا] / جـ: د جـ [ح] / إلا: لا [ک] – 8 ا ب جـ: ا ب [ا، ت، ح، س، ل، ک] / إلى: ناقصة [ل] – 9 مبدأ مبدأ: المبدأ المبدأ [ح] / نقطة نقطة: نقطة [ح] – 11 بقي: بقى لنا [س] / نحدّ: نجد [ا، ت، ک] / ليتعين: لنبين [ک] – 12 ه: ناقصة [ا، ت، ل، ک] – 14 وقد: قد [ک] / بيّن: تبين [ل، ک] / المناظر: المناظرة [ک] – 15 خمسة: خمسا [س] / العطفية: الثلثين، وكتب الناسخ فوقها «ظ» اختصارًا لكلمة «الظاهر» [ک] – 16 ثلاثين: ثمنين [ک] – 17 ويعني: ومعنى [ک] – 18 فتبين: فنبين [ک] / انعطافية: انعطاف [ک] / جزءًا: جزء [ح] – 18-19 جزءًا (الأولى) ... الأربعين: ناقصة [ک] – 19 فتبيّن: فيتبين [ا] / الخمسين على الأربعين: الاربعين على الخمسين [ح].

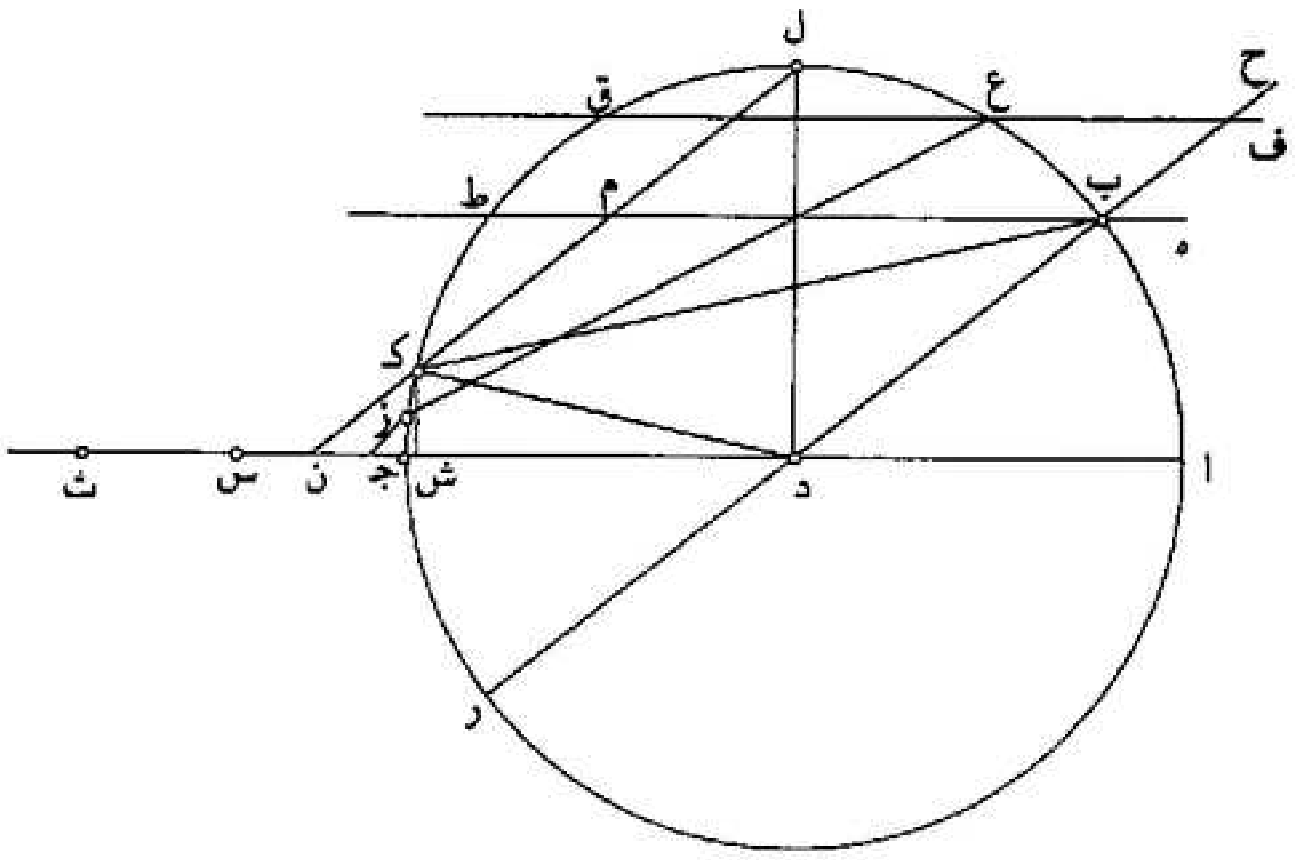
ثم بيّن بطلميوس أن زيادة الانعطافية على الانعطافية من بعد الخمسين تكون أعظم من نصف تفاضل العطفيتين. فإذا كانت قوس ا ب أربعين على / أن المحيط ثلاثمائة ل – ٢٨١ – و وستون، كانت زاوية ا د ب أربعين وكذلك ه ب ح، وزاوية د ب ک خمسة وعشرين، فزاوية ر د ک خمسون، فزاوية جـ د ک عشرة. وإذا كانت قوس ا ب خمسين جزءًا وكذلك زاوية ه ب ح وزاوية ا د ب، كانت باقية د ب ک ثلاثين ور د ک ستين فـ جـ د ک أيضًا عشرة. فالشعاعان الموازيان لـ ا جـ المنتهيان إلى نقطتين، بعداهما عن ا أربعون وخمسون، كلاهما ينعطفان إلى نقطة ک التي بعدها عن جـ عشرة أجزاء؛ ثم لا بد أن ينعطفا من بعد إلى نهايتين مختلفتين من / خط جـ س لما تقدم في د. فإن كانت قوس ا ب ت – ٢٣٣ – ظ خمسين، فكل شعاع موازٍ يصل إلى نقطة من وراء ب، فإنه ينعطف إلى نقطة فيما بين جـ ک، وذلك لأن زيادة قوس ا ع على قوس ا ب هي زيادة زاوية ا د ع على ا د ب – أعني عطفيتي ع ب – وهي زاوية ب د ع. فزيادة انعطافية ع على انعطافية ب أكثر من نصف ب د ع، وهذه الزيادة تفصل من قوس ب ع أكثر من نصفها. وإذا كانت على المحيط، فإنها توتر قوسًا هي أعظم من ب ع، أعني ق ط. / وانعطافية ب توتر قوس ا – ٥٦١ ط ک، فانعطافية ع توتر قوسًا أعظم من ق ک، فشعاع ف ع ينعطف إلى نقطة بين نقطتي ک جـ.

أقول: وذلك لأن الشعاع الممتد إلى ب ينعطف إلى ک سواء كان ب طرف قوس الخمسين أو الأربعين.

قال: فليكن على ع ز؛ وقد تبيّن أن الشعاع الذي يمتد إلى نقطة وراء النظيرة لنقطة ب وينتهي إلى ‹وراء› نظيرة ط، فإنه ينعطف إلى نقطة فيما بين جـ ن.

أقول: ينبغي أن تحمل «النظيرة» على ما يشملُ كلاً من نقاط المبدأ الذي تكون هي عليه وكلاً من النقاط التي تشبهها في كل كرة تفرض.

2 العطفيتين: القطعتين معًا [ک] / فإذا: اذا [ک] – 3 د ب ک: ا ب د [ک] – 4 وإذا: اذا [ا، ک] – 5 ه ب ح: ب ح [ل] / ثلاثين ور د ک: ناقصة [ک] / فـ جـ د ک: ود ک [ت] – 6-7 ا أربعون ... بعدها عن: ناقصة [ک] – 7 بعدها: بعدهما [ا] / ينعطفا: ينعطف [ح، ک] ينعطفان [ت] – 9 فكل: ناقصة [ا، ک] وكل [س] / شعاع: شعاعا [ک] – 10 هي: ففى [ا] – 11 عطفيتي: عطفتى [ا] نقطتي [ح] / ع ب: ا ب [س] / ع (الثانية): ناقصة [ا] ا [ک] / على: الى [ک] – 12 وهذه: وهذا [ک] / تفصل من: تنصل من [س] بفصل عن [ک] / وإذا: وان [ک] – 14 ط ک: ط د [ک] / ف ع: ب ع [ل] – 16 لأن: ناقصة [ا، ک] / ک: د [ک] / ب: ناقصة [ا، ک] – 18 قال: ناقصة [ا، ک] / ع ز: ع ص [ا، ت، ل، ک] ع ق [ح] ص [س] – 19 ط: ص [ا، ت، س، ل، ک] – 20 يشمل: يشتمل [ح، ک].



قال: فالأشعة الموازية المنتهية / إلى موضع بعده من طرف القطر أكثر من خمسين ك-٢٧٥-و تنعطف إلى نقطة فيما بين النقطة التي ينعطف إليها الشعاع من طرف الخمسين وبين طرف القطر النظير لنقطة جـ، ثم تنعطف إلى نقطة من الخط النظير لخط جـ ن. فنظيرة ك هي التي تحدّ جميع النقط التي تنعطف إليها الأشعة التي من وراء الخمسين جزءًا، ونظيرة ن هي التي تحدّ جميع النقط التي تنعطف إليها الأشعة المذكورة ثانيًا. ونخرج ن ك إلى أن يلقى المحيط على ل، وليقطع ب ط على م، فيكون زاوية ب ك م مثل زاوية ك ب م، فتكون قوس ب ل مثل قوس ط ك؛ وإذا كانت ا ب خمسين، فـ ط ك أربعون.

أقول: وذلك لأن جـ ك عشرة.

قال: وكذلك ب ل. فقوس ا ل تسعون، فإذا أخرج القطر القائم على ا جـ، ونصّف ا ب جـ على ل، وجُعل جـ ك عشرة، ووصل ل ك، وأخرج إلى أن يلقى ا جـ، / كان ل-٢٨١-ظ الخط الذي ينفصل بين ل ك وبين جـ، أعني ن جـ، هو الذي يحيط بجميع النهايات لأشعة قوس ب ل. والأشعة التي تصل إلى قوس أربعين تنعطف إلى ك جـ، ثم إلى نقطة وراء ن، لأن قوس ا ب إذا كانت أربعين، كان شعاع ب ط من وراء كل شعاع يصل إلى قوس ا ب. فإذا وصل شعاع إلى نقطة بين ا ب مثل و، كانت زيادة انعطافية ب على انعطافية و أقلّ من نصف قوس ب و، إذا كانت الزيادة على المركز، وأقلّ من

2 إليها: عليها [ك] – 3 النظير: ناقصة [ك] / النظير: ناقصة [س] – 4 تحدّ: تجد [ا، ت، ك، ل] / النقط: النقاط [ك] / جزءًا: جـ د [ك] – 5 تحدّ: تجد [ا، ت، ك] / النقط: النقاط [س] / الأشعة: أعاد الناسخ بعد هذه الكلمة «والتي من وراء الخمسين جزءًا ونظيرة ن» [ت] – 6 م: ر [ك] / ك ب م: ك م ب [ل] – 7 ط ك (الأولى): ط ص [ك] – 9 وكذلك: فكذلك [ا، ت، س، ح، ك، ل] / ب ل: ي ل [ك] / القائم على: النظير لـ [ا، ت، ح، س، ل] النظير [ك] / ا جـ: الاخر [ك] – 10 ووصل ل ك: كررها الناسخ [ت] / كان: فان [س] – 11 ل ك: ل د [ك] – 12 ك جـ: ك [ت] جـ ك [س] د جـ [ك] – 13 وراء ن: قدامه [ك] – 14 بين: ناقصة [س] / و: ر [ك] – 14-15 انعطافية ب على: انعطافية على [ا] ناقصة [ح] – 15 و: ر [ك] / ب و: ب [ك] / إذا: فاذا [ك].

ب و إذا كانت على المحيط. ونخرج و ذ موازيًا لـ ب ط، / ولينعطف الشعاع على خط و ي، فيكون زيادة قوس ط ك على قوس ذ ي أقل من ط ذ، فنقطة ك فيما بين / نقطتي ذ ي، فنقطة ي فيما بين ك جـ. ت-٢٣٤-و ا-٥٦٢

أقول: كون ي فيما بين ك جـ ضروري، وإلا لكانت إما حيث ك أو من ورائها، ويلزم أن تكون الزيادة بقدر ط ذ أو أكثر، فأما كون ك بين ذ ي فغير لازم ولا نافع أيضًا.

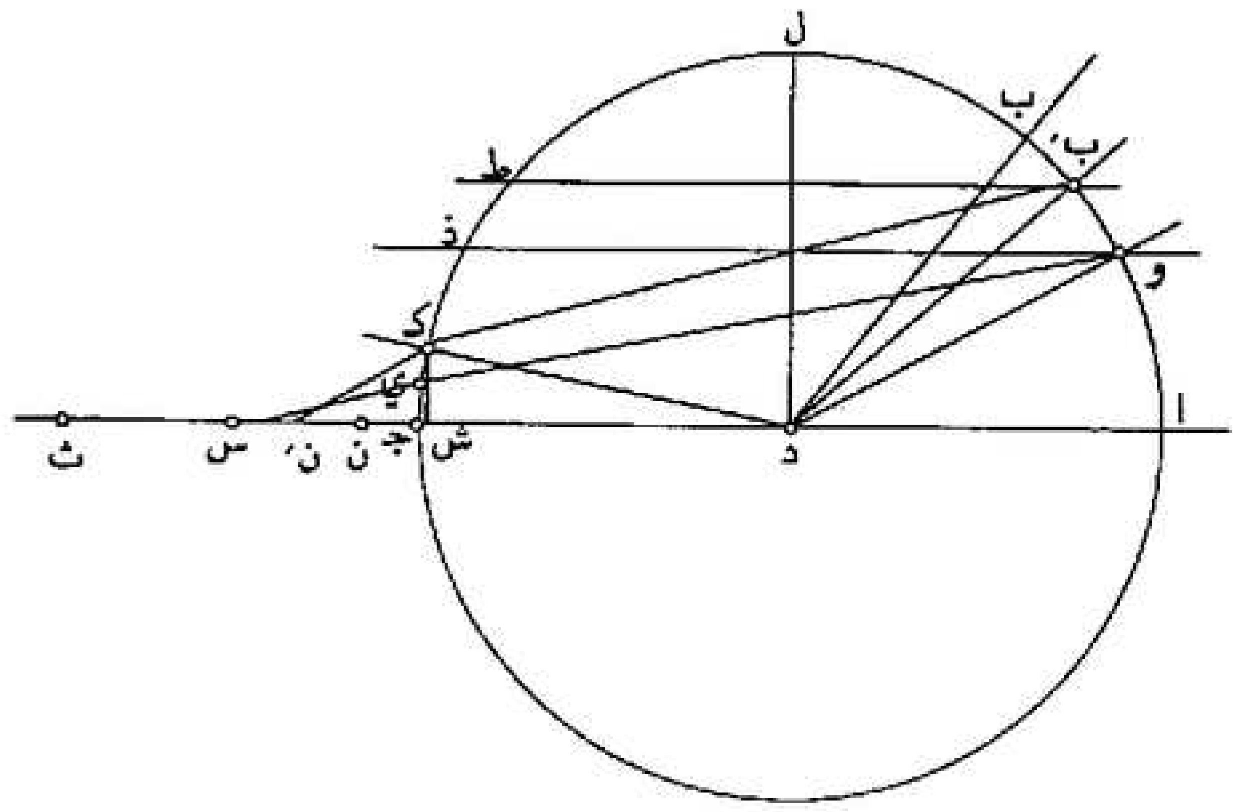
قال: فيكون ن أقرب إلى جـ من منتهى الشعاع المنعطف من ي.

أقول: / الكلام من قوله «فإذا وصل شعاع إلى نقطة بين ا ب مثل و» إلى هاهنا مستغنى عنه لأن النتيجة معلومة مما سلف. س-١٨٣-و

قال: فالشعاعات التي تمتد إلى قوس الأربعين تنعطف جميعها إلى ما وراء ن، وتحدث هي وسائر الأشعة عند النهايات زوايا كل منها ضعف الانعطافية. والخطوط الواصلة بين د ونقاط الانعطاف الثواني تحيط مع د جـ بزوايا كل منها زيادة ضعف الباقية على العطفية التي هي أصغر من ضعف / الانعطافية. والزوايا التي عند النهايات تكون أعظم من نظائرها التي عند المركز، فنصف قطر الدائرة أبدًا أعظم من خط الانعطاف المنتهي إلى النهاية، وخط الانعطاف / أعظم من الخط الذي يحدّه جـ والنهاية، فهذا الخط أبدًا أصغر من نصف القطر. ك-٢٧٥-ظ ل-٢٨٢-و

ونجعل جـ ث مثل نصف القطر، فيكون جميع النهايات أقرب إلى جـ من ث. والشعاعات الممتدة إلى قوس الأربعين هي أقرب إلى ا وتنعطف إلى ن ث. فأما التي من وراء الأربعين، فإن ما يصل منها إلى قوس ك جـ ينعطف إلى جـ ن، وهي التي من وراء الخمسين، وما يصل منها إلى نقطة من وراء ك ينعطف أيضًا إلى جـ ن.

1 ب و: ب ر [ك] / و ذ: ر ي [ك] و د [ح]: وكذلك فيما بعد / خط: ناقصة [ح، س] – 2 و ي: ذ ي [ك] / ذ ي: ك ي [ح] / ط ذ: ط ك [ح] / فيما بين: بعدها «ك جـ» [ل] – 3 فنقطة ي: ناقصة [ك] – 4 وإلا: واما [ا، ك] إلا [س] / إما: ناقصة [س] / حيث: جيب [ا، ح] / ك: ذ [ك] – 5 ط ذ: ط ك [ك] / كون: لون [س] / بين: فيما بين [ك] / ذ ي: د ل [ك] / نافع: لا يستقيم المعنى إذا تركنا هذه الكلمة كما هي وإن أثبتت في أغلب المخطوطات [ا، ت، س، ل]. وربما كانت في الأصل «مانع». وقد تُقرأ «ولا مانع منه أيضًا»، والمقصود أنه ليس بالمستحيل. واستعمال اسم الفاعل هنا هو للتعبير عن اسم مفعول؛ مانع [ح] نامع، وكتب الناسخ تحتها «ع» اختصارًا لعبارة «لعله كذا» [ك] – 7 و: ه [ل] ر [ك] – 8 النتيجة: المقيمة [ك] – 9 تمتد: عند [ت] متد [س] / ن: ناقصة [ك] – 10 الواصلة: الداخلة [ا، ت، ك] – 11 الثواني: التوالي [ك] / د جـ: د [س] / منها: منهما [ت] / زيادة: ناقصة [ك] / على: مع [ك] – 12 العطفية: القطعة [ك] / ضعف: ناقصة [ح] – 13 نظائرها: نظائره [ك] / خط الانعطاف: خط نصف الانعطاف [س] – 14 يحدّه: تجده [ا، ك] يحد [ح] / جـ: ه جـ [ح] – 17 الأربعين: أربعين [ا، ك] – 17-18 من وراء: وراء [ح] – 18 منها: ناقصة [س] – 18-19 وهي ... جـ ن: ناقصة [ت] – 19 جـ ن: جـ ب [ك].



أقول: تفصيل الأشعة التي من وراء الأربعين مُستغنى عنه أيضًا.

قال: فالشعاعات التي تنعطف إلى جـ ن أكثر من التي تنعطف إلى ن ث. ونصل د ل فيكون عمودًا على قطر ا جـ وهو ستون، ونخرج عمود كـ ش عليه فيكون عشرة ونصفًا تقريبًا، إذْ هو جيب ‹قوس› كـ جـ، ونسبة ل د إلى كـ ش كنسبة د ن إلى ن ش، وخط ش جـ أكثر من نصف جزء، فخط ن جـ أقل من اثني عشر جزءًا، فهو أقل من سدس د ن، فـ ن جـ أقل من خمس د جـ، وننصف ث جـ على س. فالشعاعات المنعطفة إلى س جـ أكثر بكثير من المنعطفة إلى س ث، وس جـ أقرب إلى نقطة الانعطاف من س ث، فالحرارة عند س جـ أكثر منها عند س ث، فالإحراق إنما يكون على س جـ الذي هو ربع القطر؛ وذلك ما أردناه.

أقول: لا شك أن ن جـ إذا كان أقل من خمس د جـ فنصفه أقل من عشر د جـ، فلا يكون الإحراق على س جـ إحراقًا على ربع القطر، والظاهر هو أن ذلك سهو من الناسخ، والصواب أن ينصف ث جـ ليحصل ما ذكر وأن يكون نقطة س فيما بين ث ن

الشكل ليس في المخطوطات – 1 تفصيل: نفصل [ا، كـ] – 2 جـ ن: جـ ب [كـ] – 3 د ل: د ث [ح، ل] ع ل [كـ] / قطر: القطر [كـ] / وهو: و س [ل] / ونخرج: ود ح [س] – 3-4 عشرة ونصفًا تقريبًا: عشرة نصفا بالتقريب [كـ] – 4 إذ: او [كـ] / كـ جـ: د جـ [كـ] / كـ ش: د ش [كـ] / د ن: د س [كـ] / ن ش: ن س [ا، كـ] – 5 ش جـ: جـ ش [كـ] / جزء: جـ د [س] / اثني عشر جزءًا: عشرة أجزاء [ا، ت، ح، س، ل، كـ] – 6 د ن: ن د [ا، ت، ح، س، كـ] / فـ ن جـ: فـ ر جـ [ح] / خمس: خمسين [ت] / ث جـ: ن جـ [ا، ت، ح، س، ل، كـ] / على س: ناقصة [س] – 7 س جـ: س ن [ل] / أكثر ... س ث: ناقصة [ل] / بكثير: تكثير [كـ] / س ث: س ن [ا، ت، ح، س، كـ] – 8 س ث: س ن [ا، ت، ح، س، ل، كـ] / س ث: س ي [ا، ت، ح، س، كـ] س ن [ل] – 10 أقول: ناقصة [ا، كـ] / لا: ولا [ا، كـ] – 11 الإحراق: لاحراق [ا] / ربع: ربعى [كـ] / والظاهر: فالظاهر [ا، كـ] / هو: ناقصة [ا، ت، ح، س، كـ] – 12 ث ن: ب ن [كـ].

في الشكل. وقد / تصفحت نسختين من مقالته هذه فوجدت فيهما على ما أوردته، ا-٥٦٣
فأوردت على ما وجدته، ونبهت على ما فيه.

رد والزام

وإذْ قد تبيّن أن انعطافية الخمسين كـ ٦ وباقيها لَ ٦، وانعطافية الأربعين يه ٦ وباقيها
كه ٦، وأن تفاضل الانعطافيات بعد الخمسين أعظم من نصف تفاضل عطفياتها، والتي
قبل الأربعين أقل، فظاهر أن تفاضل انعطافيتي الأربعين والخمسين كتفاضل باقيتيهما،
ومجموع التفاضلين كتفاضل العطفيتين. وانعطافية الستين تزيد على انعطافية الخمسين بأكثر
من ه، فباقية الستين تزيد على باقية الخمسين بأقل من ه ضرورة. ولأن مجموع / الزيادتين ت-٢٣٤-ظ
هو زيادة الستين على الخمسين، أعني عشرة، فزيادة انعطافية الستين على انعطافية
الخمسين أعظم من زيادة باقية الستين على باقية الخمسين، وكذلك إلى نهاية الانعطاف. /
ويكون بمثل هذا البيان زيادة انعطافية الأربعين على انعطافية الثلاثين أقلّ من زيادة ك-٢٧٦-و
الباقية على الباقية، وكذلك إلى / أوائل الانعطاف. فزيادات الباقيات المتوالية من أوائل ل-٢٨٢-ظ
الانعطاف أعظم من زيادات انعطافياتها إلى حد ما نسميه الفصل – المتصاغرة إلى أن
تصير صفرًا، ثم تصير زيادات الانعطافيات / أعظم، مندرجة من غاية الصغر إلى غاية س-١٨٣-ظ
من العظم عند انتهاء الانعطاف. وزيادات انعطافيات ما بعد الفصل على انعطافيات ما
بعده أعظم من زيادات الباقيات. وكذا زيادات انعطافيات ما بعده على انعطافية الفصل

1 هذه: هذا [ل] / فوجدت: فوجدته [ح] / أوردته: اوردة [ت] – 2 ونبهت: ونهب [ا، ت، كـ] / ما فيه: بعدها «إلى الفرج» [ح] – 3 رد: ورد [ت] / رد والزام: ناقصة [ح، كـ] – 4 إذْ: ناقصة [ح، ل] / انعطافية (الأولى والثانية): الانعطافية [ح] / كـ ٦: كـ جـ [كـ] / وباقيها لَ ٦: ناقصة [كـ] / وباقيها: يكتبها «وباقيتها» ولن نشير لها مرة أخرى [ت، س، كـ] / يه ٦: ن جـ [كـ] – 5 كه: د [ا] د جـ [كـ] / نصف: ناقصة [ا، كـ] – 6 قبل: على [كـ] / انعطافيتي: انعطافين [كـ] / باقيتيهما: باقيتهما [س، ح، كـ] – 7 التفاضلين: التفاضل [س] / كتفاضل: كمجموع [ح] ناقصة [س] / العطفيتين: القطعتين [كـ] / انعطافية (الثانية): الانعطافية [ل] – 8 من ه: مرة [كـ] / ه (الأولى): ناقصة [ا] / ه: ناقصة [ا] عشرة [كـ] / ولأن: لأن [ا، ت، س، ل، كـ] – 10 وكذلك: كذلك [ح] / إلى: لا [كـ] – 11 بمثل: تمثيل [ح، ل] – 12 على: الى [كـ] على الباقية: ناقصة [ح، ل] / فزيادات: فزيادة [ح، ل] / المتوالية: المتواليات [س] – 13 زيادات: زيادة [ح] / انعطافياتها: انعطافاتها [ح، ل] / حد ما نسميه: حده تسمية [كـ] / الفصل: يكتبها «القفصل» ولن نشير لها مرة أخرى [ا، ح، كـ] / المتصاغرة: متصاغرة [ا، ت، س، كـ] – 14 صفرًا: صغيرًا [كـ] / مندرجة: متدرجة [ح] / من: في [س] – 14-15 أعظم ... وزيادات انعطافيات: مكررة مع الخطأ [ا، كـ] / الصغر ... من: ناقصة [ا، كـ]، وهي في التكرار – 15 من: ناقصة [س] / انتهاء: انها [ا، ت] / انعطافيات (الأولى): الانعطافيات [ح، ل] – 15-16 بعد ... ما: ناقصة [كـ] – 16 انعطافية: انعطافيات [كـ].

أعظم من زيادات الباقيات على ما فيه الفصل. وزيادات انعطافية الفصل وما قبله على ما قبله تكون أصغر من زيادات الباقيات. فأما انعطافيات ما بعد الفصل، فإن زياداتها على انعطافيات ما قبله قد تزيد على زيادات الباقيات، وقد تساوي وقد تنقص. فإن زادت، تقاطع الشعاعان داخل الكرة، وإن تساويا، تقاطعا عند محيط الكرة، وإن نقصت، فخارج الكرة. ولما كانت بواقي الانعطافيات في الأغلظ كعطفياتها في الألطف، في اقتضاء قدر الانعطافية، وتحقق أن تفاضلات الانعطافيات في الأغلظ قد تزيد على تفاضلات باقياتها وقد تساويها، فتفاضلات الانعطافيات في الألطف قد تزيد على تفاضلات عطفياتها وقد تساويها، وذلك ما وعدنا بيانه ‹في› أوائل الفصل الثالث من المقالة السابعة.

وقد استخرجنا انعطافيات العطفيات المتفاضلة بخمس خمس وباقياتها على أن الانعطاف من الهواء في الزجاج بناءً على المعطى / من انعطافيتي الأربعين والخمسين، ل-٢٨٣-و وسلكنا فيه مسلكًا لطيفًا من أصناف قوس الخلاف، فخرجت / على ما وضع في الجدول. ا-٥٦٤ وذلك تخمين لا يقادر التحقيق فيما نحن بصدده من التمثيل بشيء يُعتد به. فمن أراد استخراجها على تفاضل درجة درجة، أو أدق، فليقسم / التفاضلات المتوالية على ت-٢٣٥-و خمسة / أو غير ذلك بحسب ما يوجبه التدقيق، ثم يزيد الحاصل مرة بعد أخرى على ك-٢٧٦-ظ الأولى إلى أن يبلغ الأخرى، وعلى ذلك حتى يحصل المطلوب، وهذا هو الجدول. / س-١٨٤-و

1 ما فيه: باقية [س، كـ] – 1-2 على ما قبله: ناقصة [ح، س، كـ] – 2 فإن: وان [كـ] / زياداتها: زيادات [كـ] – 3 تساوي: ساوي [ل] – 4 تقاطع: يتقاطع [كـ] / وإن تساويا: أو تساويا [ح، ل] / نقصت: تتصوب [ح، ل] – 5 فخارج: مخارج [ح] / كانت: كان [ا، ت، س، كـ] / بواقي: توافى [ح] / في الأغلظ: بالاغلظ [كـ] / كعطفياتها: كانعطافياتها [ح] – 6 اقتضاء: ناقصة [ا، ت، كـ] – 7 الانعطافيات: الانعطافات [كـ] – 8 بيانه: ببيانه [ح] – 10 العطفيات: ناقصة [كـ] / وباقياتها: وباقيتها [ا، كـ] – 11 بناءً: بنا [ا] / من انعطافيتي: وانعطافيتى [س] من انعطافين [كـ] – 13 تخمين: بخسمين [س] / لا يقادر التحقيق: الأبعاد والتحقيق [ا، ت، كـ] / بشيء يُعتد: لشيء نعتد [ح] – 15 بحسب: حسب [ح، ل] – 16 الجدول: فارغ، رسم خطوطه ولم يكمله [ا، ت، كـ] ثمة بعض الأخطاء وصوّبناها دون الإشارة إليها [ح] أثبتنا الفوارق حسب مخطوطتي [س، ل].

	العطفيات في الألطف		الانعطافيات			التفاضلات			الباقيات العطفيات في الأغلظ			التفاضلات		
			ج	ق	نيه	ج	ق	نيه	ج	ق	نيه	ج	ق	نيه
	٦	نط	٦	يه	٦				٦	مد	٦			
ا	ه	٦	ا	ك	كه	ا	ه	كه	ج	لط	له	ب	نه	له
ب	ي	٦	ب	نا	يه	ا	ل	ن	ز	ح	مه	ج	كط	ي
ج	يه	٦	د	لا	نج	ا	م	لح	ي	كح	ز	ج	يط	كب
د	ك	٦	و	كا	م	ا	مط	مز	يج	لح	ك	ج	ي	يج
ه	كه	٦	ح	ك	٦	ا	نح	ك	يو	م	٦	ج	ا	م
و	ل	٦	ي	كو	يه	ب	و	يه	يط	لج	مه	ب	نج	مه
ز	له	٦	يب	لط	مح	ب	يج	لج	كب	ك	يب	ب	مو	كز
ح	م	٦	يه	٦	٦	ب	ك	يب	كه	٦	٦	ب	لط	مح
ط	مه	٦	يز	كو	يه	ب	كو	يه	كز	لج	مه	ب	لج	مه
ي	ن	٦	ك	٦	٦	ب	لج	مه	ل	٦	٦	ب	كو	يه
يا	نه	٦	كب	ما	يه	ب	ما	يه	لب	يح	مه	ب	يح	مه
يب	س	٦	كه	ل	٦	ب	مح	مه	لد	ل	٦	ب	يا	يه
يج	سه	٦	كح	كو	يه	ب	نو	يه	لو	لج	مه	ب	ج	مه
يد	ع	٦	لا	ل	٦	ج	ج	مه	لح	ل	٦	ا	نو	يه
يه	عه	٦	لد	ما	يه	ج	يا	يه	م	يح	مه	ا	مح	مه
يو	ف	٦	لح	٦	٦	ج	يح	مه	مب	٦	٦	ا	ما	يه
يز	فه	٦	ما	كو	يه	ج	كو	يه	مج	لج	مه	ا	لج	مه
يح	فط	نط	مد	نط	كط	ج	لج	يد	مد	نط	لا	ا	كه	مو

2-1 العطفيات في الألطف: الانعطافيات في الألطف [ل] – 9 يجـ (الثانية): جـ [ل] – 16 يح (الأولى): لجـ [ل] / يح (الثانية): لح [ل] – 17 كه: كد [ل] – 18 كو: كح [ل] – 20 يح: لح [ل] – 23 لا: كط [س].

حاشية في كيفية استخراج ذلك

لما كانت عظمى الانعطافيات تزيد على صغرتها بما لا يبلغ ربع العطفية، وصغرتها تجاوز الربع، قسمنا الربع – وهو يه دقيقة – على يح عدد العطفيات، خرج ن ثانية وهو البيت الأوسط للجميع، فضربناه في ح بلغ ٦ و م، زدناه على ٦ يه بلغ ‹٦› كا م، فقد نقصت عن ‹٦› كب ل: ن ثانية، قسمناه على ح خرج و ‹ثانية و› يه ثالثة، زدناه على ن ثانية، بلغ نو ‹ثانية› يه ثالثة، وهو البيت الأوسط للقسم الأول، أعني من ا إلى ح.

وكذلك ضربنا ن ثانية في ب، بلغ ا م، زدناه على ٦ كب ل، بلغ ‹٦› كد ي؛ فقد زاد على ‹٦› كد: ي ثانية، قسمناه على ب خرج ه، نقصناه عن ن، بقي مه ثانية، وهو البيت الأوسط للقسم الثاني، أعني من ح إلى ي.

وكذلك ضربنا ن في ح بلغ ٦ و م، زدناه على ٦ كد بلغ ٦ ل م، فقد زاد م، قسمناه على ح خرج ه، نقصناه عن ن، بقي مه ثانية، وهو البيت الأوسط للقسم الثالث.

فاقتضى ذلك أن يكون البيت المعدّل من وراء ح البيت الأوسط المذكور في القسمين الأخيرين، إذْ لو تفاضلت لتغيرت انعطافية ن، فجعلناه كذلك ثم أخذنا التفاوت بين البيت الأوسط للقسم الأول والأوسط للقسمين الأخيرين، فكان يا ‹ثانية› مه ثالثة، ضربناه في ثمانية، بلغ ا ‹دقيقة› ل ثانية، قسمناه على مثلث ح، أعني ستة وثلاثين، خرج ب ‹ثانية› ل ‹ثالثة›، ضربناه في الأعداد المتوالية من ا / إلى ح حصل هكذا: ب ل، ه ٦، ‹ذ ل›، ي ٦، يب ل، يه ٦، يز ل، كـ ٦، زدناها على مه ثانية على الولاء مبتدئين من كـ ٦، حصل هكذا: ا ه ٦؛ ا ب ل؛ ا ٦ ٦؛ ٦ نز ل؛ ٦ نه ٦؛ ٦ نب ل؛ ٦ ن ٦؛ ٦ مز ل؛ وهي الأبيات المعدّلة من ا إلى ح. والبيت المعدّل بعد ذلك ٦ ٦ مه ٦؛ فزدنا الأبيات المرتبة المتوالية على ٦ يه ٦ ٦ وهي أقل نسب الانعطافيات إلى س – ١٨٤ – ظ

1 لم نجد هذه الحاشية إلاّ في مخطوطة واحدة [س] بين تلك التي اعتمدنا عليها لتحقيق النص، وهي جزء من النص نفسه في هذه المخطوطة، مما يثير السؤال حول مؤلف هذه الحاشية كما بينا هذا في المقدمة. ووجدنا أسلم الحلول هو الإبقاء عليها كما هي. وهذه الفقرة الهامة صعبة القراءة لكثرة الحروف – 2 صغرتها: وردت هكذا في أكثر من موضع، والصحيح «صغراها» لأن صيغة التفضيل «صغرى» وليس «صغرة» – 3 الربع: المعنى المقصود بالعبارة الأولى هو ما يلي: لما كانت أكبر نسب الانعطاقيات إلى عطفيتها تزيد على أصغر نسب الانعطافيات إلى عطفيتها بما لا يبلغ الربع، وأصغر نسب الانعطافيات إلى عطفيتها تجاوز الربع – 5 قسمناه: أي العدد – 14 الأخيرين: قد تُقرأ «الآخرين»، وهذا أيضًا جائز [س] – 16 مثلث: أي العدد المثلث – 18 زدناها: رنادها [س] – 21 وهي: هي [س].

عطفياتها على الولاء إلى بيت يح، فحصلت نسب الانعطافيات المتوالية إلى عطفياتها هكذا: ٦ يه ٦ ٦؛ ٦ يو ٥ ٦؛ ٦ يز ز ل؛ ٦ يح ز ل؛ ٦ يط ٥ ٦؛ ٦ ك ٦ ٦؛ ٦ ك نب ل؛ ٦ كا مب ل؛ ٦ كب ل ٦؛ ٦ كج يه ٦؛ ٦ كد ٦ ٦؛ ٦ كد مه ٦؛ ٦ كه ل ٦؛ ٦ كو يه ٦؛ ٦ كز ٦ ٦؛ ٦ كز مه ٦؛ ٦ كح ل ٦؛ ٦ كط يه ٦؛ ٦ ل ٦ ٦؛ ثم ضربنا كلاً منها في عطفيتها، بلغت الانعطافيات للعطفيات المتوالية على تفاضل خمسة خمسة على ما وضع في الجدول؛ وذلك ما أردناه.

قال تكملة: ثم إن كل نقطة من الكرة تخرج إليها الأشعة من جميع جرم الشمس المقابل لها، والشعاع الموازي أحدها؛ إلا أن جميعها يحيط مع الموازي بزوايا في غاية الضيق ليس لها قدر محسوس. فإذا انعطف الموازي، انعطف الجميع معه محيطًا به، فينعطف الجميع إلى النقطة التي إليها ينتهي الموازي حيث انتهى. فيصير الموضع الذي يحصل فيه جميع المنعطف جزءًا من الهواء ذا قدرٍ غير مقتدرٍ لضيق رأس المخروط.

أقول: يعني المخروط المعكوس الوضع الملتئم من أشعة جميع نقاط الشمس المنتهية إلى نقطة الانعطاف للخط الموازي.

قال: وقرب المسافة.

أقول: يعني بين رأس المخروط وموضع الانتهاء.

قال: ولا يكون نقطة متوهمة. ولذلك حصلت فيه حرارة. ولو كانت نقطة متوهمة لما حصل فيها حرارة. وكذلك النقطة التي ينتهي إليها أشعة جرم الشمس في السطح الأعلى من الكرة ليست نقطة متوهمة، بل هو جزء صغير من سطح الكرة.

أقول: وكأنه يريد بها نقطة تحصل منها حرارة ليصح كلامه.

قال: إلا أنه أصغر من الجزء الذي يُنعطف إليه، لأن الأشعة التي تخرج من جميع جرم الشمس إلى جزء صغير/ من سطح الكرة تكوّن مخروطًا، / ذلك الجزء الصغير رأسه؛ ك – ٢٧٧ – و ا – ٥٦٥

3 كب ل ٦: أثبتها في الهامش مع الإشارة إلى موضعها [س] – 7 قال: ناقصة [ا، ك] / تكملة: ناقصة [ك] – 9 انعطف: انعطفت [ك] / انعطف: انعطفت [ك] / محيطًا: محيطة، وردت هكذا، وهي حال من «الجميع» – 10 التي: ناقصة [ا] – 11 المنعطف: المنعطفة [ا، ت، ح، ك، ل] / جزءًا: جزء [ك] / ذا قدر: واقدر [ا] – 12 يعني المخروط: يعني أنه المخروط [ح] / المعكوس: المنعكس [ك] – 14 قال: ناقصة [ا، ك] / وقرب: وقريب [ا، ك] – 16 فيه: فيها [ح] / ولو: لو [ك] – 17 وكذلك: ولذلك [ا، ت، ك] ولو كانت [ح] – 19 وكأنه: كانه [ا، ت، ح، س، ك] / منها: فيها [ا، ت، ح، ك] / ليصح: لصح [ا] ليتضح [ح] / كلامه: كلا [ا، ك] – 20 إليه: عليه [ا، ت] / جميع: ناقصة [س] – 21 ذلك: وذلك [ح].

فإذا انعطفت كان منخرطًا إلى السعة. وكلُّ نقطة على جـ س ينعطف إليها شعاع يُحيط بها جزء من الهواء له قدر يسير حِسًّا، فمن أجل ذلك يحصل على جـ س أجزاء كثيرة من الهواء، كلُّ واحد منها له قدر محسوس، في كل منها حرارة، وصلت إليه من جميع جرم الشمس، فلذلك يحصل عنده الإحراق.

حاصل الفصل: فكل كرة من البلور وما شابهه، صحيحة الكرية شديدة الشفيف، إذا قوبل بها جرم الشمس، فإنها تحدث إحراقًا في خلاف جهة الشمس عند بعد من الكرة يكون أقل من ربع القطر. وكذلك القارورة، إذا كانت كرة من زجاج نقي قد مُلئت ماءً صافيًا، لأن شفيف الزجاج النقي والماء متشابهان جدًا. فالشعاع النافذ في القارورة لا ينعطف في الماء ما يُعْتَدُّ به. فأما إن كانت خالية فلا، لاختلاف شفيف الهواء والقارورة؛ فإذا نفذ الشعاع في القارورة ووصل إلى الهواء، انعطف؛ ثم إذا وصل إلى القارورة انعطف ثانيًا، فيكون عند النهاية على أربعة انعطافات، والانعطاف يضعف الشعاع، / فإذا كثر تكراره، قل تأثيره. ل – ٢٨٣ – ظ

أقول: وعند هذا الكلام ختم المقالة.

1 انعطفت: انعطف [ا، ح، س، ل] / وكل: فكل [ا، ت، ح، س، كـ] – 2 له: به [ح] ناقصة [كـ] – 3 له: ناقصة [ل، كـ] / في كل: وكل [كـ] / إليه: ناقصة [ا، كـ] – 4 يحصل: يحدث [ا، ت، ح، ل، كـ] – 5 حاصل الفصل: ناقصة [كـ] / الكرية: الكرة [ل] – 6 بعد: بعيد [ل] – 7 قد: ناقصة [كـ] – 8 صافيًا: صاف [كـ] / والماء: ولما [ا] – 9 في الماء: ناقصة [ح] / فلا، لاختلاف: فلاختلاف [ا، كـ] – 10 القارورة (الأولى): أعاد بعدها «فإذا نفذ الشعاع»، ثم تنبه لهذا فأشار إليه بالعلامة المعروفة [ت] – 11 يضعف: نصف [ا، كـ] – 13 هذا: ها [ت].

الهندسة وعلم المناظر في ضحى الإسلام

الفصل الرابع
القطوع المخروطية و تطبيقاتها

رشدي راشد

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz
منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

الفصل الرابع

القطوع المخروطية وتطبيقاتها

لاقت أعمال ابن سهل الرياضية مصيراً أقل حظاً أيضاً من مصير المناظر. إذ لم يصلنا من تراث يحوي ستة عناوين على الأقل سوى اثنين: كتيب في المخروطات وتعليق على رسالة في هندسة الأصطرلاب ألفها معاصره القوهي. أضف إليهما نصوص مسائل ثلاث نسخها معاصره الشني الذي أعطى أيضاً تركيب تحليل ابن سهل. وأخيراً مسائل عدة – ثلاث مسائل على الأقل – حلها ابن سهل ونقلها عنه السجزي. هذا كل ما نعرفه إلى يومنا من كتابات ابن سهل الرياضية. غير أننا نعرف نقلاً عن رياضيي عصره – وعن أهمهم كالقوهي والسجزي على سبيل المثال – أنه صاحب مؤلف في تربيع القطع المكافئ وآخر يناقش فيه مسائل تتعلق بمركز الثقل[1] وأنه ألف كتاباً مكرساً بكامله للتحديد (Diorisms). نعرف أيضاً ما كان يكنه له زملاؤه الرياضيون من سمو التقدير، على غرار القوهي والسجزي والشني. كان الناس يأتون إلى ابن سهل عندما يعجزون عن حل مسألة ما كمقدمة أرشميدس مثلاً[2]. وإليه يرجعون لتفسير الأفكار الجديدة التي مازالت غامضة كأفكار القوهي في الإسقاطات[3]. وحتى نقاده كانوا يعترفون بتفوقه الرياضي. ولذا فمن المستبعد أن تقتصر أعماله الرياضية على هذه الرسالات الست ويبقى على البحث التاريخي التعرف على أعمال أخرى.

إن الإشارة إلى هذه العناوين والتذكير ببعض الوجوه التاريخية للوسط الرياضي الذي عاش فيه – كالقوهي والسجزي – كافيان للدلالة على ابن سهل كمهندس. ولكن ماذا نعني بقولنا مهندس من الطراز الأول في النصف الثاني من القرن العاشر؟ يتيح لنا وضع ابن سهل فرصة معالجة هذا السؤال الهام، والغريب في الأمر أنه لم يثر من قبل المؤرخين قبل الآن.

اقتصرت أعمال المهندسين إلى حد بعيد، وخاصة ما بين القرنين التاسع والثاني عشر، على توسيع هندسة أسلافهم الهيلينيين، ولاسيما أقليدس وأبلونيوس، في نفس المجال متبعين نفس الأسلوب؛ بحيث يمكننا تلقيبهم "بالرياضيين الهيلينيين العرب". إلا أن الاقتصار على هذه الملاحظة قد يجعلنا نهمل بعداً آخر من هندسة ذلك العصر لا يقل أهمية عن الأول. وبذا تصبح أخطاء الرؤية أمراً شائعاً في الكتابة التاريخية لفصل من فصول هذه الهندسة. ولكن نظرة أقل شمولية وأكثر انتباهاً للعلاقة بين الهندسة وغيرها من العلوم، كالجبر والفلك، ستلحظ في هذه اللوحة الهيللنية مجالين

---

[1] انظر الفصل الأول ص. 5–6.

[2] انظر الفصل الأول هـ. 23. ص. 8.

[3] انظر مقدمة تعليقه على رسالة القوهي *في الأصطرلاب*.

على الأقل لا يشملهما هذا التصنيف. أحدهما هو الهندسة الجبرية، درس كثيراً ولن نعيره إلا اهتماماً قليلاً هنا؛ فقد تقفينا في موضع آخر أثر الجدلية بين الجبر والهندسة التي بدأت بها كوكبة من الرياضيين في القرن العاشر أمثال الخازن وابن الليث والقوهي وغيرهم وبرهنا كيف أفضى ذلك إلى تأسيس هذا العلم من قبل الخيام وإلى تطويره الجذري بعد ذلك من قبل شرف الدين الطوسي. أما المجال الثاني فهو التحولات الهندسية الذي أدى اهتمامنا به إلى إثارة انتباهنا المستمر بأعمال المهندسين والجبريين. زد على ذلك دراسة الإسقاطات التي لم تثر الاهتمام إلا حديثاً[4]. إن عناوين أعمال ابن سهل لا تدل عليه كمهندس وحسب بل، وعلى وجه التحديد، كمهندس من المدرسة الأرخميدسية الأبولونية العربية ومن الذين ابتدعوا فصولاً غير هيللينية. لقد اهتم الرياضيون المنتمون إلى هذه المدرسة، التي ندرس تاريخها في موضع آخر[5]، بتربيع الأشكال المنحنية وبالمسائل المرتبطة به مقتفين آثر أرشميدس؛ كما درسوا مسائل مركز الثقل. ودرسوا في الوقت نفسه، إثر أبلونيوس، القطوع المخروطية لا من حيث النظرية فقط وإنما بهدف التطبيق – وهو تطبيق لم يقتصر على العلوم الأخرى كالمناظر والفلك وإنما استعمل لحل المسائل الهندسية أيضاً كتلك المتعلقة بالإنشاءات الهندسية. ثم إن تطبيق نظرية القطوع لحل المسائل الجبرية قد بدأ في هذه المدرسة وفي هذا الوسط[6].

مما لا شك فيه أن ضياع دراسة ابن سهل في تربيع القطع المكافئ، وكذلك المذكرة التي عولجت فيها مسائل مركز الثقل، يخفي عنا بعداً مهماً في تراثه الرياضي هو البعد الأرخميدسي. إلا أن أعماله في المناظر وكتيبه في القطوع وكذلك تحليل المسائل الهندسية الثلاث – بما فيها مقدمة أرشميدس، انطلاقاً من التراكيب المعطاة من قبل أحد معاصريه (نكاد نجزم أنه الشني)، ستساعدنا على توضيح بعض سمات بحثه في القطوع. سننظر في هذا الفصل في دراسته النظرية للتقسيم التوافقي للقطوع المخروطية، ونتبع ذلك بتحليل المسائل الهندسية، وسنعود في الفصول اللاحقة إلى دراسة الرسم المتصل للقطوع المخروطية، وأخيراً إلى إسهامه في نظرية الإسقاطات. إن حال أعمال القوهي الرياضية أفضل بكثير وسننظر في هذا الكتاب في أربعة منها: سنناقش في هذا الفصل تطبيقه للقطوع في البرهان على مقدمة أرشميدس ونعود لاحقاً إلى دراسته الأساسية في الإسقاطات.

---

[4] انظر على وجه الخصوص ترجمة وتعليق H. Suter of al-Bīrūnī's text : 'Über die Projektion der Sternbilder und der Länder von al- Bīrūnī', *Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin*, 4 (1922), pp. 79-93. This work was taken up by J. L. Berggren, 'Al- Bīrūnī on Plane Maps of the Sphere', *Journal for the History of Arabic Science*, 6, 1-2 (1982), pp. 47-112 انظر أيضاً A. Danasarsht *رسالة في تسطيح الكرة مع تلخيصها بالفارسية*.

[5] هذا هو موضوع *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*. الذي نشر منه الأجزاء الخمسة الأولى.

[6] See the history of these applications as related by al-Khayyām in his treatise on algebra (R. Rashed and B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathematicien* [Paris, 1999], pp. 116-119, 178-179, 196-197, 254-257; English transl. without the Arabic texts : *Omar Khayyam : The Mathematician*, Persian Heritage n°40 [New York, 2000], pp. 111-112, 138, 146-147, 173-174).

وكما قلنا فقد أسهم الرياضي الهيلليني العربي ابن سهل في إنشاء أحد الفصول التي لا تنتمي إلى الهيللينية في الهندسة: فقد طور، بعد القوهي، طريقة الإسقاطات. ومن الغريب حقاً أن أعمالاً على هذه الدرجة من الأهمية لابن سهل والقوهي غابت عن علم المؤرخين. ولذا سنركز على إسهامها في تاريخ الهندسة الإسقاطية.

1. القطوع المخروطية والتقسيم التوافقي

1.1. بحث ابن سهل في القسمة التوافقية

تناول بحث ابن سهل الهندسي القطوع المخروطية بغض النظر عن تطبيقها كما تشهد على ذلك رسالته في *خواص القطوع المخروطية الثلاثة*، حيث يعالج خصائص تتعلق كلها بالقسمة التوافقية أو بإحدى حالاتها الخاصة وهي وسط المقطع. وتتشابه الخصائص التي يدرسها ابن سهل هنا مع بعض تلك التي عالجها أبلونيوس – القضايا 37–40 – من الكتاب الثالث *في المخروطات*.

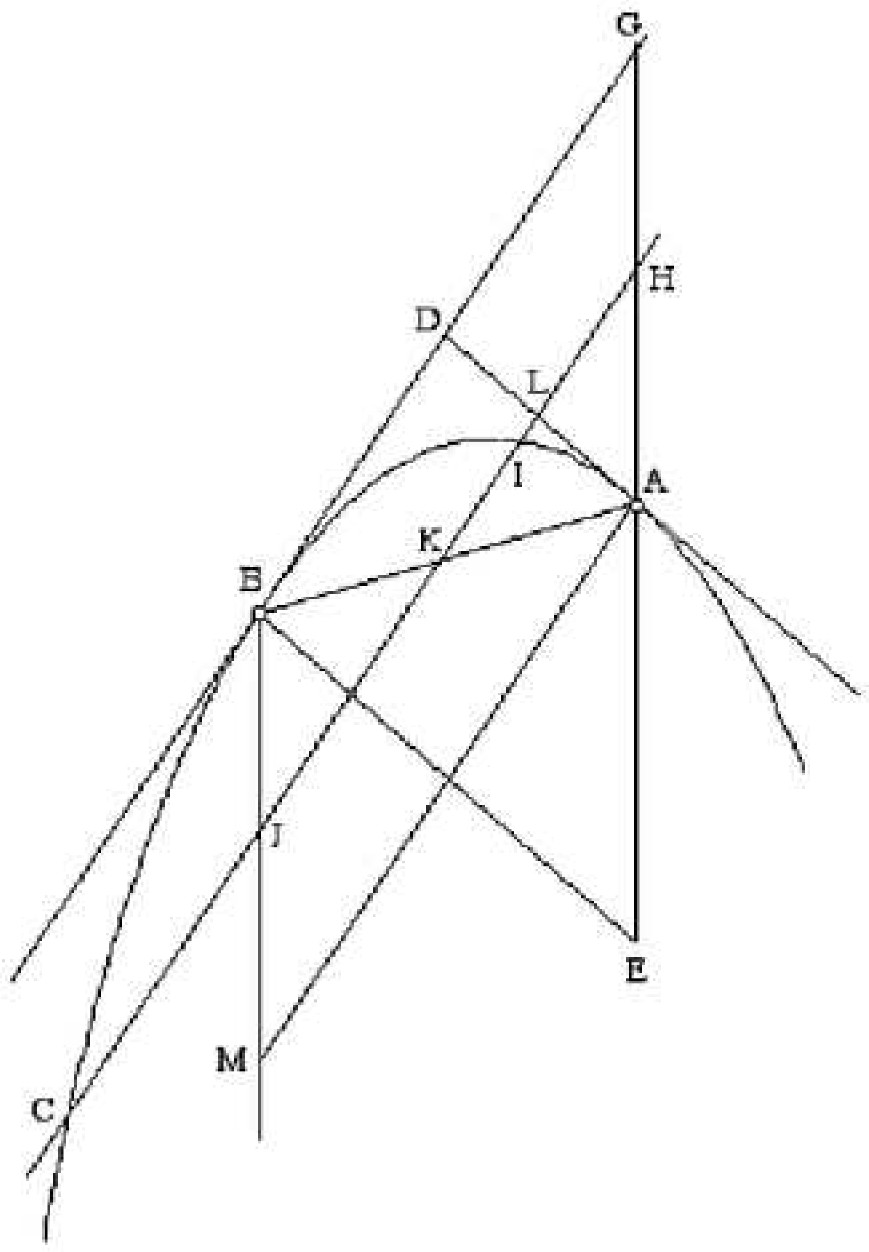
ولقد أصبحت أهمية القضايا التي تفحصها ابن سهل واضحة للعيان اليوم. لم يخرج رياضي القرن العاشر هذا عن التقليد الآبولوني، إلا أنه عوضاً عن تمييز القسمة التوافقية بتساوي نسبتين كما فعل أبلونيوس فقد أعطى العلاقة المقرونة إلى وسط أحد الزوجين المترافقين[7] واعتبر الوسط نقطة المبدأ. واستعان في براهينه بالعلاقات الأساسية للقطوع المخروطية كما وردت في القضايا 11، 12 و13 من الكتاب الأول من *المخروطات*. كما استعمل الخواص التالية التي أثبتها أبلونيوس. ففيما يخص القطع المكافئ: إن تحت المماس المقترن بقطر يكون وسطه طرف هذا القطر (*المخروطات* الكتاب الأول القضيتان 33 و35). وفيما يخص القطوع المركزية: يكون طرفا تحت المماس المقترن بقطر مترافقين بالنسبة إلى طرفي هذا القطر (*المخروطات*، الكتاب الأول القضايا 34 و36). لقد أخذ ابن سهل على عاتقه تفحص هذه الخصائص مستعيناً بهذه الأفكار مبتدئاً بالقطع المكافئ ومن ثم القطوع المركزية. لنشر إلى أن الإسقاط الأسطواني أو المخروطي يحفظ القسمة التوافقية، وهما الإسقاطان اللذان درسهما ابن سهل. لذا يمكننا أن نتساءل عما إذا كان قد أدرك، ولو بالحدس، هذا الجانب من المسألة.

بالنسبة إلى القطع المكافئ، برهن ابن سهل القضايا الأربع التالية:

القضية الأولى: لتكن D نقطة تقاطع المماسين في A و B لقطع مكافئ، عندها يقطع القطر الذي يمر في A المماس في B في نقطة G بحيث تكون D في وسط BG.

هذه القضية هي في الواقع نتيجة مباشرة للقضية 35 من الكتاب الأول من *المخروطات*. وبالفعل، إذا كان $DA \parallel BE$ يكون EG تحت المماس على القطر AG وتكون A في وسط EG؛ إذاً هي في وسط BG.

[7] أثبت أبلونيوس في 1.37 العلاقة المقرونة إلى وسط أحد الزوجين المترافقين واستعملها مرات عديدة فيما بعد. إلا أنه بينما يستعمل أبلونيوس تساوي النسبتين أحياناً والعلاقة المشار إليها أحياناً أخرى، فإن ابن سهل يستعمل هذه الأخيرة بمفردها.



الشكل. 1

القضية الثانية: في حال التقى خط موازٍ للمماس في B بالقطع المكافئ، وبالوتر AB، وبالقطر المنبثق من A، وبالقطر المنبثق من B على التوالي في النقاط I، K، H و J. يكون: $IJ^2 = JH \cdot JK$.

ليكن AM موازياً للمماس في B، حيث M على BJ؛ وبالتالي AM = HJ وفي هذه الحال:

$$\frac{AM^2}{HJ \cdot KJ} = \frac{AM}{HJ} \cdot \frac{AM}{KJ} = \frac{AM}{KJ} = \frac{BM}{BJ}$$

وبما أن A و I موجودتان على القطع المكافئ، نحصل على:

$$\frac{BM}{BJ} = \frac{AM^2}{IJ^2}$$

وبذلك تكون النتيجة.

لنلاحظ أن HJ يلاقى القطع المكافئ مجدداً في C، وأن J هي وسط IC؛ واستناداً إلى المساواة $JI^2 = JC^2 = JH . JK$، تكون القسمة (I, C, H, K) قسمة توافقية.

القضية الثالثة: إذا لاقى المستقيم السابق القطع المكافئ في C والمماس في A في النقطة L، عندها:

$$LK^2 = LC . LI .$$

J هي وسط IC؛ يكون معنا إذاً: $CL = 2IJ + LI$،

ومنه $CL \cdot LI = 2LI \cdot IJ + LI^2$

و

$$CL \cdot LI + IJ^2 = (LI + IJ)^2 = LJ^2 \qquad (1)$$

لدينا انطلاق من القضية الأولى L في وسط KH؛ إذاً:

$$HJ = HK + KJ = 2LK + KJ$$

ومنه

$$HJ \cdot JK + LK^2 = 2LK \cdot KJ + KJ^2 + LK^2 = LJ^2 \qquad (2)$$

ومن القضية الثانية التي أعطتنا

$$HJ \cdot JK = IJ^2 \qquad (3)$$

بحيث نحصل من (2) $LK^2 = LJ^2 - IJ^2$

ومن (1)

$$IJ^2 + LK^2 = CL . LI + IJ^2$$

وبالنتيجة $CL . LI = LK^2$

نلاحظ هنا أيضاً، نظراً لكون L وسط KH، أن هذه العلاقة تميز كذلك القسمة التوافقية (I, C, H, K).

القضية الرابعة: لدينا مع الاحتفاظ بالرموز السابقة:

$$\frac{CL \cdot LI}{AL^2} = \frac{BD^2}{AB^2}$$

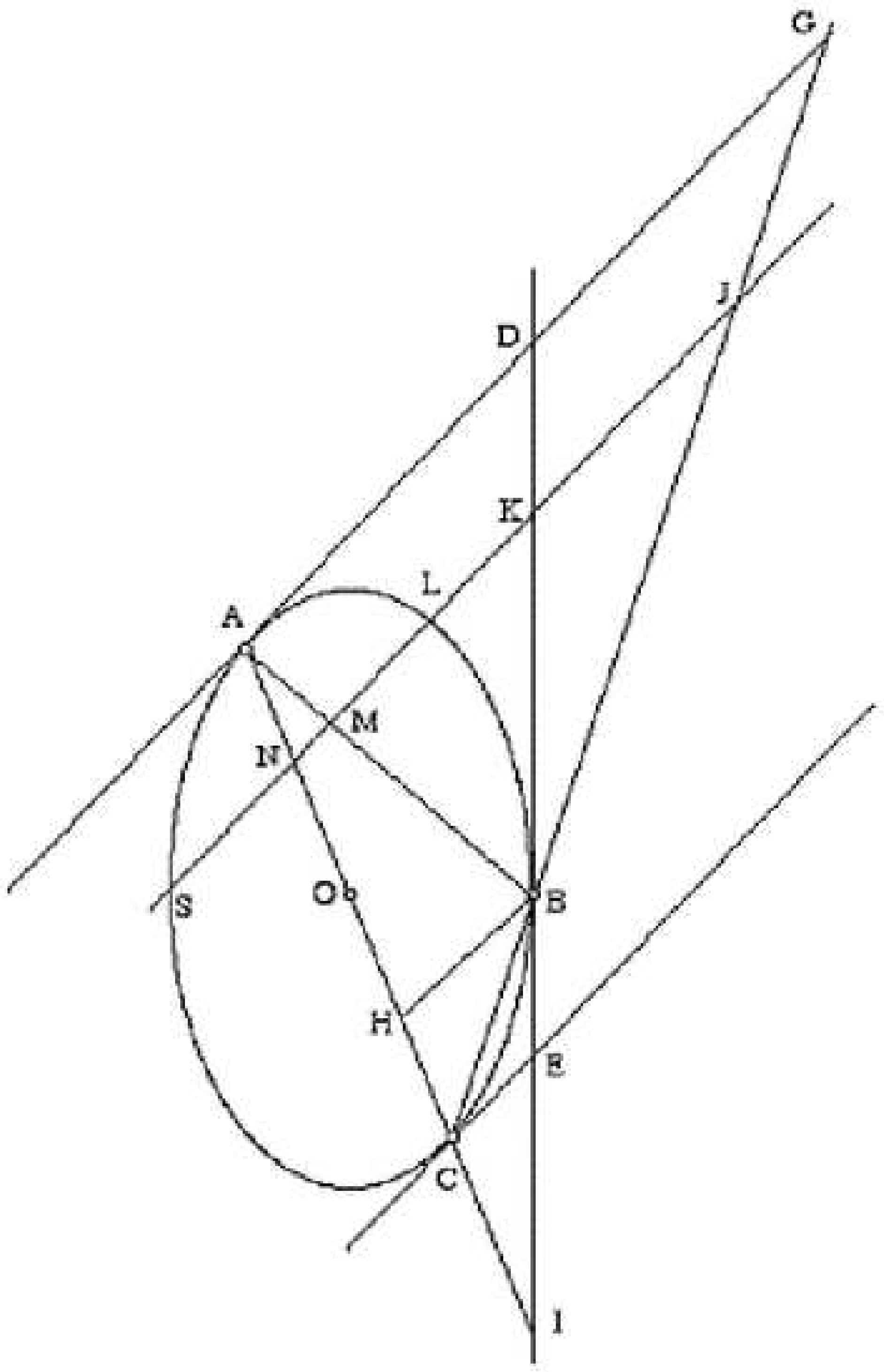
الناتجة عن القضية الثالثة، $CL \cdot LI = LK^2$، وعن العلاقة:

$$\frac{KL}{AL} = \frac{BD}{AD}$$

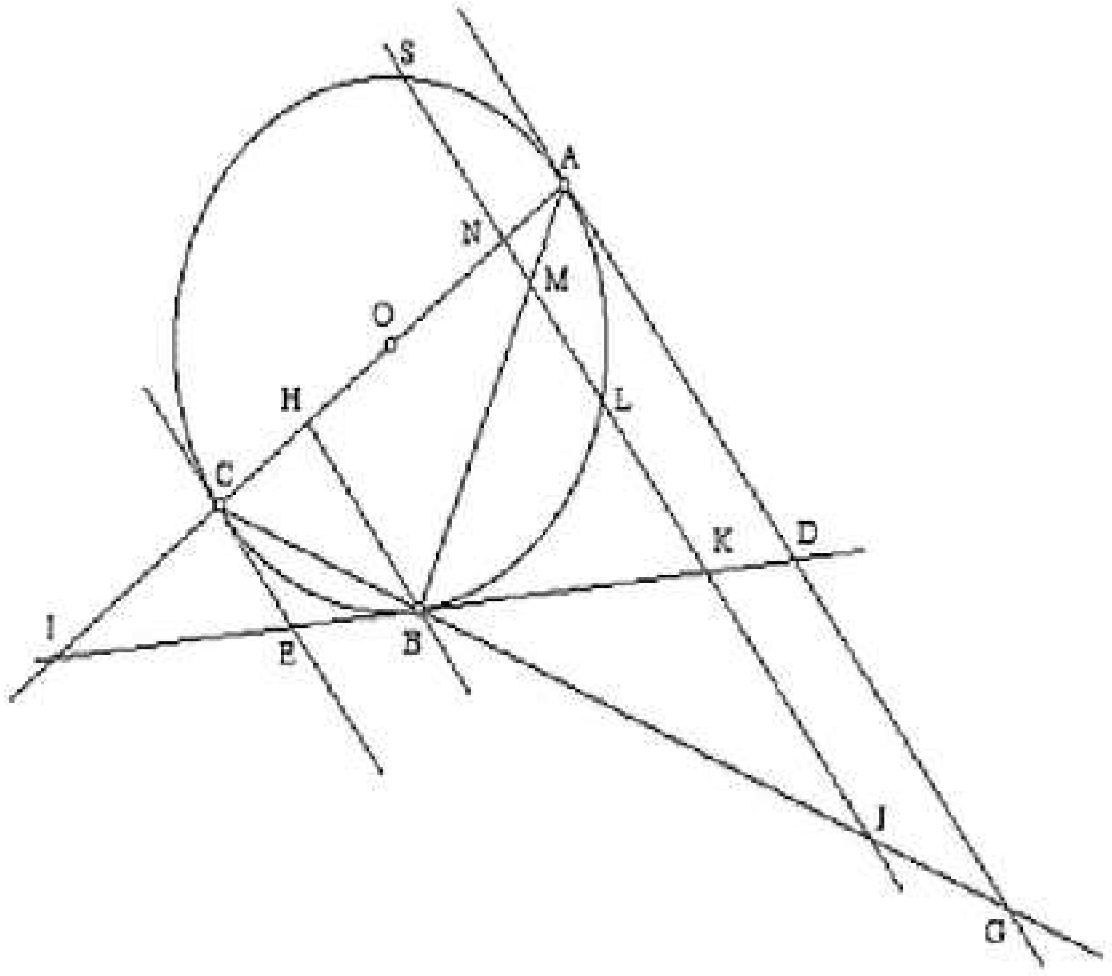
تعبر هذه القضية عن خاصة قوة نقطة ما بالنسبة للقطع المكافئ، أي أننا إذا رسمنا من هذه النقطة L قاطعين LIC و LMN لهذا القطع فإن النسبة $\frac{LI \cdot LC}{LM \cdot LN}$ لا تتوقف على اختيار النقطة L.

أما بالنسبة إلى المخروطات المركزية فيبرهن ابن سهل ما يلي:

القضية الخامسة: ليكن AC قطراً لقطع مخروطي مركزي، ولتكن B نقطة من هذا القطع؛ يتلاقى المماسان في A و B في النقطة D. إذا كانت G هي نقطة تقاطع المستقيم CB مع المماس في A، فإن D هي وسط AG.



الشكل. 2a



الشكل. 2b

لتكن I نقطة تقاطع AC و BD، و H نقطة تقاطع AC و BH الموازي لـــ AD لدينا:

$$\frac{IA}{IC} = \frac{HA}{HC}$$ (القسمة التوافقية، *المخروطات* 1، 36)

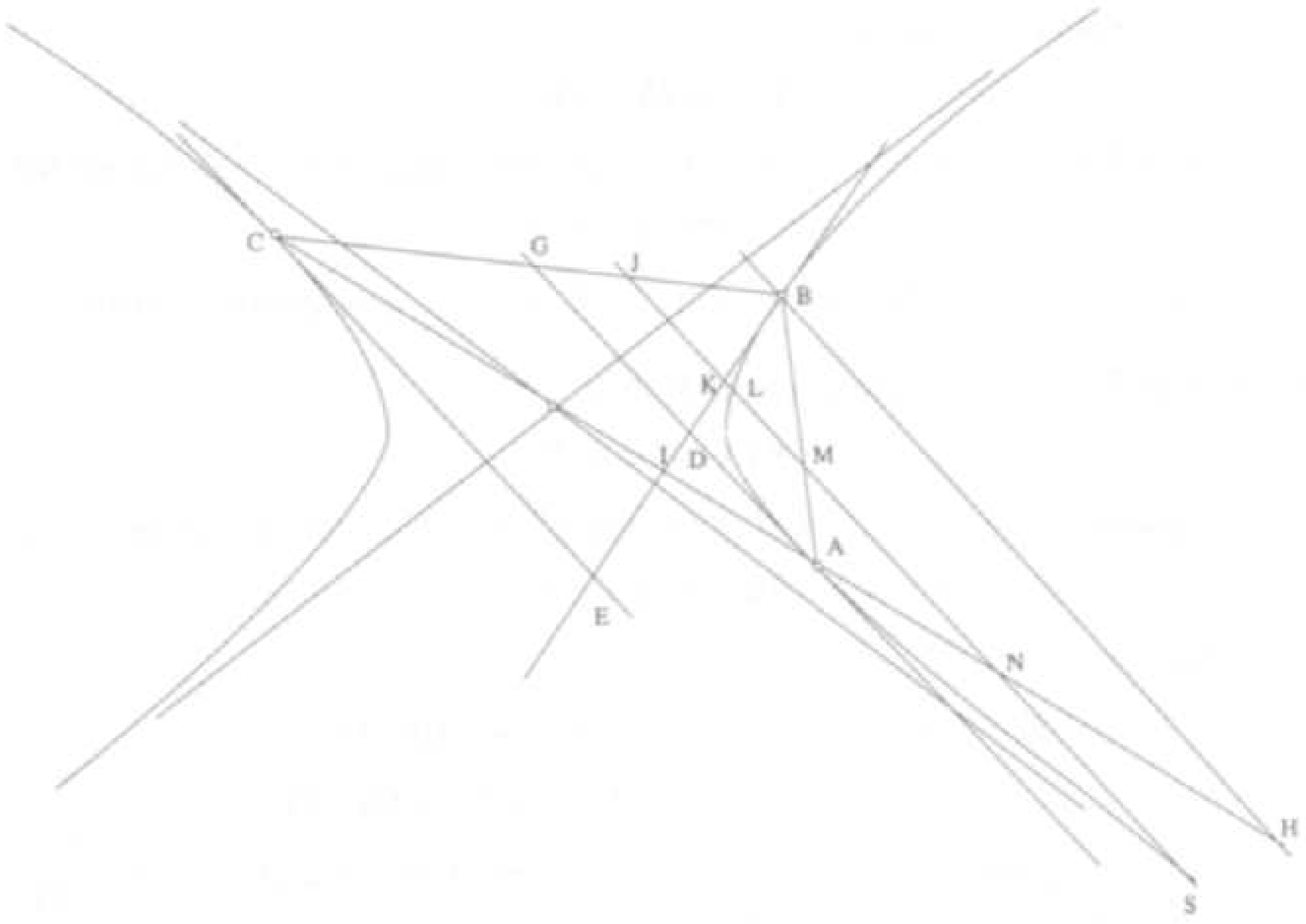
ومن جهة أخرى

$$\frac{IA}{IC} = \frac{AD}{CE} \quad \text{و} \quad \frac{HA}{HC} = \frac{GB}{BC} = \frac{GD}{EC}$$

وعليه يكون

$$\frac{AD}{CE} = \frac{GD}{EC}$$

ومنه النتيجة.



الشكل. 2c

لنلاحظ أن الإسقاط من النقطة B يحول القسمة التوافقية A, C, I, H إلى A, G, D والنقطة في اللانهاية، ولذا فإن D هي وسط AG.

القضية السادسة: إذا لاقى خط مواز للمستقيم AD المستقيم BC، والمستقيم BD، والقطع المخروطي، والمستقيم AB، والقطر AC على التوالي في النقاط: N, M, L, K, J، فإن $JN \,.\, MN = LN^2$.

وبالفعل

$$\frac{JN \cdot NM}{AN \,.\, NC} = \frac{JN}{NC} \cdot \frac{NM}{AN} = \frac{BH}{HC} \cdot \frac{BH}{HA}$$

لأن

$$\frac{NM}{AN} = \frac{HB}{HA} \quad \text{و} \quad \frac{JN}{NC} = \frac{BH}{HC}$$ (علاقات في المثلثات المتشابهة).

ومنه

$$\frac{JN \cdot NM}{AN \cdot NC} = \frac{BH^2}{HA \cdot HC} \qquad (1)$$

ومن جهة أخرى، B و L موجودتان على قطع مخروطي ذي قطر AC، إذاً

$$\frac{BH^2}{CH \cdot HA} = \frac{LN^2}{CN \cdot NA} \qquad (2)$$

نستخلص من العلاقتين (1) و(2): $LN^2 = JN \cdot NM$.

نلاحظ أن N ستكون وسط LS، إذا ما قطع LN مجدداً القطع المخروطي في S؛ يكون إذاً $LN^2 = NS^2 = NJ \cdot NM$.

تعبر هذه العلاقة عن أن القسمة (S, L, M, J) هي قسمة توافقية.

القضية السابعة: إذا قطع LN القطع المخروطي في S، عندئذ:

$$KS \,.\, KL = KM^2$$

النقطة N هي وسط المقطع SL لأن AC قطر، إذاً:

$$SK = 2LN + LK$$

وبالتالي

$$KN^2 = (KL + LN)^2 = KL^2 + LN^2 + 2KL \,.\, LN \qquad (1)$$
$$= LN^2 + KL(2LN + KL)$$
$$= LN^2 + KL \,.\, SK$$

لقد رأينا في القضية الخامسة أن D هي وسط AG؛ إذاً K هي وسط MJ، و $JN = MN \pm 2MK$؛ أي أن:

$$JN \,.\, NM + MK^2 = MN^2 \pm 2MN \,.\, MK + MK^2 \qquad (2)$$
$$= (MN \pm MK)^2 = NK^2$$

من (1) و(2) نحصل على:

$$LN^2 + SK \,.\, KL = JN \,.\, NM + MK^2$$

لكن $JN \,.\, NM = LN^2$، استناداً إلى القضية السادسة، وبالتالي:

$$SK \,.\, KL = KM^2$$

لنلاحظ أن هذه العلاقة تميز القسمة التوافقية السابقة (S, L, M, J) لأن K هي وسط JM.

القضية الثامنة: مع الاحتفاظ بالرموز السابقة نفسها يكون لدينا:

$$\frac{SK \,.\, KL}{KB^2} = \frac{DA^2}{DB^2}$$

معنا بموجب القضية السابقة، $SK \,.\, KL = KM^2$.

ومن ناحية أخرى، $\frac{KM}{KB} = \frac{DA}{DB}$ (مثلثان متشابهان)؛ ومنه النتيجة.

وهنا أيضاً نتعرف على خاصة قوة نقطة ما بالنسبة للقطع.

وهكذا نرى أن الخصائص التي درسها ابن سهل، سواء للقطع المكافئ أو المخروطات المركزية، ترتبط جميعها بمفهوم القسمة التوافقية.

2.1. التفسير الإسقاطي لدراسة ابن سهل

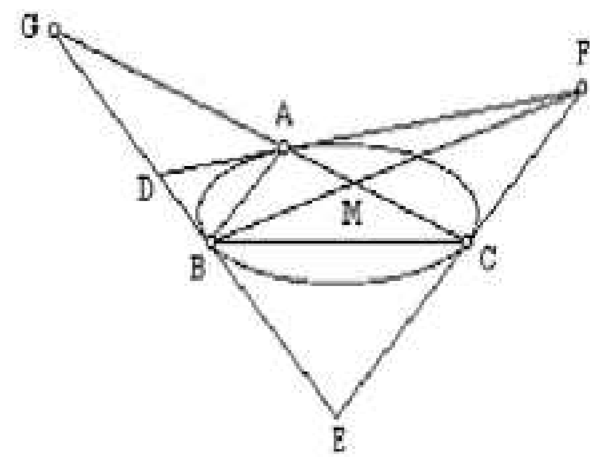
إن القضايا الثمان التي تتألف منها دراسة ابن سهل مرتبطة ببعضها وتأخذ نصوصها أحد الشكلين التاليين:

- تقع نقطة ما في وسط المقطع.
- إن مربع المقطع يساوي مساحة مستطيل مقام على مقطعين آخرين من نفس المستقيم.

كان ابن سهل يعي تماماً تشابه هذه النصوص ولكنه لم يكن يمتلك مفهوم المستوى الإسقاطي الحاوي على مستقيم في اللانهاية ومفهوم القطبية بالنسبة للقطوع – وهما المفهومان الوحيدان اللذان يتيحان توحيد هذه النصوص بجلاء. لقد كانت اللغة الوحيدة المتاحة هي لغة أبلونيوس أو بعبارة أخرى تطبيقات المساحات.

جمعنا القضيتين 1 و5 في المقدمة الإسقاطية 1 والقضايا الأخرى (2، 3، 4، 6، 7، 8) كحالات خاصة من المقدمة 2.

المقدمة 1: ليكن لدينا المثلث ABC المرسوم في قطع Γ والمماسات للقطع DF، DE و EF على الترتيب في النقاط A، B و C. لتكن G نقطة تقاطع DE مع AC. إن القسمة (G, B, D, E) توافقية.



الشكل. 3

البرهان: إن قطبيي النقطتين B و F هما بالترتيب BG و AC؛ وبالتالي فإن نقطة تقاطعهما G هي قطب المستقيم BF. فإذا كانت M هي نقطة تقاطع BF و AC فإن القسمة (G, M, A, C) توافقية ونحصل بإسقاطها على GE انطلاقاً من F على (G, B, D, E).

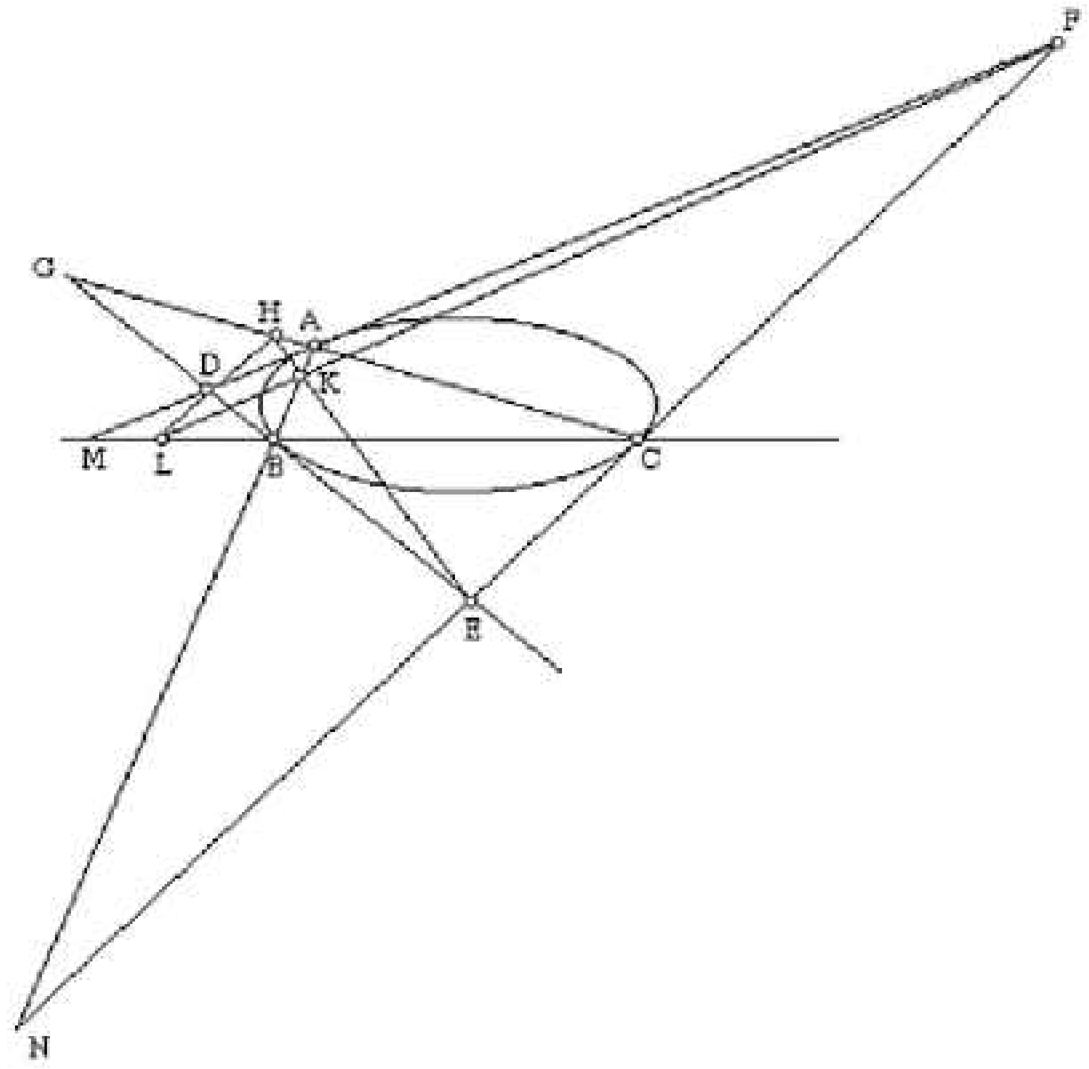
تطبيقات:

1) نأخذ ECF كمستقيم في اللانهاية. يصبح Γ قطعاً مكافئاً في الفضاء التآلفي المتمم ويصبح المستقيمان AC و BC قطرين. ونرى أن G (وبالترتيب D) هي نقطة تقاطع المماس في B مع القطر AC (وبالترتيب المماس في AD) مع القطر BC؛ إن D هو وسط BG وهذه هي القضية 1 عن ابن سهل.

2) لنفرض أن المستقيم في اللانهاية يمر بالنقطة E وأنه لا ينطبق على المماس ECF. فالقطع Γ قطع مركزي وBC قطر فيه. ونرى أنه إذا كانت G (وبالترتيب D) نقطة تقاطع المماس في B مع AC (وبالترتيب المماس AD) فإن النقطة D هي وسط BG. وهذه هي القضية 5 عن ابن سهل (مع تبديل A بـــ B).

المقدمة 2: تشبه هذه الحالة الحالة السابقة. فالمثلث ABC مرسوم في القطع Γ وتشكل المماسات للقطع Γ في A و B و C المثلث DEF.

لتكن K نقطة من الوتر AB؛ يقطع المستقيمان EK و FK المستقيمين CA و CB على الترتيب في H و L. لدينا (a) تقع D على المستقيم HL؛ (b) إن المثلث HKL مترافق بالنسبة لـ Γ.



الشكل. 4

البرهان: إن النقطتين K و H مترافقتان بالنسبة لـ Γ: تتقابل هاتان النقطتان الواقعتان بالترتيب على AB وAC في الإسقاط من القطب E أي بالتخاط (Homographie). يكفي أن نرى أن هذا التخاط ينطبق على ما نستدل عليه بالقطبية بالنسبة إلى Γ؛ ونثبت هذه النقطة بأن نبرهن أن المتخاطين متطابقان من أجل ثلاث نقط مختلفة من AB، على سبيل المثال A، B والنقطة N حيث يلتقي AB بـــ CE، المماس في النقطة C.

وفي الواقع إن صورة A (أو بالترتيب B، N) في كل من هذين التخاطين هي A (أو G، C) وهو المطلوب إثباته.

وعلى نفس النحو فإن النقطتين K و L مترافقتان. وهكذا فإن قطبيي H و L هما بالترتيب FK وEK وK هي قطب HL. ولما كانت K واقعة على AB فإن قطبيّها HL يمر بـــ D، قطب AB. وهذا ما يبرهن (a). وأخيراً يمر FK، قطبي H، بـــ L، ويمر EK، قطبي L، بالنقطة H؛ فالنقطتان H و L مترافقتان وهو ما يبرهن (b).

تطبيقات:

1) نأخذ المستقيم ECF كمستقيم في اللانهاية. يصبح Γ قطعاً مكافئاً وبالتالي AC و BC قطرين. إن المستقيم HK موازٍ للمماس في النقطة B ويقطع AB والقطر AC في النقطتين K و H المترافقين بالنسبة لـــ Γ. وهذه هي القضية 2 لابن سهل.

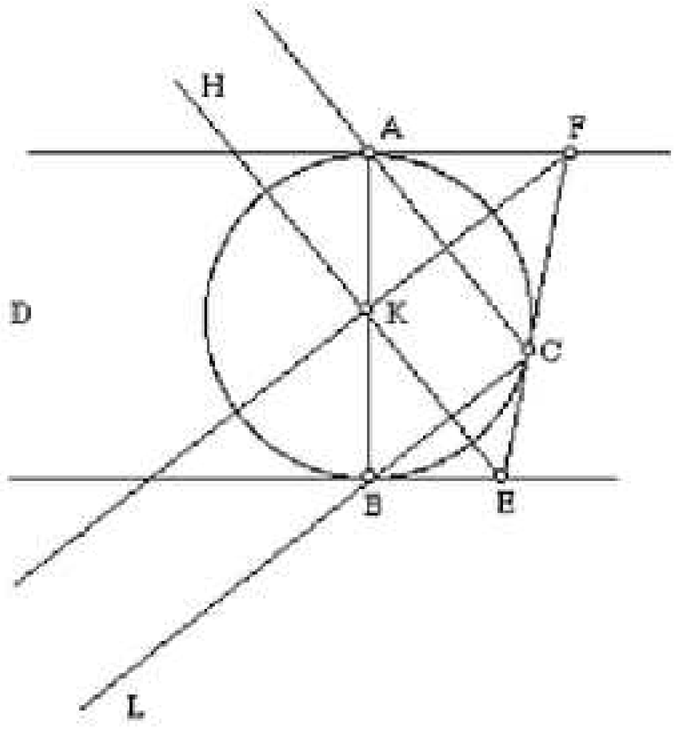
يمكننا أن نضيف أن KL الموازي للمماس في A يقطع القطر BC في L، الواقعة على استقامة H وD وأن المثلث HKL مترافق بالنسبة للقطع المكافئ.

2) نفترض أن المستقيم في اللانهاية يمر بـــ F ولكنه لا ينطبق على المماس FC. إن Γ في هذه الحالة قطع مركزي وAC قطر له. إن المستقيم KL مواز للمماس في النقطة A؛ ويقطع AB وBC في النقطتين K و L المترافقتين بالنسبة لـــ Γ. وهذه هي القضية 6 لابن سهل.

يمكننا أن نضيف أن H، نقطة تقاطع EK والقطر AC، تقع على استقامة L وD وأن المثلث HKL مترافق بالنسبة لـــ Γ.

ملاحظات:

1) يمكننا إثبات المقدمة 2 على النحو التالي:

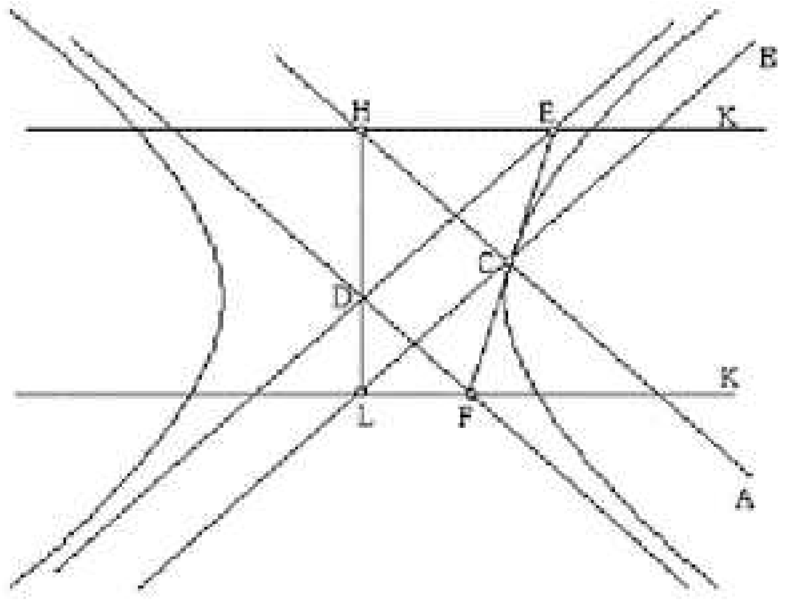


الشكل. 5

نأخذ قطبيّ K كمستقيم في اللانهاية ونعرف مترية المستوى التآلفي المتمم بالتكور أو الارتداد (involution) الذي ينتجه Γ على القطبي. وΓ عندئذ دائرة مركزها K ونصف قطريها EK وFK عموديان بالترتيب على الوترين المتعامدين CB و CA. والنتيجة أن النقطتين H وL تقعان في اللانهاية (CB || FK، CA||EK) وأن المثلث HKL مترافق بالنسبة لـــ Γ.

2) إذا أخذنا كمستقيم في اللانهاية أحد أضلاع المثلث ABC، وليكن AB، يصبح القطع Γ قطعاً زائداً مركزه D.

نرسم من نقطة C على القطع الموازيين CA و CB للخطين المقاربين، كما نرسم المماس ECF في النقطة C، والذي يقطع الخطين المقاربين في F و E. ونرسم انطلاقاً من E وF خطين متوازيين يقطعان CA و CB في H و L. إن HL هو إذاً قطر Γ المقترن مع اتجاه المتوازيين EH و FL.



الشكل. 6

3) تقع النقاط G، M وN على استقامة واحدة (حالة خاصة من مسدس باسكال A, A, B, B, C, C). نبرهن على ذلك انطلاقاً من المقدمة 1 بإسقاط القسمة التوافقية (G, B, D, E) على المماس FC من القطب M: فصورتا B وD هما C و F وصورة E هي E؛ ولذا فإن صورة G هي المترافق التوافقي لـ C بالنسبة لـ F و E. ولما كانت القسمة (N, C, E, F) توافقية (المقدمة 1) فإن N هي صورة G.

2. أعمال ابن سهل في القطوع المخروطية والإنشاءات الهندسية

1.2. تركيب الشني لتحليل ابن سهل لمسائل هندسية

في عداد أعمال ابن سهل الرياضية المفقودة مخطوطة في تحليل المسائل الهندسية. توحي الآثار المتبقية منها بانتمائها إلى أسلوب شائع في تلك الأيام: مختارات مسائل هندسية، سواء أكانت مطروحة من الرياضي بالذات أو طرحت عليه من قبل مراسل أو كانت موروثة عن مهندسين سابقين قدماء أو محدثين، تحل تباعاً في المؤلف. وتشهد كتابات إبراهيم بن سنان وأبي الجود بن الليث والسجزي وابن عراق وغيرهم على شغف رياضيي ذلك العصر بهذا النوع من التأليف. نعلم أن ابن سهل قد ألف مجموعة من هذا القبيل، إلا أننا لا نعرف عدد المسائل التي احتوتها. ومصدر معرفتنا الوحيد في هذا الشأن مخطوطة مجهولة المؤلف عنوانها *كتاب عن تركيب المسائل التي حللها أبو سعد العلا ابن سهل*. ويخاطب المؤلف في هذا النص أحد الأعيان، وهو مجهول أيضاً، المراسل لابن سهل. فقد أرسل هذا الأخير رسالة إلى مراسله تحتوي تلك المجموعة وضوحاً؛ وقد قام المراسل المجهول – وهو من علية القوم، محترم ومشهور، إذا ما ركنا إلى صيغ المراسلة المستعملة من قبل مؤلف المخطوطة المجهول – بإرسال هذه المسائل التي حللها ابن سهل إلى مؤلفنا المجهول هذا حتى يؤلف تركيباً لها. لقد ثبت لنا الآن أن هذا الرياضي المجهول هو الشني. وإن كان صادقاً في القول – وليس هناك من سبب لئلا يكون كذلك – فقد احتوت هذه المجموعة على ثلاث مسائل لا غير. فقد أخذ الشني على عاتقه تأليف تركيب للمسائل التي حللها ابن سهل وليس تركيباً لبعض المسائل التي حللها. يمكننا أن نضيف إلى هذه الحجة اللغوية حجة أخرى لا تقل أهمية عنها.

يكشف تحليل المسائل المنسوبة إلى ابن سهل عن سمة أساسية غابت عن الملاحظة: فهي ترتبط كلها بأسماء بعض أشهر الرياضيين الإغريق: منلاوس، أبلونيوس وأرشميدس. ولهذا فقد كانت آنذاك، وخاصة الاثنتان الأخيرتان

منها، موضوع نقاش وجدل بين الرياضيين. فكأن ابن سهل أراد جمع هذه المسائل موضوع التحديات والمعترف بصعوبتها. يبدو لنا هذا التفسير مقبولاً. فهو يأخذ بعين الاعتبار وجود هذه المسائل مجتمعة والمراسلات حولها؛ ويظهر لنا رغبة رياضي شاب موهوب – كابن سهل – في حل مسائل اعتبرها القدماء صعبة. فقد كتب ابن سهل هذا المؤلف، كما يذكرنا بذلك الشني، وهو مازال شاباً أي في ستينات القرن العاشر أو بعدها.

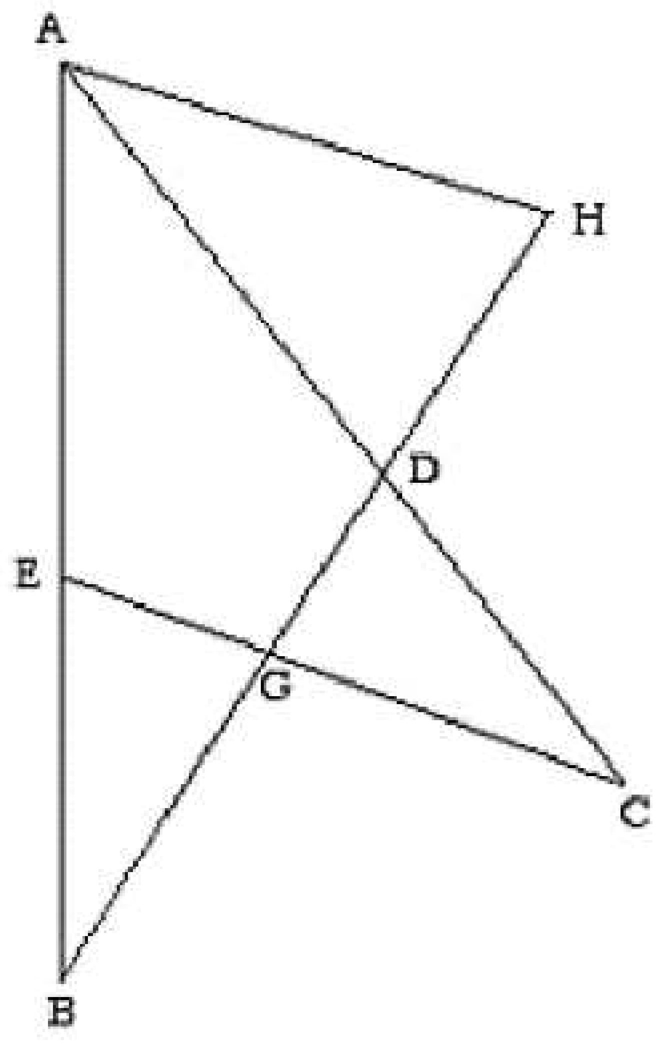
إننا إذا أردنا إحياء منهجية ابن سهل وجب علينا إتباع منهجية الشني بالمعكوس. إن هذه المواربة الاضطرارية هي وسيلتنا الوحيدة في الوقت الحاضر لبلوغ أحد أبعاد نشاط ابن سهل الرياضي. وستتيح لنا تقييم إسهامه، الذي هو من أوائل إسهامات الرياضيات العربية، في إثبات ما يعرف بمقدمة أرشميدس لإنشاء المسبع المنتظم. وسنرى أن ابن سهل يرغب في البرهان على هذه المقدمة ضمن شروط أعم من تلك المتطلبة من قبل معاصريه أو في النص المنسوب لأرشميدس.

وهكذا تتحدد مهمتنا، فنبدأ بتفحص تركيب الشني ثم نعيد بناء تحليل ابن سهل.

يبرهن الشني عشر مقدمات قبل الشروع في تركيب المسائل التي حللها ابن سهل. وسننظر الآن في المقدمة الخامسة الأساسية في مسألة ابن سهل الأولى.

المقدمة 5: لنأخذ مضلعاً رباعياً كاملاً ذا ستة رؤوس A, B, C, D, E, G إذاً

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{DC} \cdot \frac{CG}{GE} \qquad (1)$$



الشكل. 7

ليكن AH موازياً لـــ CE، لدينا:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AH}{EG} = \frac{AH}{CG} \cdot \frac{CG}{EG} = \frac{AD}{DC} \cdot \frac{CG}{GE}$$

هذه النتيجة الأخيرة هي نتيجة مبرهنة منلاوس مطبقة على المثلث AEC، الذي تقطع أضلاعه بالخط المعترض BGD.

عكسية المقدمة 5: إذا حققت النقاط الثلاث B، D، G الموجودة على أضلع المثلث AEC العلاقة

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BE}} \cdot \frac{\overline{GE}}{\overline{GC}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DA}} = 1$$

فإن النقاط G و D و B على استقامة واحدة.

فور إدخال هذه المقدمات العشر، يعمد المؤلف إلى عرض مسائل ابن سهل الثلاث:

المسألة الأولــى:

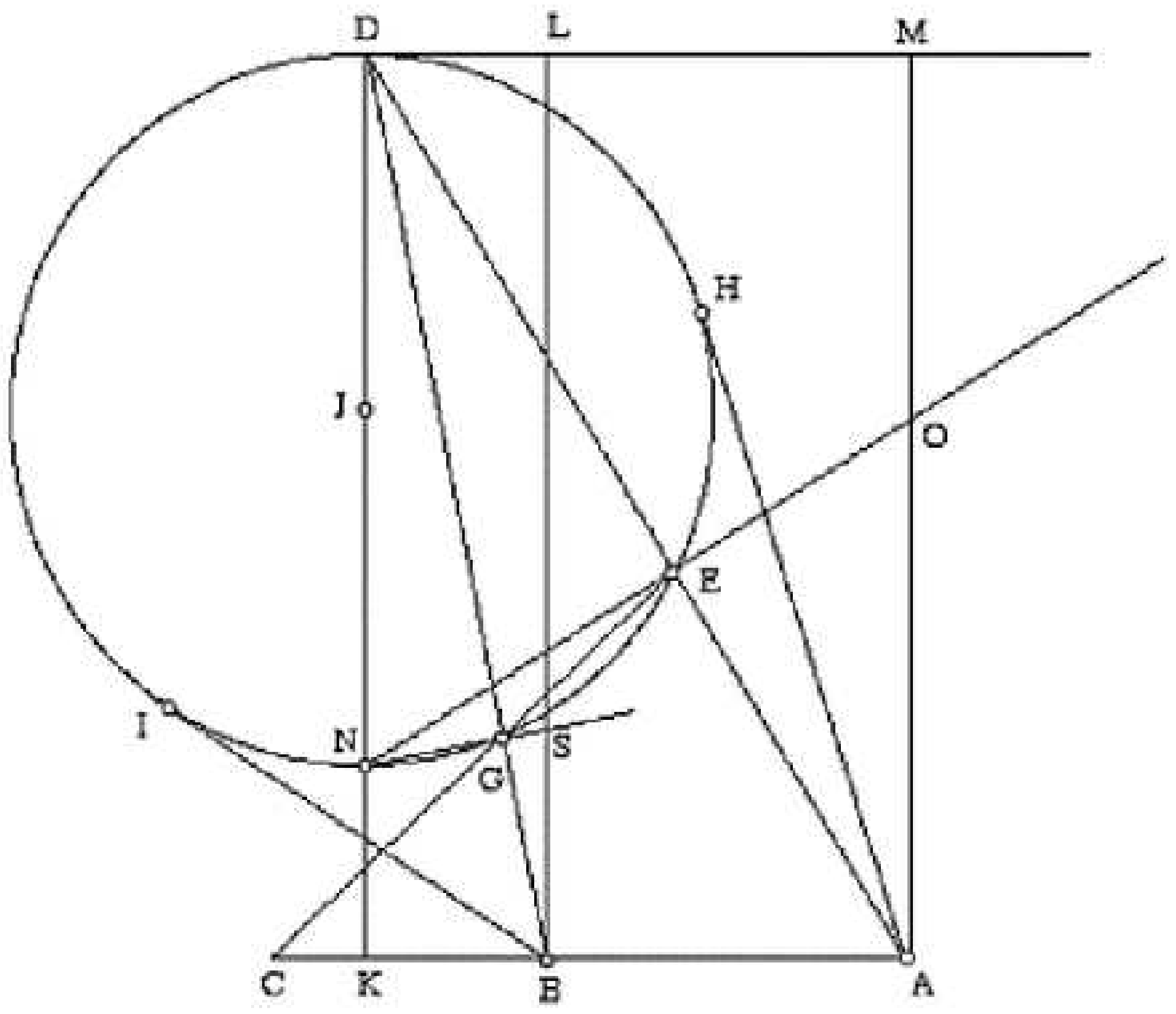
إذا أخذنا دائرة وثلاث نقاط A, B, C على استقامة واحدة، ارسم مثلثاً DEG في الدائرة بحيث يمر DE و EG و DG بالترتيب بالنقاط: A و B و C.

لنبدأ بتلخيص التركيب الذي أعطاه الشني لتحليل ابن سهل.

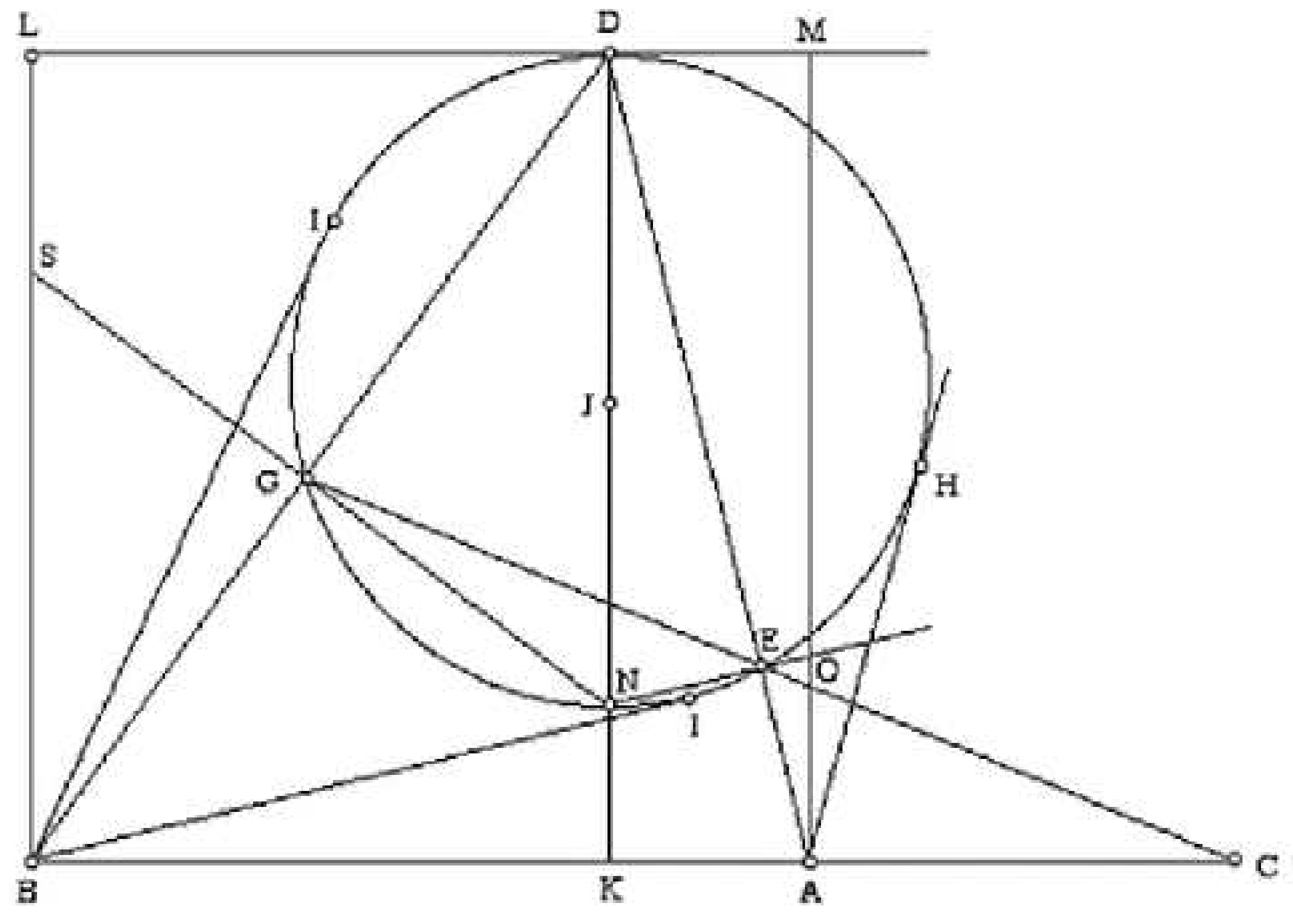
لنفرض أن J هي مركز الدائرة و H و I هما نقطتا التماس لمماسي هذه الدائرة الصادرين من النقطتين A و B.

لنفرض أن:

$$\frac{AH^2}{AC} \cdot \frac{BC}{BI^2} = k$$



الشكل. 8.1



الشكل. 8.2

تواجهنا حالات ثلاث إذا ما كانت $k \geq 1$ أو $k < 1$.

الحالة الأولى: $k = 1$، أي: $\dfrac{AH^2}{BI^2} = \dfrac{AC}{BC}$

لنرسم من النقطة J الخط JK العمودي على المستقيم AB. فيلقى الدائرة في D و N. يقطع DA الدائرة في E ويقطعها المستقيم DB في G. لنرسم الموازي لـــ AB من النقطة D؛ يقطع العمود المقام على AB في A هذا الموازي في M والمستقيم NE في O. أما العمود المقام على AB في B فيقطع المستقيم DM في L والمستقيم GN في S. إن:

$$BI^2 = BG \cdot BD = BS \cdot BL \quad \text{و} \quad AH^2 = AE \cdot AD = AO \cdot AM$$

ومنه:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AM \cdot AO}{BS \cdot BL} = \frac{AO}{SB} \quad (\text{لأن } AM = BL)$$

نكتب هذه العلاقة على الشكل

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AO}{DN} \cdot \frac{DN}{SB}$$

وبما أن:

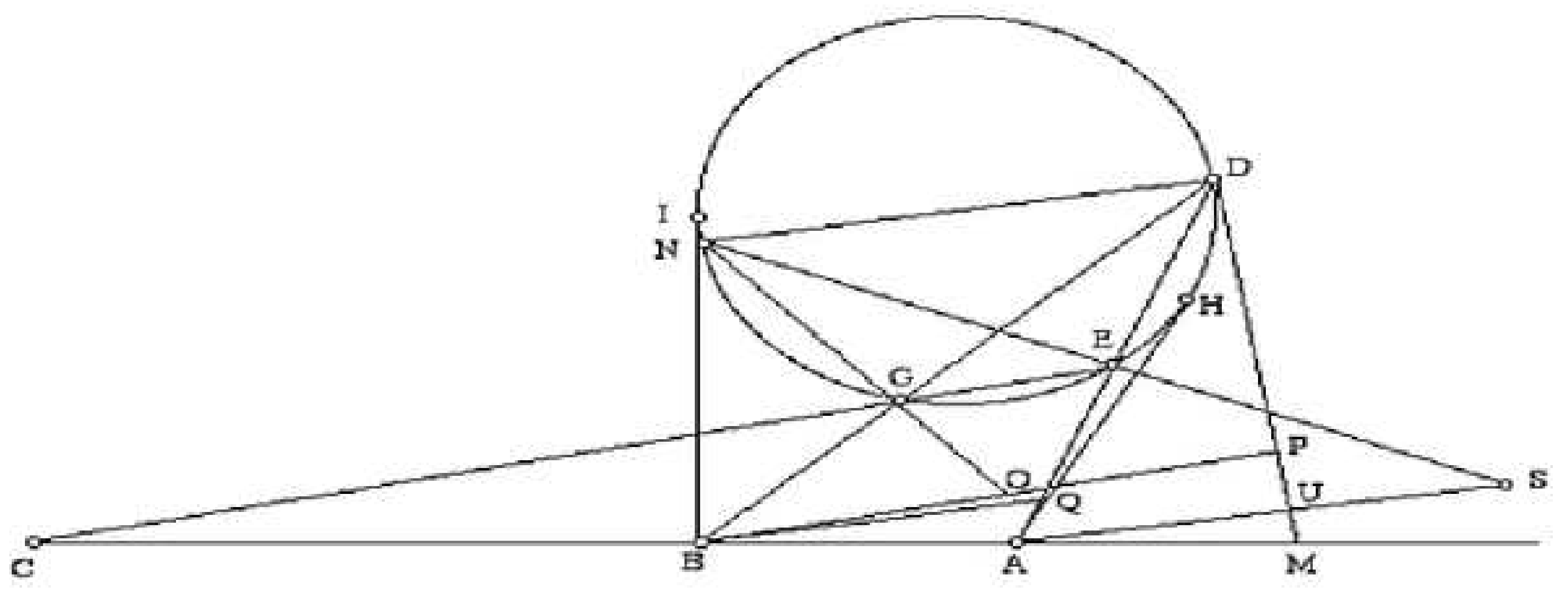
$$\frac{AO}{DN} = \frac{AE}{ED} \quad \text{و} \quad \frac{DN}{SB} = \frac{DG}{GB} \quad (\text{مثلثات متشابهة})$$

فإن

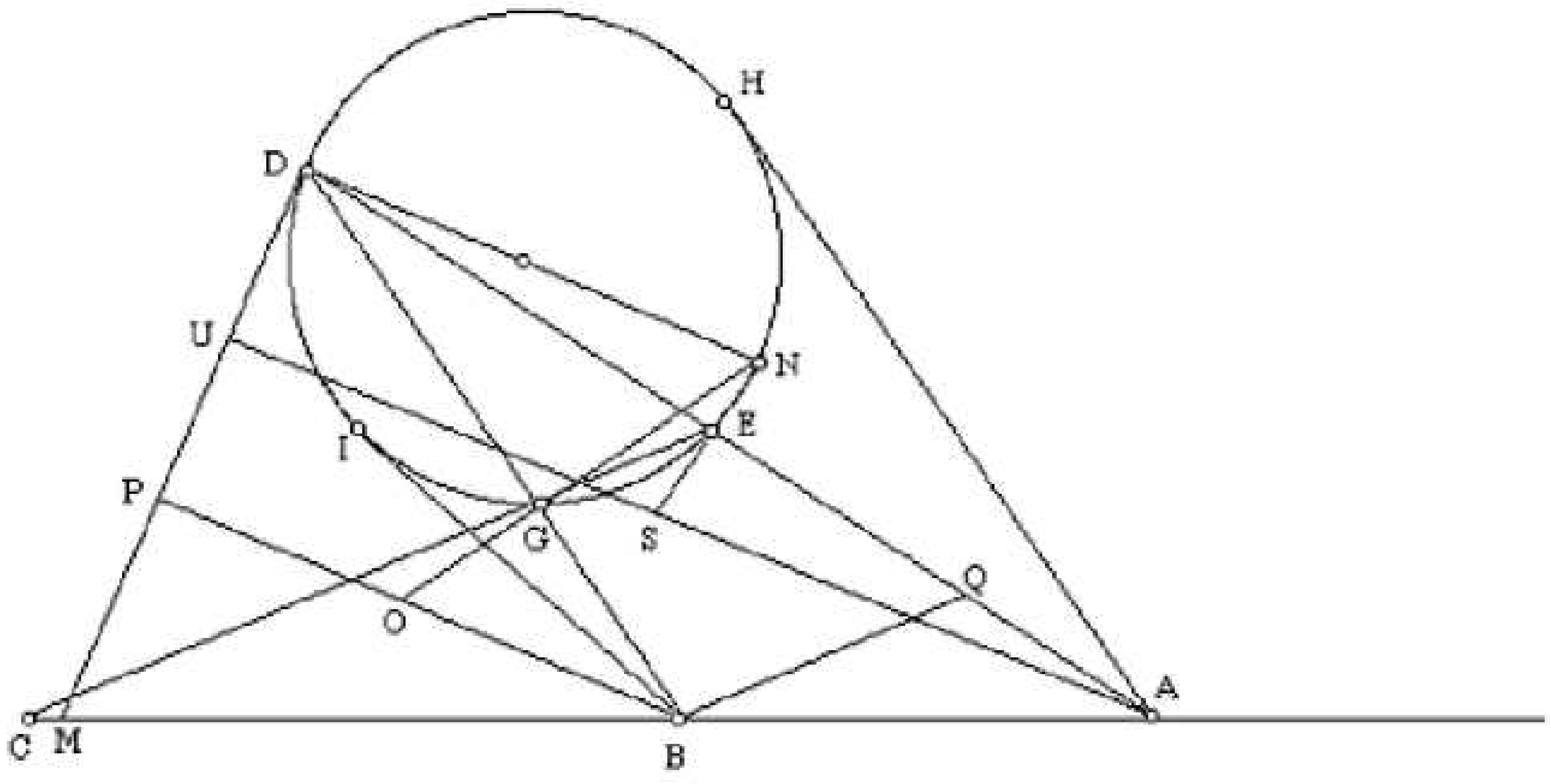
$$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{ED} \cdot \frac{DG}{GB}$$

بموجب عكسية المقدمة 5 المطبقة على المثلث ABD، فإن النقاط C، G و E على استقامة واحدة. وبذلك يكون المثلث DGE مرسوماً في الدائرة حيث DE يمر في A، و DG في B، و GE في C. يعتبر المؤلف بعدها الحالة الخاصة التي يكون فيها DB عمودياً على AB ويقطع الدائرة في D و G – (انظر الشكل. 7c ص. 460). ويبرهن بنفس المحاكمة أن DA يقطع الدائرة في E وأن المثلث DGE هو المطلوب في المسألة.

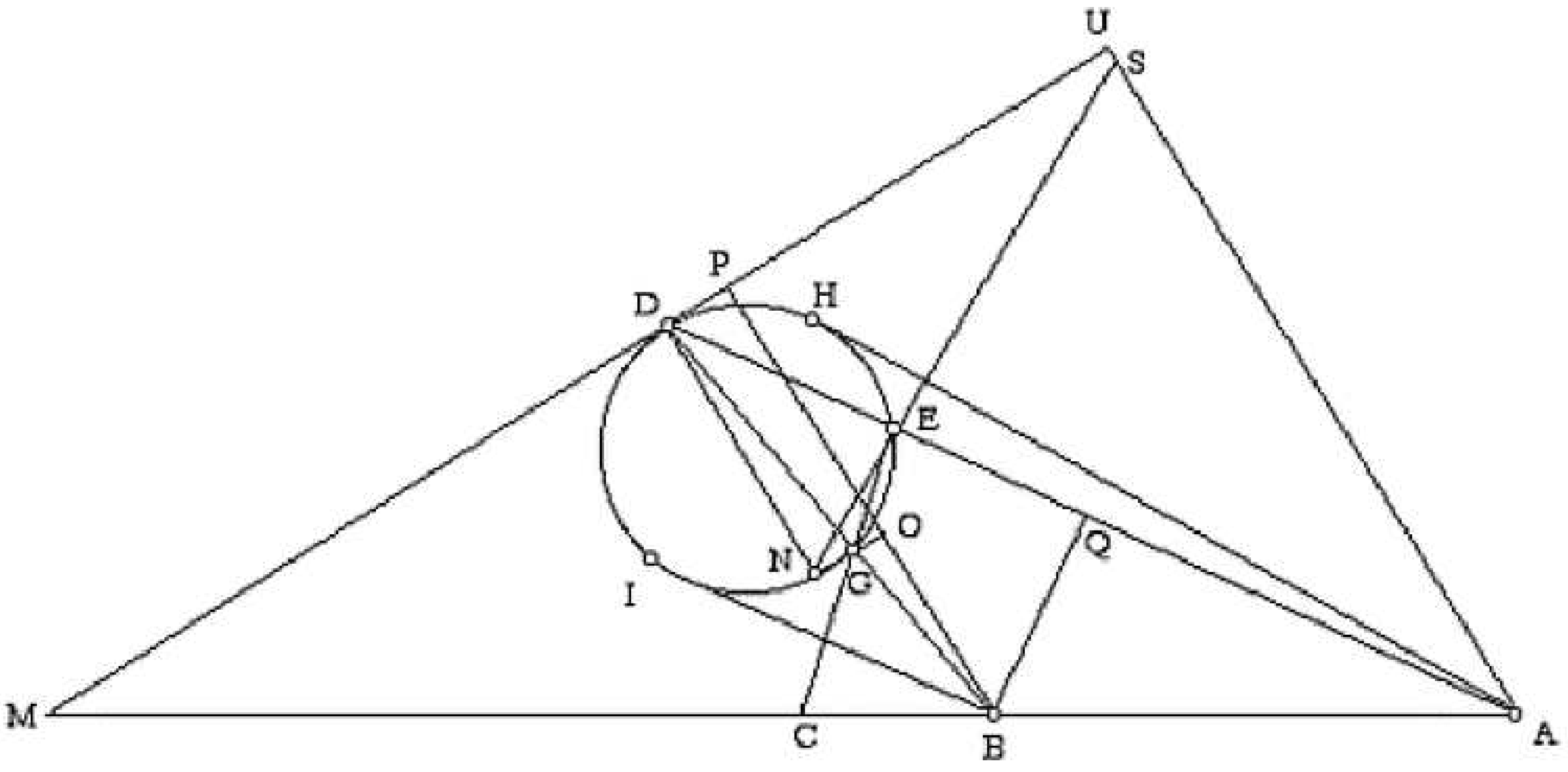
الحالتان الثانية والثالثة: k > 1 أو k < 1.



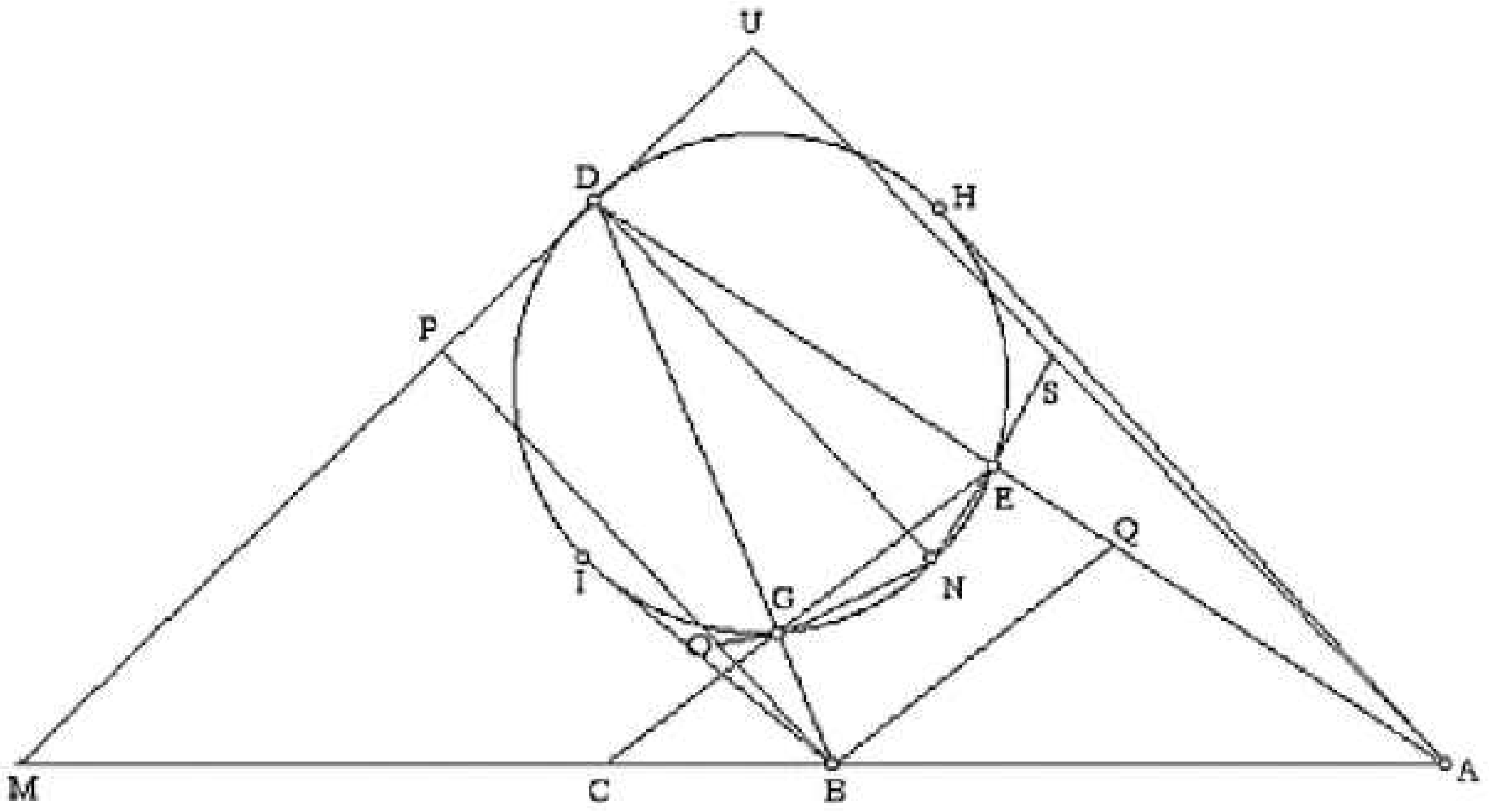
الشكل. 8.3



الشكل. 8.4



الشكل. 8.5



الشكل. 8.6

لتكن النقاط الثلاث J، K و L بهذا الترتيب على مستقيم، بحيث يكون $1 > \frac{JK}{JL} = k$.

لنضع، في الحالة الأولى، النقطة M على AB خلف A، بحيث تكون:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{KL}{KJ}$$

ونحصل عندئذ على:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AM}{MA + AB} = \frac{JK}{JK + KL} = \frac{JK}{JL} < 1$$

ثم نضع في الحالة الثانية، M على AB خلف B، بحيث تكون $\frac{AB}{BM} = \frac{KL}{KJ}$

فنحصل على :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AB + BM}{MB} = \frac{JL}{JK} > 1$$

ننشئ في كلتا الحالتين من النقطة M المماس MD على الدائرة؛ يقطع DA و DB الدائرة في E و G.

لنبرهن أن EG يمر في C.

نرسم من A و B موازيين للقطر DN؛ يقطعان المماس DM على التوالي في U و P. ويتقاطع المستقيمان NE و AU في S، كما يتقاطع NG و BP في O. لدينا بالافتراض:

$$\frac{AH^2}{AC} \cdot \frac{BC}{BI^2} = \frac{AM}{MB}$$

وبالتالي

$$\frac{AH^2}{BI^2} = \frac{AM}{BM} \cdot \frac{AC}{BC}$$

لكن

$BI^2 = BG \cdot BD = BO \cdot BP$ و $AH^2 = AD \cdot AE = AU \cdot AS$ (مثلثات متشابهة)

كما أن AES و AUD متشابهان وكذلك BGO و BPD ومنه:

$$\frac{AU}{BP} \cdot \frac{AS}{BO} = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{AC}{BC}$$

إلا أن:

$$\frac{AU}{BP} = \frac{AM}{MB}$$

ولذا فإن:

$$\frac{AS}{BO} = \frac{AC}{BC}$$

ثم إنه يبرهن بسهولة على

$$\frac{AS}{BO} = \frac{AS}{DN} \cdot \frac{DN}{OB} = \frac{AE}{ED} \cdot \frac{DG}{GB}$$

وبذلك يكون معنا:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{ED} \cdot \frac{DG}{GB}$$

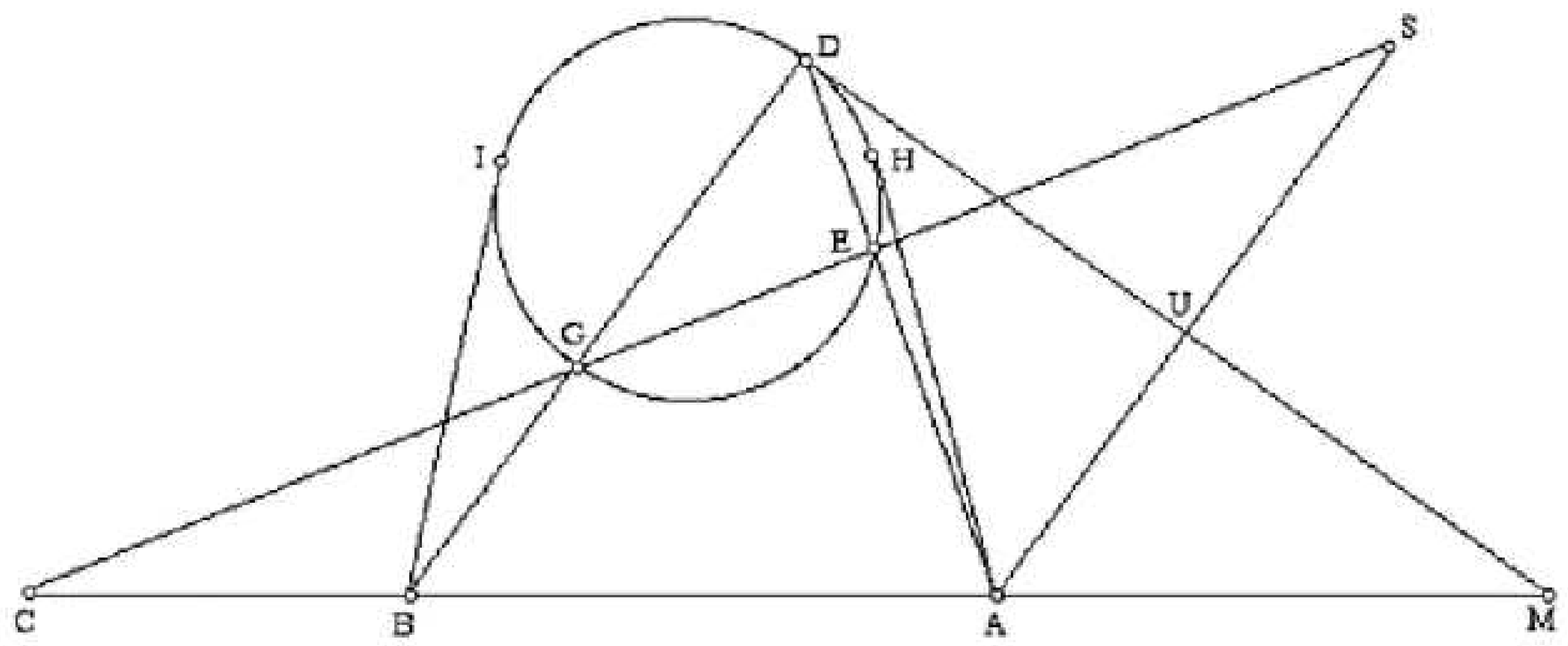
نحصل على النتيجة بموجب عكسية المقدمة 5 المطبقة على المثلث ABD.

ثم يعتبر المؤلف الحالة الخاصة التي يمر فيها DB من المركز؛ عندها تكون النقطتان G و N منطبقتين. يقطع الخط الموازي لـــ DG والمنبثق من A المستقيم GE في S. وكالسابق، لدينا:

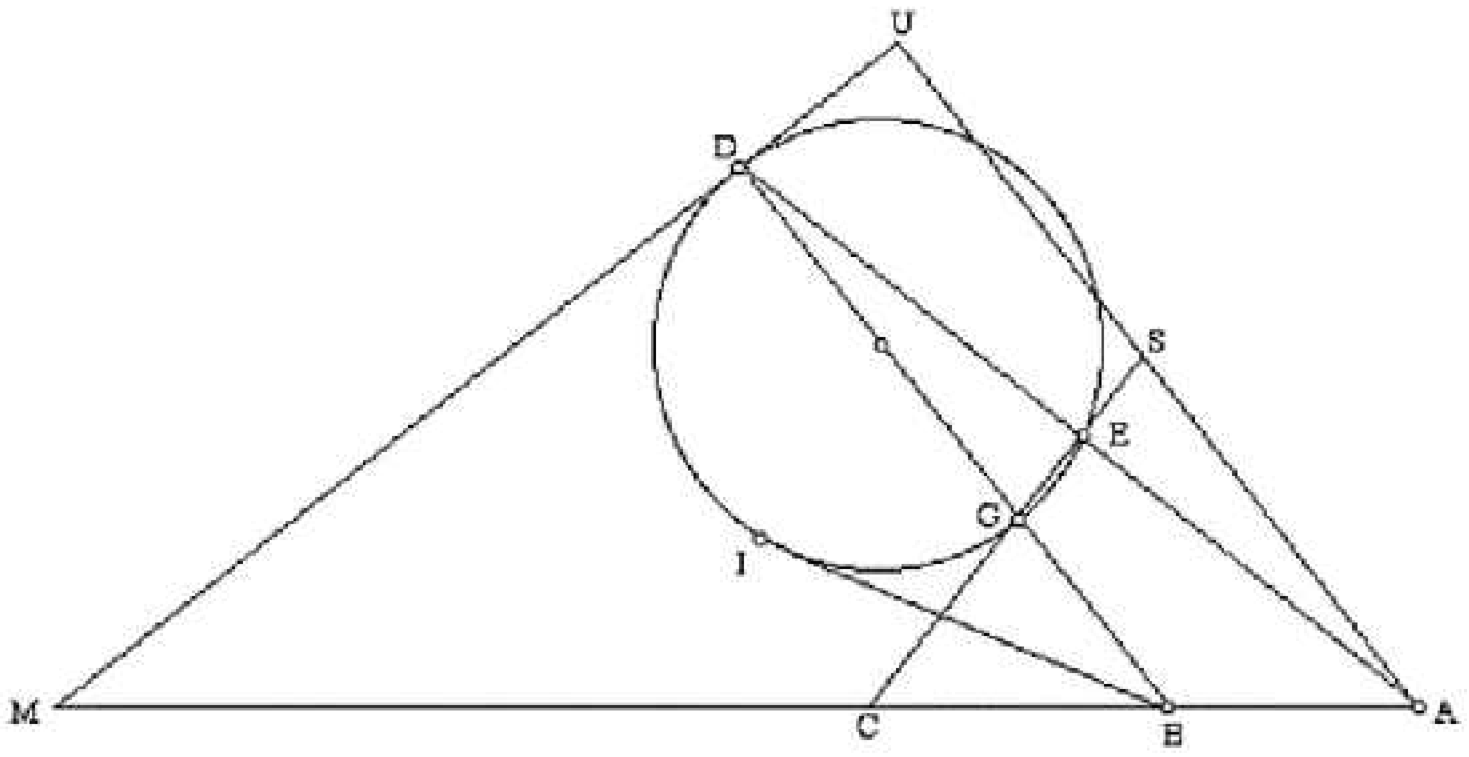
$$AH^2 = AD \cdot AE = AU \cdot AS \quad \text{و} \quad BI^2 = BG \cdot BD$$

و

$$\frac{AH^2}{BI^2} = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{AC}{BC} \quad \text{فرضاً}$$



الشكل. 8.7



الشكل. 8.8

ومن هذه العلاقات:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{AU}{BG} \cdot \frac{AS}{BD}$$

لكن

$$\frac{AU}{BD} = \frac{MA}{MB}$$

لذلك

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AS}{BG} = \frac{AS}{DG} \cdot \frac{DG}{BG} = \frac{AE}{ED} \cdot \frac{DG}{BG}$$

ونستخلص النتيجة كالسابق، بواسطة عكسية المقدمة 5 المطبقة على المثلث DAB.

انطلاقاً من هذا التركيب، نستطيع استرجاع تحليل ابن سهل كالتالي:

لنفرض أن المسألة محلولة؛ وأن المثلث DGE قد أنشئ. يعطي تطبيق مبرهنة منلاوس على المثلث DAB وعلى الخط المعترض CEG:

$$\frac{CA}{CB} \cdot \frac{GB}{GD} \cdot \frac{ED}{EA} = 1 \qquad \text{أو} \qquad \frac{CA}{CB} = \frac{EA}{ED} \cdot \frac{GD}{GB}$$

نرسم القطر DN والموازيين له AS وBO حيث S و O هما نقطتا تقاطعهما مع NE وNG بالترتيب. نحصل من تشابه المثلثين AES و DEN وكذا من تشابه BGO وDGN على

$$\frac{GD}{GB}=\frac{DN}{BO} \quad \text{و} \quad \frac{EA}{ED}=\frac{AS}{DN}$$

وهكذا فإن

$$\frac{CA}{CB}=\frac{AS}{DN}\cdot\frac{DN}{BO}=\frac{AS}{BO} \qquad (1)$$

نرسم المستقيم PDU المماس للدائرة في D، فيلاقي AS في U وBO في P. نحصل من تشابه المثلثين AES وAUD وكذا من تشابه المثلثين BGO وBPD على

$$\frac{BG}{BP}=\frac{BO}{BD} \quad \text{و} \quad \frac{AE}{AU}=\frac{AS}{AD}$$

ومنه

$$\frac{AS}{BO}=\frac{AD\cdot AE}{BG\cdot BD}\cdot\frac{BP}{AU} \qquad (2)$$

إن $AD\cdot AE=AH^2$، حيث AH المماس للدائرة في النقطة H، وكذلك $BG\cdot BD=BI^2$، حيث BI المماس للدائرة في النقطة I ولذا فإن من (1) و (2)

$$\frac{AU}{BP}=\frac{CB}{CA}\cdot\frac{AH^2}{BI^2}=k$$

وهي نسبة معروفة.

إذا كانت M نقطة تقاطع المماس في D، PDU، مع AB فإن

$$\frac{AU}{BP}=\frac{MA}{MB}$$

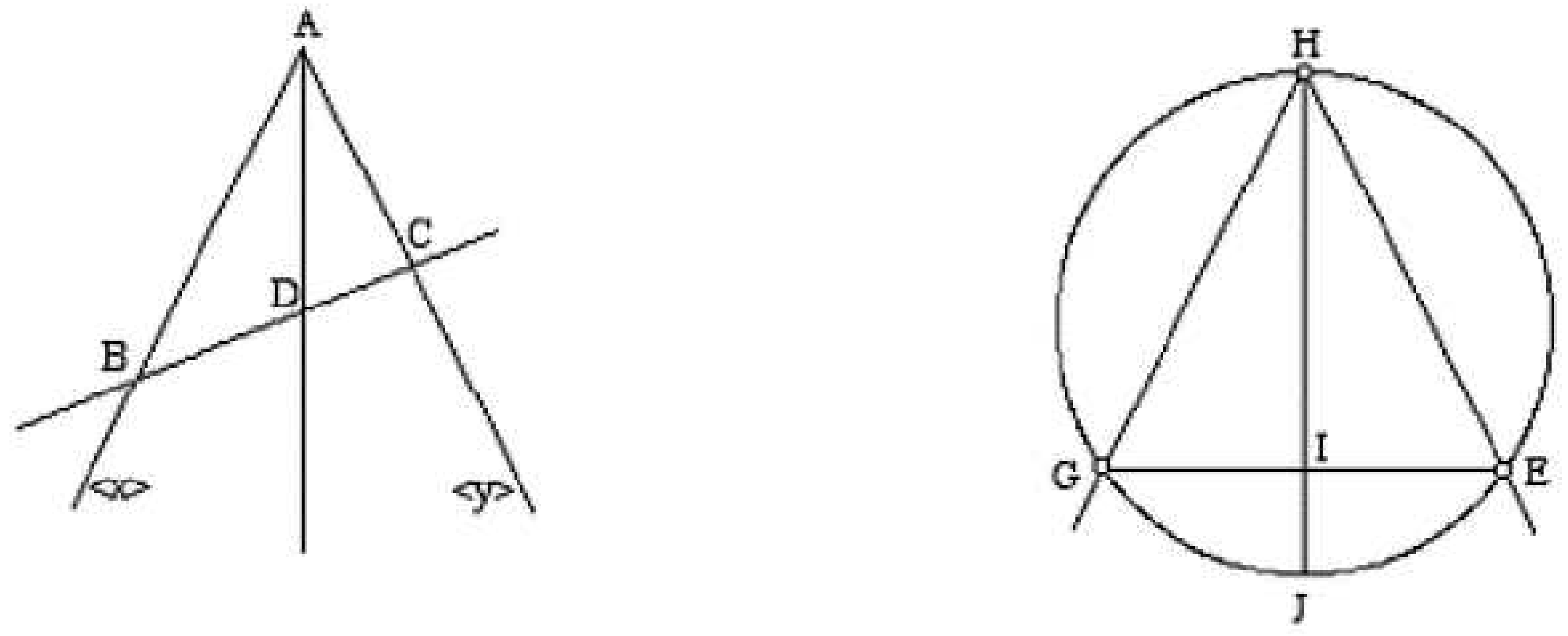
وهذا ما يعين النقطة M.

تقابل حالة توازي المماس PDU والمستقيم AB الحالة $k = 1$.

وهكذا نرى أن ابن سهل يحدد المثلث المطلوب بإنشاء الرأس D، وهكذا يقتصر بحثه على التفتيش عن النقطة M حيث يتقاطع المماس في D مع المستقيم ABC. يبين التحليل أن M تقسم AB حسب نسبة معلومة. إن ما أوحى بهذا التحليل في نهاية المطاف هو شرط منلاوس لوجود النقاط الثلاث A, B, C، الواقعة على أضلاع المثلث DEG، على استقامة واحدة.

المسألة الثانية:

ليكن لدينا زاوية xAy ونقطة D على منصفها. المطلوب إنشاء مستقيم يمر في D قاطعاً ضلعي الزاوية في B وC بحيث يكون المقطع BC مساوياً لمقطع معين GE.



الشكل. 9

لا تقل الأهمية التاريخية لهذه المسألة عن المسألة الأولى التي تستند وبشكل مباشر على منلاوس. ذلك أنها ترتبط بعدة أسماء موقرة: أبلونيوس، ابن سهل، أبو الجود والسجزي. وحسبما يقول هذا الأخير، فإن التحليل الأول لها جاء على يد أبلونيوس بل ويسرد هذا التحليل في *مجموعته للمسائل*[8]، إلا أنه لا يذكر المصدر ولا يوضح عما إذا كان هذا النص المنسوب إلى أبلونيوس هو سرد للمؤلف بالذات أم أنه من مصدر ثانوي آخر. من المحتمل جداً أن ابن سهل قد أخذ هذا التحليل رغبة منه بإعطاء تحليل آخر أكثر تفصيلاً تشرح فيه شروط المسألة بوضوح أكثر. ويأتي تركيب الشني لهذا التحليل في هذا الإطار تحيداً. ومن المحتمل أيضاً أن يكون أبو الجود قد صاغ القضية وأرسلها للسجزي لعله يستطيع إثباتها. ومن الأرجح أن يكون السجزي قد ألف تركيبه بالاستناد إلى تحليل ابن سهل. إن هذه المسألة والسياق الذي جاءت فيه لا يعدوان أن يكونا، من جوانب عديدة استعادة لمسألة المسبع المنتظم[9].

يعرض السجزي، وهو مصدرنا الوحيد حتى الآن، هذه المسألة تحت عنوان "*سؤال الشيخ أبي الجود استخرجناه*" والسؤال هو التالي:

> زاوية ا ب جـ قسمها ب د بنصفين، ونريد أن نجيز على نقطة د خطاً يلقى ا ب ب جـ، وهما غير محدودين، ويكون مثل هـ ز، و هـ ز ليس بأقصر من الخط الذي يجوز على نقطة د على زوايا قائمة[10].

لنلاحظ أن أبا الجود يضع الشرط اللازم لتحقيق المسألة في نص القضية.

ولنذكر أن السجزي لم ينسب هذه القضية لأبلونيوس وإنما لإبي الجود. أما قضية أبلونيوس وتحليله فقد عرضهما السجزي على النحو التالي:

> لأبلونيوس: خطا اهـ از معطيان، ونقطة ب في داخل الزاوية معطاة؛ نريد أن نخرج خطاً كخط هـ ز يلقى اهـ از.

---

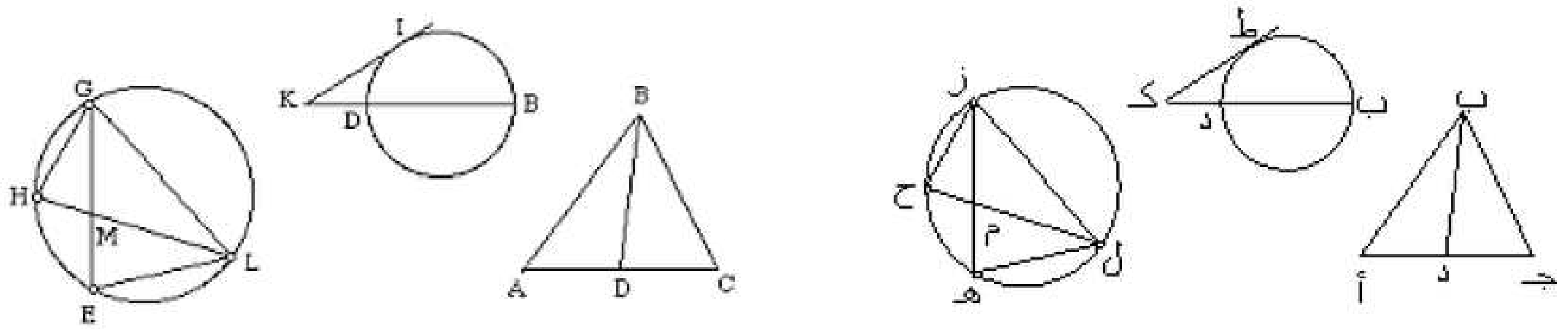
[8] To appear in R. Rashed and P. Crozet, *L'Œuvre mathématique d'al-Sījzī*.

[9] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3 : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique* (London, 2000), chap. III.

[10] *Anthology of Problems*, prob. 124, MS Dublin, Chester Beatty 3652, fol. 47^r.

تجدر الملاحظة أولاً إلى وجود اختلاف بين النصين، يهمنا على مستوى النص رغم أنه لا يكتسي أي أهمية رياضية. فالنص الثاني لا يذكر بالتحديد وجود B على المنصف، ولكن هذا الأمر متضمن حقاً في التحليل ويسهل تبيانه. إلا أن هذا الاختلاف في الصياغة يبين لنا أننا لسنا أمام نفس النص؛ وصياغة أبي الجود قريبة جداً من صياغة ابن سهل.

فندير قوس هـ ل ز يقبل زاوية مساوية لزاوية ا ب جـ، ونتمم دائرتها. فنقسم قوس هـ ح ز على نقطة ح بنصفين، ونصل ح ز. وندير دائرة ب د ط يكون قطرها مساوياً لخط ب د الذي هو قاسم الزاوية بنصفين، ونخرج ط كـ مساوياً لـ ح ز، يماس دائرة ب د. ونخرج كـ د ب يجوز على مركز دائرة ب د. ومن البين أن د كـ أصغر من ط كـ، أعني ح ز. فنخرج ح م مساوياً لـ كـ د وننفذه إلى ل. أقول إن ل م مساو لـ د ب.



الشكل. 10

برهانه:

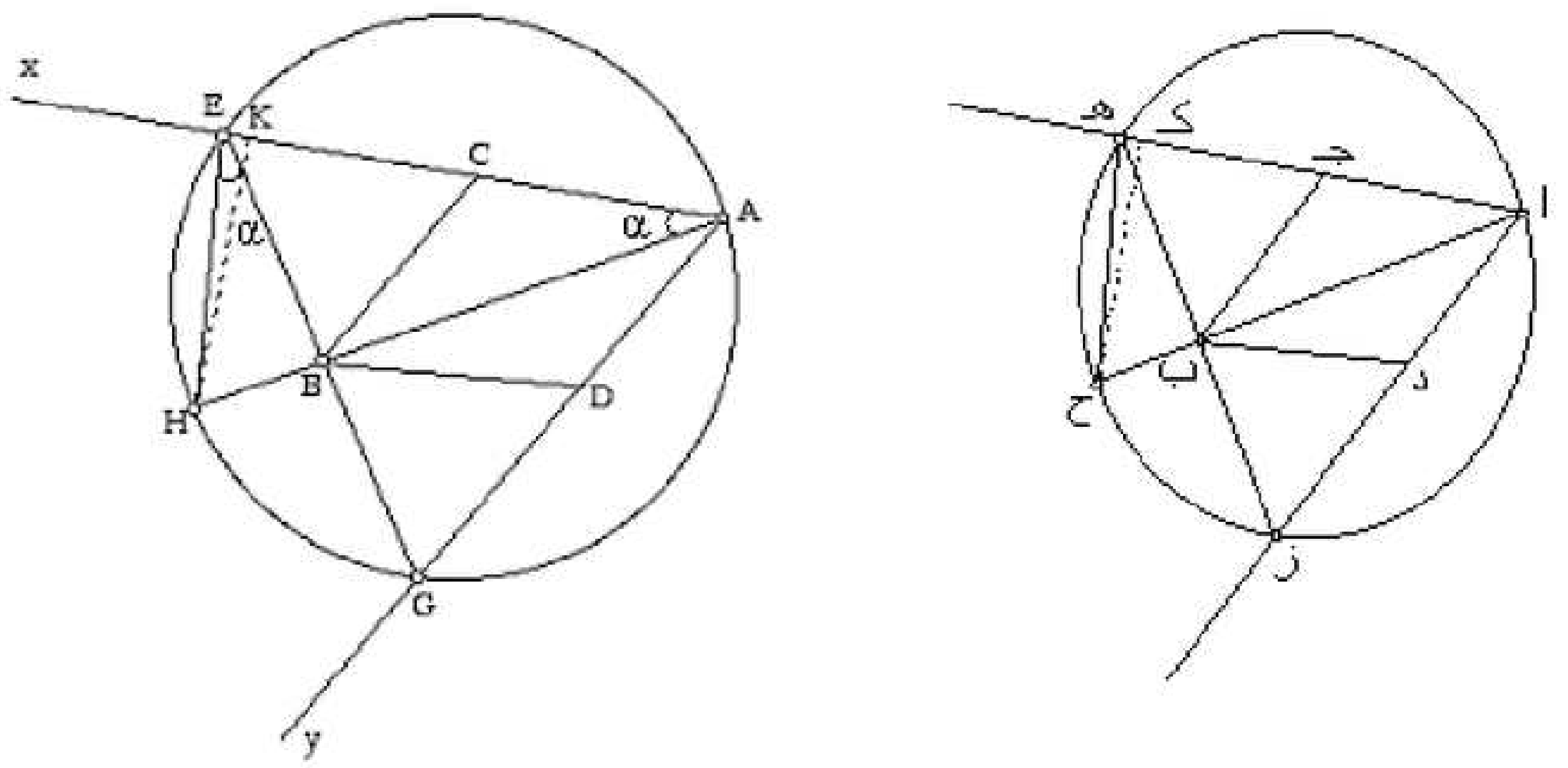
لأن مثلث ح ز ل يشبه مثلث ح م ز، تكون نسبة ل ح إلى ح ز كنسبة ح ز إلى ح م، أعني أن سطح ح ل في ح م يعدل مربع ح ز. فـ ل م مساو لـ ب د. فإذا نقلنا هيئة المثلث إلى خطوط ا ب ب جـ بأن نخرج د ا مساوياً لـ م ز وننفذه في الجهة الأخرى إلى جـ، فإن مثلث ا ب د يشبه مثلث ل م ز، وكذلك مثلث جـ ب د يشبه مثلث هـ ل م. وخط ل م مساو لخط ب د. فإن خط ا جـ مساو لخط هـ ز؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ونأتي الآن إلى التحليل المنسوب لأبلونيوس.

نخرج جـ ب ب د يوازيان ا هـ ا ز. وينبغي أن يكون ا جـ جـ ب ب د د ا كلها متساوية. ونخرج ب هـ هـ ح ا ب ح يحيط < هـ ح > مع هـ ب بزاوية مساوية لزاوية ب ا ز، ونخرج هـ ب إلى ز. فبين أن مثلث هـ ب ح يشبه مثلث ا ب ز. فنسبة هـ ح إلى هـ ب كنسبة ا ز إلى ا ب. فـ هـ ح في ا ب يعدل هـ ب في ا ز. وأيضاً هـ ز في جـ ب مثل هـ ب في ا ز لاشتباه مثلثي ا هـ ز جـ ب هـ. و هـ ز المساوي للخط المعلوم في جـ ب

المعلوم معلوم[11] <القدر>، فـ هـ ب في از معطى، فـ هـ ح في اب معلوم لأنه مساوٍ لـ از في هـ ب المعلوم. و اب معلوم، فـ هـ ح معلوم <القدر>. ولأن مثلث اهـ ح يشبه مثلث هـ ب ح ، لأن زاوية حهـ ب تعدل زاوية هـ اب لأنها تعدل زاوية باد المساوية لزاوية باجـ ، وزاوية ح مشتركة، فتبقى الزاويتان الباقيتان منهما متساويتين، فيكون اح في ح ب يعدل مربع حهـ . فـ ح ب معلوم[12]. و حهـ معلوم، فنقطة هـ معلومة وخط هـ ز معلوم <القدر والوضع>؛ وذلك ما أردنا أن نبين[13].

ملاحظة: وينبغي أن يكون: الأصح هو "فيكون"، وربما أخذ الفعل هنا بمعنى "يلزم".



الشكل. 11

لنعد مرة أخرى إلى التحليل السابق.

لدينا الزاوية xAy ونقطة B على منصفها. نريد إيجاد مستقيم يمر في B قاطعاً Ax في E وAy في G وبحيث يكون لـ EG طول معلوم.

نفرض $x\hat{A}y = 2\alpha$ و $AB = d$ و $EG = 2\ell$ حيث d و ℓ طولان معلومان. نفرض الآن تحليلياً أن EG حل للمسألة. نرسم $BC \parallel Ay$ و $BD \parallel Ax$ مما يعطي $BC = CA = AD = DB$. وبما أن المثلث BCA متساوي الساقين فإن $BA = 2\,BC\cos\alpha$ وبالتالي $BC = \dfrac{d}{\cos\alpha}$ وهو طول معلوم.

---

[11] إن القاعدة AB والزاوية المرتكزة عليها BAC في المثلث متساوي الساقين ABC معلومتان.

[12] يتعين ح ب (HB) بتطبيق السطح المعلوم ح هـ^2 (EH^2) على اب (AB) بزيادة هي مربع ح ب^2 (HB^2).

[13] *Anthology of Problems*, prob. 125. See also J. P. Hogendijk, 'Arabic Traces of Lost Works of Apollonius', *Archive for History of Exact Sciences*, 35, 3 (1986), pp. 197-253;

وفيه يعطي المؤلف تحقيقاً أولياً لنص أبي الجود.

نرسم بعد ذلك EH، حيث H على AB وبحيث تكون $\hat{BEH} = \hat{BAG}$. وهكذا تقع النقاط الأربع H، G، A، E على نفس الدائرة. لم يشر أبلونيوس إلى هذه الدائرة واقتصرت محاكمته على استعمال المثلثات المتشابهة.

يعطينا تشابه المثلثين EBH و ABG العلاقة $EH \cdot AB = AG \cdot EB$ ، وبالتالي $EH \cdot AB = EG \cdot CB$ (نظراً لتوازي BD و AE) ومنه $EH = \frac{EG}{AB} \cdot CB$ ويصبح طول EH معلوماً: $EH = \frac{\ell}{\cos\alpha}$.

المثلثان AEH و EBH متشابهان ولذا $AH \cdot HB = EH^2$. ويكتب أبلونيوس عندئذ ودون أي شرح إضافي "فـــ HB معلوم ولكن EH معلوم، فنقطة E معلومة والمستقيم EG معلوم".

وفي الواقع، لنفرض أن $HB = x$ فيكون لدينا $x(AB + x) = EH^2$ ؛ أي أن

$$x(x + 2d) = \frac{\ell^2}{\cos^2\alpha}$$

أو

$$x^2 + 2dx - \frac{\ell^2}{\cos^2\alpha} = 0$$

و

$$x = -d + \sqrt{d^2 + \frac{\ell^2}{\cos^2\alpha}}$$

عندما نجد النقطة H والطول EH فسنجد النقطة E شريطة أن يكون $EH \geq KH$ ، حيث KH العمود الساقط من H على Ax و $HK = AH \sin\alpha$. لكن أبلونيوس لم ينص على هذا الشرط.

إن وجود E يتطلب إذاً مناقشة لم يشر إليها أبلونيوس، على الأقل في النص الذي يستشهد به السجزي. إنه من الضروري أن يكون $HE \geq AH \sin\alpha$.

لدينا

$$HE = \frac{\ell}{\cos\alpha} \quad \text{و} \quad AH = AB + BH = d + \sqrt{d^2 + \frac{\ell^2}{\cos^2\alpha}}$$

فمن الضروري إذاً أن يكون

$$\frac{\ell}{\cos\alpha} \geq \left(d + \sqrt{d^2 + \frac{\ell^2}{\cos^2\alpha}}\right)\sin\alpha$$

أي

$$\frac{\ell^2}{\sin^2\alpha} - \frac{2\ell d}{\sin\alpha\cos\alpha} \geq 0$$

ومنه

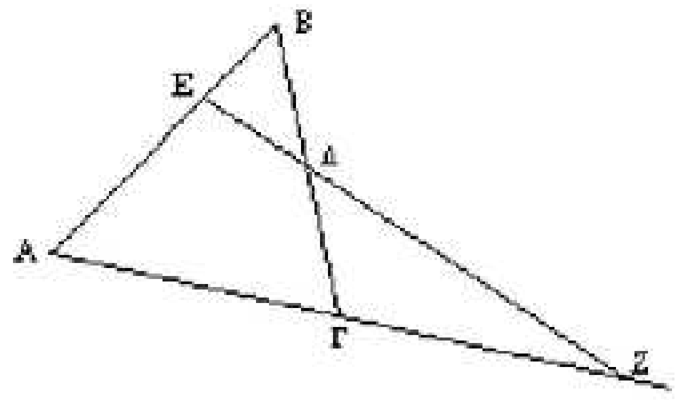
$$\ell \geq 2d \operatorname{tg}\alpha$$

تقابل هذه النتيجة مقدمة أعطاها بابوس لقضية أبلونيوس التاسعة في *Inclinations*[14]. لما كان $4d \operatorname{tg}\alpha$ هو طول القاعدة في مثلث متساوي الساقين زاوية قمته 2α وارتفاعه 2d فإن مقدمة بابوس تنص أنه إذا كان $BA\Gamma$ مثلثاً

---

[14] انظر:

متساوي الساقين و Δ وسط (قاعدته) $B\Gamma$ فإن $B\Gamma$ هو أقصر مستقيم من المستقيمات التي تمر من Δ وتتقاطع مع نصفي المستقيمين $(AB]$ و $[A\Gamma)$.



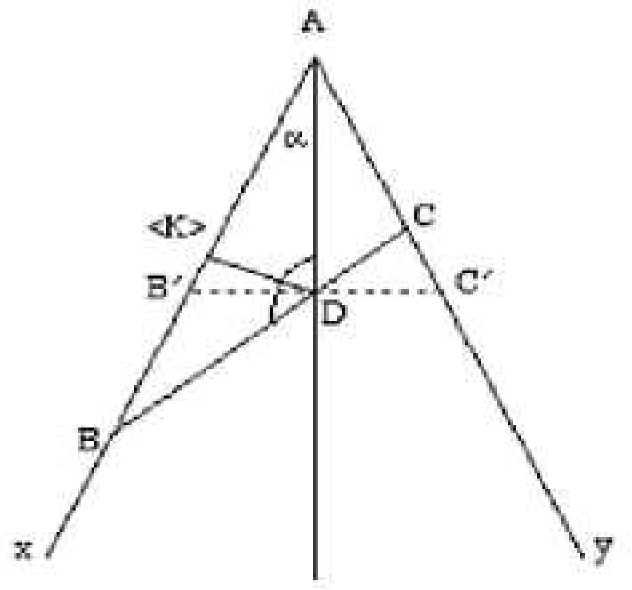
الشكل. 12

ونظراً لأن النص المنسوب لأبلونيوس لا يتضمن التركيب، فإننا لا نستطيع أن نجزم بأي شيء فيما يتعلق بمعرفته بهذه المقدمة أو باستعماله لها. إن كل ما نستطيع تأكيده، من جهة أخرى، هو أن تحليل أبلونيوس كما سرده السجزي ينقصه التمام مادام لم يناقش شروط وجود النقطة E. لقد تطلب السجزي هذه الشروط في النص الذي أعطاه للمسألة، وقد برهن ابن سهل ضرورتها.

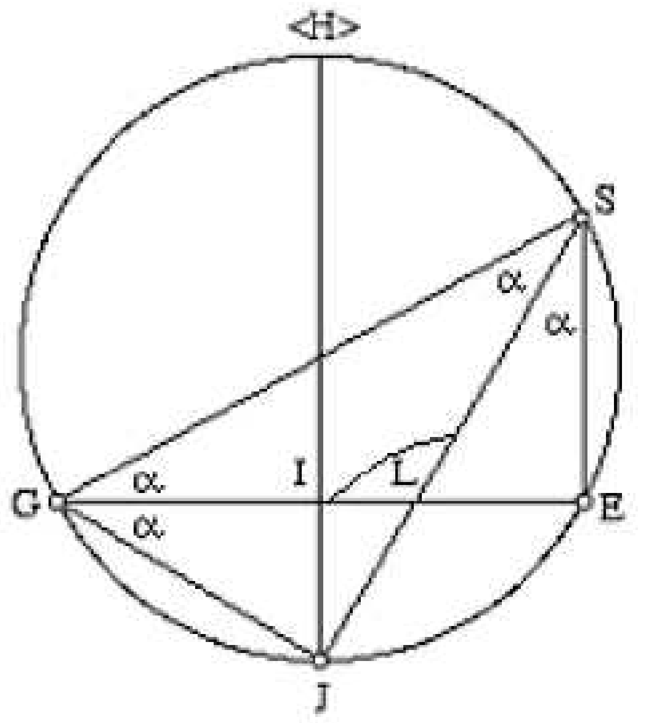
ولكن دعنا، قبل أن نتفحص التركيب الذي أنجزه الشني استناداً إلى تحليل ابن سهل، نتوقف قليلاً عند تركيب السجزي الذي سنعرضه مستعملين رموز الشني. يمكن إعادة كتابة نص السجزي على النحو التالي: نقسم الزاوية xAy إلى نصفين بالمستقيم الواقع بين A والنقطة D داخل الزاوية. نريد رسم مستقيم يمر من D ويقطع Ax في B و Ay في C بحيث يكون $EG = BC$ الذي هو مستقيم محدد. نفرض أن $B'C'$ حيث $EG \geq B'C'$ حيث $B'C' \perp AD$.

نرسم على EG قوس دائرة كفؤاً للزاوية (capable) xAy أي المحل الهندسي لرأس زاوية تساوي xAy، ونتمم الدائرة بالقوس EJG حيث J وسطه [الشكل. 14a]. ونرسم دائرة قطرها مساو لـ AD ومماساً لها في نقطة ما، T، ونأخذ عليه الطول KT مساو لـ JG؛ ونرسم القطر المار بـ K، وليكن المستقيم KD'A'. إن $D'K < KT$، أي أن $D'K < JG$ [الشكل. 14b]. نرسم في الدائرة a خطاً $D'K = JL$؛ تقع L على المستقيم GE؛ نمدد JL إلى نقطة ملاقاته للدائرة في S. نبين أن $SL = AD$ وأن المثلث الذي نبحث عنه ABC يساوي المثلث GSE.

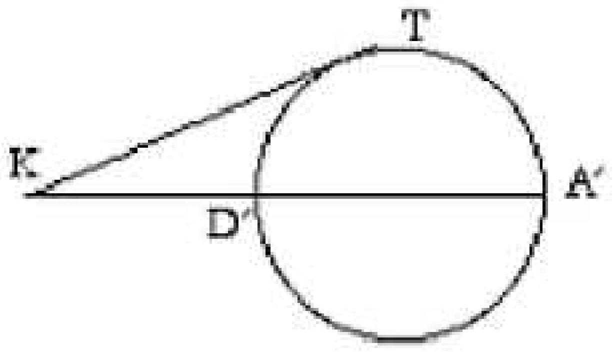
Pappus, *La collection mathématique*, Œuvre traduite pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, 2 vols. (Paris/ Bruges, 1933; Nouveau triage Paris, 1982), vol. 2, pp. 609-610.



الشكل. 13



الشكل. 14a



الشكل. 14b

يفترض إنشاء النقطة L أن $JI \leq JL = KD'$ (حيث $JI \perp IE$)، ولدينا عدة حالات:

1) $KD' = JI$، تنطبق L على النقطة I و $GE = LG \frac{1}{2}$.

2) $KD' > JI$، يمكن في هذه الحالة أن تقع النقطة L إما على نصف المستقيم $]I, E[$ أو على نصف المستقيم $]I, G[$. في الشكل تقع L على $]I, E[$ وبالتالي $LG > \frac{1}{2} GE$.

وفي كلتا الحالتين (1) و(2) فإن $LG \geq \frac{1}{2} GE$. ولما كان $GE \geq B'C'$ فرضاً في النص فإن L، إن وجدت، ستحقق العلاقة $LG \geq DB'$.

يتشابـه المثلثـان GJS و LGJ لأن $\hat{S} = \hat{G} = \frac{1}{2} x\hat{A}y$ ؛ لـذا فـإن $JL \cdot JS = GJ^2$ وبالنتيجة $JS = JL + LS = KD' + D'A'$ و $LS = D'A' = DA$.

نأخذ النقطة B على Ax بحيث يكون $DB = LG$. إن وجود النقطة L يعني أن $LG \geq DB'$. وهكذا فالنقطة B موجودة من أجل $DB' > DK$، حيث K مسقط العمود من D على Ax.

لتكن $B_1^{'}$ نظيرة النقطة B' بالنسبة إلى K. وهكذا يقابل الشرط $LG \geq DB'$ نقطتان B، إحداهما على نصف المستقيم $[B'x)$ والأخرى على نصف المستقيم $[B_1^{'}A)$. أخذنا في الشكل. 13 B على نصف المستقيم $[B'x)$ والزاوية B حادة في هذه الحالة.

لدينا في المثلثين ABD وSLG، $SL = AD$ و $LG = BD$ و $G\hat{S}L = B\hat{A}D = \frac{1}{2}x\hat{A}y$. أضف إلى ذلك أن الزاويتين B و G حادتان كلتاهما (وهو اختيارنا للنقطة L والنقطة B)؛ المثلثان ABD و SLG متساويان وبالتالي $A\hat{D}B = S\hat{L}G$. ومنه $A\hat{D}C = S\hat{L}E$ ؛ والمثلثان ADC و SLE متساويان لأن $AD = SL$ و $L\hat{S}E = D\hat{A}C = \frac{1}{2}x\hat{A}y$؛ ومنه $DC = LE$ وبالتالي $BD + DC = GL + LE$، ومنه $BC = GE$.

لنناقش الآن شروط هذا التركيب. نفرض أن $x\hat{A}y = 2\alpha$، $EG = 2\ell$، $AD = 2d$ كما في السابق. ونعبر عن شرط السجزي $EG \geq B'C'$ المنصوص عليه بـــ $2\ell \geq 2DB'$ أو $\ell \geq 2d\,tg\,\alpha$.

لدينا $GJ = \frac{\ell}{\cos\alpha}$ و $IJ = \ell\,tg\,\alpha$ (لأن $GI = \frac{1}{2}GE = \ell$).

ويبقى الشرط $KD' > IJ$ اللازم لوجود النقطة L.

لدينا $$GJ^2 = KD'(KD' + 2d)$$

أو $$KD'^2 + 2dKD' - \frac{\ell^2}{\cos^2\alpha} = 0 \quad \text{و} \quad KD' > 0$$

ومنه $$KD' = -d + \sqrt{d^2 + \frac{\ell^2}{\cos^2\alpha}}$$

و $$KD' = -d + \sqrt{d^2 + \frac{\ell^2}{\cos^2\alpha}} \geq \ell\,tg\,\alpha \quad \text{لأن} \quad KD' \geq JI$$

ومنه $$\ell^2 \geq \ell^2 \sin^2\alpha + 2d\ell \sin\alpha \cos\alpha$$

أي $$\ell \geq 2d\,tg\,\alpha$$

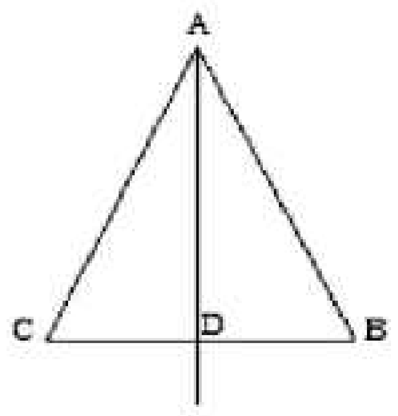
ونجد من جديد أن الشرط مفترض في النص.

نصل أخيراً إلى تركيب الشني وتحليل ابن سهل، مبتدئين بالأول.

نرسم على المقطع EG قوس دائرة EGH كفؤاً للزاوية xAy ونتمم الدائرة. ليكن HJ القطر العمودي على EG في وسطه I؛ طولا AD و HI معلومان. لدينا حالات ثلاث .

الحالة الأولى: $AD = HI$

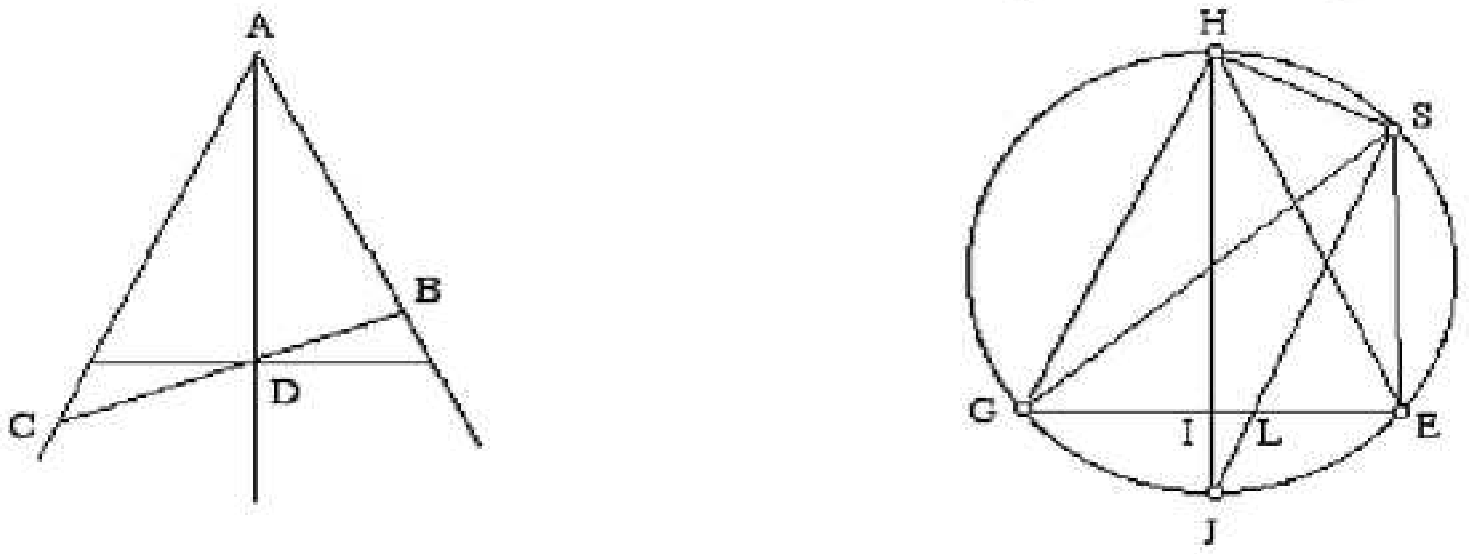
إن المستقيم المطلوب هو العمودي في D على AD؛ والمثلثان BAG و GHE متساويان وبالتالي $BC = GE$.



الشكل. 15.1

الحالة الثانية: AD > HI

نبين ببرهان الخلف أن المسألة مستحيلة.



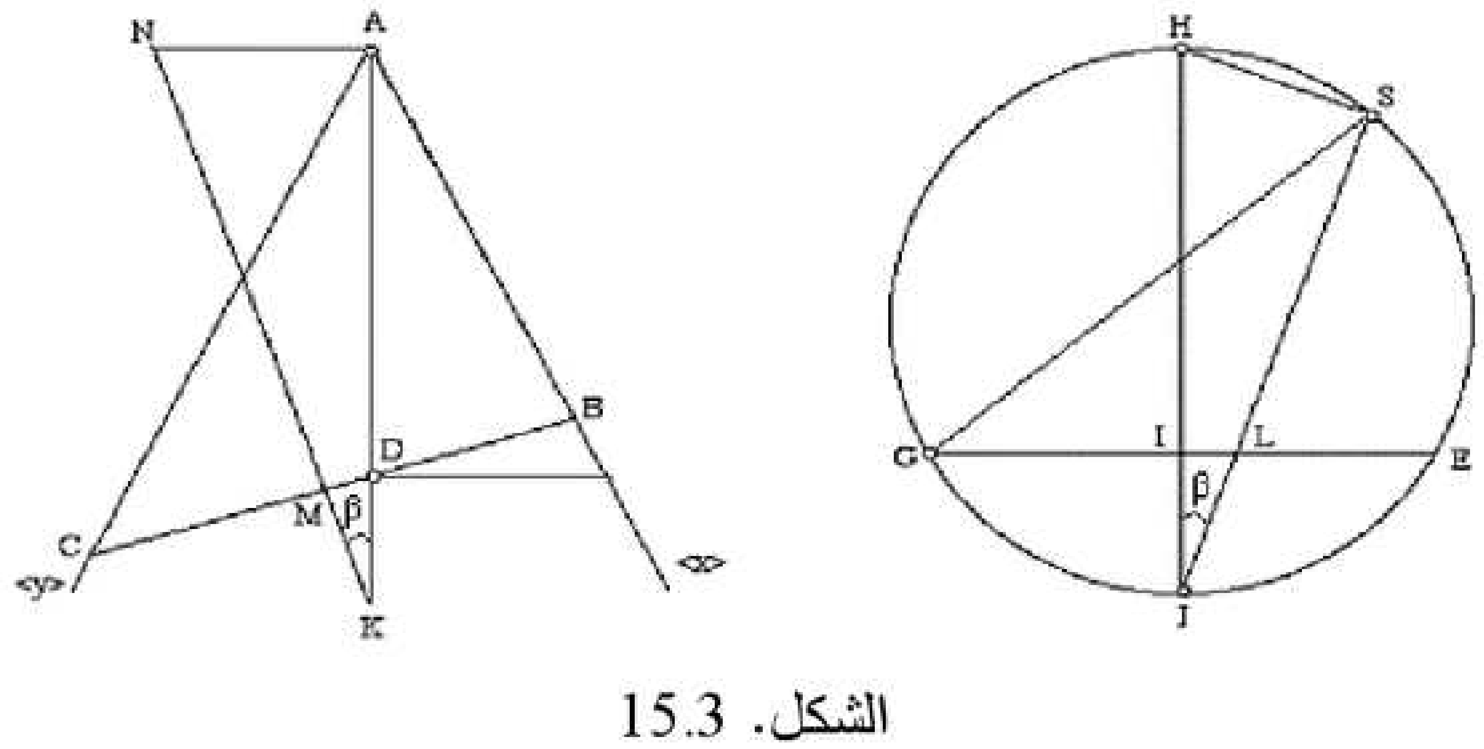
الشكل. 15.2

فلو كان BC = EG و AB = AC لتساوى المثلثان BAC و EHG، لأن الزاويتين BAC و EHG متساويتان، وبالتالي فإن AD = HI وهو محال.

لتكن الآن S نقطة من القوس EH. تتساوى الزاويتان GSE و xAy وكذلك الزاويتان GSJ و JSE. لدينا JS < JH، إلا أن JL > JI وبالتالي فـــ LS < IH.

فلو كان AB > BC و BC = EG لوجدت نقطة S بحيث يكون المثلثان BCA و GES متساويين ولأصبح AD = LS وبالتالي AD < IH وهذا محال.

الحالة الثالثة: AD < HI. للمسألة حل



الشكل. 15.3

يستند المؤلف لبرهان هذه الحالة على المقدمة التالية: ليكن لدينا المقطع a والسطح H أوجد الزيادة x بحيث يكون $(a + x)x = H$

يعتمد المؤلف للقيام بهذا الإنشاء على تقاطع قطع زائد قائم مع خط مستقيم[15].

لدينا، أياً كان الوتر JLS، (حيث S على القوس HE) [الشكل 15.3].

$$JL \cdot JS = JI \cdot JH$$

وهو جداء معلوم. ونعرف، من جهة أخرى، حسب المقدمة المشار إليها[16] كيف نجد على امتداد AD نقطة K بحيث يكون $AK \cdot KD = HJ \cdot JI$. أي

$$(AD + KD) \cdot KD = (HI + IJ) \cdot IJ$$

ونبرهن باستعمال الخلف أن

$$KD > IJ \quad \text{و} \quad IJ < AK < HJ$$

كما أن لدينا

$$AK \cdot KD = JI \cdot JH = JE^2$$

وبالتالي $AK > JE$.

وتوجد إذاً نقطة S على القوس HE بحيث يكون $JS = AK$.

يقطع JS المستقيم GE في L؛ لدينا $JL = KD$ و$LS = AD$. ننشئ المثلث AKN قائم الزاوية في A وبحيث تتساوى الزاويتان AKN و HJS فالمثلثان KAN و JSH متساويان و $KN = JH$.

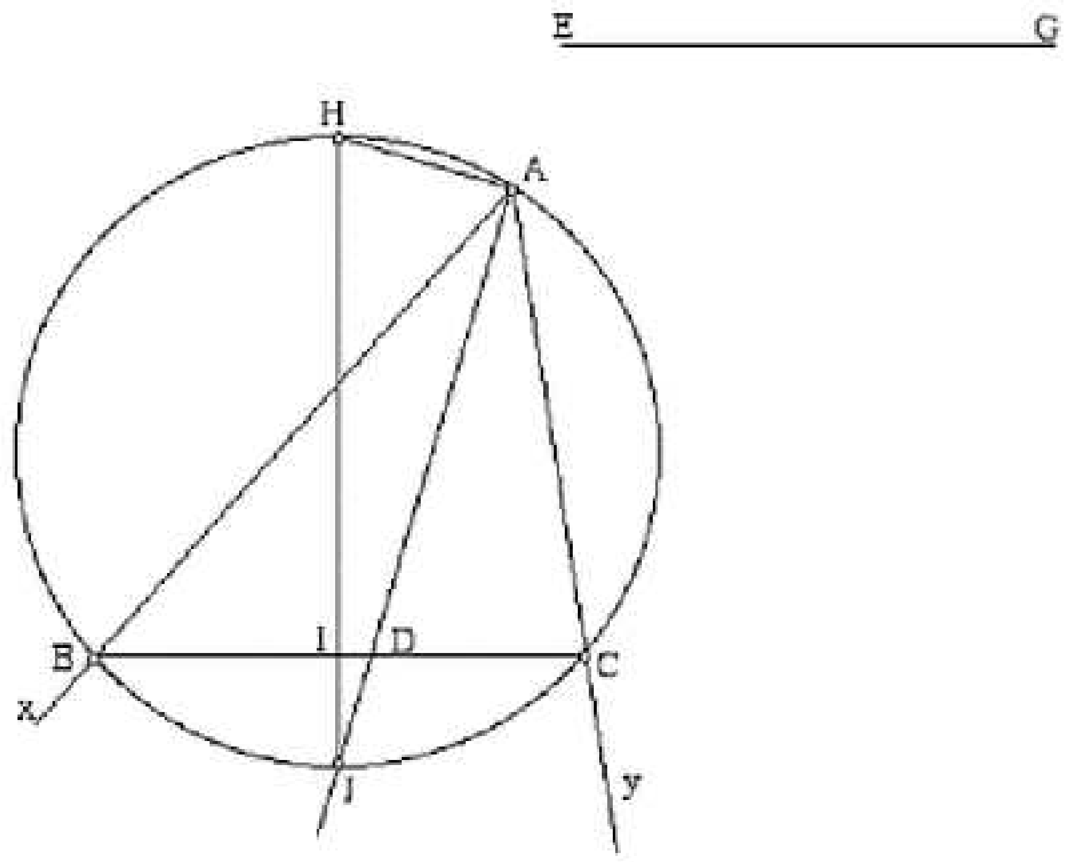
ليكن DM العمود الساقط من D على KN. يعطي تساوي المثلثين KDM و JIL المساواة $DM = IL$. يقطع DM المستقيم Ax في B والمستقيم Ay في C والمثلثان ADC و SLG متساويان. ينتج عن ذلك تساوي المثلثين ABC و SGE، وبالتالي فإن $BC = GE$.

نستطيع الآن بناء تحليل ابن سهل لهذه المسألة الثانية. لدينا العناصر التالية: الزاوية xAy، النقطة D على منصفها والطول EG. نفترض المسألة محلولة وBDC المستقيم المطلوب؛ لدينا $BC = EG$.

---

[15] انظر المقدمة 6 ص. 450 والملاحظة الإضافية [7].

[16] المقدمة 6.



الشكل. 16

نرسم الدائرة المحيطة بالمثلث ABC. تقطع هذه الدائرة المنصف AD في J، منتصف القوس BC. يقطع القطر JH، العمودي على BC، BC في وسطه ولتكن النقطة I. إن للمثلثين قائمي الزاوية JID و JAH زاوية مشتركة J فهما متشابهان ولدينا

$$JI \cdot JH = JD \cdot JA = JB^2$$

غير أن

$$JI \leq JD \quad \text{وبالتالي} \quad JH \geq JA$$

ثم إن

$$JH = JI + IH \quad \text{و} \quad JA = JD + DA$$

فلذا فإن

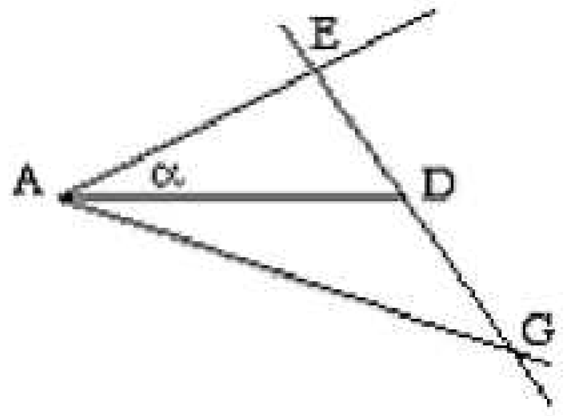
$$IH \geq DA$$

لذا يجب علينا عند التركيب النظر في حالتين تكون فيهما المسألة ممكنة وفي حالة ثالثة – $IH < DA$ – تكون فيها مستحيلة. وهذا ما قام به الشني فعلاً.

لقد أعطى السجزي، حاله حال الشني، التركيب وحده. إلا أن هذين التركيبين ليسا في الأساس نفس التركيب كما ادعى البعض[17]، فهما مختلفان في نقاط عدة.

لقد رأينا منذ قليل أن السجزي يشير إلى الشرط، كما ورد في النص الذي أرسله إليه أبو الجود، ولكنه لم يبرره بنفسه. وقد رأينا أن هذا الشرط يكافئ مقدمة بابوس، وأنه يمكن التعبير عنه بـــ $EG \geq 2AD \operatorname{tg} \alpha$.

[17] Hogendijk, 'Arabic Traces of Lost Works of Appollonius', pp. 197-198, note 8.



الشكل. 17

لم ينص السجزي على هذا الشرط عند قيامه بالتركيب، كما أنه لم يبين لزومه لتحقيق الإنشاء. إنه لم يقم بأي تحديد (Diorism)، بأي دراسة لشروط وجود حل للمسألة.

أما الشني فقد قام، على نقيضه، بتحديد مقارنة بين AD و HI. فليس للنقطة H، نقطة تقاطع IJ مع الدائرة، أي دور في تركيب السجزي. لدينا $IE = HI \, tg\, \alpha$ ومنه

$$HI = \frac{IE}{tg\, \alpha} = \frac{GE}{2\, tg\, \alpha}$$

وبين الشني أن للمسألة حل إذا كان

$$DA \le HI \Leftrightarrow GE \ge 2AD\, tg\, \alpha$$

كما بين أثناء التحديد استحالة الحل في حال عدم تحقق هذا الشرط.

ثم إن الشني استعان في التحديد بالإنشاء الإضافي للطول x المحقق للشرط $H = x(AD + x)$، حيث H مربع طول معلوم. لقد عالج السجزي هذا الإنشاء بشكل مختلف، فقد أخذ دائرة قطرها مساوٍ للطول AD ورسم لها مماساً طوله $\sqrt{H}$ وأخذ بعين الاعتبار قوة طرف هذا المماس بالنسبة للدائرة.

وهكذا، فإن الترتيب المتبع في التركيبين والطرق المستعملة في الإنشاء الإضافي وكذا دراسة شروط الوجود (الغائبة عند السجزي والحاضرة عند الشني) تمنعنا من القول إن هاتين الدراستين هما في الأساس نفس الشيء.

يبقى علينا أن نشير إلى التحليل الذي انطلق منه السجزي والشني. لقد رأينا في تحليل أبلونيوس، نظراً لتساوي الزوايا المفترض، أن H تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث AEG، حيث تحقق EG الشرط المشار إليه أعلاه وتحل بالتالي المسألة. لكن أبلونيوس لم يشر بشيء لا للدائرة ولا للشرط. إن الشكل الذي نحصل عليه عندما نرسم هذه الدائرة يطابق الشكل الذي نجده في كلا التركيبين، تركيب السجزي وتركيب الشني.

هل كان ابن سهل على علم بنص أبلونيوس عندما تصور تحليله؟ ما من جواب شاف على هذا السؤال. ولكن دعونا نفترض أنه كان يعرفه، بدليل أن معاصره السجزي قد عاد إليه بشكل أو بآخر. يمكننا في هذه الحالة الظن أن ابن سهل كان يبغي إعطاء صياغة أكثر وضوحاً وأسهل معالجة من صياغة أبلونيوس: تحليل يستعمل الدائرة المحيطة بالمثلث موضوع البحث ليوصلنا بطريقة أكثر بساطةً ووضوحاً إلى المساواة $H = x(a + x)$ (حيث H مربع طول معلوم) وليقودنا إلى إنشاء إضافي.

ولما كان السجزي قد استعمل الدائرة، فإننا أمام أحد أمرين: فهو إما أن يكون قد اتبع، انطلاقاً من تحليل أبلونيوس، مساراً مماثلاً لمسار ابن سهل أو أنه قد عرف تحليل هذا الأخير وهو الاحتمال الأرجح. آثر السجزي في هذه الحالة الدائرة والمماس، بينما اختار الشني القطع الزائد والمستقيم. والخلاصة فقد يكون نص أبلونيوس قد استخدم لإثارة مسألة اشتقها أبو الجود منه وأرسل نصها إلى السجزي.

المسألة الثالثة: لا تقل أهمية هذه المسألة عن سابقتها؛ وهي لا تعدو كونها مسألة أرشميدس الشهيرة في إنشاء مسبع منتظم[18]. إلا أن شروط المسألة المطروحة هنا شاملة، كما سنرى ذلك مراراً وتكراراً. لنذكر أولاً أن عدداً من رياضي ذلك العصر قد أخذ على عاتقه هذه المسألة ليبدي جدارته وبراعته[19]. ولقد أخذ الشني على ابن سهل، بخصوص هذه المسألة، وقوعه في خطأ مزعوم سنعود إليه لاحقاً.

سنبدأ، في حال هذه المسألة أيضاً، بتركيب الشني استناداً إلى تحليل ابن سهل لنعود بعد ذلك إلى إنشاء التحليل. هو ذا أولاً نص المسألة:

ليكن متوازي الأضلاع ABCD ذو القطر BC؛ أرسم مستقيماً ماراً بالنقطة D وقاطعاً BC في G، وAC في E وامتداد AB في L. بحيث يكون:

$$\frac{\text{CGE مساحة}}{\text{EAL مساحة}} = k \qquad \text{نسبة معطاة}$$

نعرف الزاويتين GCE = Z وEAL = O'؛ نبرهن بواسطة المقدمة 9 (ص. 455)، أن النسبتين

$$\frac{\text{CGE مساحة}}{\text{CG} \cdot \text{CE مساحة}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{EAL مساحة}}{\text{AE} \cdot \text{AL مساحة}}$$

معلومتان، وبالتالي، فإن النسبة:

$$\frac{CG \cdot CE}{AE \cdot AL} \qquad (1)$$

معلومة أيضاً. لنرمز إلى هذه النسبة بـــ $\frac{R}{X}$. المسألة هي إذاً إيجاد المستقيم DGEL كي تكون النسبة (1) مساوية لـــ $\frac{R}{X}$، حيث R و X مقطعان معطيان.

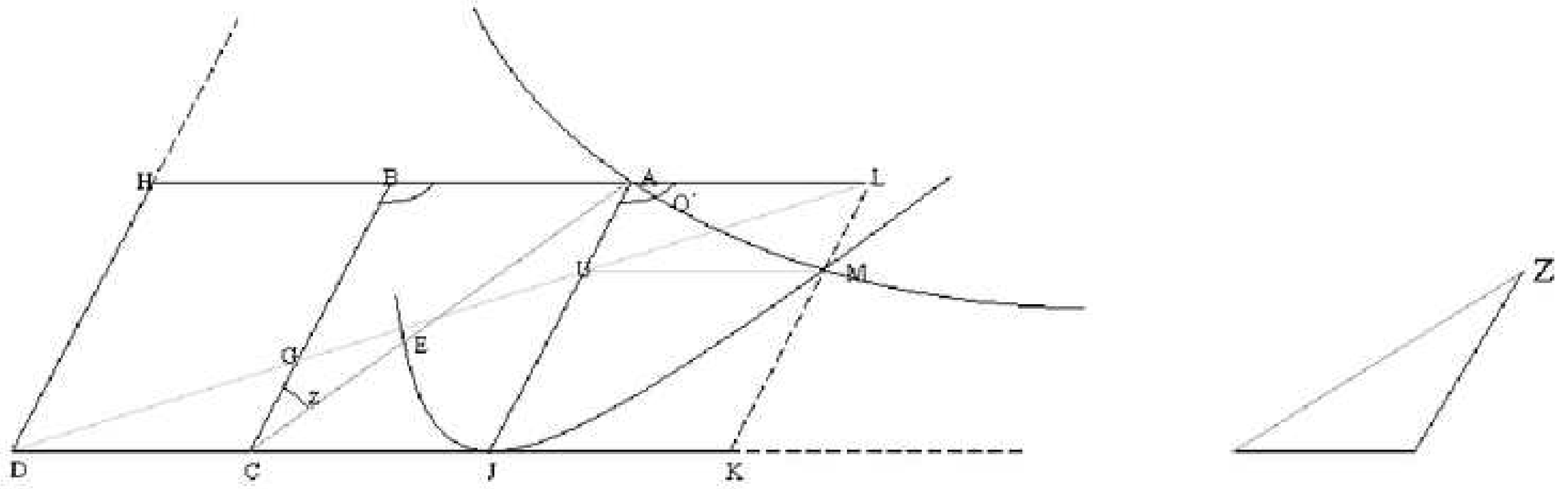
---

[18] انظر *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3 chap. III.

[19] لقد عرض ابن الهيثم لاحقاً هذه المسألة على الشكل التالي: "إن أحد الأشكال الهندسية التي يتحدى بها المهندسون ويفتخر بها المبرزون ويظهر بها قوة من وصل إليها هو عمل المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة". انظر

R. Rashed, 'Les construction de l'heptagone régulier par Ibn al-Haytham', *Journal for the History of Arabic Science*, 3, 2 [1979], pp. 309-387 on pp. 340-341; *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3, p. 454.

الحالة الأولى: $A\hat{B}C \geq \frac{\pi}{2}$



الشكل. 18

لتكن J و H بالترتيب على DC و AB، بحيث يكون $DH \parallel BC \parallel AJ$. لدينا إذاً

$$CJ = AB = CD = BH$$

لنأخذ القطع المكافئ $\mathcal{P}$ المار في J، ذا *الضلع القائم* Q، بحيث يكون $\frac{X}{W} = \frac{Q}{CD}$، حيث $W = 2R$، المماس لـــ DC في J وذا القطر AJ. (في حال $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$، تكون J رأسه وAJ محوره الرئيسي). لنأخذ أيضاً القطع الزائد $\mathcal{H}$ المار في A وذا الخطين المقاربين DJ و DH. يتقاطع هذان القطعان بالضرورة في نقطتين، إحداهما M الواقعة على القطاع المحدد بالمستقيمين AB و CD. نرسم من M الموازي للمستقيم BC فيقطع AB في L و CD في K. ويكون DL هو المستقيم المطلوب.

وبالفعل لتكن G، E و U نقاط تقاطع DL مع BC، CA و JA؛ لدينا إذاً:

$$MK \cdot KD = AJ \cdot JD = KL \cdot JD \quad \text{لأن} \quad M \in \mathcal{H}$$

لذلك

$$\frac{DJ}{DK} = \frac{MK}{KL}$$

لكن، ومن جهة أخرى، $\frac{JU}{KL} = \frac{DJ}{DK}$، نظراً لكون $JU \parallel KL$. نستنتج منها $JU = MK$ وبالتالي $AL \parallel MU$ و $MU = AL$.

وبما أن $M \in \mathcal{P}$ فإن

$$MU^2 = Q \cdot JU$$

لدينا إذاً

$$\frac{Q}{CD} = \frac{Q \cdot JU}{CD \cdot JU} = \frac{MU^2}{CD \cdot JU} = \frac{AL^2}{CD \cdot JU} = \frac{X}{W}$$

لكن

$$\frac{JU}{CG} = \frac{JD}{CD} = 2 = \frac{W}{R}$$

ومنه

$$JU = CG \cdot \frac{W}{R}$$

وبالتالي

$$\frac{CD \cdot CG}{AL^2} = \frac{R}{X} \qquad (1)$$

غير أن

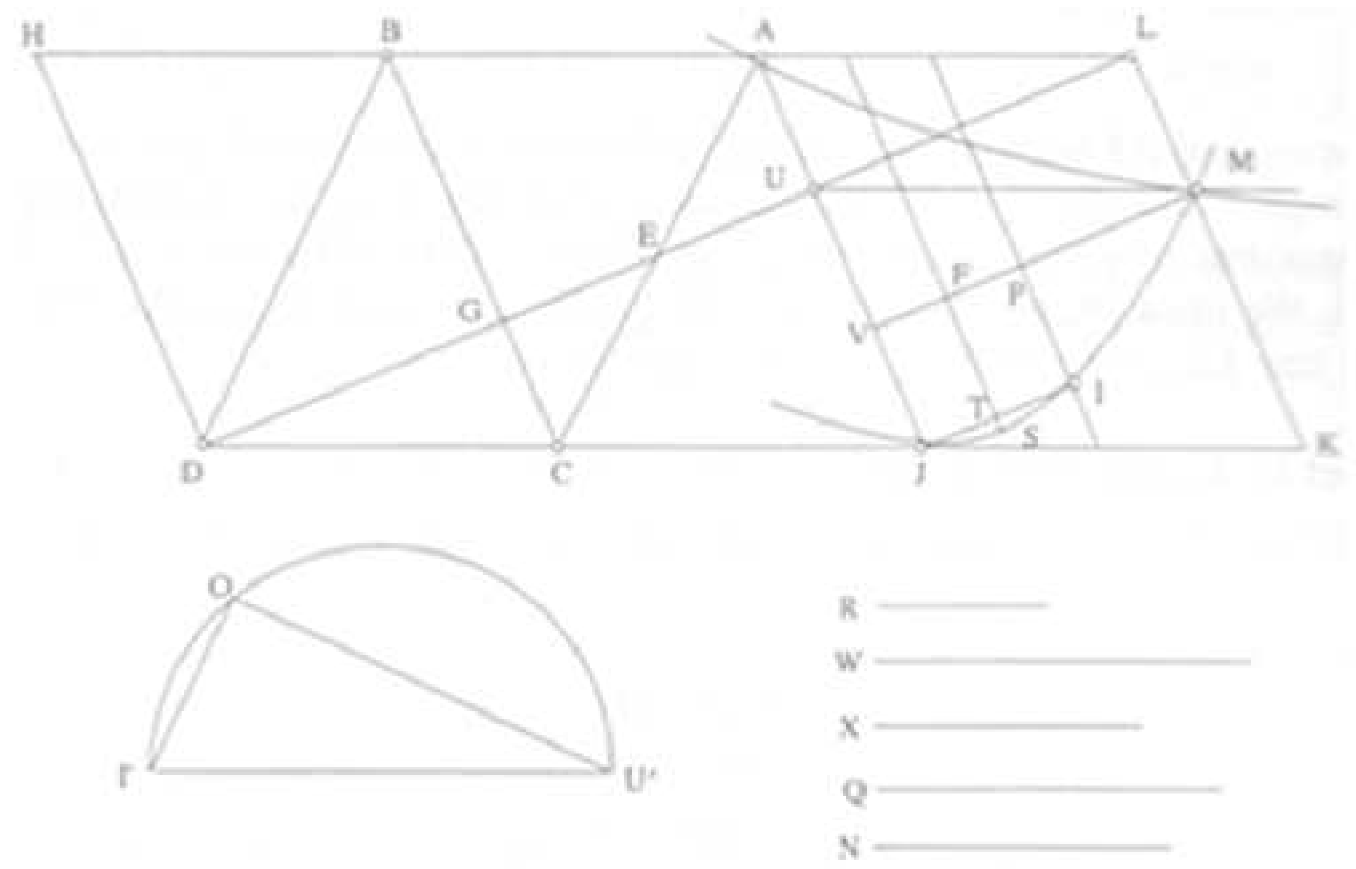
$$\frac{CD}{AL} = \frac{CE}{EA}$$

وعليه فكتابة المعادلة (1) تعاد على الوجه التالي:

$$\frac{CE \cdot CG}{EA \cdot AL} = \frac{R}{X}$$

والمستقيم DL يجيب عن المسألة.

الحالة الثانية: $A\hat{B}C < \frac{\pi}{2}$



الشكل. 19

ليكن Q محدداً كما في الحالة السابقة، ولنأخذ نصف دائرة قطرها I'U'، والوتر I'O بحيث $U'\hat{I}'O = A\hat{B}C$. نعرف المقطعين N و JI العمودي على JA بالعلاقتين

$$\frac{JI}{N} = \frac{I'O}{U'O} \qquad و \qquad \frac{Q}{N} = \frac{U'I'^2}{U'O^2}$$

لتكن T وسط JI و S نقطة محددة بالشرطين الآتيين $AJ \parallel TS$ و $\frac{JT}{TS} = \frac{N}{JT}$.

يمر القطع المكافئ $\mathscr{P}_1$ ذو الرأس S والمحور TS و*الضلع القائم* N، في النقطتين I وJ، لأن $JT^2 = TI^2 = N \cdot TS$؛ والقطع الزائد $\mathscr{H}$، المار في A ذو خطي التقارب DJ و DH، يقطع بالضرورة $\mathscr{P}_1$ في

نقطتين أحداهما في الزاوية AJK؛ ولتكن M هذه النقطة. والخط الموازي لـــ BC والمار في M يقطع AB في L وCD في K. فالمستقيم DL الذي يقطع BC في G، وAC في E، وAJ في U هو المستقيم المطلوب.

نبرهن، كما في الحالة السابقة، بأن $ML = AU$ و $AL \parallel MU$. نسقط من M العمودي MF على ST؛ يتقاطع MF و AJ في V. نأخذ على المستقيم MV النقطة P بحيث تكون F في وسط المقطع VP. لدينا

$$N \cdot SF = MF^2 \qquad \text{لأن}\ M \in \mathscr{P}_1$$

من جهة أخرى:

$$MF = MP + PF \qquad \text{و} \qquad MF^2 = MP^2 + PF^2 + 2MP \cdot PF$$

لكن

$$MF^2 = N \cdot FS \qquad \text{و} \qquad PF^2 = TI^2 = N \cdot TS$$

وبالتالي

$$N \cdot TF = N \cdot JV = 2MP \cdot PF + MP^2 = MP \cdot MV \qquad (1)$$

لنذكر أن $\frac{I'O}{U'O} = \frac{JI}{N}$ ؛ غير أن $JI = PV$ و $\frac{UV}{MV} = \frac{I'O}{U'O}$ (في المثلثين المتشابهين U'I'O وMUV)؛ لدينا إذاً $\frac{UV}{MV} = \frac{PV}{N}$، أو

$$N \cdot UV = PV \cdot MV \qquad (2)$$

ينتج من (1) و(2) أن

$$N \cdot JU = MV^2 \qquad (3)$$

من جهة أخرى

$$\frac{Q}{N} = \frac{UI'^2}{U'O^2} \qquad \text{و} \qquad \frac{UM}{MV} = \frac{U'I'}{U'O}\ \text{(تشابه المثلثين المذكورين)}$$

لذلك فإن

$$\frac{Q \cdot JU}{N \cdot JU} = \frac{UM^2}{MV^2} \qquad (4)$$

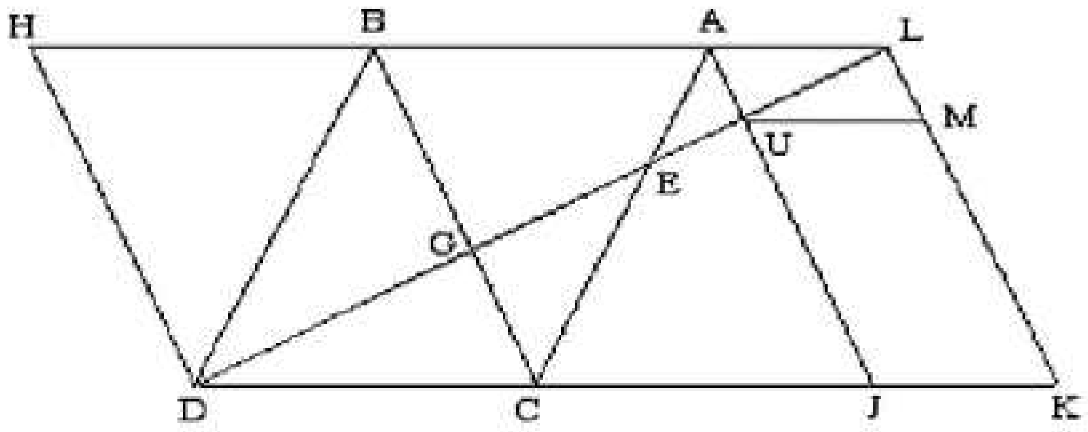
نستنتج من المعادلتين (3) و(4) أن $Q \cdot JU = UM^2$.

وهي علاقة تعيدنا إلى الحالة السابقة؛ وهكذا يكتمل البرهان.

إن تفحص التركيب الذي أعطاه الشني، وكذلك مجاهرته بخطأ يزعم أن ابن سهل وقع فيه، يضعنا في مواجهة صعوبتين، ويعلمنا في الوقت نفسه بحقيقة نوايا هذا الأخير. أما الصعوبة الأولى، وقد أحس بها المؤلف نوعاً ما، فتكمن في تقسيم التركيب إلى حالتين. ويبدو هذا التقسيم بالفعل غير ضروري: فلقد برهن في الحالة الثانية أنه، إذا كانت M تنتمي للقطع الزائد $\mathscr{H}$ والقطع المكافئ $\mathscr{P}_1$، فإنها تحقق: $MU^2 = Q \cdot JU$، وبذلك فهي تنتمي أيضاً إلى القطع

المكافئ $\mathcal{P}$ ذي *الضلع القائم* Q وذي المنحيين المترافقين JA وAB، أي القطع المستعمل في الحالة الأولى. فالاستدلال المتبع في الحالة الأولى، صحيح في حالات الأشكال الثلاث، ولا ضرورة إذاً لفصل هذه الحالات، وهو ما يستطيع التحليل تأكيده.

أما الصعوبة الثانية فلها علاقة بالنقد الموجه إلى ابن سهل. يضع الشني، في مقدمة الرسالة، لنفسه هدفاً هو حل الحالة التي استبعدها ابن سهل لقناعته باستحالتها. فيكتب في بداية المسألة بأنه سيعطي تركيب تحليل ابن سهل، ويتبع بالتركيب استشهاداً بفقرة غامضة، أو على الأقل سيئة التحرير، ينسبها إلى ابن سهل، وفيها تأكيد على أن تحديد نسبة المثلثين DGC وLAE بالتحليل غير ممكنة. وتبدو هذه المزاعم غير متوافقة إذا أخذت على معناها الظاهري. وحتى نستطيع إدراك فحوى الاستشهاد علينا أولاً إعادة بناء تحليل ابن سهل.



الشكل. 20

لنفترض أننا وجدنا المستقيم DGEL بحيث يكون:

$$\frac{CG \cdot CE}{AE \cdot AL} = \frac{R}{X} \qquad (5)$$

وبما أن AL و CD متوازيان، فإن $\frac{CE}{EA} = \frac{CD}{AL}$، وتصبح المساواة (5) :

$$\frac{CG \cdot CD}{AL^2} = \frac{R}{X}$$

لنرسم $BC \parallel LK$ و $BC \parallel AJ$ حيث J وK تقعان على CD؛ يتقاطع AJ و DL في U. ولدينا

$$\frac{JU}{CG} = \frac{JD}{CD}$$

لكن $CJ = AB = CD$، لذا $JD = 2CD$ و $JU = 2CG$.

إن الخط الموازي لـ AB والمخرج من U يقطع المستقيم LK في M، ونحصل على $AL = MU$ و$UJ = MK$. بحيث يمكننا أن نكتب

$$\frac{R}{X} = \frac{CG \cdot CD}{AL^2} = \frac{JU \cdot CD}{2MU^2}$$

لذلك

$$MU^2 = \frac{X}{2R} \cdot CD \cdot JU$$

إذا وضعنا $2R = W$ و $CD = Q \cdot \frac{X}{W}$، يكون معنا

$$MU^2 = Q \cdot JU$$

تقع النقطة M إذاً على القطع المكافئ ذي القطر JA، و*الضلع القائم* Q والذي مماسه في J هو JK. ومن جهة أخرى، بما أن AL و DJ متوازيان، يكون:

$$\frac{AL}{DJ} = \frac{AU}{UJ} = \frac{LM}{MK}$$

ونستنتج من ذلك

$$\frac{AL + DJ}{DJ} = \frac{LM + MK}{MK}$$

لكن $AL + DJ = KJ + JD = KD$ و $LM + MK = LK = AJ$؛ ولدينا إذاً :

$$MK \cdot KD = AJ \cdot DJ$$

وعليه فإن النقطة M تنتمي إلى القطع الزائد ذي الخطين المقاربين DK و DH، والمار بالنقطة A، وحيث يكون DH موازياً لـ CB.

وهكذا لا يتطلب الاستدلال أي افتراض على الزاوية ABC؛ ولا طائل من القسمة إلى حالتين التي تظهر في التركيب، والتي لا يمكن أن تنسب إلى تحليل ابن سهل.

لكن هذا الفرق بين تحليل ابن سهل وتركيب الشني لا يستنفد صعوبات النص. فالشني يتابع سارداً فقرة لابن سهل تكتسي أهمية بالغة في تأريخ مسألة المسبّع في الدائرة في القرن العاشر. وتبدي فيها أقوال ابن سهل، كما نُقلت إلينا، نوعاً من الارتباك يظهر في أسلوب متشدّق وملتوٍ إلى درجة جعلت الشني ينعتها بـ كلام يطول ويهول. كتب ابن سهل بالفعل في بداية هذه الفقرة:

> فأما كيف اطراد المعرفة الرياضية بإعطاء نسبة ما بين مثلثي د جـ ز و ل ا هـ ، فلا سبيل لاتجاه العقول إلى بلوغ استخراجه بتحليل ولا اكتساب مقدمة، ولو وجدنا مساغاً يوصلنا إلى نيله لزمنا بسببه إلى علم ما شذّ حتى تبع[20].

إلا أن أقوال ابن سهل تصبح في غاية الوضوح إذا ما أعيد بناء النص وفهم الغرض منه.

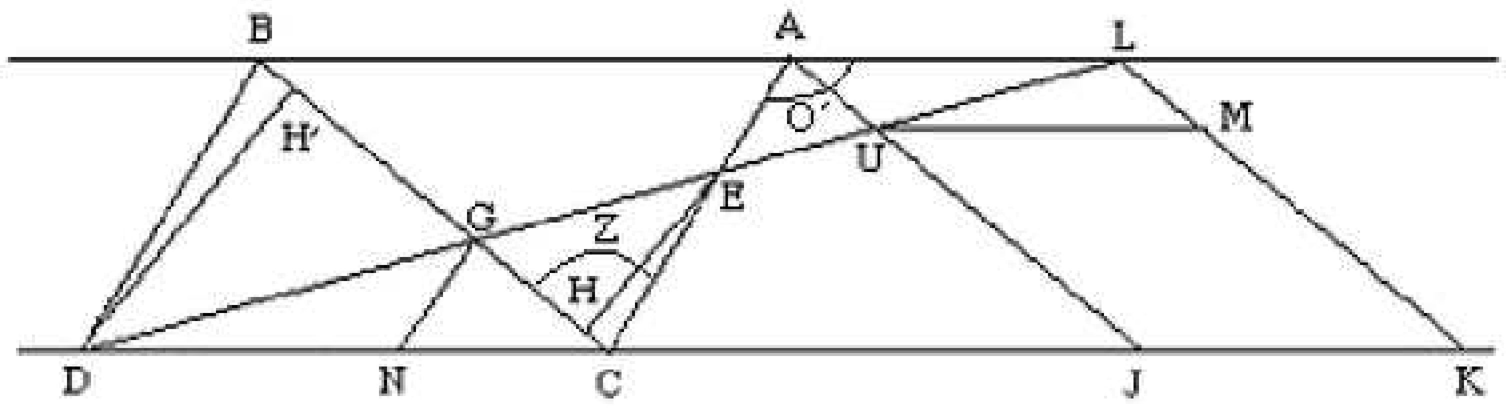
فمشروع ابن سهل واضح: برهان مسألة أرشميدس في الحالة العامة، أي في حالة متوازي الأضلاع حيث نسبة مساحتي المثلثين تختلف عن الوحدة. وبينما يُفضي الإنشاء الذي يقترحه إلى حل تقارن فيه مساحتا المثلثين CGE و AEL، في حين تعتبر مسألة أرشميدس المثلثين CGD وAEL. ولا تتطابق هاتان المسألتان، إذ لو أشرنا بـ H و'H على التوالي إلى إسقاطي E وD على BC، تكون نسبة مساحتي المثلثين CGE وDGC مساوية لـ: $\frac{EH}{DH'}$

وهي

---

[20] انظر أدناه ص. 481 سطر 12-14.

$$\frac{EH}{DH'} = \frac{EC}{DB} = \frac{EC}{AC}$$ (المثلثان المتشابهان EHC و DH'B)



الشكل. 21

من جهة أخرى:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AL}{DC}$$

إذاً

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AE + EC}{EC} = \frac{DC + AL}{DC} = \frac{BL}{DC}$$

وهكذا تكون نسبة المساحتين مساوية لـ $\frac{1}{\lambda + 1} = \frac{DC}{BL}$، حيث فرضنا $\lambda = \frac{AL}{DC}$؛ ونلاحظ أنها تتوقف على λ.

لنكتب بدليل λ نسبة مساحة المثلثين، CGE وAEL، k المعطاة k(λ) (إنشاء ابن سهل). هاتان المساحتان هما:

$$\frac{1}{2} AE \cdot AL \sin O' \quad و \quad \frac{1}{2} CE \cdot CG \sin z$$

غير أن $AE = \lambda \cdot EC$ و $AL = \lambda \cdot DC$؛ ولدينا إذاً النسبة

$$\frac{CG \sin z}{\lambda^2 DC \sin O'} = k$$

لنُخرج من G الموازي GN لـ DB، فيلاقي DC في N؛ لدينا

$$\frac{CG}{BC} = \frac{NC}{DC}$$

ومنه، بتعويض الجيوب

$$GC = \frac{BC \cdot NC}{DC} = NC \frac{\sin O'}{\sin z}$$ (المثلث BDC)

تُكتب المعادلة إذاً

$$\frac{NC}{\lambda^2 DC} = k$$

نحسب بعدها NC بواسطة معادلتي المستقيمين BC وDL في محوري الأحداثيات DC وDB. تكتب هاتان المعادلتان على التوالي:

$$\frac{x}{DC} + \frac{y}{AC} = 1 \qquad \text{و} \qquad \frac{y}{AC} = \frac{x}{DC} \cdot \frac{1}{1+\lambda}$$

نظراً لكون $BL = DC(1+\lambda)$.

فاصلة G هي DN تكون إذاً: $x = DC \cdot \frac{1+\lambda}{2+\lambda}$

وكذلك: $NC = DC - DN = \frac{DC}{2+\lambda}$

وأخيراً معادلة مسألة ابن سهل هي:

$$\lambda^2(\lambda+2) = \frac{1}{k} \qquad (1)$$

بينما معادلة مسألة أرشميدس (المعمّمة) هي:

$$\lambda^2(\lambda+2) = \frac{1}{m}(\lambda+1) \qquad (2)$$

حيث $m = \frac{\text{مساحة } DGC}{\text{مساحة } EAL}$، لأننا قد رأينا أن

$$\frac{k}{m} = \frac{\text{مساحة } CGE}{\text{مساحة } AEL} \cdot \frac{\text{مساحة } AEL}{\text{مساحة } DGC} = \frac{1}{\lambda+1} = \frac{EH}{DH'}$$

يعطي حذف λ بين المعادلتين (1) و(2)، العلاقة بين k و m.

لذلك

$$(m-k)^2(m+k) = k^2 \qquad (3)$$

هذه العلاقة وهي من الدرجة الثالثة في k وفي m، من المحتمل جداً أن ابن سهل لم يستطع إثبات معادلها الهندسي لعظيم صعوبته، فبات مفهوماً استنتاجه أن "لا سبيل لاتجاه العقول إلى بلوغ استخراجه بتحليل ولا اكتساب مقدمة"[21].

صحيح أن إنشاءه، وهو يعرف ذلك جيداً، لا يحل مسألة أرشميدس. فللانتقال إلى هذه المسألة كان عليه معرفة العلاقة (3) وحلها بالنسبة إلى k حيث m معلومة. ويبدو أن الشني لم يدرك الصعوبة الحقيقية التي واجهها ابن سهل، بل ومن الجلي أن مسألة أرشميدس قد التبست عليه بالمسألة التي يعالجها ابن سهل. وفضلاً عن ذلك، كتب في مخطوطته "المثلث CGD" بدلاً من "المثلث CGE" مما يظهر لنا هشاشة نقده لابن سهل في هذا المجال.

---

[21] أدناه، ص. 481، السطر 13.

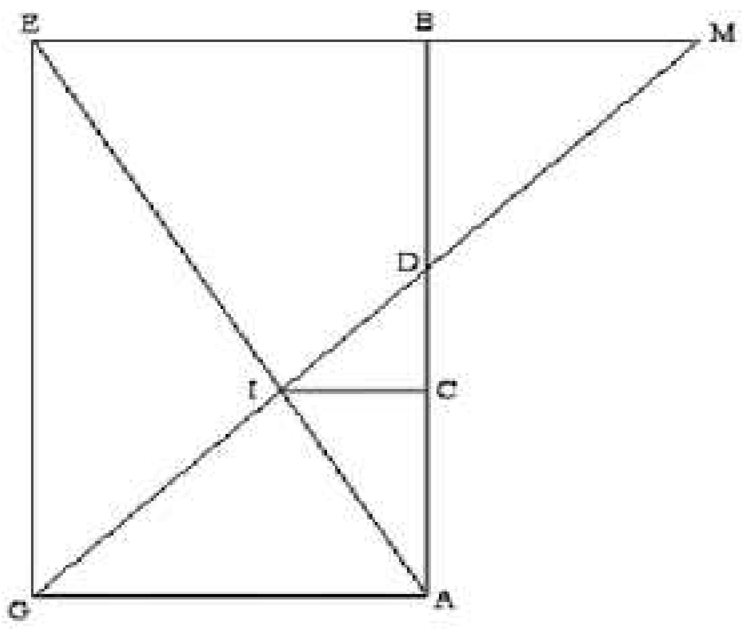
يبقى علينا أن نتساءل عن الدافع الذي حث ابن سهل على تناول مساحتي المثلثين CGE وAEL. من الأرجح أن يكون ابن سهل تصور التفافاً هندسياً يكافئ الالتفاف الجبري التالي: فتش عن حل المعادلة (3) من أجل $m = 1$، ثم جد k؛ بدل k بقيمتها في (1) واحصل على λ، وبذلك تحصل على حل للمعادلة (2). فمن الممكن أن يكون ابن سهل قد فكر بهذه الطريقة معتقداً أن حل (1) سيكون أسهل من حل (2) – لأنه في حال $k = 1$، فإن حل (1) يعطيه الرقم الذهبي $\left[\lambda = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right]$ – وهكذا يكون قد استخدم (1) كمقدمة. ولعله استطاع لاحقاً اكتشاف أننا نحصل دائماً، في حال $k \neq 1$، على معادلة مكعبة، تعادل صعوبة حلها صعوبة معادلة أرشميدس. وهو ما يعني أن المرور بالمثلث GEC لا يثمر في مقدمة تسمح بحل مسألة أرشميدس. لم يقترف إذاً ابن سهل خطأً بل زج نفسه في طريق وعر لاعتقاده إمكانية حل معادلة مكعبة على مرحلتين وهو أمر مستحيل.

بعدها، يعود الشني إلى حل مسألة أرشميدس من قبل معاصر لابن سهل ألا وهو القوهي.

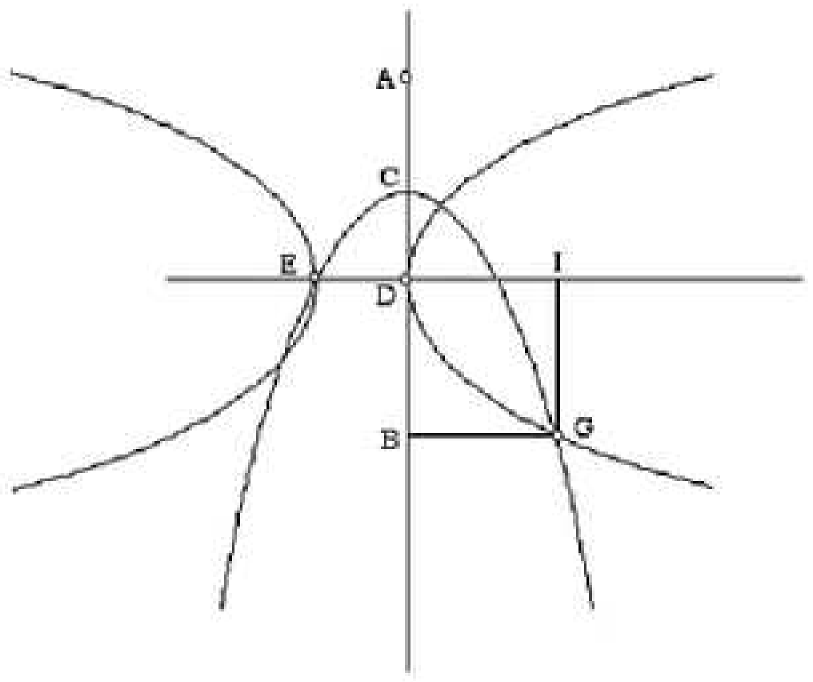
فكما فعل ابن الهيثم من بعده[22]، برهن القوهي مقدمة أرشميدس في حال متواز للأضلاع ونسبة مساوية لواحد، مستخدماً تقاطع قطع مكافئ مع قطع زائد؛ والقطع المكافئ المستعمل هو نفسه في كلتا الدراستين، في حين يختلف القطعان الزائدان. يتناول المؤلف مسعى القوهي على الوجه التالي:

ليكن مقطع CD ولنرسم DE عمودياً على DC ومساو له؛ يمر القطع المكافئ $\mathcal{P}$ ذو الرأس C، و*الضلع القائم* DE والمحور CD في E لأن $ED^2 = DE \cdot DC$. ليكن $\mathcal{H}$ القطع الزائد ذا الرأس D، والمحور ED والذي *ضلعه القائم* يساوي ED، وهو قطع زائد قائم؛ $\mathcal{H}$ يقطع $\mathcal{P}$ في أربع نقاط. نختار على فرع القطع الزائد الذي رأسه D نقطة التقاطع G [الشكل. 22.1]. ليكن إسقاطها في B على امتداد CD؛ وليكن إسقاطها على ED هو I. ونمد DC بطول $DI = BG = CA$. فتكون $AD = EI$، لدينا:

$$GB^2 = CB \cdot DE = CB \cdot CD = AC^2 \qquad G \in \mathcal{P}$$
$$GI^2 = EI \cdot ID = AD \cdot AC \qquad G \in \mathcal{H}$$



الشكل. 22.2



الشكل. 22.1

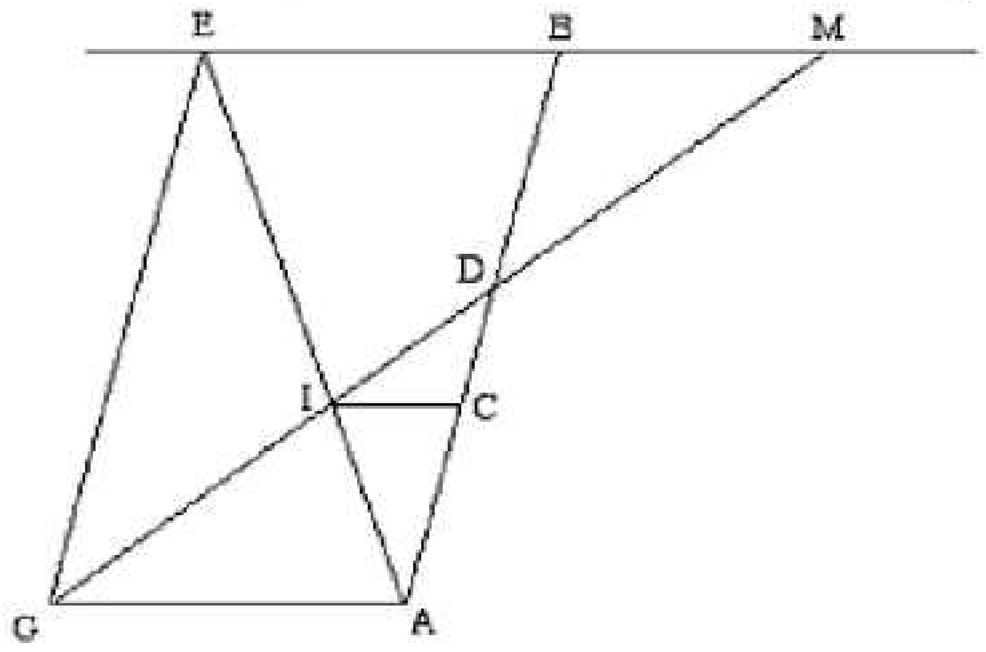
[22] انظر *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3, pp. 911 ff.

وبذلك تحقق القسمة A، C، D و B:

$$CA^2 = CB \cdot CD \qquad (1)$$

$$BD^2 = AD \cdot AC \qquad (2)$$

ليكن الآن متوازي الأضلاع ABEG، حيث يحمل الضلع AB القسمة A، C، D، B. يقطع المستقيم GD القطر في I كما يقطع امتداد EB في M. تكون عندئذ مساحتا المثلثين GAI و BDM متساويتين.



الشكل. 23

نحصل من (1) على $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$، لذلك $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{AC}$. إذا قطع الموازي لـ BE والممدود من C كلا من AE في I_1 و GD في I_2، يكون معنا:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CI_1} \qquad \text{و} \qquad \frac{AD}{CD} = \frac{AG}{CI_2}$$

غير أن BE = AG، إذاً $CI_1 = CI_2$؛ فالنقطتان I_1 و I_2 منطبقتان في I، نقطة تقاطع AE و GD، والمستقيم CI هو بالتالي موازٍ لـ AG.

نكتب المساواة (2):

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AC}{BD}$$

لكن

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BM}{AG} \qquad \text{و} \qquad \frac{AC}{BD} = \frac{GI}{DM}$$

لذلك

$$\frac{BM}{AG} = \frac{GI}{DM}$$

وبالتالي

$$MB \cdot MD = GI \cdot GA$$

مساحتا المثلثين BMD و IGA متساويتان، لأن الزاويتين M و G متساويتان. هذه هي طريقة القوهي التي أخذ بها الشني، الذي يريد، فضلاً عن ذلك، متابعة المسألة كي يحل تلك التي تفحصها ابن سهل ويظهر إمكانية التعميم. وهكذا إذا أردنا أن تكون:

$$\frac{\text{مساحة } BDM}{\text{مساحة } GIA} = \frac{K}{L}$$

فإننا انطلاقاً من المقطع CD، ننشئ كالسابق القطع المكافئ $\mathscr{P}$. ثم ننشئ القطع الزائد $\mathscr{H}_1$، ذا الرأس E، والمحور DE، *والضلع القائم* H المحدد بالعلاقة: $\frac{H}{DE} = \frac{K}{L}$

يتقاطع $\mathscr{P}$ و $\mathscr{H}_1$ في النقطة G التي تسقط في B على امتداد CD. فيكون:

$$GB^2 = CB \cdot DE = CB \cdot CD \qquad G \in \mathscr{P}$$

$$GI^2 = EI \cdot ID \cdot \frac{H}{ED} = EI \cdot ID \cdot \frac{K}{L} \qquad G \in \mathscr{H}_1$$

وإذا مدّ DC أبعد من C بطول GB = AC، فيكون لدينا:

$$AC^2 = CB \cdot CD \qquad (1)$$

$$BD^2 = AD \cdot AC \cdot \frac{K}{L} \qquad (3)$$

من المساواة (1) نستنتج كالسابق أن CI موازٍ لـــ AB. ومن المساواة (3) نستخلص:

$$\frac{BD^2}{AD \cdot AC} = \frac{BM}{AG} \cdot \frac{DM}{IG} = \frac{K}{L}$$

وبذلك تكون النتيجة.

2.2 ابن سهل في إنشاء مثلث بالاستعانة بالقطع الناقص والدائرة

لقد استشهد السجزي في كثير من الأحيان بالقدماء والمعاصرين. وتقدم هذه الاستشهادات خدمة جلى لمؤرخي الرياضيات لأنها ترجع إلى كتب ضاعت الآن. وحالة ابن سهل متميزة من نواح عدة في هذا السياق. فقد عرفه السجزي واستعان به لإنشاء المسدس المنتظم. ولذا فإننا لا نرجم في الغيب إذا قلنا أنه كان قوي المعرفة بأعماله.

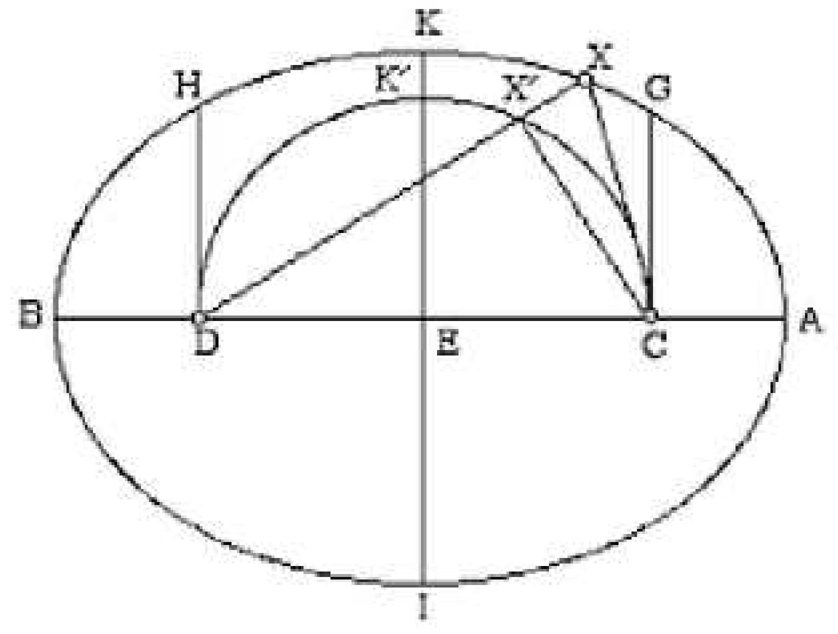
يعالج ابن سهل في المقطع المأخوذ من كتاب السجزي *مسائل مختارة طرحها (السجزي) على مهندسي شيراز وخراسان*، مسألة إنشاء مثلث حاد الزاوية علم طول أحد أضلاعه ومجموع طولي الضلعين الآخرين (ويلزم أن يكون أكبر من الطول الأول)[23]. يستعين ابن سهل، كما سنرى، بالقطع الناقص والدائرة. ترى من أين أتى السجزي بهذا المقطع؟ أمن كتاب *في خطوط التحديد* أو من كتاب آخر لابن سهل؟ لا ندري، ولكن لنبدأ بشرح طريقة ابن سهل.

---

[23] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 4 : *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiqu es* (London, 2002), pp. 826-831.

لتكن النقطتان C و D بؤرتي قطع ناقص ذي المحور الكبير $AB = 2a$ والمحور الصغير $IK = 2b$ ($EK = b$). ولنفرض $DC = 2c$. لدينا $a^2 + b^2 = c^2$ [24]. لدينا فرضاً $a > c$ و $a > b$ – إلا أنه من الممكن أن يكون $b > c$، $b = c$، $b < c$ وهي الحالات الثلاث التي يفحصها ابن سهل، تقطع الدائرة ذات القطر CD المستقيم IK في 'K.

1) $b > c$: تقع 'K داخل القطع الناقص

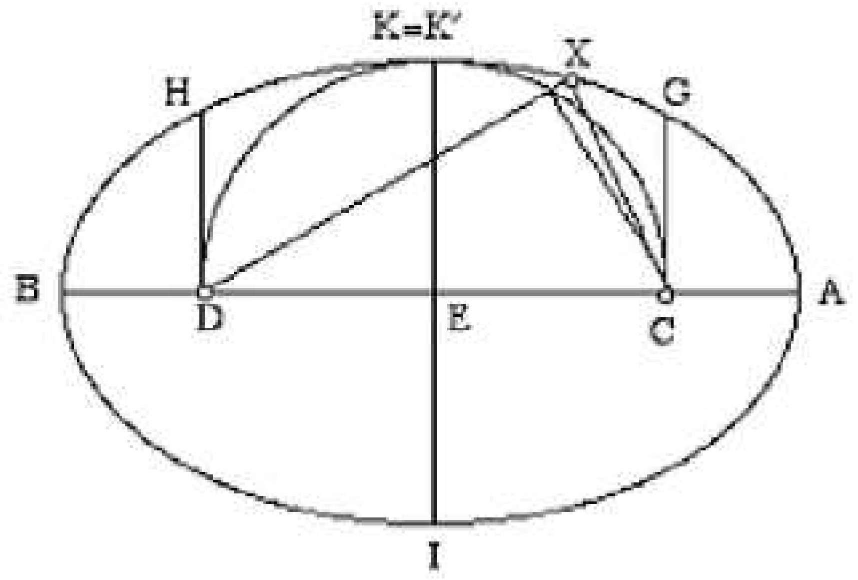


الشكل. 24

أياً كانت النقطة X من قوس القطع الناقص GKH فإنها خارج الدائرة، والزاوية $D\hat{X}C$ قائمة؛ وبالتالي فإن الزاوية $\hat{X}$ حادة. كما أن الزاويتين $\hat{D}$ و $\hat{C}$ حادتان و $XC + XD = 2a = AB$ ماعدا حالة وجود X في G أو H.

2) $b = c$: $K = K'$

أياً كانت النقطة X من القوس GKH ماعدا النقاط G، K و H فإن $\hat{X}$ حادة إذا كانت X خارج الدائرة. و $\hat{C}$ و $\hat{D}$ حادتان أيضاً.

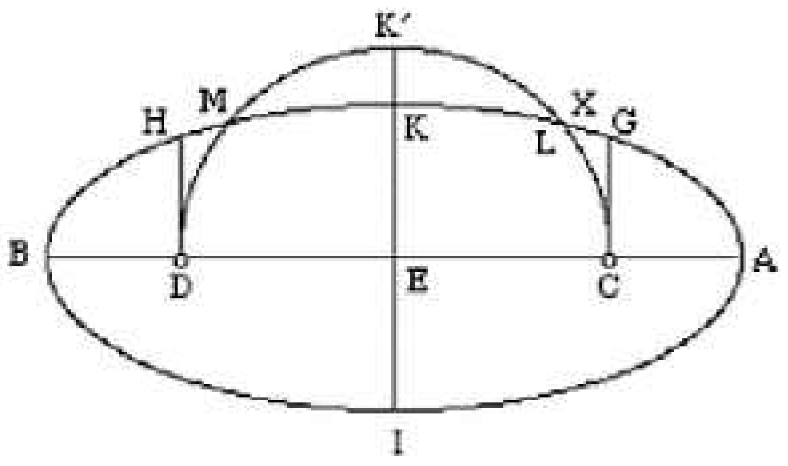


الشكل. 25

3) $b < c$: 'K خارج القطع الناقص

---

[24] يستعمل المؤلف هنا خاصة نقطة ما X على القطع الناقص $XC + XD = 2a$.



الشكل. 26

تقطع الدائرة القطع في النقطتين L وM، وأي نقطة X من نقاط القوسين LG وHM، ماعدا الأطراف، تقع خارج الدائرة وتعطي زوايا حادة $\hat{X}$ و $\hat{C}$ و $\hat{D}$.

3. القطوع المخروطية والإنشاء الهندسي: القوهي وأسلافه

1.3 مدخـــل

اعترضت سبيل المهندسين الأغريق، ومنذ البداية تقريباً، مسائل "مجسمة" لا يمكن حلها بإنشاءات تستعمل المسطرة والبركار، كإيجاد المتوسطين المتناسبين أو قسمة الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية أو رسم خط أرشميدس ورسم المسبع المنتظم. ولم يكن بمقدور الرياضيين الأقدمين أن يعلموا أن هذه الإنشاءات تنطوي على استحالة نظرية. وهو الأمر الذي لم يتسنى تحققه إلا في القرن التاسع عشر في أعمال فانتزيل (1837) ومن بعده في أعمال كلاين وأنريك، وديكسون وغيرهم[25]. ومهما يكن من أمر فقد كان عليهم أن يجدوا وسائل أخرى غير المسطرة والبركار لإنشاء حلول لهذه المسائل. والجيد في ذلك أنه من المحتمل جداً أن تكون هذه الصعوبة هي التي دفعت رياضي القرن الثالث، بابوس، للقيام بأقدم تصنيف للمسائل الهندسية (وليس للمنحنيات): مستوية ومجسمة وخطية. وهذا ما يقوله عنها في مقطع شهير يستحق تكراره هنا:

> عندما أراد قدماء المهندسين تقسيم زاوية مستقيمة إلى ثلاث زوايا متساوية فيما بينها وجدوا أنفسهم أمام المصاعب: لقد قلنا إنه يوجد ثلاثة أنواع من المسائل في الهندسة نسميها مستوية، مجسمة، وخطية. ومن المعقول أن نسمي المسائل التي يمكن حلها بواسطة الخطوط المستقيمة ومحيط الدائرة مستوية لأن منشأ الخطوط التي تحل المسائل بواسطتها هو المستوى، وأن نسمي مجسمة <المسائل> التي تحل باستعمال القطوع المخروطية لحلها لأننا نستعمل سطوح أشكال مجسمة لإنشائها وتحديداً سطوح المخروطات. ويبقى في الأخير النوع الثالث من المسائل المسماة خطية لأننا نستعمل لإنشاء حلولها خطوطاً غير تلك التي أتينا

[25] P.L. Wantzel, 'Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas', *Journal de Mathématiques* (1837), pp. 366-372; F. Klein, *Famous Problems of Elementary Geometry*, translated by W. W. Beman and D. E. Smith, 2[nd] edition revised and enlarged with notes by R. C. Archibald (1930; reprint. Dover Publications, New York, 1956); F. Enriques, *Fragen der Elementargeometrie* (Leipzig, 1911), II; L. E. Dickson, Elementary Theory of Equation (New York, 1914).

على ذكرها، خطوطاً مختلفة المنشأ الإلزامي لها، كونها ناتجة عن سطوح أقل انتظاماً وحركات أكثر تعقيداً[26].

والأمثلة التي يعطيها بابوس هي الحلزونات والمربِعات (Quadratrices) والكونكويدات والسيسويدات... ويختم هذا المقطع بقانون هندسي يجب على الرياضيين التقيد به:

ثم إن لا عيب على المهندسين عندما يجدون جواباً عن مسألة مستوية باستعمال القطوع أو الطرق الخطية، وبصورة أعم، عندما يحلون مسألة ما بطريقة من النوع غير الملائم[27].

وأخيراً يكتب بابوس، وكمؤرخ هنا إن صح التعبير:

إن ما يميز هذه المسائل بما هي مسائل هو عدم قدرة المهندسين الأقدمين على إيجاد حلول للمسألة المشار إليها أعلاه، المتعلقة بالزاوية، التي هي من حيث طبيعتها مسألة مجسمة، عندما حاولوا استعمال الطرق المستوية، لأنهم لم يكونوا قد ألفوا بعد القطوع المخروطية، وبقوا لهذا السبب معلقين[28].

لكن الحالة تغيرت تماماً منذ منتصف القرن التاسع كما سنرى فيما يلي؛ فقد كانت كتب أبلونيوس السبعة في *المخروطات* تحت تصرف الرياضيين آنذاك. ليس هذا فحسب ولكنهم، وهذا الأهم، كانوا يتابعون البحث بنشاط في هندسة المخروطات. يخطر في الذهن الحسن ابن موسى[29] وتلميذه ثابت بن قرة. فقد شرع في بحث ما فتئ يتطور ويتفرع دون توقف في الهندسة المتناهية في الصغر مع ثابت بن قرة وخلفائه[30]، وفي هندسة الإسقاطات مع مهندسين من أمثال الفارغاني وهكذا. وكانت إحدى الجهات التي جرى فيها البحث هي بالتحديد التطبيق الواسع لنظرية المخروطات، بما في ذلك إنشاء الحلول للمسائل المجسمة. وقد بلغ الأمر في آخر القرن العاشر حد عرض مجال بحث جديد في الهندسة يُعنى فقط بتطبيق القطوع المخروطية في الإنشاءات الهندسية[31]. وتأسس البحث في هذا الموضوع، الذي عرضه ابن الهيثم، على تطبيق المخروطات لحل هذه المسائل الموروثة عن الأغريق أو التي وقع تصورها حديثاً. وكان من بين من ذهبوا إلى أبعد حد في هذا التطبيق للمخروطات القوهي بالذات. فقد حبذ هؤلاء الرياضيون الإنشاء

---

[26] *La Collection mathématique*, vol. 1, book IV, pp. 206-207 Ver Eecke [= Book IV, p. 270, 1-16 Hultsch] see also I, book III, pp. 38-39.

[27] Ibid., p. 208 Ver Eecke [= Book IV, p. 272, 28-31 Hultsch].

[28] Ibid., pp. 209-210 Ver Eecke [= Book IV, p. 272, 7-12 Hultsch].

[29] انظر: R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*. Vol. 3 : *المؤسسون والشارحون: بنو موسى، ثابت بن قرة، ابن سنان، الخازن، القوهي، ابن السمح، ابن هود* (London, 1996).

[30] Ibid

[31] انظر:

R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*. Vol. 3 : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique* (London, 2000).

بواسطة تقاطع المخروطات مفضلين إياها على كل الطرائق الأخرى. وما لبث الجبريون أن انضموا إليهم فترجموا المسائل إلى معادلات تكعيبية ثم حلوها بتقاطع المخروطات[32].

لقد ناقشنا هذا التطور مطولاً في مكان أخر[33]. وسنكتفي هنا في النظر في إسهام القوهي فقط. فقد جمع كل المسائل المجسمة الموروثة عن القدامى: المتوسطين المتناسبين، وتقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية وإنشاء المسبع المنتظم ومسألة *مستقيم أرشميدس*. وطرح مسائل أخرى جديدة كإنشاء المخمس متساوي الأضلاع وغير متساوي الزوايا. ويمكن تجميع هذه الدراسات الموجودة في مقالات مختلفة لتكوين كتاب في المسائل المجسمة الشهيرة. ويبدو أن القوهي ألف ما لا يقل عن ثمان مقالات مكرسة لهذه المسائل:

- اثنتان تعنيان بكاملهما بإنشاء المسبع المنتظم لا غير؛ وقد نشرنا في مكان آخر نصيهما وترجمتهما والتعليق عليهما وذلك مع أعمال أخرى تمتد من القرن التاسع إلى القرن الحادي عشر لرياضيين عالجوا هذا الموضوع[34]. ولذا فلن نعود إليهما هنا.
- *مقالة في تثليث الزاوية وعمل المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة* (MS Thurston 3, fols. 130^v-131^r). يبين هذا النص، الذي ينشر ويترجم هنا للمرة الأولى، أن القوهي قد أعطى التفسير الصحيح والتام للصلات القائمة بين هاتين المسألتين. كما أننا نعلم من جهة أخرى أن القوهي يعمد، بهدف إنشاء المسبع المنتظم في الدائرة إلى إنشاء مثلث نسبة زواياه إلى بعضها هي (1، 5، 1) أو (4، 2، 1) وهذا ما فعله في المقالتين اللتين أشرنا لهما أعلاه. أما هنا فالنسبة هي (3، 3، 1) وهذا على الأغلب قبل السجزي، وقبل ابن الهيثم بطبيعة الحال، وعلى الأرجح بعد الخازن.
- عالجت أربع مقالات تثليث الزاوية، تعالج الأولى منها (a)[35] الموضوع من مختلف جوانبه تحليلاً وتركيباً، والثانية (b)[36]، ولعلها أتت بعد الأولى، تعطي تركيباً فقط؛ والثالثة (c)[37] تجمع بين دراسة متوسطي التناسب وبين التثليث؛ والرابعة (d) هي التي أشرنا إليها سابقاً. يمكن ترتيب ثلاث منها زمنياً كما يلي d ← a ← b. ومن الممكن أن تكون (c) قد سبقت (d)، وإن لم يكن ذلك مؤكداً بأية حال من الأحوال، بحيث يكون الترتيب c ← d ← a ← b. وهو ترتيب تخميني، سنقدم بعض الحجج لاعتماده بانتظار العثور على وثائق جديدة.

---

32 R. Rashed and B. Vahanzadeh, *Omar Khayyam : The Mathematician.*

33 R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3.

34 Ibid., vol. 3, chap. III and Appendice I.

35 *رسالة في استخراج قسمة الزاوية المعلومة بثلاثة أقسام متساوية.*

36 *رسالة في قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية.*

37 *مقالة في استخراج خطين بين خطين حتى تتوالى الأربعة على نسبة وقسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية.*

- مقالة تكتسي أهمية خاصة من وجهتي نظر تاريخ الهندسة وتاريخ الجبر، كرست لمسألة شهيرة تعرف باسم *مستقيم أرشميدس*.
- مقالة لا تقل أهمية عن سابقتها في إنشاء المسبع متساوي الأضلاع ومختلف الزوايا.

2.3 متوسطي التناسب

1.2.3 تركة الأقدمين

رويت قصة الإنشاء الهندسي لهذه المسألة في الرياضيات الإغريقية مرات عديدة[38]. وقد استفادت هذه العروض من توفرها، غير المعتاد، على عدد كبير نسبياً من المواد. لقد تحدث بابوس في كتابه الثالث من *Mathematical Collection* عن ثلاث طرق – معزوة بالترتيب لإيراتوستينيز Eratosthenes، نيقوميديس Nicomedes وهيرو Hero – إضافة إلى طريقته الخاصة لحل المسألة. وفاق عليه أوطوقيوس Eutocius الذي ضم في كتابه *شرح الكرة والأسطوانة* لأرشميدس مجموعة مختارة بكل معنى الكلمة من الحلول لهذه المسألة: اثنتا عشرة طريقة معزوة إلى رياضيين من أفلاطون إلى بابوس. ويمكننا أن نضيف إليها طريقة عزاها يحيى النحوي John Philoponus إلى أبلونيوس[39]. وليس هذا كل شيء، فهناك العديد من القصص والأساطير تحيط بهذه المسألة تحدث عنها هذا وذاك كـ تيون السيمرني[40] وبرقلس[41] وبلوتارك Plutarch وآخرين.

وواضح أنه ما من داع هنا لتلخيص ما درسه آخرون بالتفصيل في أمكنة أخرى. فكل ما علينا إبقاؤه في أذهاننا هو ما نحتاج إليه فيما سيتقدم، أي ما هو المطلوب لوضع مساهمة القوهي في سياقها التاريخي.

---

[38] انظر:

for instance, T. H. Heath, *A History of Greek Mathematics*, 2 vols. (Oxford, 1921; repr. Dover Publications, New York, 1981); O. Becker, *Das mathematische Denken der Antike* (Göttingen, 1966); W. Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, 2 vols. (Birkhäuser, 1989).

[39] انظر أسفله، ص. 345.

[40] Theon of Smyrna, *Exposition of the Mathematical Knowledge Useful for Reading Plato*, p. 2, 3-12 Hiller : 'Erathosthenes, in the book entitled *Platonist*, reports that de Delians, having consulted the oracle about how to rid themselves of the plague, were ordered by the god to construct an altar double the size of the existing one. This problem caused the architects extreme embarrassment. They asked themselves how one could make a solid that was twice another. They consulted Plato about their difficulty. He replied that the god had made this pronouncement through his oracle not because he had any need of a doubled altar, but to reproach the Greeks for neglecting the sudy of mathematics and placing little value on geomtry'.

[41] Proclus, *A Commentary on the First Book of Eucli's Elements*, Translated, with Introduction and Notes, by Glenn R. Morrow (Princeton, 1970), on the trisection of an angle, see pp. 211-212.

يبدو أن المسألة ظهرت أول ما ظهرت على شكل مضاعفة المكعب (مسألة ديليان Delian)[42]. أي إنشاء مكعب يساوي حجمه ضعف حجم مكعب معلوم. وكما جرت التقاليد فإن هيبوقراتس Hypocrates من Chios هو من أعاد المسألة إلى إدخال متوسطين هندسيين بين طولين معلومين. ولنقل بلغة الجبر التي أتت بعد ذلك بزمن طويل، ليكن a و 2a الطولين المعلومين، المطلوب إيجاد طولين x و y يحققان

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{x}=\frac{2a}{y}$$

وبالتالي $x^3 = 2a^3$.

وقد وقع أول تعميم، إن صح التعبير، عندما أُخذ خطان مختلفان a و b بحيث يكون

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{x}=\frac{b}{y}$$

ومن بين الحلول القديمة حل يعزوه أوطوقيوس إلى أفلاطون[43] وهو في الواقع أبسطها. إن العزو مشكوك به لكن هذا الحل الميكانيكي يعتمد على مبدأ أساسي هو استعمال طريقة الإمالات Neusis (من اليونانية أمال Neuein، جمعها neuseis) التي لعبت دوراً جوهرياً في الإنشاءات الهندسية. علينا أن نتذكر ما كتبه أرسطو قديماً، أن الهندسة تجيب عن السؤال "عما هو أصم، عن الانعطاف وعن التقارب neuein"[44]. يمكننا، إذا ما طرحنا جانباً الوجه الميكانيكي، التعبير عن الفكرة المنسوبة إلى أفلاطون كما يلي:

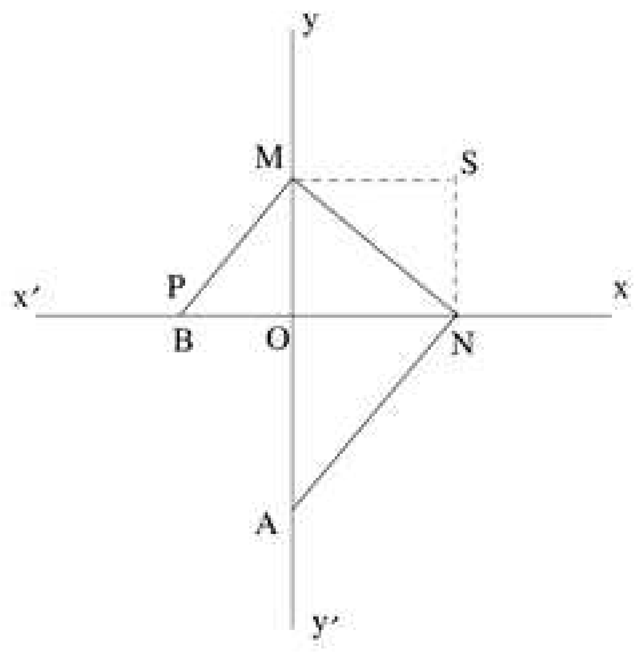
ليكن $OA = a$ و $OB = b$ طولين على المحورين المتعامدين $y'y$ و $x'x$. يمكن بالتلمس إيجاد نقطتين M و N على المحورين بحيث تكون الزاويتان $A\hat{N}M$ و $N\hat{M}P$ قائمتين.

---

[42] Eutocius cites a letter, of doubtful authenticity, attributed to Eratosthenes, writing to King Ptolemy, in which he recournts the legend of King Minos, and also says : 'For a long time all geometers were embarrassed, until Hippocrates of Chios first noticed that once one had solved the problem of finding two means in continuous proportion between two straight line segments of which the larger was twice the smaller, it would be possible to duplicate the cube' (Archimeds, *Commentaires d'Eutocius, Fragments*, ed. and French trans. Ch. Mugler, Collection des Universités de France [Paris, 1970], vol. 4, p. 64). The reliability of this legend is very doubtful. The story might even have been invented to give weight to the initial problem, that is to say the more general problem of the two mean proportionals, by making it seems to have preceded that of the duplication of the cube.

[43] Archimedes, *Commentaires d'Eutocius*, ed. Mugler, pp. 45-57.

[44] Aristotle, Posterior Analytics, 76 b 9.



الشكل. 27

ليكن $ON = x$ و $OM = y$؛ إنهما متوسطا التناسب.

إن سيرورة التلمس سهلة الإنجاز ويمكنها – على الأقل – أن تكون نسقية. لأنه إذا كان $ON = x$ لا على التعيين وكانت $OM = y$، بحيث تكون الزاوية $A\hat{N}M$ قائمة، فإن y تابع متزايد لـــ x. وإذا كان MP عمودياً على MN و P نقطة على Ox' فإن $OP = z$ هو أيضاً تابع متزايد لـــ x ولا تمر النقطة P إلا مرة واحدة بالنقطة B.

تكمن أهمية هذا المثال في كونه يوضح بجلاء وبطريقة بدائية إحدى الطرق الهندسية، وهي استخراج الأطوال بالإمالة neusis: هنا يغير المستقيم المنطلق من A اتجاهه بزاوية قائمة عندما يلقى Ox وبزاوية قائمة أخرى عندما يلقى Oy ليتقارب في B.

يمكننا أن نستخلص من هذا الحل للمسألة طبيعة الحلين المنسوبين إلى مينايكموس Menaechmus. فهما يعرضان القطوع المخروطية، وللمرة الأولى على أغلب الظن.

إذا كانت S النقطة ذات المسقطين العموديين N و M على المحورين وكانت B ثابتة ($OB = b$)، فإن المحل الهندسي لهذه النقطة هو القطع المكافئ $y^2 = bx$ أما إذا كانت A هي الثابتة ($OA = a$)، فإن المحل الهندسي لهذه النقطة S هو القطع المكافئ $x^2 = ay$. والنقطة المطلوبة S هي نقطة تقاطع هذين المنحنيين. ولكننا إذا لم نتطلب تعامد المستقيمين BM وAN واكتفينا بتوازيهما وبالشرط $\frac{a}{y} = \frac{x}{b}$، أي $xy = ab$ فإن المحل الهندسي للنقطة S هو قطع زائد وحل المسألة هو بإيجاد نقطة تقاطع قطع زائد قائم مع أحد القطعين المكافئين السابقين.

يقودنا تفحص الطرق التي زودنا أوطوقيوس بها في *مختارته*، وتلك التي أعطاها بابوس قبله، إلى استخلاص هام لم يلحظه أحد قبل. فقد قُدمت كل الطرق لحل هذه المسألة دون إعطاء أي أولوية لبعضها على الآخر. قلنا للتو أن الطريقة المنسوبة لأفلاطون ميكانيكية؛ وطريقة معاصره أركيتاس التارانتوي Archytas of Tarentum تستخدم المخروط والأسطوانة والطارة؛ وتقوم طريقة نيكوقيديس على إرجاع المسألة إلى الإمالات قبل حلها بالكونكوئيد؛ ويستعمل مينايكموس من جهته تقاطع القطوع المخروطية. وتلجأ كل الطرق الأخرى إلى الإنشاءات الميكانيكية أو إلى

إرجاع المسألة إلى إمالات يحاول حلها سواء بتقاطع القطوع المخروطية أو بتقاطع قوس من السيسوئيد مع مستقيم (إحدى طريقتي ديوقليس)[45]. ولم تهيمن أي واحدة من هذه الطرق على سواها، ولم يميز الرياضيون لسبب أو لآخر طريقة ما، كما لم يفعل بابوس ومن بعده أوطوقيوس.

ويتبين من خلال التفحص بعناية أن الوضع بقي على حاله حتى منتصف القرن التاسع. فقد كُرست رسالتان على الأقل لإنشاء متوسطي التناسب، إحداهما للفيلسوف والرياضي الكندي[46]، وهي مفقودة؛ والثانية للأخوة الثلاثة المعروفين باسم "بنو موسى". وقد استعادوا حل أركيتاس التارانتوي. ونظراً لصعوبة الإنجاز الفعلي للإنشاء فقد ابتكروا طريقة ميكانيكية لم تتضمنها ترجمة جيرارد الكريموني إلى اللاتينية لعملهم هذا[47].

2.2.3 التقليد الجديد: ثابت بن قرة والخازن

بدأت الصورة بالتغير مع تلامذة بني موسى إذ نرى ظهور بل وهيمنة تقليد فكري جديد بمتطلبات مختلفة وبقيود مفروضة مختلفة. ونتج هذا التغير، كما أشرنا إلى ذلك سابقاً، عن الدور الذي لعبته هندسة المخروطات فقد أصبحت إحدى المكونات الهامة للبحث الرياضي وللتعليم الرياضي في آن واحد. وأصبح الأمر اليومي لكل العاملين في المسائل المجسمة، مع ابن قرة ومعاصريه، وأكثر منهم مع خلفائه: حاولوا استعمال القطوع المخروطية. وإذا ما طرأ استعمال أحدهم لوسائل أخرى – منحنيات أخرى أو طرقاً ميكانيكية – فلم يكن هذا سوى استثناء يؤكد القيود الجديدة. ولم يحدث هذا التغيير دون أن يلحظه الرياضيون أنفسهم؛ بل على العكس، فقد كانوا على وعي تام به. ويكفي للتأكد من ذلك قراءة عمل خليفة ابن قرة، الرياضي الشهير أبو جعفر الخازن، وإليكم ما يقوله في هذا الشأن:

> وقد خاض رؤساء المهندسين من القدماء والمحدثين في هاتين المسألتين (تثليث الزاوية ومتوسطي التناسب). وصنف أوطوقيوس العسقلاني كتاباً، وعدّ فيه أحد عشر مهندساً قد تكلموا في استخراج خطين بين خطين، ومن جملتهم أفلاطون الفيلسوف، وأثبت ما استنبطوه من الأشكال والآلات، وَمَنْ نظر في ذلك الكتاب نظر تَفَهُم، تبين قوة كل واحد منهم، وعلم أن جُلّهم راموا ذلك بطريق الآلة، وأن من رامه منهم بطريق الهندسة احتاج إلى الاستعانة بقطوع المخروط ووقع مع ذلك في مسلك بعيد.

---

[45] *Les Catoptriciens grecs*. I ; *Les miroirs ardents*, édition, traduction et commentaire par R. Rashed, Collection des Universités de France, publiée sous le patronage de l'Association Guillaume Budé (Paris, 2000), pp. 79 ff. and 127 ff.

[46] النديم، *كتاب الفهرست*، Ed. R. Tajaddud (Teheran, 1971), p. 317.

[47] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*. Vol. 1 : *Fondateurs et commentaires*.

وأما المسألة الأولى، أعني قسمة الزاوية، فلم أسمع أحداً منهم أتى في حلها على طريق الهندسة بما يمكن عمله، فضلاً عن أن يقرب مأخذه. وإنما سبق إليه ثابت وخاض عليه من جهة القطع الزائد وأخذ منه أبو بكر الهروي[48].

إن ما تخبرنا به هذه الشهادة القيمة للخازن هو، أولاً وقبل كل شيء، وجود طريقين، طريق الآلة وطريق الهندسة، وأن هذا الأخير وحده يقدم البرهان الصحيح. ويلح الخازن نفسه على هذا الفصل (انظر أدناه) عندما يعود إلى حل نيقوميديس لهذه المسألة بواسطة الآلة ليعطي برهاناً يستعمل القطوع المخروطية. وثانياً تزودنا هذه الشهادة بمعلومات عن الدورين اللذين لعبهما ثابت بن قرة وخليفته أبو بكر الهروي. فقد أخذ ثانيهما عن الأول حل مسألة تثليث الزاوية. ولكن ماذا عن إنشاء متوسطي التناسب؟ لنذكر في البداية أننا نكاد لا نعرف شيئاً عن أبي بكر الهروي. فكل ما لدينا عنه أتانا من الخازن ومن مخطوطة في المكتبة الوطنية الفرنسية. فنحن أمام خليفة لثابت بن قرة، أخذ منه حل المسألة، على قول الخازن. هل هو تلميذ مباشر أو غير مباشر له؟ تقول مخطوطة المكتبة الوطنية الفرنسية أنه تصور إنشاء لمتوسطي التناسب، وهو إنشاء نسبته مخطوطة أخرى في مشهد في إيران إلى ثابت بن قرة. وليس بين الخبرين تناقض بالضرورة. فإذا كان كل ما فعله الهروي هو أخذ الحل عن ابن قرة، فإن سهواً بسيطاً أو طارئاً ما خليقان بوضع الحل باسمه. وهو احتمال قوي خاصة وأن اسم الهروي في مخطوطة المكتبة الوطنية وإنشاءه لمتوسطي التناسب جاءا في آخر رسالة ثابت بن قرة في تثليث الزاوية. وعلى كل حال فإننا سنعود إلى مناقشة مسألة العزو هذه، مكتفين في الوقت الحاضر باتباع مخطوطة مشهد، وإسناد الحل إلى ثابت بن قرة.

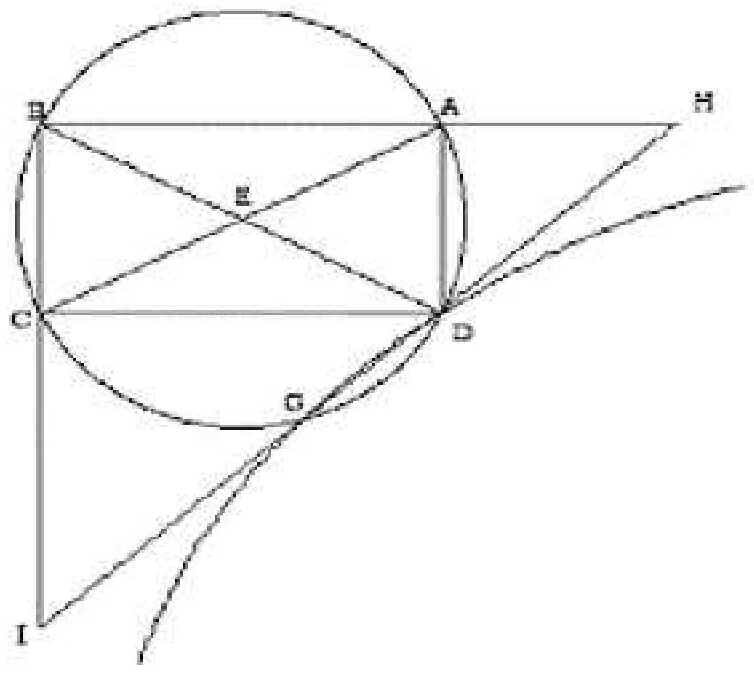
أنجز ثابت بن قرة الإنشاء بواسطة دائرة وقطع زائد. لنبدأ بإعادة كتابة حل ثابت بن قرة الذي أخذه منه أبو بكر الهروي. يأخذ مقطعين AB و BC ويريد إنشاء مقطعين آخرين AH و IC بحيث يكون

$$\frac{AB}{IC} = \frac{IC}{AH} = \frac{AH}{BC}$$

ينشئ عموداً $BC \perp AB$ ويتم المستطيل ABCD. لتكن E نقطة تقاطع BD وAC وليكن $\mathscr{H}$ قطعاً زائداً يمر بـــ D وذا خطين مقاربين BC وAB. ولتكن الدائرة $\mathscr{C}(E,EB)$ المارة بالنقط D، C، B، A. تقطع الدائرة القطع الزائد، ولتكن G نقطة التقاطع. يقطع امتداد DG الخطين المقاربين BA وBC في H وI على الترتيب.

---

[48] انظر أدناه *قسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية واستخراج خطين بين خطين حتى تتوالى متناسبة* ص. 583 سطر 11، 585 السطر 3.



الشكل. 28

لدينا وفق القضية II.8 من *المخروطات* DI = GH وبالتالي GI = DH.

كما أن لدينا من خاصة قوة النقطة H بالنسبة للدائرة.

$$DH \cdot HG = BH \cdot HA$$

لكن الطرف الأيسر هو

$$DI \cdot GI$$

إذاً

$$DI \cdot GI = BH \cdot HA$$

كما أن لدينا من خاصة قوة النقطة I

$$DI \cdot IG = BI \cdot IC$$

لكن

$$DI \cdot IG = BH \cdot HA$$

وهكذا

$$\frac{IB}{BH} = \frac{HA}{IC}$$

لدينا من تشابه المثلثات HAD، HBI، DCI

$$\frac{IB}{BH} = \frac{DA}{AH} = \frac{IC}{CD}$$

إذاً

$$\frac{IB}{BH} = \frac{IC}{CD}$$

و

$$DA = BC, CD = AB$$

إذاً

$$ {}^{49}\frac{CB}{AH} = \frac{AH}{CI} = \frac{CI}{BA} $$

---

[49] لنعبر عن هذه القضية بلغة غريبة على ثابت، وذلك لنشرح من جهة الأفكار التي تحتويها قضيته ولنستعملها مستقبلاً.

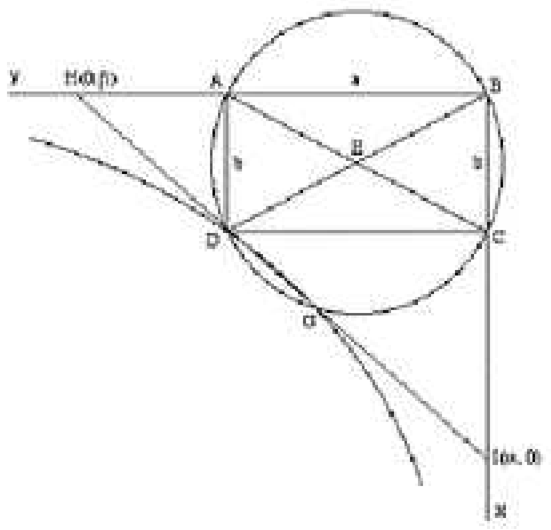
لنضع

$$ (BC, BA) = (Ox, Oy) $$

$$ (\mathscr{H}) = \{(x, y);\ xy = ab\} $$

$$ (\mathscr{C}) = \left\{(x, y);\ \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}\right\} $$

لتكن $G(x_0, y_0) \in (\mathscr{H}) \cap (\mathscr{C})$ وبما أن $D(b, a) \in (\mathscr{H}) \cap (\mathscr{C})$ فرضا فإن نقطتي تقاطع DG مع المحورين $I(\alpha, 0)$ و $H(\beta, 0)$ تحققان العلاقة $\beta(\beta - a) = \alpha(\alpha - b)$



ومعادلة المستقيم DG هي $\frac{x - b}{x_0 - b} = \frac{y - a}{y_0 - a}$

ونحصل منها على إحداثيي I و H بأن نضع على التوالي $y = 0$ و $x = 0$:

$$ \alpha = b - a\frac{x_0 - b}{y_0 - a} \quad ، \quad \beta = a - b\frac{y_0 - a}{x_0 - b} $$

ومنه

$$ IC = a\frac{x_0 - b}{a - y_0} \quad ، \quad AH = b\frac{a - y_0}{x_0 - b} $$

ونحصل من معادلة الدائرة على $x_0(x_0 - b) + y_0(y_0 - a) = 0$.

أي

$$ \frac{x_0 - b}{a - y_0} = \frac{y_0}{x_0} $$

ولدينا إذاً

$$ \left(\frac{x_0 - b}{a - y_0}\right)^2 = \frac{x_0 y_0 - b y_0}{a x_0 - x_0 y_0} = \frac{(a - y_0)\,b}{a\,(x_0 - b)} $$

التي تعطينا

هل من وسيلة تمكننا من إعادة هذا الإنشاء إلى إنشاء أو آخر من الإنشاءات المنسوبة إلى أبلونيوس لنستدل من ذلك على وجود صلة لم تنقطع بين التقليد الذي تفرع عن ثابت بن قرة وتقليد آخر هيلليني سابق له؟ وأليس من المفيد للإجابة عن هذا السؤال النظر بإمعان إلى الفارق بين المفاهيم في التقليدين؟

نعلم من بابوس أن أبلونيوس أعطى، على ما يبدو، حلين أحدهما بالإمالات والآخر باستعمال القطوع المخروطية. فهو يكتب[50]:

> هؤلاء في الواقع، وقد عرفوا أن المسألة مجسمة، وجدوا حلها بطريقة آلية بكل بساطة، في توافق مع أبلونيوس من بيكرا Pegra الذي قام أيضاً بتحليل استعمل فيه القطوع المخروطية.
>
> Οὗτοι γὰρ ὁμολογοῦντες στερεὸν εἶναι τὸ πρόβλημα τὴν κατατασκευὴν αὐτοῦ μόνον ὀργανικῶς πεποίηνται συμφώνως Ἀπολλωνίῳ τῷ Περγαίῳ, ὃς καὶ τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ πεποίηται διὰ τῶν τοῦ κώνου τομῶν.

والآن فالحلان الوحيدان لمسألة متوسطي التناسب اللذان وصلا إلينا هما كلاهما بالإمالات. ولم تلعب القطوع المخروطية أي دور لتبرير الإنشاء. وفي الواقع فإن الحل الأول استعاده أوطوقيوس بهذه العبارات:

> كأبلونيوس: ليكن معلوماً المستقيمان المراد إيجاد متوسطي تناسب لهما، وهما المستقيمان ΒΑΓ الحاويان زاوية قائمة في Α. لنرسم محيط دائرة ΚΘΛ مركزها Β وشعاعها ΑΓ. لنرسم أيضاً محيط دائرة ΜΘΝ مركزها Γ وشعاعها ΑΒ تقطع المحيط ΚΘΛ في Θ. لنصل الخطوط المستقيمة ΘΑ، ΘΒ، ΘΓ؛ فإذاً ΒΓ متوازي أضلاع قطره ΘΑ. لنقسم المستقيم ΘΑ إلى قسمين في Ξ، ولنرسم دائرة مركزها Ξ، تقطع الخطين ΑΒ و ΒΓ الممددين في Δ و Ε، بحيث تقع Δ و Ε على مستقيم مع Θ. وهو ما يمكن الحصول عليه بجعل مسطرة تدور في Θ لتقطع ΑΔ و ΑΕ، وبجعلها تبتعد إلى أن يتساوى المستقيمان البادئان من Ξ والسائران إلى Δ و Ε[51].

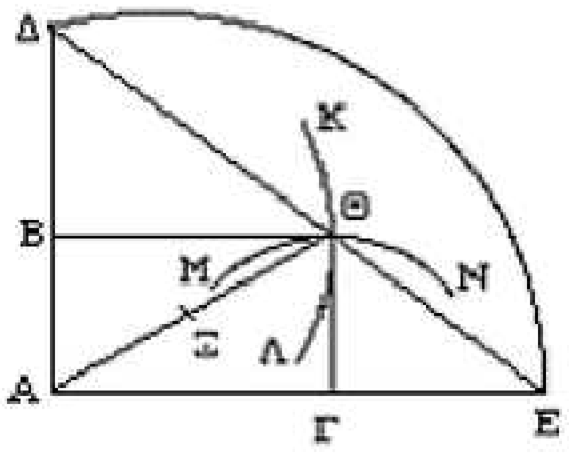
$$\frac{b}{a}\left(\frac{y_0 - a}{x_0 - b}\right)^2 = \frac{x_0 - b}{a - y_0}$$

أي أن

$$\frac{AH}{IC} = \frac{IC}{AB} = \frac{BC}{AH}$$

[50] Pappi *Alexandrini Collections quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit F. Hultsch*, 3 vols. (Berlin, 1876-1878), vol. 1, Livre III, 21, p. 56; reprinted by J. L. Heiberg, as Fragment 7, in his edition of Apollonius' *Conis, Apollonii Pergaei quae graece exstant edidit et latine interprettus est I. L. Heiberg*, vol. 2, p. 104.

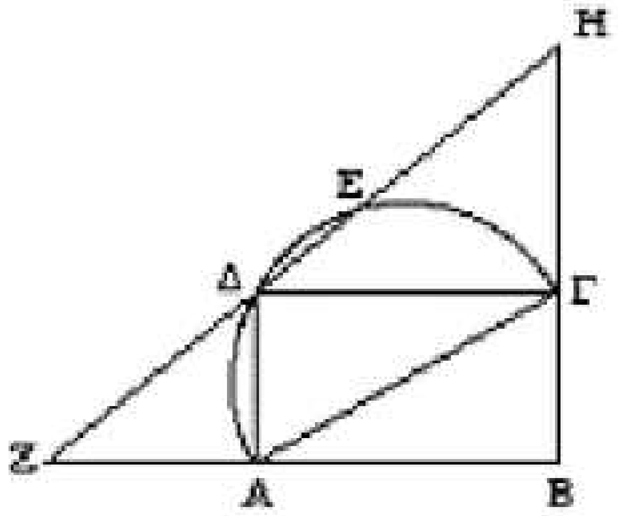
[51] *Archimedes Opera Omnia*, ed. J. L. Heiberg, Bibliotheca Teubneriana, vol. 3, pp. 64 and 66; reproduced by J. L. Heiberg, in *Apollonius*, Fragment 8, pp. 104-105.



الشكل. 29

أما الحل الثاني فقد نقله يحيى النحوي في شرحه لكتاب أرسطو *Posterior Analytics*. وبما أنه قيل بإمكان مقارنة هذا الحل بحل ثابت، المعروف من مخطوطة المكتبة الوطنية تحت اسم أبو بكر الهروي، فلنقم بهذه المقارنة مبتدئين بإعطاء نص يحيى النحوي:

> يوجد برهان لهذا من أبلونيوس من بيكرا، كما يقول بارمينيون وسنصفه على أنه ما يلي:
> لخطين مستقيمين معلومين وغير متساويين أوجد متوسطي تناسب.



الشكل. 30

ليكن الخطان المعلومان AB و BΓ، ولنضعهما بحيث يحويان زاوية قائمة ABΓ. نتمم متوازي الأضلاع BΔ، ونرسم قطره AΓ. نحيط المثلث AΔΓ بنصف الدائرة AΔEΓ؛ نمدد المستقيمين BA و BΓ على استقامتهما إلى Z و H ونصل ZH إلى النقطـة E، بحيث يكون ZΔ مساوياً لــ EH. سنأخذ هذا كمتطلب غير مبرهن عليه. وواضح إذاً أن ZE يساوي ΔH. وبما أن النقطة Z أخذت خارج الدائرة AΔΓ، وأن المستقيمين من Z، أي ZB و ZE يقطعان الدائرة في النقطتين A و Δ، فيتبع ذلك أن المستطيل BZ، ZA يساوي المستطيل EZ، ZΔ. ولنفس الأسباب فإن المستطيل BH، HΓ يساوي المستطيل ΔH، HE. والآن، المستطيل ΔH، HE يساوي المستطيل EZ، ZΔ (في الواقع فإن كلا من الزوجين ZE و ΔH و ZΔ و EH متساويان). وبالنتيجة فالمستطيل BZ، ZA يساوي المستطيل BH، HΓ. وبالنتيجة فإن نسبة HΓ إلى ZA تساوي نسبة ZB إلى BH. لكن نسبة ZA إلى AΔ و ΔΓ إلى ΓH تساوي إلى نسبة ZB إلى BH، لتشابه المثلثات. والآن ΔΓ يساوي AB و AΔ يساوي BΓ. وبالنتيجة فنسبة HΓ إلى ZA تساوي نسبة AB إلى ΓH. ولكن، كذلك، نسبة HΓ إلى ZA تساوي نسبة ZB إلى BH، أي نسبة AB إلى HΓ. والنتيجة، إن نسبة HΓ إلى ZA و ZA إلى BΓ تساوي أيضاً نسبة AB إلى HΓ. والنتيجة، إن المستقيمات الأربعة AB، HΓ، ZA و BΓ هي في نسبة تناسب متصل. [ولهذا السبب فإن

نسبة المكعب على AB إلى المكعب على HΓ ستساوي نسبة AB إلى BΓ. وهكذا إذا فرضنا أن AB هو ضعف BΓ، فإن المكعب على AB هو ضعف المكعب على HΓ][52].

نلاحظ أنه لا وجود للقطع الزائد وتقاطعه مع الدائرة في كل هذا. وإنشاء النقطة E بحيث يكون $Z\Delta = EH$ منجزة "كمتطلب غير مبرهن" من الممكن الاستعانة "بآلة" للقيام به. لكن أبلونيوس لم يكن عاجزاً عن رؤية هذه الخاصة كميزة تدل على وجود النقطتين Δ وE على قطع زائد خطاه المقاربان BA و BΓ. ولذا فإن لزوم عزو هذا النص إلى أبلونيوس غير باد للعيان. إن كون إنشاء النقطة E يتوقف على وجه التحديد على تقاطع القطع الزائد والدائرة هو عنصر جوهري في طريقة ثابت بن قرة[53]، كما يبدو من النص الذي لخصناه هنا. ثم إن ناسخ مخطوطة باريز قد أحاط بلب الموضوع على أكمل وجه عندما قدم النص بالجملة: "وأتى أبو بكر على عمل القطع الزائد <المار> على نقطة <معلومة>[54]..." ومن جهة أخرى، فإن النص العربي يستعمل لغة الهندسة العربية المتعارف عليها آنذاك، ولا يظهر فيه أي طابع غير معتاد يشير إلى منشأ يوناني. وهل نحن بحاجة للتذكير أن هذه اللغة اتخذت الشكل التي هي عليه نتيجة ترجمة كتب التلخيص اليونانية الهامة في القرن التاسع؟ إن ما نريد قوله هو أن المقارنة العارفة والدقيقة لا تدل على أي صلة بين هذين النصين. يمكننا أن نتساءل بطبيعة الحال عما إذا كان ثابت على علم بإمالات معينة، تلك التي تستعمل الدائرة والمسطرة المتحركة، أوحت إليه فكرة طريقة تستعمل تقاطع القطع الزائد والدائرة. لا يمكننا نفي أي شيء إذا انطلقنا من اعتبار كل شيء ممكن، إلا أن الأمر الأساسي هو أنه استعمل فعلاً هذا النوع من التقاطع.

ونشهد ابتداءً بثابت بن قرة انتشار تقليد حقيقي للبحث في هاتين المسألتين، وكذا في إنشاء حلول لمسائل مجسمة أخرى، وهو تقليد فذ لأنه ضم أسماء رياضيين يحتلون أعلى المراتب، من بينهم، على سبيل المثال، الخازن، القوهي، ابن سهل، السجزي وابن الهيثم. إلا أن من يهمنا هنا هم أسلاف القوهي، لأننا نريد وضع إسهامه في إطار تاريخي.

إن أبرز اسم من بين خلفاء ثابت بن قرة الذين عملوا في هاتين المسألتين – متوسطي التناسب وتثليث الزاوية – هو أبو جعفر الخازن. وقد كتب في واقع الأمر رسالتين أشرنا إلى إحداهما التي تعالج المسألتين، أما الثانية فلا تأخذ بعين الاعتبار سوى متوسطي التناسب (*في استخراج خطين بين خطين تتوالى متناسبة من طريق الهندسة الثابتة*). تقدم لنا هاتان الرسالتان، كل واحدة بطريقتها، الدليل الساطع على تطور البحث في هذا المجال. ونحن بحاجة، حتى نستطيع استغلال الرسالة الأولى، إلى التذكير بموقعها بالنسبة إلى مجمل أعمال الخازن. فهي تُعنى بمثال واحد مأخوذ بعين الاعتبار في كتاب القطوع المخروطية وهدف الخازن المعلن، بالاعتماد على *المخروطات* لأبلونيوس، هو إرساء المفاهيم الأساسية التي يتطلبها رسم القطوع المخروطية بالنقاط، دراسة الأشكال التي تكتسحها ظلال رأس المزولة

[52] Johannes Philoponus, *In Aristotelis Analytica Posteriora Commentaria,* ed. M. Wallis (in CAG, vol. 13, pt 2) (Berlin, 1909), p. 24 ; reproduced by J. L. Heiberg, in *Apollonius*, Fragment 9, pp. 105-106

[53] انظر أدناه، ص. 561.

[54] انظر أدناه، ص. 569 سطر 19.

الشمسية على سطح منبسط، تعيين اتجاه مكة وحل مسألتي تثليث الزاوية وإنشاء متوسطي التناسب؛ وأشار في مقدمة كتابه إلى كون تثليث الزاوية ضروري *لمعرفة وتر سبع الدائرة بالحقيقة*.

وهكذا نرى أن متوسطي التناسب وتثليث الدائرة لم تؤخذا لذاتهما، وإنما أساساً كجزء من برنامج بحث في تطبيق هندسة المخروطات في الساعات الشمسية، في الجغرافية الرياضية وفي رسم المنحنيات بالنقط وفي إنشاء حلول لمسائل مجسمة، من بينها هاتان المسألتان، وبشكل غير مباشر المسبع المنتظم. لقد أصبحت هذه المسائل الموروثة عن التقليد الهيلليني من الآن فصاعداً جزءاً من مشهد ثقافي جديد هو حقل تطبيق هندسة المخروطات.

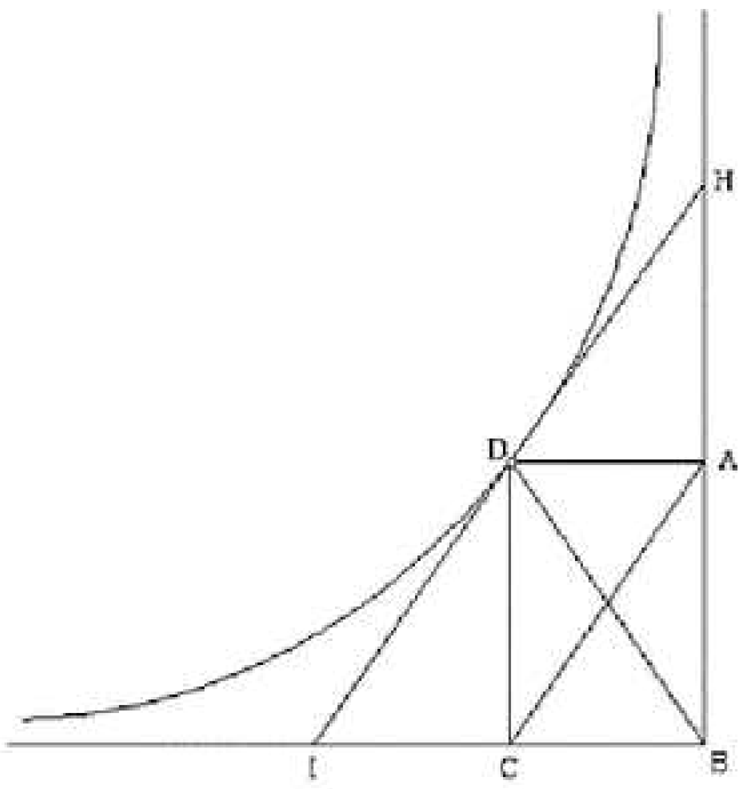
يمكننا نظراً لهذه الشروط تفهم بنية عمل الخازن في هذه المسائل: فهو يبدأ على الدوام بحل يستعمل القطوع المخروطية. ولا يلبث على الفور من إعطاء حل يستعمل الآلة "وإذا لم نرد إقامة البرهان"، كما يقول. فوضع هذين الحلين على نفس المستوى هو ضمان الفشل الأكيد في فهم ما كان رياضيو القرن العاشر يحاولون فعله.

ففيما يخص متوسطي التناسب، يعطي الخازن أولاً حلاً "بالطريقة الهندسية" ويستعمل كما فعل ثابت بن قرة تقاطع دائرة وقطع زائد قائم. وسنعطي هنا عرضاً سريعاً لحله.

ليكن AB و BC المقطعين المعلومين و $AB \neq BC$ المطلوب إيجاد AH و IC بحيث يكون

$$\frac{BC}{AH} = \frac{AH}{IC} = \frac{IC}{AB}$$

نأخذ $BC \perp AB$ ونتمم المستطيل BD. نرسم الخطين المتساويين BD وAC؛ ويتقاطعان في وسطهما E. نرسم الدائرة المحيطة بالمستطيل ABCD، بمركزها E، والقطع الزائد، بمقاربيه BA وBC، المار بالنقطة D. نــرسم الخط IH المار بــ D والموازي لــ AC. يلقى هذا الخط BA و BC في H وI على الترتيب. وبما أن ACID متوازي الأضلاع فــ $DI = AC$، وبما أن ACDH متوازي الأضلاع فــ $DH = AC$؛ وإذاً $DH = DI$ وD هي نقطة وسط IH. ولذا فإن IH يمس القطع الزائد في D.



الشكل. 31

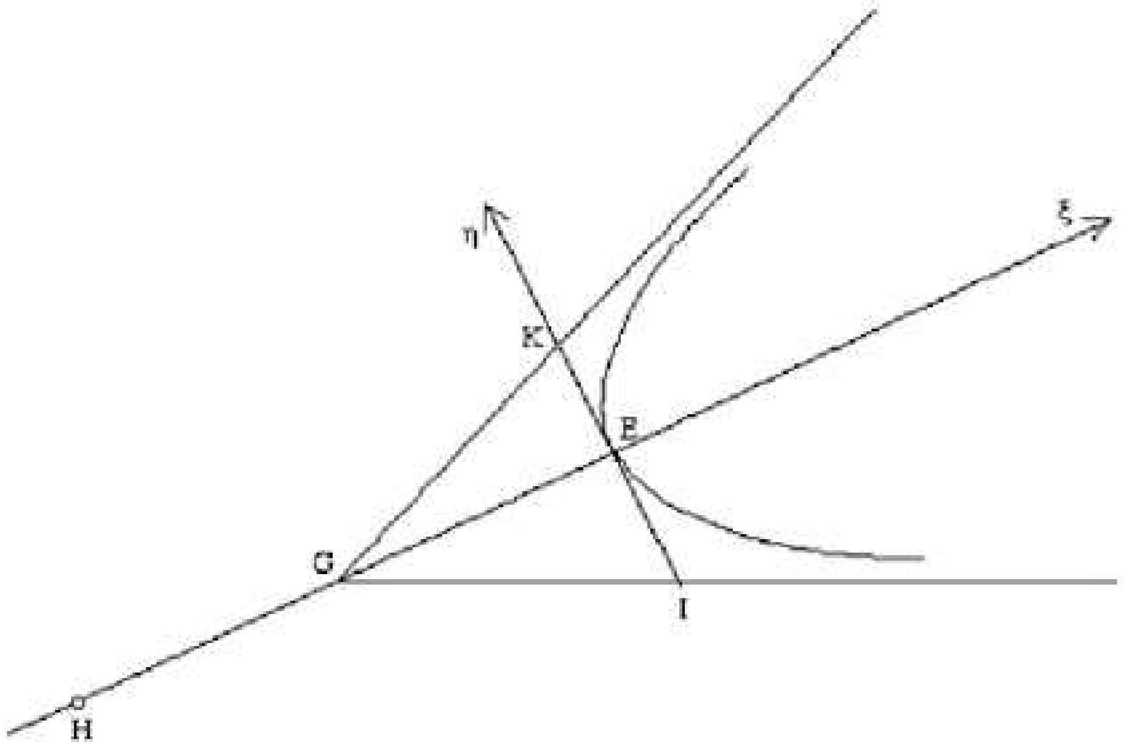
ثم إن الخازن بين سابقاً في كتابه أن مربع مقطع المماس للقطع الزائد الواقع بين مقاربيه والقاطع لهما يساوي جداء القطر المجانب عبر نقطة التماس و*الضلع القائم* للقطع الزائد.

دعنا نبرهن ذلك تحليلياً من أجل فرع قطع زائد بمقاربين GI و GK ومماس IK في النقطة E.

إن القطر المجانب هو EH، حيث GH = EG. ومعادلة القطع في الجملة $(E\xi, E\eta)$ (حيث $E\xi$ على امتداد GE و $E\eta$ على امتداد EK) هي

$$\eta^2 = \lambda\xi + \frac{\lambda}{EH}\xi^2$$

حيث λ *الضلع القائم*.



الشكل. 32

ومعادلة المقاربين هي

$$\eta = \pm\left(\xi + \frac{EH}{2}\right)\sqrt{\frac{\lambda}{EH}}$$

وترتيبا النقطتين I و K هما إذاً

$$\eta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\lambda \cdot EH}$$

وبالتالي

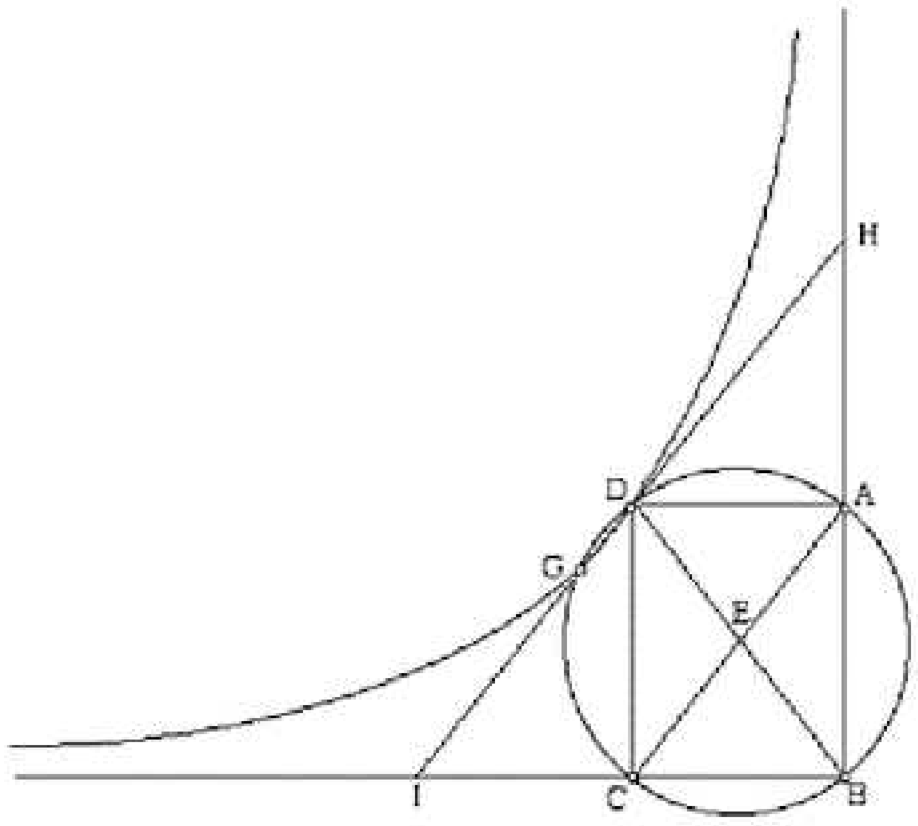
$$IK = \sqrt{\lambda \cdot EH}$$

لدينا، في حالتنا، $IH^2 = 2BD \cdot \lambda$ حيث λ *الضلع القائم* المرتبط بالقطر 2BD وهو ما بينه الخازن (لنلاحظ أيضاً أن $\lambda = 2BD = IH$ لأن القطع الزائد قائم) وهكذا فإن

$$ID^2 = \frac{1}{2}BD \cdot \lambda$$

يبين الخازن بعد ذلك كيفية إنشاء متوسطي التناسب بين AB وBC باستعمال نقطة تقاطع الدائرة والقطع الزائد، لنسمها النقطة G. نرسم الخط GD الذي يقطع المقاربين BA وBC في H وI (لا علاقة لهما بالنقطتين H و I السابقتين الواقعتين على المماس). لدينا

$IG = DH$ و $ID = GH$ (خاصة القطع الزائد)



الشكل. 33

إضافة إلى ذلك

$$GH \cdot DH = BH \cdot AH$$ (قوة H بالنسبة للدائرة)

و

$$DI \cdot GI = BI \cdot IC$$ (قوة I بالنسبة للدائرة)

ومنه

$$BI \cdot IC = BH \cdot AH$$

أي

$$\frac{BI}{BH} = \frac{AH}{IC}$$

ثم إن

$$\frac{BC}{AH} = \frac{AD}{AH} = \frac{BI}{BH} = \frac{IC}{CD} = \frac{IC}{AB}$$ (من تشابه المثلثات)

فنحصل على

$$\frac{BC}{AH} = \frac{AH}{IC} = \frac{IC}{AB}$$

وإذاً فإن AH و IC هما متوسطيّ التناسب المطلوب إيجادهما.

ثم يقترح الخازن طريقة تتضمن الإمالات (νεῦσις) neusis مستعملاً المسطرة للمهتمين بالإنشاء العملي وحده وليس البرهان. ما أن نجد النقطة D حتى نضع طرف المسطرة عليها بحيث يمكن تدويرها حول هذه النقطة ونحاول الضبط بالتلمس إلى أن نصل إلى وضع يكون فيه $DI = GH$.

يأخذ الخازن على عاتقه في رسالته الثانية إنشاء نيقوميديس الذي ورد في شرح أوطوقيوس لكتاب أرشميدس في *الكرة والأسطوانة*، واضعاً إياه في إطار تقاطع المخروطات؛ فهدفه واضح إذاً وواضح أيضاً أن التقنية المفضلة عنده لوضع حلول المسائل المجسمة هي القطوع المخروطية[55].

نحصل، في إنشاء نيقوميديس، على متوسطيّ التناسب CO وUA بين المقطعين AB وBC بإنشاء نقطة I على GI المنصف العمودي لــ BC، بحيث يكون AE = CI نصف AB. ثم بإنشاء CP موازياً لــ HI (H هي نقطة تقاطع DE مع CB) وبرسم المستقيم IO بحيث يكون المقطع PO المحصور بين CP وHC مساوياً لــ AE، ينجز نيقوميديس هذا الإنشاء بالإمالات neusis مستعيناً بالكونكويد الذي اكتشفه.

عرض الخازن إنشاءً يستعمل تقاطع القطع الزائد والدائرة. نرسم من I المستقيم IK الموازي لــ HC والذي يلقى امتداد CP (الموازي لــ HI) في K. ونأخذ القطع الزائد $\mathscr{H}$ بمقاربية HC و HI والذي يمر في K، والدائرة $\mathscr{C}$ ذات المركز K والشعاع AE. يتقاطع هذان المنحنيان في النقطة S؛ نرسم من S المستقيم SO الموازي لــ KC والذي يقطع HC في O. وهي النقطة التي طُلب إيجادها.

لدينا في الواقع، من القضية II.12 من *المخروطات*، SKPO متوازي الأضلاع؛ وإذاً PO = KS = AE.

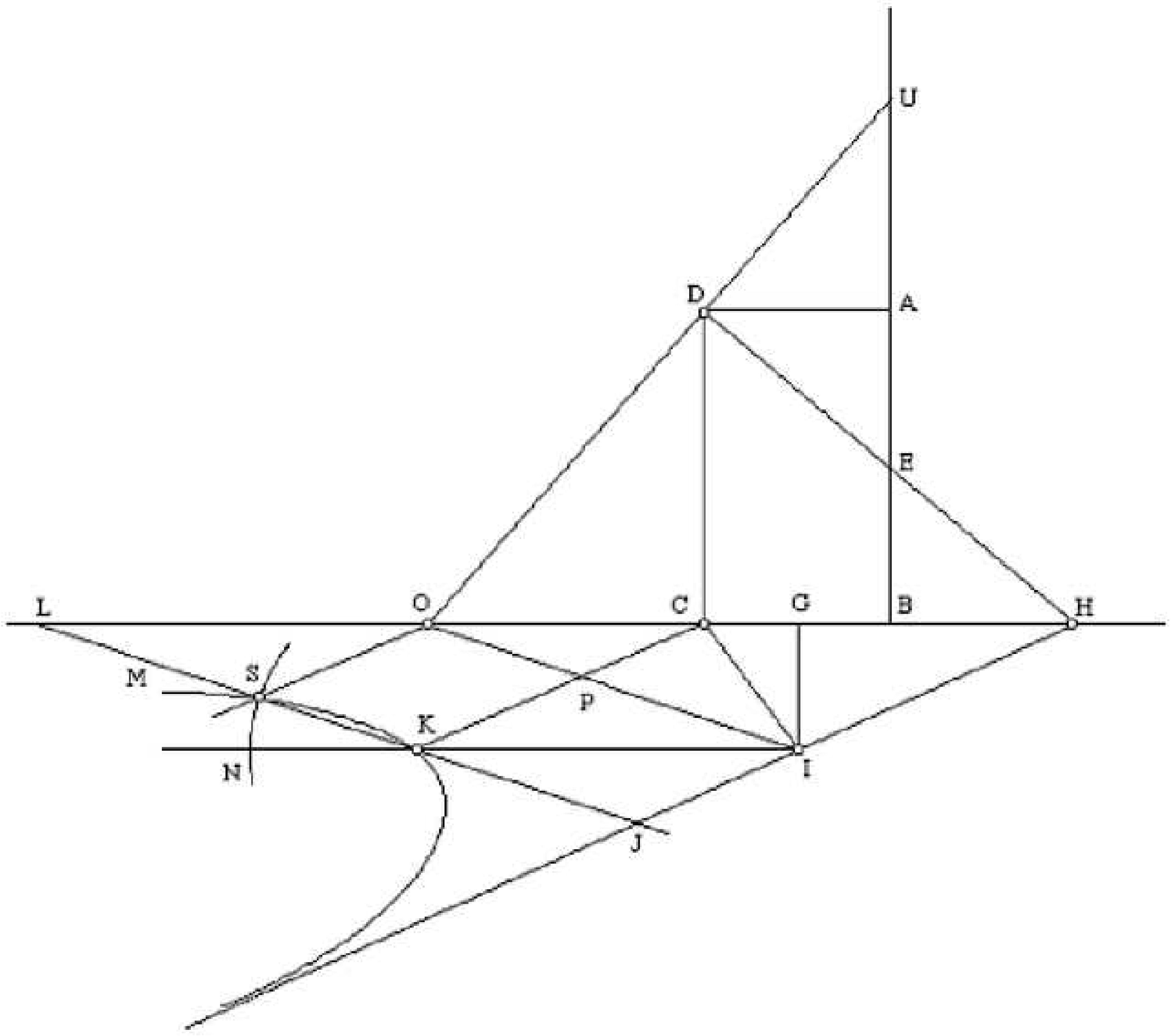
لنبرهن ذلك بطريقتين تحليلياً وتركيبياً.

لنفرض أننا نعرف النقطة O المحققة لــ PO = AE، نرسم KS || IO و OS || HI؛ الرباعي KPOS متوازي الأضلاع و OP = KS، KP = SO. يقطع المستقيم KS المستقيم HI في J والمستقيم HC في L؛ لدينا SJ = IO = KL (لأن SJIO و KLOI متوازيي الأضلاع)، وهكذا فإن القطع الزائد $\mathscr{H}$ ذا المقاربين HI و HC المار بــ K يمر أيضاً بــ S. ثم إن KS = OP = AE و S تقع على الدائرة التي مركزها K وشعاعها AE.

---

[55] انظر:

Karl Kohl, 'Zur Geschichte der Dreiteilung des Winkels', *Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen*, Band 54/55 (1922/1923), pp. 180-189.



الشكل. 34

التركيب: ننشئ H و I كما أعلاه، وK هي نقطة تقاطع الموازي لـــ HC المرسوم من I والموازي لـــ HI المرسوم من C. ليكن $\mathscr{H}$ القطع الزائد ذا المقاربين HI و HC المار بـــ K، ولتكن $\mathscr{C}$ الدائرة ذات المركز K والشعاع AE؛ يتقاطع هذان المنحنيان في نقطة S. نرسم من S مستقيماً SO، موازياً لـــ IH، يقطع HC في O التي طَلب إيجادها. والواقع أن KS، الوتر في $\mathscr{H}$، يقطع المقاربين HI و HC في J و L بحيث يتحقق KJ = SL؛ ولذا فالمثلثان KJI وLSO متساويان (الضلعان المتقابلان متوازيان) وLO = KI وKLOI متوازي الأضلاع و LJ || OI. إن الرباعي SKPO متوازي الأضلاع أيضاً و PO = SK = AE.

وهكذا ينتهي البرهان: لدينا

$$GC^2 + BO \cdot CO = GO^2 \qquad \text{(أقليدس، II)}$$

إذاً

$$GI^2 + GC^2 + BO \cdot CO = GI^2 + GO^2$$

أي

$$CI^2 + BO \cdot CO = OI^2$$

إن

$$\frac{UA}{AB} = \frac{UA}{CD} = \frac{AD}{CO} = \frac{BC}{CO}$$

وبالتالي

$$\frac{UA}{AE} = \frac{UA}{\frac{1}{2}AB} = \frac{BC}{\frac{1}{2}CO} = \frac{2BC}{CO} = \frac{HC}{CO} = \frac{IO}{PO} - 1$$

تنتج هذه العلاقة الأخيرة من تشابه المثلثين OPC و OIH. وبملاحظة أن $1 + \frac{UA}{AE} = \frac{UE}{AE}$ نحصل على

$$\frac{UE}{AE} = \frac{IO}{PO}$$

وبما أن AE = PO فإن UE = IO

و

$$UE^2 = IO^2 = CI^2 + BO \cdot CO = AE^2 + BO \cdot CO$$

إن

$$UE^2 = BU \cdot UA + AE^2 \qquad \text{(إقليدس، II)}$$

وهكذا

$$BU \cdot UA = BO \cdot CO$$

و

$$\frac{AB}{CO} = \frac{DC}{CO} = \frac{CO}{UA} = \frac{BU}{BO} = \frac{UA}{AD} = \frac{UA}{BC}$$

نلاحظ أن الخازن استعمل في كلا الإنشاءين الدائرة والقطع الزائد، إلا أن القطع الزائد قائم في الإنشاء الأول، والدائرة محيطة المستطيل ABCD؛ بينما أصبح القطع الزائد لا على التعيين في الإنشاء الثاني، ولم يعد البرهان يلجأ إلى استعمال قوة نقطة بالنسبة للدائرة. كما يعرض الخازن المسألة الإضافية في رسم القطع الزائد بالنقط، كما سنرى في تحليل تثليثه للزاوية.

لقد خاض القوهي في مسألة متوسطيّ التناسب كخلف لثابت بن قرة والخازن، ولعله لغيرهما كذلك. واتبع هو أيضاً طريقة تستعمل القطع الزائد والدائرة.

3.2.3 القوهـــــي

سنعطي هنا برهان القوهي كما ورد في عمله *مقالة في استخراج خطين بين خطين حتى تتوالى الأربعة على نسبة، وقسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية.*

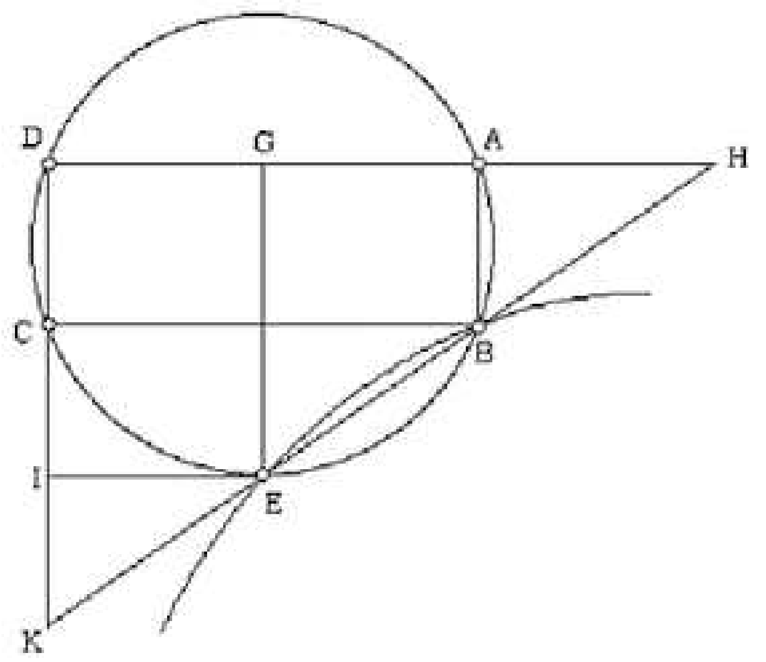
ليكن لدينا المستقيمان AB و BC، نريد إيجاد مستقيمين EG و EI يحققان

$$\frac{BC}{EG} = \frac{EG}{EI} = \frac{EI}{AB}$$

البرهان: نتمم المستطيل ABCD. ولتكن ($\mathscr{C}$) الدائرة المارة بـــ D، C، B، A، وليكن ($\mathscr{H}$) القطع الزائد المار بـــ B وذا المقاربين AD و DC (الشكل. 35). تتقاطع الدائرة مع القطع في نقطتين B و E.

ليكن AB ∥ EG [G على AD]؛ BC ∥ EI [I على DC]. إذاً

$$\frac{BC}{EG} = \frac{EG}{EI} = \frac{EI}{AB}$$



الشكل. 35

في الحقيقة، يلقى EB الخط DA في H و DC في K. لدينا HB = EK و EH = BK و

$$EH \cdot HB = BK \cdot EK$$

لكن

$$EH \cdot HB = DH \cdot AH \qquad \text{(قوة النقطة H بالنسبة للدائرة)}$$

و

$$DK \cdot KC = BK \cdot KE \qquad \text{(قوة النقطة K بالنسبة للدائرة)}$$

ومنه

$$DH \cdot AH = DK \cdot KC$$

وبالتالي

$$\frac{HD}{DK} = \frac{KC}{AH}$$

إلا أن

$$KC = GE$$

لأن المثلثين المتشابهين EHG و KBC متساويان لكون EH = BK.

و

$$AH = IE$$

لأن المثلثين المتشابهين IEK و AHB متساويان لكون EK = BH، إذاً

$$\frac{HD}{DK} = \frac{BC}{CK} = \frac{BC}{EG} = \frac{EG}{EI}$$

لأن

$$HD \cdot EI = HD \cdot AH = DK \cdot KC = DK \cdot EG$$

لكن

$$GE \cdot EI = AB \cdot BC$$ (أبلونيوس، II.12)

إذاً

$$\frac{EI}{AB} = \frac{BC}{EG}$$

ولدينا

$$\frac{BC}{EG} = \frac{EG}{EI} = \frac{EI}{AB}$$

اتجه البحث في هذه المسألة بعد القوهي اتجاهين مختلفين في آن. أولهما تعميم السؤال ليشمل عدداً أكبر من الخطوط. نعلم أن ابن الهيثم كتب رسالة في *استخراج أربعة خطوط بين خطين*[56]. يشير الخيام إلى هذه الرسالة بمناسبة دراسة المعادلة $x^5 = c$. فيكتب، إننا بحاجة "لإظهار أربعة خطوط بين خطين حتى تتوالى الستة على نسبة. هذا ما برهنه أبو علي ابن الهيثم ولكنه عسير"[57]. ليكن a و b مقطعين معلومين؛ نريد أن نجد t، z، y، x بحيث

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{t}{b}$$

وهو ما يعطينا المعادلة $y^5 = a^3b^2$.

ننظر بعد ذلك، باستعمال التقنية السابقة، إلى تقاطع المنحنين $yz = ab$ و $y^3 = az^2$ أي تقاطع قطع مخروطي ومنحن تكعيبي.

استطاع الرياضي الأندلسي عبد الرحمن بن سيد بعد ذلك بقليل، حسب رواية خليفته الفيلسوف آخمباس "استخراج العدد الذي نريد من الخطوط بين خطين حتى تتوالى على نسبة وقسم بهذه الطريقة الزاوية حسب أي نسبة عددية"[58]. وبما أن أعمال ابن سيد قد ضاعت، فليس بإمكاننا القيام بأي تخمين يتعلق بطريقته.

أما الاتجاه الثاني الذي سار فيه البحث فكان وضع هذه المسألة في صيغة جبرية. لقد وقع هذا التحويل إلى الجبر سابقاً في رسالة الخيام[59]. فقد قام في واقع الأمر، للبرهان على وجود الضلع x للمكعب المساوي لـــ c، بتطبيق القضية التي ناقشناها هنا وبإنجاز الإنشاء بأخذ تقاطع قطعين مكافئين بعين الاعتبار

---

56 انظر:

R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*. Vol. 2 : Ibn al-Haytham (London, 1993), pp. 518-519, and R. Rashed and B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, pp. 222 and 387.

57 R. Rashed and B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, p. 222; English translation p. 158.

58 R. Rashed, Sharf al-Dīn al-Tūsī, *Œuvres mathématiques. Algèbre et Géométrie au XII^e siècle*, Collection 'Sciences et philosophie arabes - textes et études', 2 vols. (Paris, 1986), vol. 1, p. 129.

59 R. Rashed and B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, p. 35.

$$\frac{uy^2}{c} = \frac{x}{u} \quad \text{و} \quad uy = x^2$$

وهو ما يعطي $x^3 = c$.

أما حل المسألة العامة، أي إنشاء عدد ما من متوسطي التناسب، فقد وجده لاحقاً بيير فيرما[60].

وهكذا فقد عمم خلفاء القوهي المسألة من جهة، وأحالوها إلى مسألة جبرية، من جهة ثانية.

3.3 *تثليث الزاوية*

1.3.3 *مدخـــــل*

جرت التقاليد على القول، هنا أيضاً، أن لهذه المسألة ماض سحيق يعود إلى القرن الخامس قبل الميلاد. حُدثنا عن الرياضي السفسطائي هيبياس Hippias من إيليس Elis وعن استعماله المربع الذي اكتشفه لحل المسألة. وأُشير أيضاً إلى نيقوميديس والكونكوئيد الذي اكتشفه، ثم إلى بابوس وإلى الحل الذي قدمه في الـــ *Collection* مستعملاً الدائرة والقطع الزائد[61]. لقد رويت قصة تثليث الزاوية في الرياضيات اليونانية مرات ومرات، ولذا فلا داعي للتوقف عندها هنا. إلا أنه لا بد من الإشارة إلى طابع تميزت فيه هذه المسألة منذ البداية. فهي ترتبط مباشرة بمجال البحوث في إنشاء متعددات الأضلاع المنتظمة، مثلها في ذلك مثل إنشاء المسبع المنتظم أو إنشاء المخمس متساوي الإضلاع ومختلف الزوايا. عرضت هذه البحوث في الكتاب الرابع من *الأصول* حيث يدرس أقليدس متعددات الأضلاع بـــ 3 أو 4، 5، 6 أضلاع. وهكذا فقد كان معروفاً أن إنشاء المسبع يكافئ تثليث الزاوية المركزية التي تضم ضلع مثلث متساوي الأضلاع. وهو إنشاء غير ممكن طبعاً حسب معايير إقليدس للإنشاءات المقبولة، تلك التي لا يستعمل فيها إلا المسطرة والبركار. ولقد نبه بابوس، كما رأينا، إلى صعوبة حل المسائل المجسمة باستعمال طريقة مستوية. وكما أشرنا، فقد اقتضى الأمر انتظار القرن التاسع عشر للبرهان على استحالة المسألة ذاتياً. إلا أن تاريخ المسألة غير اتجاهه ابتداء من القرن التاسع نظراً للدور الذي لعبته نظرية القطوع في الرياضيات العربية[62]. فقد كان استعمال المنحنيات المتعالية في هذا النوع من الإنشاء محظوراً في واقع الأمر، وإضافة إلى ذلك فقد أصبح من المتطلبات تبرير الإنشاءات بالإمالات بواسطة القطوع المخروطية. وهكذا جرى التوفيق، في هذه الحالة، بين الإمالات والقطوع. وأصبحت هذه المقاربة التي تبناها بابوس أحياناً – يمكننا القول وعن غير قصد – سياسة اتبعها الرياضيون بدءاً بثابت بن قرة، والخازن والقوهي على وجه الخصوص. إن التقصير في معرفة الدور الجديد الذي لعبته هندسة القطوع وتطبيقاتها جعل المؤرخين

---

[60] R. Rashed, 'Fermat and Algebraic Geometry', *Historia Scientiarum*, 11.1 (2001), pp. 24-47.

[61] Pappus, *La Collection mathématique*, transl. Ver Eecke, vol. 2, livre IV, pp. 210-213.

[62] انظر أعلاه.

يفتقرون إلى إمكانات تقييم البحث في تثليث الزاوية وفي المسائل المجسمة بصورة عامة: إنه لمن المستحيل بدون تلك المعرفة تفهم ما يطبعها من مميزات في الرياضيات العربية.

2.3.3 تثليثات الزاوية الأكثر قدما: بابوس، أحمد بن شاكر وثابت بن قرة

تعود الأبحاث الأولى في تثليث الزاوية، حسبما يروي كتاب السيرة والمفهرسون، إلى منتصف القرن التاسع، كما هو عليه حال الأبحاث في متوسطيّ التناسب. فيعلمنا النديم *في الفهرست* أن الكندي، الذي كتب في متوسطيّ التناسب، كتب أيضاً في تثليث الزاوية. إن ضياع رسالة الكندي يحرمنا دون شك من معلومات قيمة عن وضع البحث في هذا المجال في النصف الأول من القرن التاسع وعن مصادره الممكنة. وعلى كل حال فقد كتب الأخوة الثلاثة بنو موسى، معاصرو الكندي، في التثليث أيضاً في عملهم الشهير *معرفة سطوح الأشكال المسطحة والكروية* الذي ترك أثراً هاماً بالعربية واللاتينية. وحققوا هذا التثليث بفضل تقاطع مستقيم مع منحن أطلق عليه روبرفال Roberval فيما بعد اسم "ليماسون باسكال"[63]. إن هذا المنحني الرباعي هو كونكوئيد مشتق من دائرة. واقترح بنو موسى جهازاً للرسم. وهكذا، وخلافاً لبعض الرياضيين اليونان، لم ولا يشعروا بضرورة الاقتصار على استعمال القطوع المخروطية في إنشاء حل لمسألة مجسمة.

وهناك أخيراً نص في التثليث أنجز باستعمال الدائرة والقطع الزائد ونسب إلى أحمد بن شاكر، ومن المحتمل أن يكون أحمد بن موسى بن شاكر ثاني الأخوة الثلاثة. درس هذا النص، الموجود في مخطوطة واحدة (Oxford, Thurston 3, fols. 131^{v}-132^{r}) س. شوي (S. Schoy) عام 1927. وتوبعت هذه الدراسة من قبل آخرين عديدين، إلا أن أحداً لم يثر مسألة صحة نسبته إلى مؤلفه[64]. إن أقل ما يقال في وضع هذه المخطوطة أنها مشوبة بالعيوب. فقد أشرنا إلى غياب اسم "موسى"، ثم إن ما من مؤرخ جاء بدليل يعزز هذه النسبة وما من خَلَف فعل ذلك. فالسجزي على سبيل المثال، المتبحر في العلم والذي جمع عدة دراسات في التثليث، لم يشر إليه بالمرة. وإضافة إلى ذلك فقد جاءنا هذا النص متأخراً نسبياً وبمخطوطة واحدة. والمخطوطة الثانية التي نقلته هي نسخة عن الأولى وحدها. ثم إن هذا النص ليس نص أحمد بن شاكر، وإنما ملخص عمله مؤلف مجهول الاسم. وقد سمح هذا المؤلف لنفسه إهمال برهان مقدمة أعطاه المؤلف، أو إزالة تعابير كـ "خط مستقيم" تاركاً الحروف وحدها، وحذف بعض العبارات، نكتشف آثاره عندما نصل إلى مواضع في النص تبين غياب تعاريف كان من اللازم وضعها سابقاً: مثلاً الخط المستقيم "M" و"النقطة E" كما سنرى؛ وإعطاء العمل عنواناً يبدو لنا غريباً عن اللغة المستعملة ذلك الزمن، وهو *التثليث* في حين يتحدث بنو موسى وثابت بن قرة عن *قسمة* الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية؛ كما أن بعض الأخطاء

---

[63] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 1, chap. I. See also Karl Kohl, 'Zur Geschichte der Dreiteilung des Winkels'.

[64] C. Schoy, 'Graeco-arabische Studien nach mathematischen Handschriften der Vicekönigliche, Bibliothek zu Kairo', *Isis*, 81 (1927), pp. 21-40; J. Hogendijk, 'How Trisection of the Angle were Transmitted from Greek to Islamic Geometry', *Historia Mathematica*, 8 (1981), pp. 417-438.

اللغوية تجعل المعنى غامضاً كما هو الحال عندما يكتب "ترسم من النقطة A التي تقع على AB..." وأخيراً فإن هذا النص جزء من مجموعة تضم ملخصات لدراسات عديدة أخرى تتعلق بمسائل الإنشاء الهندسي، كدراسة القوهي في المسبع المنتظم. وقد بينا في مكان آخر أن هذه الملخصات في مخطوطة أوكسفورد تبتعد عن مقالات المؤلفين الأصلية[65]، وهو ما يدعو إلى الاعتقاد أننا أمام ملخصات كتبها مؤلفها أصلاً لاستعماله الشخصي. وهكذا فإن في تاريخ النص ما يكفي من العناصر لحثنا على التعامل معه بأقصى الحذر.

ومع ذلك فليست هذه التساؤلات هي الوحيدة. لنفرض جدلاً أن مؤلف النص هو الأخ الثاني من بني موسى. كيف أمكنت كتابته قبل عملهم المشترك *معرفة سطوح الأشكال المسطحة والكروية*؟ يصعب على المرء التصور أنهم لجؤوا إلى رباعي ومستقيم في حين وصل أحدهم إلى حل مستعملاً القطوع المخروطية. لنفترض العكس، أن هذا النص قد كتب لاحقاً بعد كتابهم المشترك: علينا أن نتوقع في هذه الحالة أن يرجع أحمد بشكل أو بآخر إلى الحل الأول. وهذا غير موجود.

ويبدو، على حد معرفتنا الآن، أن إسناد هذا النص تخميني في أحسن الأحوال. فما من دليل تاريخي أو في النصوص على صحة النسبة.

وكل ما نستطيع فعله في هذه الظروف هو تعليق حكمنا والعودة أولاً إلى تحليل النص.

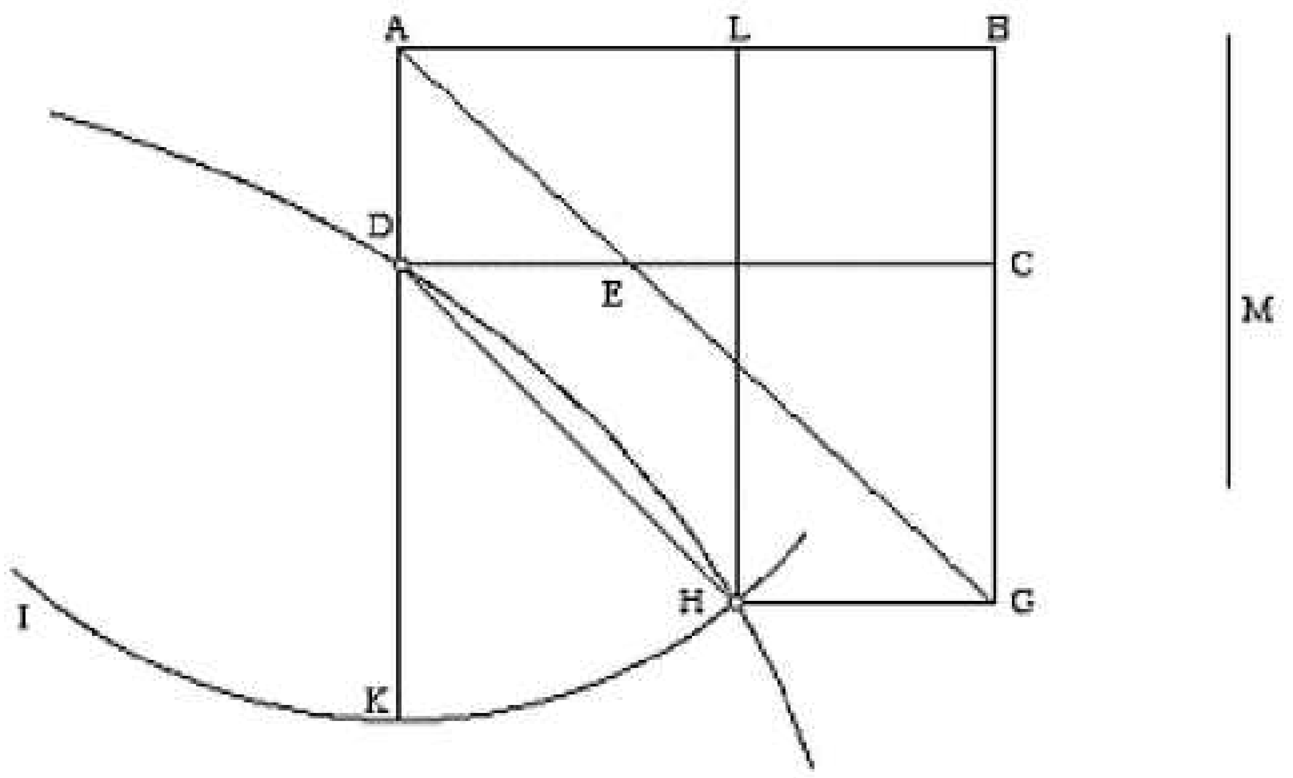
يتألف تلخيص النص الأصلي من مقدمتين وقضية ولازمة.

المقدمة 1: لتكن D نقطة داخل الزاوية ABC. ارسم قطعاً زائداً يكون فيه الخطان اللذان يحويان الزاوية مقاربي القطع.

يلاحظ الرياضي المجهول أن المؤلف اقتبس برهان أبلونيوس. مما جعله يسمح لنفسه بعدم نقله وبالانتقال مباشرة إلى المقدمة الثانية.

المقدمة 2: ليكن لدينا المستطيل ABCD وM خطاً مستقيماً، المطلوب رسم خط مستقيم من A، AG إلى تمديد BC، ليلقى CD في E بحيث يكون GE مساوياً لـــ M.

[65] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3.



الشكل. 36

نبدأ بتمديد AD بطول DK = M. ونرسم من D القطع الزائد $\mathscr{H}$ ذا المقاربين AB و BC والدائرة $\mathscr{C}$ ذات المركز D والشعاع DK. يتقاطع $\mathscr{H}$ مع $\mathscr{C}$ في H. نرسم HG موازياً لـ AB – G على امتداد BC – ونرسم الخط GA. إذاً EG = M. لدينا في واقع الأمر إذا ما رسمنا الخط DH والموازي HL لـ KA

$$CD \cdot DA = GH \cdot BG = GH \cdot HL = CD \cdot BC$$ خاصة القطع الزائد

ومنه
$$\frac{BG}{DA} = \frac{BG}{BC} = \frac{CD}{GH}$$

كما أن
$$\frac{BG}{BC} = \frac{AG}{AE} = \frac{CD}{ED}$$

نحصل منهما على ED = GH، ونستخلص بالتالي أن DHGE متوازي الأضلاع؛ أي

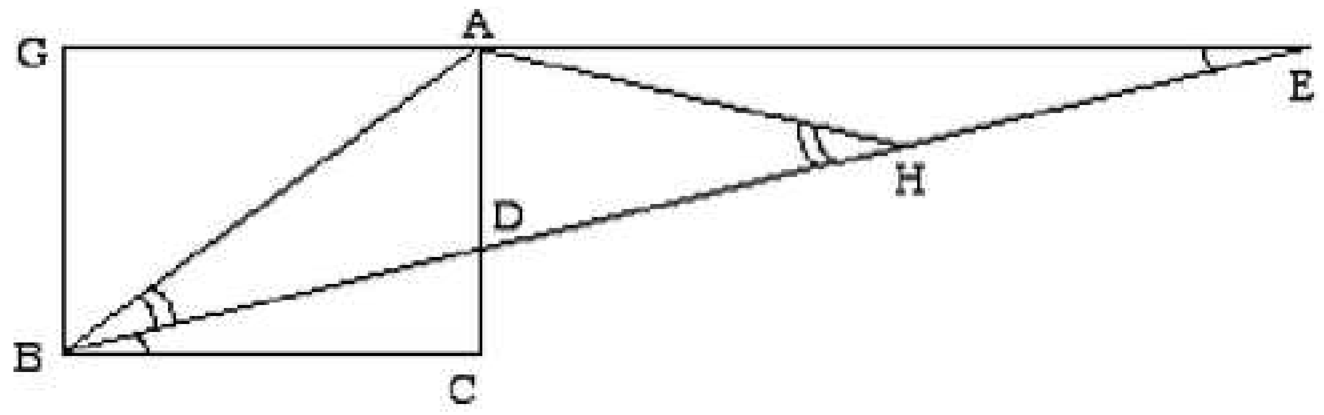
$$EG = DH = DK = M$$

ونكون قد أنشأنا المستقيم الذي يمر من A ويقطع CD في E و BC في G بحيث يكون المقطع EG يساوي مقطعاً معلوماً M.

ننتقل بعد البرهان على هذه المقدمة إلى التقسيم الثلاثي.

قضية: قسم الزاوية الحادة ABC إلى ثلاثة أقسام متساوية.

لنفرض $AC \perp BC$ ونتمم متوازي الأضلاع ACBG. نمدد GA إلى E ونرسم المستقيم BE الذي يقطع AC في D بحيث يكون ED = 2AB.



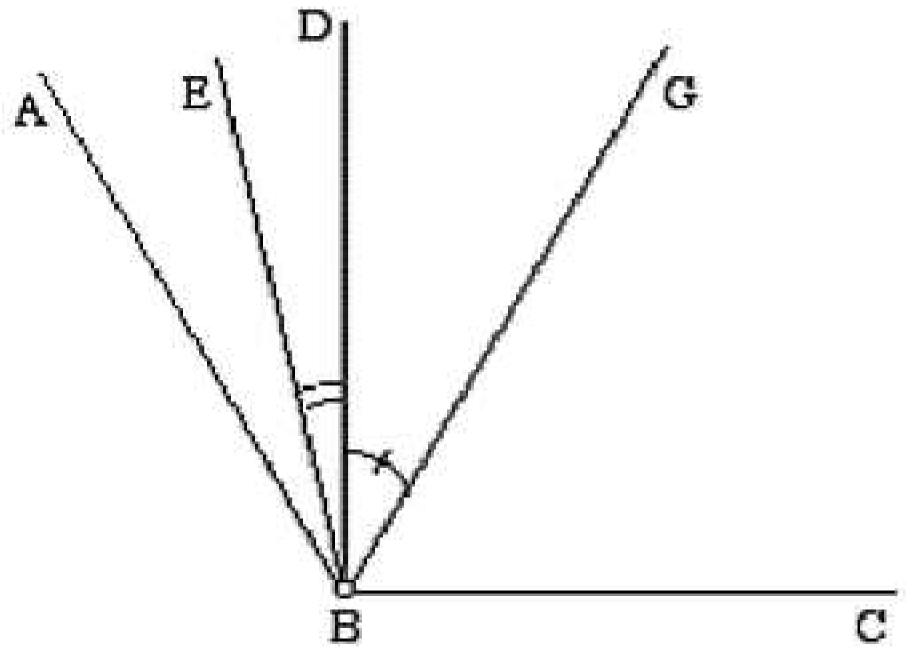
الشكل. 37

لتكن H وسط DE؛ فإذاً DH = AH = HE (خاصة المثلث قائم الزاوية)؛ وبما أن ED = 2AH فإن AH = AB. وبالتالي $A\hat{B}H = A\hat{H}D$ ولكن $A\hat{H}B = 2\hat{E}$ و $\hat{E} = D\hat{B}C$ ؛ فإذاً $A\hat{B}D = 2\,D\hat{B}C$ و $E\hat{B}C = \frac{1}{3}A\hat{B}C$.

لنلاحظ أنه من الممكن إنشاء E باستعمال المقدمة السابقة. وفي الواقع فإن الدائرة، التي مركزها C وشعاعها M = 2AB، تقطع القطع الزائد، المار بـــ C وذا المقاربين GA و GB، في نقطة I. ومن المقدمة فإن I تسقط على AG في E و ED = CI = 2AB.

وينتهي النص باللازمة التالية:

إذا كانت $A\hat{B}C$ زاوية قائمة، فالتقسيم إلى ثلاثة أقسام حاصل على الفور[66]؛ أما إذا كانت منفرجة، فإننا نرسم BD العمودي على BC ونضع $D\hat{B}G$ ثلث الزاوية القائمة ثم ننشئ $E\hat{B}D = \frac{1}{3}$ الزاوية الحادة فالمجموع $E\hat{B}G$ هو ثلث الزاوية المنفرجة.



الشكل. 38

[66] إن ثلث الزاوية القائمة هو نصف زاوية الرأس في مثلث متساوي الأضلاع. يتحقق إنشاؤها بالمسطرة والبركار ولذلك فإن رياضيي العصر لم يكلفوا أنفسهم عناء التوقف عندها في أغلب الأحيان.

نُقلت لازمة أخرى لتثليث الزاوية المنفرجة بنفس الخط في هامش النص للمخطوطة الوحيدة المعروفة: يُقترح في هذه اللازمة تنصيف الزاوية ثم تقسيم أحد النصفين، الحاد بالضرورة، إلى ثلاثة أقسام متساوية؛ يشكل مجموع اثنين منهما ثلث الزاوية المنفرجة.

قال س. شوي إن الطريقة المتبعة هنا لا تعدو كونها طريقة بابوس. وفي الواقع فقد كرس بابوس في الكتاب الرابع من *Mathematical Collection* القضايا 31، 32، 33 لتثليث الزاوية متبنياً نفس هذه الطريقة إجمالاً. لكن مقارنة النصين، نص بابوس والنص العربي الذي وصلنا، تكشف عن اختلافات تجعل من المستحيل اختزال الثاني إلى الأول تماماً. إلا أن هذه المقارنة أبعد ما تكون عن السهلة، وأن ما يحول دون قدرتها على الحسم كما سنرى هو أن النص الذي بين أيدينا، ولنعد القول، ليس النص الأصلي وإنما تلخيص له كتبه مؤلف مجهول. إن نسيان ذلك يعني نسيان الحاجة إلى التحقق.

إن الاختلافات بين النصين متعددة الأنواع. فهناك أولاً اختلاف من حيث البنية إن صح التعبير: ففي حين تتصدر المقدمة 1 النص العربي فإن بابوس يضع هذه النتيجة في النهاية كقضية 33. كما أن المقدمة الثانية، المقابلة للقضية 31 عند بابوس، تبرهن بالتحليل والتركيب عند بابوس وبالتركيب وحده في النص العربي. وأخيراً يبرهن بابوس، في نهاية القضية 32، اللازمة في حالتي الزاوية القائمة والزاوية المنفرجة بينما لا يتطرق النص العربي إلى تقسيم الزاوية القائمة لسهولته.

نلاحظ أيضاً اختلافات من نوع آخر تتصل بالبراهين بالذات. إذ يكرر المؤلف الأصلي لبرهـــان المقدمة 1 – حسب كاتب النص العربي – ببساطة برهان أبلونيوس أي القضية II.4 من *المخروطات*، في حين يعطي بابوس برهاناً لها ليس بسهولة برهان أبلونيوس. كما أن مؤلف النص العربي يرجع صراحة في برهانه للمقدمة 2 إلى القضية II.12 من *المخروطات* عندما يستعمل إحدى خواص القطع الزائد، بينما لا يقدم بابوس أي تبرير على الإطلاق. هذا يعني أن النص العربي يعتمد على القطوع وبانتظام أكثر بكثير مما يفعله بابوس في هذا السياق. وأخيراً يكتب بابوس، في برهان طريقة التثليث: "لنقسم إذاً الخط ED إلى قسمين متساويين في النقطة H ولنرسم الخط AH. وبهذا تكون الخطوط المستقيمة DH، HA، HE متساوية"[67]. لكن هذا صحيح فقط لأن الزاوية EAD قائمة وهو أمر يرجع إليه النص العربي ولم يشر إليه بابوس.

تكفي هذه الاختلافات لتبيان التباعد بين النص العربي ونص بابوس. ولكنها لا تمحو في أي حال أوجه الشبه التي توحد النصين: ففيهما نفس الأشكال ونفس الحروف كما يشتركان بنفس الطريق وتتطابق بينهما بعض الجمل. فإذا أضفنا إلى هذا، الشكوك التي تحيط بالنص العربي، فإننا سنجد أنفسنا أمام وضع يدعو إلى التأمل ويشجع التخمين. يمكننا أن نتصور حتى لا نبعد في التخيل كثيراً أن نصاً مترجماً عن اليونانية كان متداولاً في الوسط المحيط ببني موسى، نسخة عن نص بابوس ليست بالضرورة تلك التي بين أيدينا الآن، وأن أحد المنتمين إلى هذا الوسط قد عدله بما يتفق مع روح العصر، أي بإعادة كتابته بالاستعانة *بمخروطات* أبلونيوس. إن أكثر المرشحين المقبولين للقيام بهذا العمل

[67] Pappus, *La Collection mathématique*, transl. Ver Eeche, vol. 2, p. 212.

هو ثابت بن قرة وذلك لسببين. فهو، وليس أحمد، من كان يعرف اليونانية ومن قام بالترجمة عنها. وهو أيضاً من كتب بذاته رسالة *في تثليث الزاوية وفي متوسطيّ التناسب* تبنى فيها نفس الطريقة وإن برموز مختلفة، وقدم دراسة تكاد تكون نهائية لهاتين المسألتين. ليس هذا التخمين هو الأرجح فحسب، ولكنه يتميز بتخليصنا من المحاججة في "الرجل الثالث"؛ أي في مؤلف يوناني آخر غير معروف وما من شيء يدل عليه. إن الميزة الأخيرة لهذه الفرضية هي اقتراح حل يضع حداً لمسألة نسبة النص العربي.

لنأت الآن إلى رسالة ثابت بن قرة المعنونة *في عمل الموسطين وقسمة زاوية معلومة بثلاثة أقسام متساوية*. ولنركز انتباهنا على الشطر الثاني من هذا العنوان، ذلك أننا قد ناقشنا القسم الأول سابقاً. إن هذه الدراسة كتلك التي لخصها النص المشار إليه للتو مؤلفة من مقدمتين وقضية. ولكن علينا أن نستهل الموضوع بفحص مقتضب لتاريخ النص.

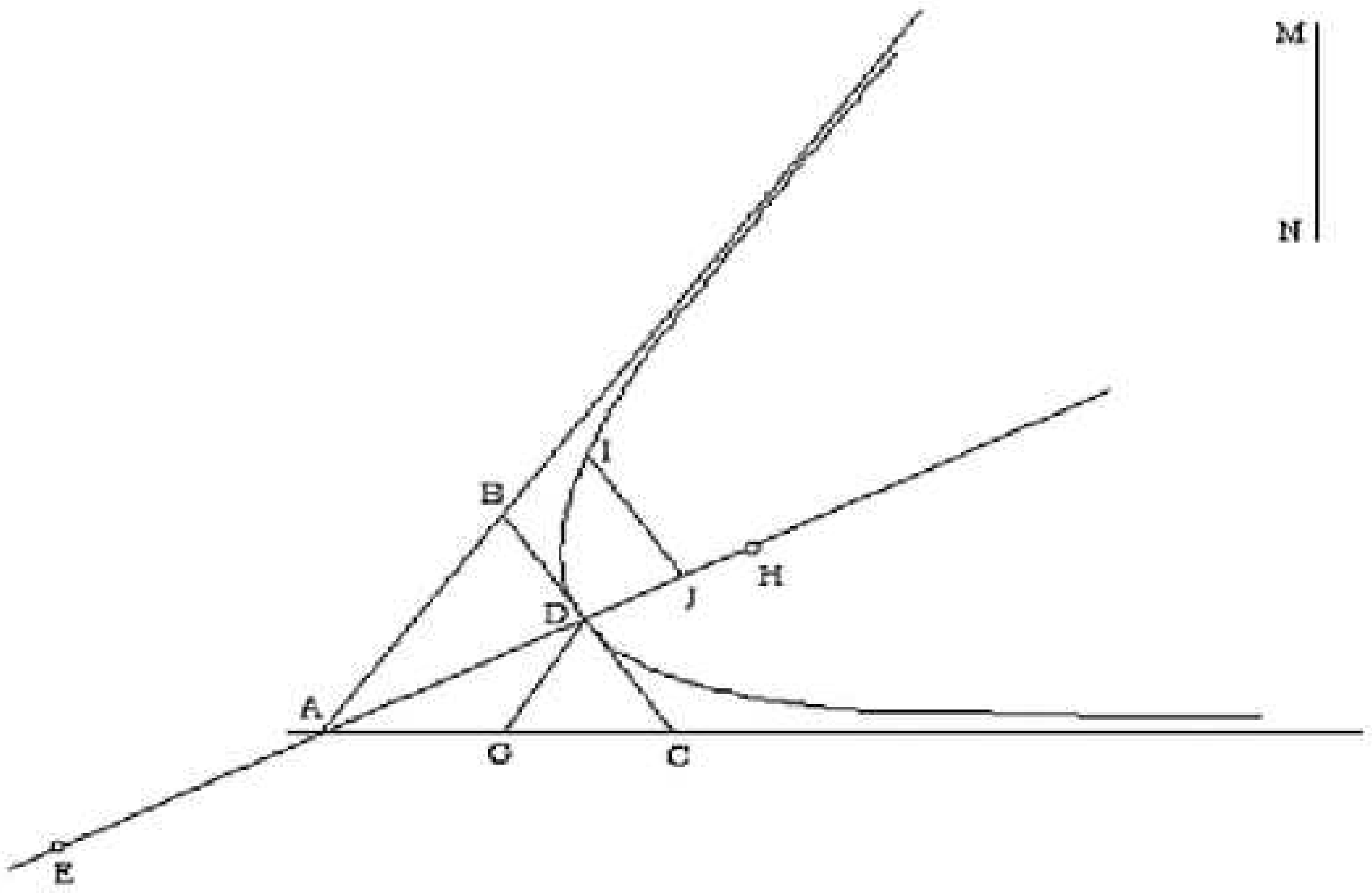
لدينا هذه المرة ما يكفي من الشهادات للتأكد من صحة إسناد هذا الجزء إلى ثابت بن قرة. إذ يلاحظ خلفه الخازن أن ثابت هو، على حد علمه، أول من قسم الزاوية إلى ثلاثة أقسام مستعملاً القطوع المخروطية. ويأتي بعده رياضي آخر، السجزي، ليلخص قضية ثابت مستعملاً كلماته ورموزه. إلا أن هذا النص وصل إلينا على نسختين، بينهما اختلافات ملحوظة، من حيث الأسلوب في أغلبها. توجد الأولى ولنسمها A في باريز BnF 2457. وقد ظُنَ خطأً أن السجزي قام بنقلها في 359هـ/970م. لكن حقيقة الأمر أن الصفحات القليلة التي تحتوي على رسالة ابن قرة قد نقلت بخط مختلف بعد358هـ/972م وقبل 657هـ/1259م. وهي رسالة بقسمين، يعالج الأول التقسيم الثلاثي للزاوية والثاني متوسطيّ التناسب. وقد عزي هذا القسم الثاني إلى أبي بكر الهروي. هذا وقد كنا قد بينا، حسب شهادة الخازن، أن الهروي لم يقم إلا بأخذ عمل الثابت. أما النسخة الثانية فهي من مخطوطة في مشهد، إيران، لنسمها B. نقلت في 672هـ/74-1273م وهي أيضاً بنفس القسمين، ولا ذكر لاسم الهروي فيها. توضح المقارنة بين النسختين أننا فعلاً أمام نص واحد على الرغم من بعض الاختلاف في الأسلوب. وإذا أخذنا بعين الاعتبار أسلوب السجزي ورموزه فإن إبداعه الجديد لقضية ثابت في تثليث الزاوية يقابل تماماً ما نجده في المخطوطتين اللتين وصلتانا. إن إحدى مميزات رسالة ثابت – ميزة مستوحاة على أغلب الظن من بني موسى – هي الجمع بين تقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام ومتوسطيّ التناسب في عمل واحد، في حين عالجهما سابقوه اليونان كمسألتين منفصلتين. ولكن، خلافاً لمعلميه الذين استعملوا منحنيات غير القطوع المخروطية، اقتصر على هذا المنحنيات وحدها. لقد اتبعه في هذا الجمع بعض خلفائه من أمثال الخازن والقوهي والسجزي[68].

إن نص ثابت في التثليث في نسختيه مؤلف من مقدمتين وقضية واحدة، على غرار النص المنسوب لأحمد بن شاكر.

---

[68] انظر الرسالة في لاهور.

المقدمة 1: ليكن AB و AC مستقيمين معلومين[69] يحويان بينهما زاوية BAC لا على التعيين، ولتكن D نقطة داخل الزاوية BAC. المطلوب إنشاء قطع زائد يمر بـــ D ويقبل AB و AC كمقاربين.



الشكل.39

البرهان: نرسم الخط AD ونمدده خلف A إلى نقطة E بحيث يكون AD = AE. ليكن AB || DG [G واقعة على AC]. ولتكن C على AG بحيث يكون GC = GA.

لنرسم الخط CD الذي يلقى AB عندما يمدد في B. لتكن H نقطة على امتداد AD [في نفس جهة D] تحقق

$$CB^2 = DE \cdot HD$$

ننشئ القطع الزائد ($\mathscr{H}$) الذي يمر بـــ D والذي يحقق، من أجل نقطة $I \in \mathscr{H}$ و IJ || CD مع J على HD، العلاقة

$$JI^2 = HD \cdot JD + JD \cdot MN$$

حيث MN مقطع يحقق

$$\frac{JD}{DE} = \frac{MN}{HD}$$

فللقطع الزائد ($\mathscr{H}$) AC و AB كمقاربين. في الواقع، بما أن AB || DG و GC = GA فإن

$$CD = DB \qquad \text{(من تشابه المثلثين CDG و CBA)}$$

ومنه

$$CB^2 = 4CD^2$$

---

[69] يتبين من برهان المقدمة بوضوح أن المعلوم هما الخطان المستقيمان AB وAC وليس المقطعان AB وAC؛ يتحدد وضع النقطتين B وC فيما بعد.

لكن $CB^2 = DE \cdot DH$

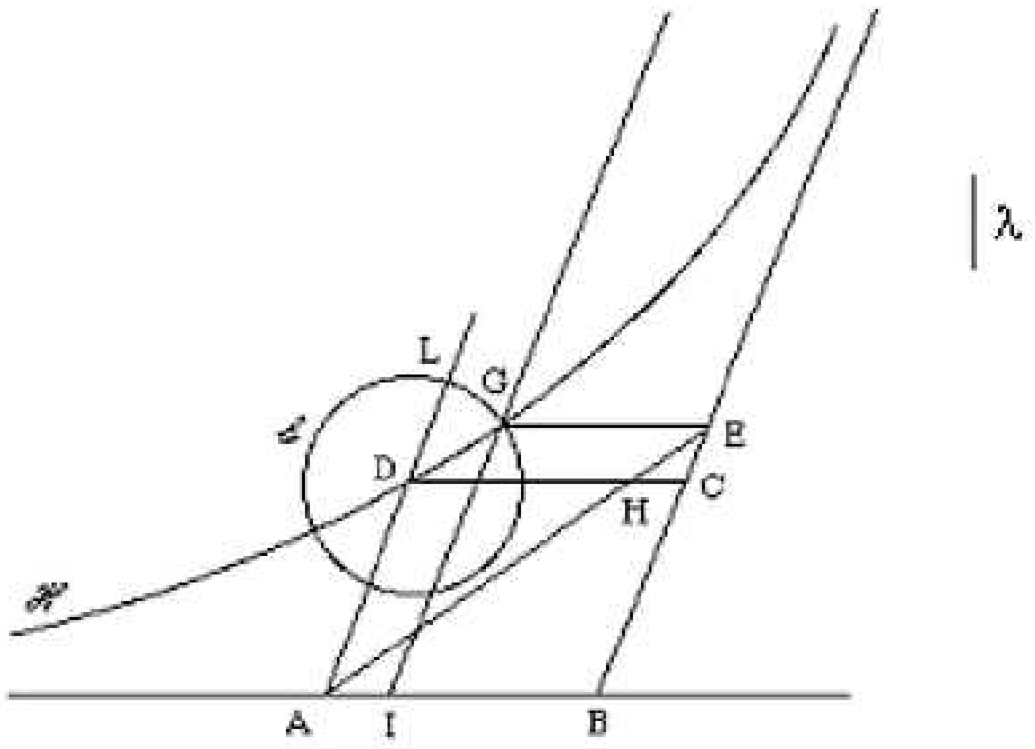
إذاً $CD^2 = DB^2 = \frac{1}{4} DE \cdot DH$

و AB و AC هما المقاربان للقطع الزائد وفق القضية II.3 من *المخروطات*.

ملاحظة: إن هذه المقدمة هي ببساطة القضية II.4 عند أبلونيوس، كما أشار إلى ذلك ناسخ مخطوطة مشهد بخطه في الهامش. أخذ ثابت بن قرة الترجمة العربية *للمخروطات* بشكل يكاد يكون حرفياً.

المقدمة II: ليكن ABCD متوازي أضلاع و BC = a و AB = b. ليكن λ مقطعاً معلوماً؛ المطلوب إنشاء النقطة E على امتداد BC بحيث إذا قطع EA المستقيم CD في H فإن

$$EH = \lambda$$



الشكل. 40

البرهان: ليكن (DG) قطعاً زائداً يمر من D وله AB وBC كمقاربين [بواسطة المقدمة السابقة]. لتكن L نقطة على امتداد AD [وفي نفس جهة D] بحيث يكون

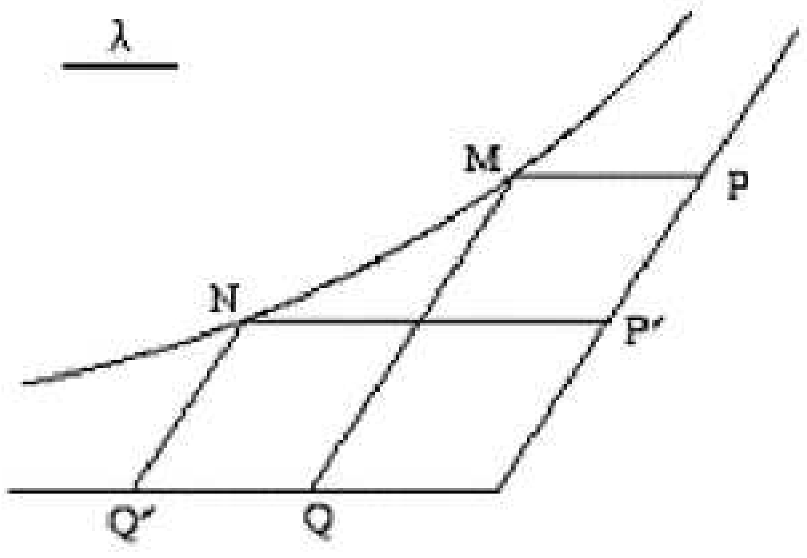
$$DL = \lambda$$

لتكن (LG) دائرة مركزها D وشعاعها DL، ولتكن G نقطة تقاطع هذه الدائرة مع القطع الزائد. ليكن EG || AB [E على BC] و GI || BC [I على AB]. يقطع المقطع AE المقطع CD في H. إن HE هو المقطع المطلوب :

$$HE = \lambda$$

حسب القضية II.12 عند أبلونيوس، إذا كانت M و N نقطتين ما على ($\mathscr{H}$) و P و Q نقطتين لا على التعيين على المقاربين، فإنه توجد نقطتان 'P و 'Q تحققان

$$MP \parallel NP' \quad \text{و} \quad MQ \parallel NQ'$$



الشكل. 41

إذاً

$$NP' \cdot NQ' = MP \cdot MQ$$

لدينا بتطبيق هذه العلاقة على معطيات المقدمة

$$AD \cdot DC = IG \cdot GE$$

أي

$$\frac{DC}{GE} = \frac{IG}{AD}$$

لكن

$IG = EB$ و $AD = BC$

لذا

$$\frac{EB}{BC} = \frac{DC}{GE}$$

ثم إن المثلثين ECH و EBA متشابهان:

$$\frac{EB}{EC} = \frac{EA}{EH} = \frac{BA}{CH} = \frac{CD}{CH}$$

$$\Rightarrow \frac{EB}{EB - BC} = \frac{EA}{EA - AH} = \frac{BA}{BA - HD}$$

$$\Rightarrow \frac{EB}{BC} = \frac{EA}{AH} = \frac{BA}{HD} = \frac{CD}{HD}$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{GE} = \frac{CD}{HD}$$

$$\Rightarrow GE = HD$$

لكن $EG \parallel DH$، فلذا $DG = EH$، و $DG \parallel EH$ و $DG = \lambda$ لأن DG هو شعاع الدائرة. وإذاً $EH = \lambda$.

ملاحظات: إن هذا البرهان مبني، كما جاء في ملاحظة هامشية في المخطوطة، على قضية أبلونيوس II.12 التي قدمها بابوس في *Collection* (XXXVI-XXXVIII)، رغم أنه يبرهن عليها بشكل مختلف.

يمكننا أن نلحظ أن ثابت، على غرار بابوس، لم يبرهن حقيقة على تقاطع المنحنيين. وهذه هي نقطة هامة في تاريخ المخروطات وتطبيقاتها مما يدعونا إلى عرض مناقشة ثابت بأسلوب آخر

ليكن المحوران

$$(0x,\ 0y) = (BA, BC)$$

و

$$(\mathscr{H}) = \{(x, y);\ xy = ab\}$$

وحسب المقدمة 1 $D \in (\mathscr{H})$.

ولتكن

$$(\mathscr{C}) = \left\{(x, y);\ (x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos A\hat{B}C = \lambda^2\right\}$$

ولتكن

$$G(x_0,\ y_0) \in (\mathscr{H}) \cap (\mathscr{C})$$

نرسم GE موازياً لـــ AB (E على BC)، فيقطع EA المستقيم CD في H بحيث يكون $EH = \lambda$. بما أن G تنتمي إلى $\mathscr{H}$ فإن $x_0 y_0 = ab \Leftarrow \frac{x_0}{a} = \frac{b}{y_0}$.

إن إحداثيي E هما y_0، 0، ومعادلة المستقيم EA هي

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{y_0} = 1$$

يلقي هذا المستقيم DC، ذا المعادلة $y = b$، في النقطة H

$$H = \left(a - \frac{ab}{y_0}, b\right) = (a - x_0, b)$$

يمكننا هنا أن نرى أن $AI = a - x_0 = HC$ ، إذاً $DH = IB = GE$ و DHEG متوازي أضلاع وهذا يعني أن EA يوازي DG. إضافة إلى ذلك $EH = (a - x_0, b - y_0) = GD$ ؛ وبالتالي $EH = GD = \lambda$.

يعود الإنشاء إذاً إلى إيجاد النقطة $G(x_0, y_0)$ التي تحقق في آن

$$x_0 y_0 = ab \quad \text{و} \quad (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2 + 2(x_0 - a)(y_0 - b)\cos A\hat{B}C = \lambda^2$$

بحيث

$$G \in (\mathscr{H}) \cap (\mathscr{C})$$

لكن ثابت لم يناقش نقطة تقاطع المنحنيين هذه. إلا أن النقطة D من القطع الزائد هي مركز الدائرة $\mathscr{C}$، ومن الواضح إذاً أن هناك نقاط من القطع الزائد تقع خارج الدائرة لأن القطع يمتد إلى ما لا نهاية.

القضية 1: لتكن ABC زاوية معلومة، AC ⊥ BC و AD || BC، وليكن BD المقطع الذي يقطع AC في نقطة E تحقق ED = 2BA. لتكن G وسط ED ولنرسم الخط AG. لدينا AG = GE [المثلث EAD قائم الزاوية و G وسط الوتر]، إذاً

$$AG = AB$$

و

$$A\hat{G}B = A\hat{B}G$$

لكن

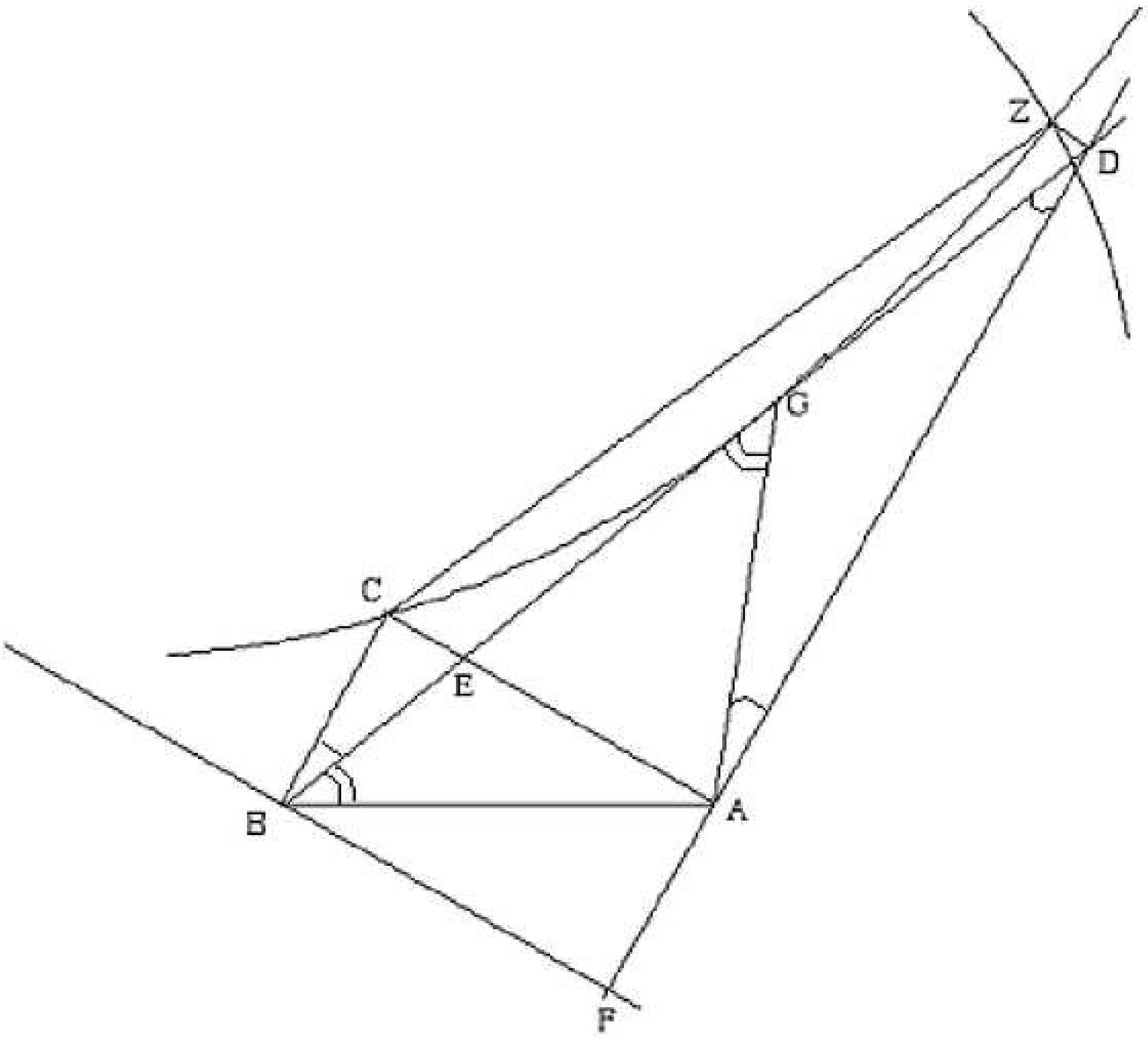
$$\hat{D} = D\hat{B}C$$

لأن BC || AD ؛ وإذاً

$$A\hat{B}D = 2D\hat{B}C$$

$\left[A\hat{B}D = A\hat{G}B = 2\hat{D}\right]$.

وهكذا تكون الزاوية ABC قد قسمت إلى ثلاثة أقسام متساوية.



الشكل. 42

ملاحظة: تكمن الصعوبة كلياً في إنشاء النقطة E التي تحقق ED = 2AB. ينجز هذا الإنشاء باللجوء إلى تقاطع الدائرة والقطع الزائد. وهذا ما فعله ثابت بن قرة بالضبط في المقدمة II.

وبتفصيل أكبر، علينا أن نضع J = 2AB وإنشاء ED = J. نتمم لهذا الغرض المستطيل BCAF ونرسم الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها C وشعاعها J. كما نرسم القطع الزائد $(\mathscr{H})$ المار بـــ C والذي مقارباه FA و FB.

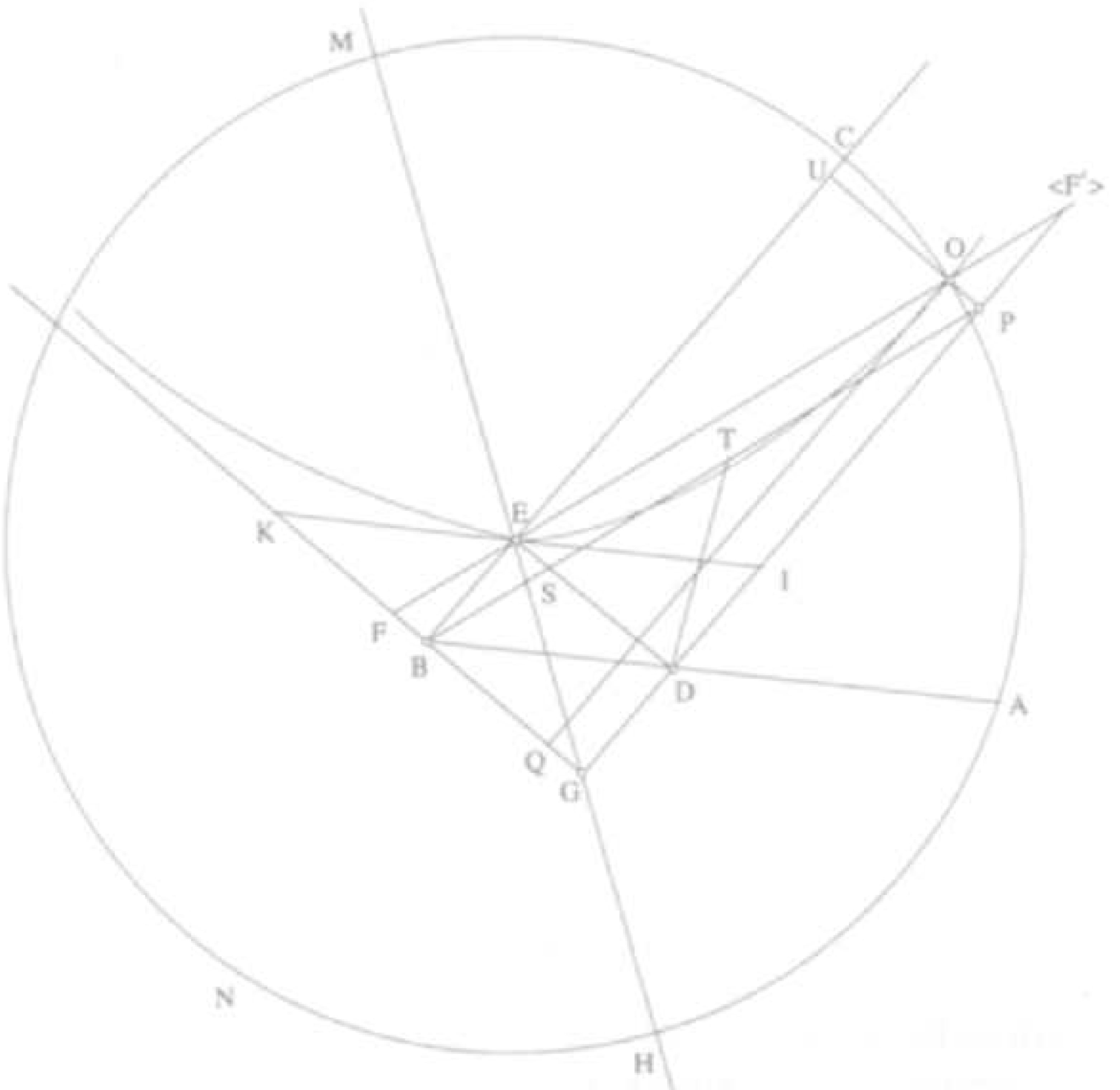
لتكن $Z \in (\mathscr{H}) \cap (\mathscr{C})$ و $Z \neq C$. نرسم المستقيمين CZ و BD الموازي لـــ CZ. يقطع BD المستقيم AC في E، وهي التي تثبت من المقدمة II أن

$$ED = J = 2BA$$

3.3.3 الخازن: تقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام والانشقاق بين القدامى والمحدثين

عالج الرياضي أبو جعفر الخازن مسألة تثليث الزاوية بعد ثابت بن قرة مستعملاً نفس الطريقة.

لتكن ABC زاوية معلومة. إذا كانت $A\hat{B}C$ منفرجة فالمرحلة الأولى هي بتقسيمها إلى نصفين حادين؛ نأخذ نقطة D على AB في الزاوية الحادة $A\hat{B}C$ ونسقط منها DE الذي يلقى BC في E، ثم نتمم المستطيل GE. نمدد GB و GD، ونرسم الخط GE ونمدده إلى النقطة H بحيث يكون GH = GE. ونرسم من E خطاً موازياً لـــ BD وليكن IK. ليكن λ مقداراً يحقق $\mathrm{EH} \cdot \lambda = \mathrm{IK}^2$. إن GI و GK هما مقاربا القطع الزائد $\mathscr{H}$ الذي يمر بـــ E، وذي الضلع المائل EH و*الضلع القائم* λ.



الشكل. 43

لتكن M نقطة على EH تحقق EM = 2BD. نرسم دائرة $\mathscr{C}$ (E, EM) ونرسم القطع الزائد إما – كما يقول – "بإخراج <تمديد> GE وتجزئته بأجزاء صغار واستخراج الخطوط الموسطات فيما بين جزء جزء فيها وبين λ". لتكن O نقطة تقاطع $\mathscr{C}$ و $\mathscr{H}$؛ نقطة تقع بين المسطرة التي يمر حرفها بـــ E وبين المقارب GI. ليكن PU المستقيم الموازي لـــ GK والمار بـــ O، نرسم OQ ‖ PG، كما نرسم الخطين EO وBP. لدينا، من خواص القطع الزائد، مستطيلان متساويان OPGQ وEBGD؛ وبالتالي

$$\frac{OP}{ED} = \frac{GD}{GP} = \frac{BE}{BU}$$

لكن

$$\frac{BE}{BU} = \frac{ES}{UP} = \frac{ES}{ED} \qquad \text{(لتشابه المثلثين BES وBUP)}$$

إذاً

$$\frac{OP}{ED} = \frac{ES}{ED} \qquad \text{و} \qquad OP = ES$$

ولما كان OP ‖ ES فإن SP = EO. لكن EO = EM و EM = 2BD، إذاً

$$SP = 2BD$$

لتكن T وسط SP؛ فـــ DS = ST لأن $\hat{D}$ زاوية قائمة وبالتالي T مركز دائرة تحيط المثلث DSP. إذاً

$$DT = TP = TS = DS$$

و

$$D\hat{T}B = D\hat{T}S = D\hat{B}P \qquad \text{و} \qquad D\hat{T}S = 2D\hat{P}S$$

لأن $D\hat{T}S$ زاوية مركزية و $D\hat{P}S$ الزاوية المحيطة المقابلة.

لكن $D\hat{P}S = P\hat{B}E$. نقسم $D\hat{B}S$ إلى نصفين فنحصل على المطلوب.

يبين الخازن أيضاً تساوي المستطيلين QU و PE لتساوي المستطيلين GO و GE الناتج عن خاصة القطع الزائد؛ نحصل على ذلك بإزالة المستطيل المشترك QD وإضافة المستطيل المشترك EO. ومنه

$$\frac{OU}{PU} = \frac{OU}{GB} = \frac{UE}{UB}$$

يقترح الخازن، بعد هذا الإنشاء المستعمل للقطوع المخروطية، على الذين لا يريدون إقامة البرهان، إنشاءً ميكانيكياً. نرسم BC ⊥ DE، DE ‖ GK، BC ‖ DP والدائرة $\mathscr{C}$(E, 2BD). ثم نضع حرف المسطرة على النقطة E وعلى GK و GP؛ نثبتها في النقطة E كمركز وندير ها على الخطين يمنة ويسرة إلى أن نجد النقطة O على القوس MN، بعدها عن GP يساوي بعد E عن المستقيم GK. فنرسم OP ‖ ED والخط BP. وإذا أردنا أن يكون العمل أخف، نرسم BC ‖ DP ونثبت طرف المسطرة في B كمركز وندير ها إلى أن تمر بالنقطة S بحيث يكون

$SE < \frac{1}{3}ED$. ثم نديرها يمنة ويسرة إلى أن تمر بالنقطة P على DP بحيث يكون $SP = 2BD$. إن الخط BP هو مُثَلِّث الزاوية $A\hat{B}C$ المطلوب.

وإذا كانت الأفكار الموجهة لطريقة الخازن هي نفسها التي وجهت ثابت بن قرة – ذلك أن كلا الطريقتين مبنيتان على الأخذ بعين الاعتبار تقاطع القطع الزائد والدائرة –، فإن العرضين المكتوبين مختلفان. أضف إلى ذلك أن الخازن قد شرح في كتابه، قبل عرضه للتثليث كيفية رسم القطع الزائد بالنقط. وقد عاد إلى هذه الطريقة في نصه في تقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام حين كتب:

> ونرسم القطع: إما بإخراج خط ز ه وتجزئته بأجزاء صغار، واستخراج الخطوط الموسطات فيما بين جزء جزء فيها وبين خط ل وإما بوضع حرف المسطرة على نقطة ه وعلى خطي ز ط ز ك اللذين لا يلقيان القطع <الخطين المقاربين> [...][70].

يتضح هنا هذا الاهتمام بإعطاء طريقة لرسم القطع الزائد نقطة فنقطة لصلته بالتثليث. أما الطريقة بحد ذاتها فقد أصبحت جزءاً من الرياضيات، اهتم بها عدد من رياضيي العصر كما يمكن أن نراه في عمل إبراهيم بن سنان[71].

رسم قطع زائد قائم بالنقط

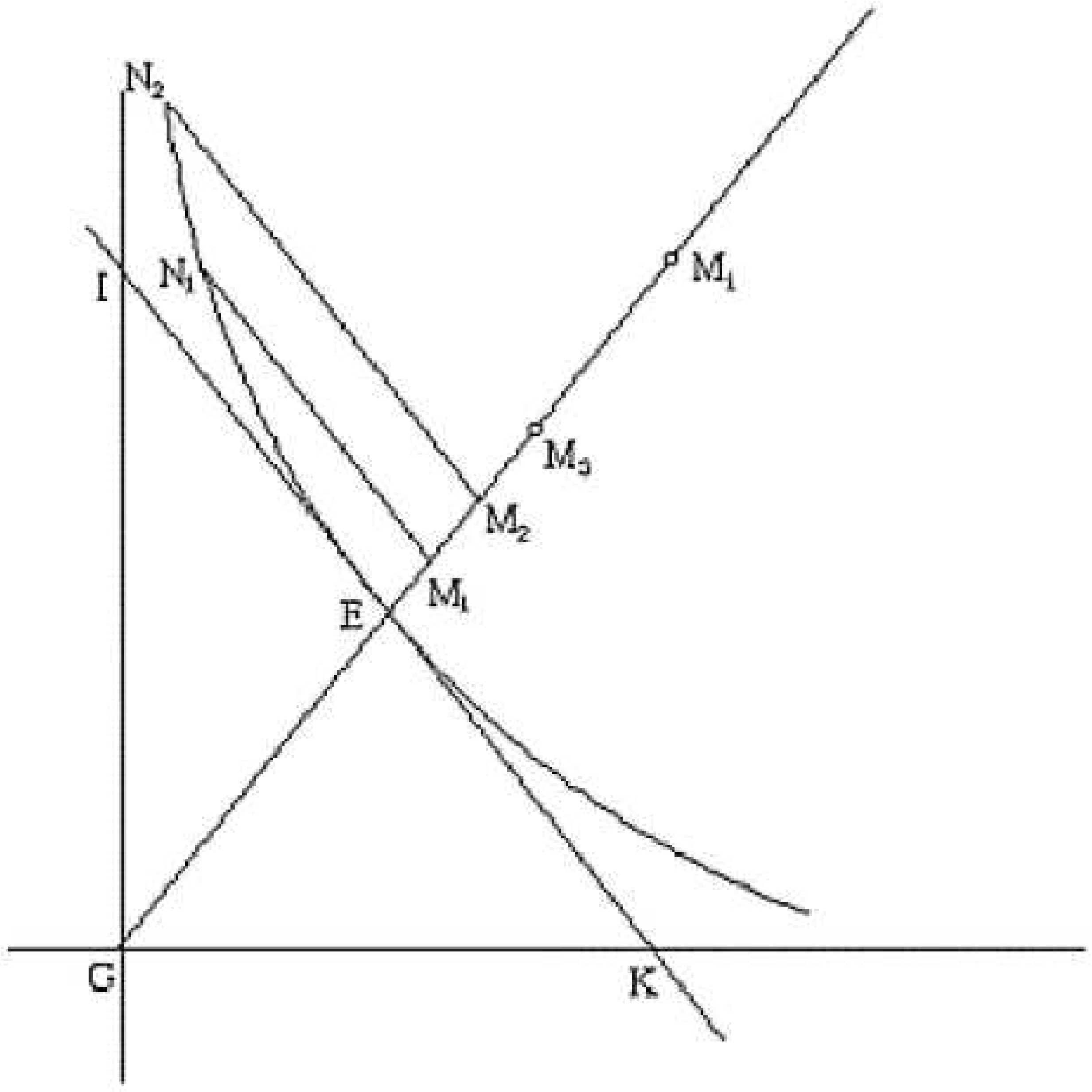
نأخذ على امتداد القطر GE النقاط M_1، M_2، ...، M_i القريبة من بعضها البعض بما فيه الكفاية ونريد أن نجد التراتيب $M_iN_i = y_i$.

لدينا $y_i^2 = x_i^2 + \lambda x_i$ حيث $x_i = EM_i$ هو الفاصلة و λ *الضلع القائم*.

---

[70] انظر أسفله، *قسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية*، ص. 575، سطر 14–16.

[71] See his treastise on drawing conic sections, in R. Rashed and H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e sic*ècle (Leiden, 2000), pp. 245-289.



الشكل. 44

لدينا

$$y_i^2 = x_i^2 + \sum_{j=1}^{i} \lambda \left(x_j - x_{j-1} \right) = x_i^2 + \sum_{j=1}^{i} z_j^2$$

حيث $z_j^2 = \lambda \left(x_j - x_{j-1} \right)$، أي z_j هو متوسط التناسب بين الجزء $M_{j-1}M_j$ من القطر وبين *الضلع القائم*.

حالما نجد المتوسطات z_1، z_2، ....، z_i نبني المجموع $\sum_{j=1}^{i} z_j^2 = x_{x_i}$ باستعمال إنشاء تقليدي يستعمل الأوتار المنصفة على النحو التالي: نرسم المثلث قائم الزاوية ذا الضلعين z_1 و z_2، ونأخذ وتره $\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ كضلع مثلث قائم الزاوية ضلعه الآخر هو z_3، ووتره بالتالي هو $\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$.

ونتابع على هذا الشكل لبناء سلسلة من المثلثات قائمة الزاوية T_1، T_2، ....، T_{i-1}، حيث ضلعا T_j القائمان هما وتر T_{j-1} والمتوسط z_{j+1} ووتره هو $\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + ... + z_{j+1}^2}$. نبني أخيراً المثلث قائم الزاوية U_i ضلعاه هما وتر T_{i-1} والفاصلة $x_i = EM_i$ ووتره هو الترتيب y_i المطلوب. يمكن الملاحظة أنه في حال تساوي الأجزاء $M_{j-1}M_j$ فيما بينها وبالتالي تساوي المتوسطات $z_j = z$ يصبح من السهل إنشاء سلسلة المثلثات التي تكون صورة حلزونية.

إن إسهام الخازن في مسألة تثليث الزاوية – وكذا إسهامه في مسألة متوسطيّ التناسب – يعمق معرفتنا بالعلاقات بين البحوث التي كانت قائمة في عصره في المسائل المجسمة وبين بحوث السابقين له، وفي واقع الأمر بينها وبين بحوث اللاحقين أيضاً. لقد رأينا أن الخازن نص بوضوح على وجود اختلاف بين القدماء والمحدثين وعلى إعطاء

الأولوية من قبل هؤلاء لاستعمال القطوع المخروطية مفضلين إياها على طريقة الإمالات أو على استعمال منحنيات أخرى. والخازن هو من أقر بأسبقية ثابت بن قرة في اعتماد هذا النهج وهو أيضاً من عاد إلى *إمالات* نيقوميديس وبررها بواسطة القطوع المخروطية معطياً بذلك إنشاء مقبولاً لها. ويبقى الأهم: فهو لم يوحد المسألتين – تثليث الزاوية وإنشاء متوسطيّ التناسب – ويفعل ذلك في كتاب لشرح *المخروطات* لأبلونيوس وحسب، وإنما استغل أيضاً طريقة رسم القطوع بالنقط للبرهان على إمكانية إنجاز التثليث فعلاً – لدينا في واقع الأمر طريقة صارمة لرسم القطع الزائد. وهكذا تتضافر كل الدلائل لتبين أن هذه المسائل، التثليث ومتوسطيّ التناسب – وغيرها من المسائل المجسمة على نحو أعم – قد كونت حقل تطبيق واسع لهندسة القطوع المخروطية التي كانت موضوع بحث وتطوير نشيطين في ذلك العصر.

إن تجاهل هذا السياق، وتجاهل الصلات التي تربط نظرية القطوع بتطبيقاتها، والتي خلقت الإطار المناسب، يحجب عنا رؤية الأسباب التي أدت إلى هذا التحول؛ ليس هذا فقط، وإنما أسباب هذا الازدهار غير المسبوق للدراسات المكرسة للقطوع أيضاً. يمكننا من خلال هذا المنظور وحده أن نفهم اهتمام الرياضيين، بمن فيهم بعض أبرز من عرف التاريخ، بهذه المسألة، السهلة إذا أتينا إلى حقيقة الأمور، التي حلت بشكل مرض قبل زمانهم. لا يمكن لوجود المجالس العديدة التي نوقشت فيها هذه المسألة المجسمة ولا للتقليد الشائع وحدهما أن يفسرا هذه الظاهرة. يقدم لنا القوهي في هذا الصدد المثل الجيد.

4.3 القوهي: تقاسيم على تثليث الزاوية

وصلتنا أربع دراسات كتبها القوهي في تقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام. يبين هذا العدد من الدراسات لرياضي كبير لم يعالج، كما قال، إلا المسائل التي لم تسترع انتباه الآخرين، أن اهتمامه لم يكن منصباً على النتيجة، أي على الإنشاء – وهو ما قام به سابقوه – وإنما على حقل التطبيق بالذات.

يخبرنا القوهي في إحدى هذه الدراسات أنه قصد "بطريق أقرب وأحسن من طرق القدماء"[72]. ولذا سنبدأ بتحليل هذه الدراسة.

a) *في استخراج قسمة الزاوية المعلومة بثلاثة أقسام متساوية*

كُتبت هذه الرسالة، حسب قول القوهي، في زمن الملك أبي الفوارس بن عضد الدولة؛ أي بعد 986، وهي السنة التي نحى فيها هذا الأخير أخاه واستلم السلطة المطلقة ليصبح ملكاً. هذا يعني أننا لسنا أمام عمل مبكر جداً. وفي الحقيقة فقد كتب هذا العمل بعد انقضاء حوالي عشرين عاماً على رسالته في *إنشاء المسبع المنتظم* وهي رسالة جاءت بعد رسالته في *مراكز الدوائر متماسة*[73]. يقدم القوهي في هذه الصفحات دراسة مفصلة وشاملة يأخذ فيها بالاعتبار كل الحالات بالتحليل والتركيب لكل منها. وهكذا يبدأ بالنظر في تثليث الزاوية القائمة قبل الزوايا الأخرى وسنتتبع هنا عرضه خطوة فخطوة مبتدئين بالحالة الأولى $A\hat{B}C$ = زاوية قائمة.

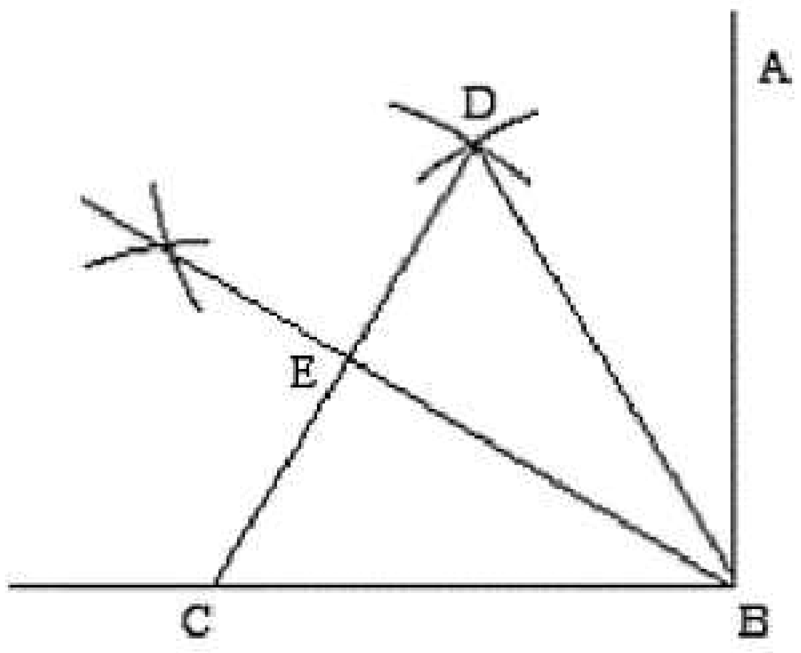
---

[72] انظر ص. 495 سطر 15.

[73] Ph. Abgrall, 'Les cercles tangents d'al-Qūhī', *Arabic Sciences and Philosophy*, 5.2 (1995), pp. 263-295.

الحالة الأولى: $A\hat{B}C = 1$ زاوية قائمة

المطلوب إيجاد نصف المستقيم (BD] بحيث يكون $A\hat{B}D = \frac{1}{3} A\hat{B}C$.



الشكل. 45

التحليل: إذا كان $A\hat{B}D = \frac{\pi}{6}$ فإن $D\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$. و $D\hat{B}C$ بالتالي زاوية مثلث متساوي الأضلاع.

التركيب: لتكن C نقطة، كيفما وقعت <لا على التعيين> على BC أحد ضلعي الزاوية القائمة $A\hat{B}C$. ننشئ على BC المثلث متساوي الأضلاع BCD ثم BE منصف الزاوية $C\hat{B}D$ (يحقق الإنشاء بالمسطرة والبركار). لدينا إذاً

$$C\hat{B}D = \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} A\hat{B}C \quad \text{و} \quad C\hat{B}E = E\hat{B}D = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} A\hat{B}C$$

ولدينا أيضاً

$$D\hat{B}A = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} A\hat{B}C$$

وهكذا قسم نصفا المستقيم (BE] و (BD] $A\hat{B}C$ إلى ثلاث زوايا متساوية.

الحالة الثانية: $A\hat{B}C$ زاوية حادة أو منفرجة

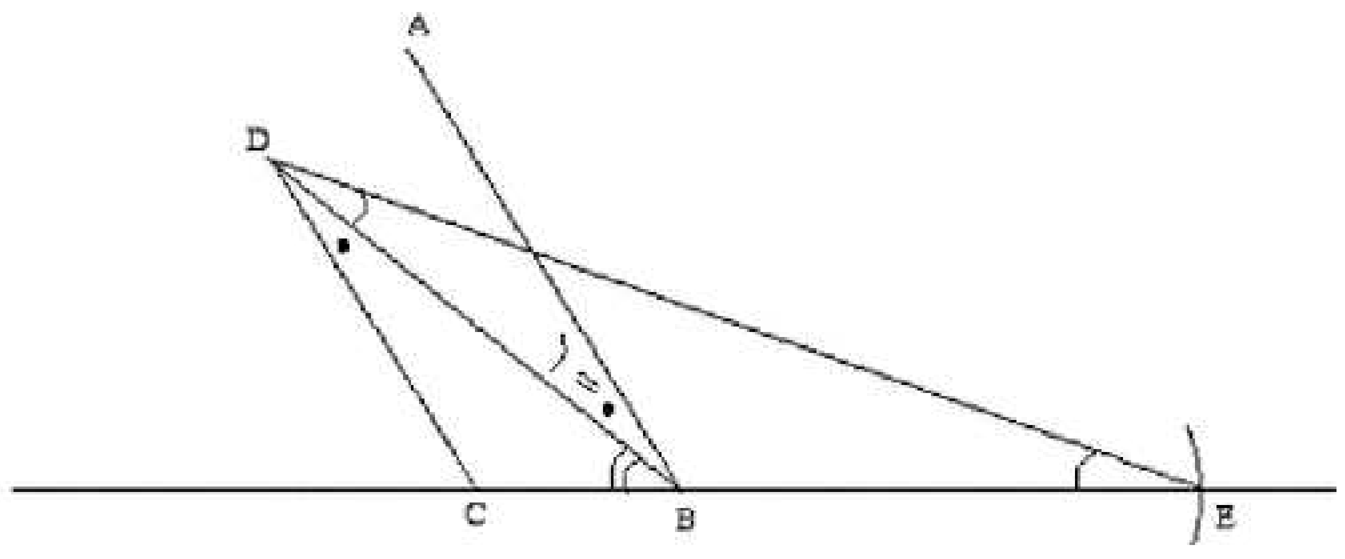
التحليل: لنفرض أن نصف المستقيم (BD] يحقق

$$A\hat{B}D = \frac{1}{3} A\hat{B}C$$

نرسم من النقطة D، غير المعينة على نصف المستقيم، DC || AB ونأخذ على امتداد CB نقطة E بحيث يكون BE = BD. فالمثلث DBE متساوي الساقين و $C\hat{B}D = B\hat{D}E + B\hat{E}D = 2B\hat{E}D$

لكننا افترضنا $A\hat{B}D = \frac{1}{3} A\hat{B}C$ أي $C\hat{B}D = 2A\hat{B}D$ ، وبالتالي $B\hat{E}D = A\hat{B}D$. ثم إن الزاويتين $A\hat{B}D$ و $B\hat{D}C$ متساويتان لأنهما متناوبتان داخلياً. ولذا فالمثلثان DCE و BCD متشابهان ولدينا $\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CD}$ ومنه $CD^2 = CE \cdot CB$.

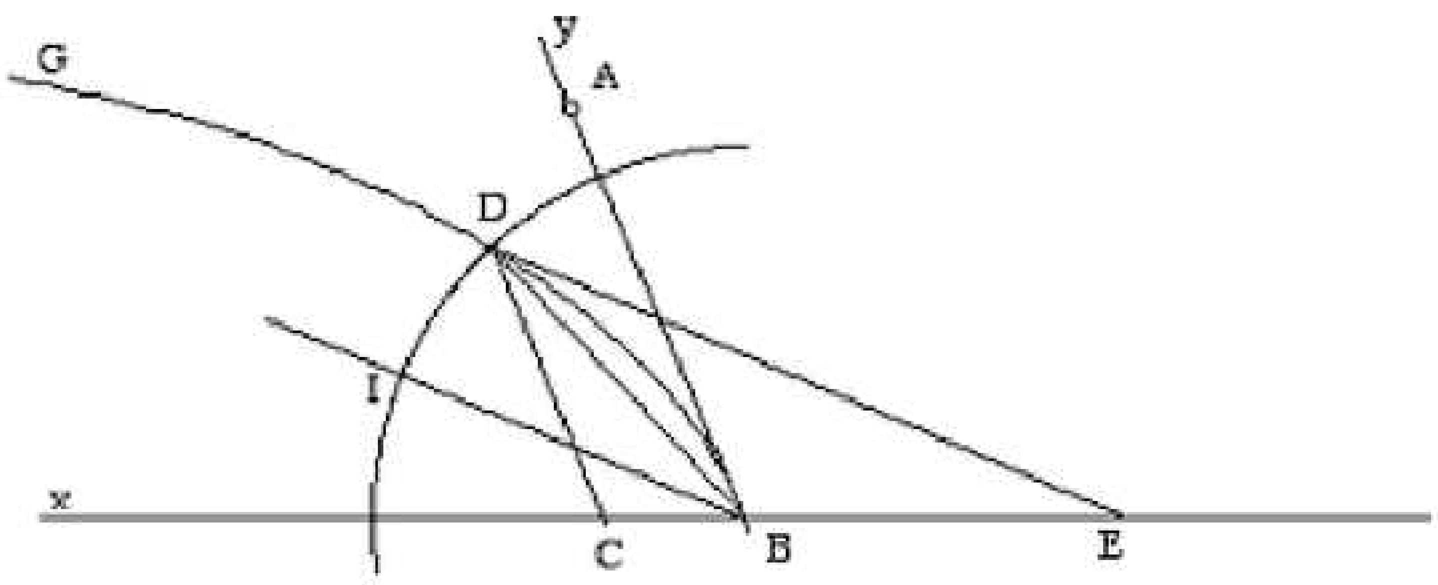
تعبر هذه المساواة عن وقوع النقطة D على قطع زائد رأسه B وقطره المجانب <العرضاني> BE *وضلعه القائم* يساوي لهذا القطر: BD = d = c (*المخروطات* I.21)؛ وزاوية ترتيبه مساوية لـــ $A\hat{B}C$. لدينا إضافة لذلك BD = BE ولذا تقع D على الدائرة التي مركزها B وشعاعها BE.



الشكل. 46

التركيب: الزاوية المعلومة $x\hat{B}y = C\hat{B}A$.

نأخذ على استقامة (Bx] نقطة ما E وننظر في القطع الزائد، ذي الرأس B والقطر العرضاني BE = d *والضلع القائم* BE = c = d، الذي يمس (By] في B، فزاوية ترتيبه هي الزاوية المعلومة.



الشكل. 47

إن معادلة القطع الزائد في جملة الإحداثيات (Bx ،By) هي $y^2 = x(d + x)$. تلقى الدائرة التي مركزها B وشعاعها BE قوس القطع BG في D. نرسم ترتيب D وليكن DC الموازي لـــ By، كما نرسم المنصف BI للزاوية DBC.

لدينا العلاقة التالية بين إحداثيي النقطة D: BC و DC.

$$DC^2 = \overline{BC} \cdot \overline{EC} \quad \text{حيث} \quad \overline{BC} > 0 \quad \text{و} \quad \overline{EC} > 0$$

ومنه

$$\frac{EC}{CD} = \frac{CD}{BC}$$

وبالتالي فالمثلثان CDE و CBD متشابهان ولدينا $C\hat{E}D = C\hat{D}B$.

ثم إن $C\hat{D}B = A\hat{B}D$ لأن $BA \parallel DC$ وبالتالي $C\hat{E}D = A\hat{B}D$. إضافة إلى ذلك

$$D\hat{B}C = B\hat{D}E + B\hat{E}D = 2B\hat{E}D$$

لكن

$$D\hat{B}C = 2C\hat{B}I = 2D\hat{B}I$$

حيث BI منصف الزاوية $D\hat{B}C$.

وبالنتيجة

$$A\hat{B}D = D\hat{B}I = C\hat{B}I$$

والزاوية $A\hat{B}C$ قد قسمت إلى ثلاث زوايا متساوية.

لنلاحظ أخيراً أن القوهي كان يعلم أن إنشاء القطع الزائد BDG ممكن حسب I.55 من *المخروطات* وأن المحاكمة لا تختلف إذا كانت الزاوية $A\hat{B}C$ منفرجة.

وهكذا نرى أن مسألة تثليث الزاوية قد تحولت لتصبح مسألة دمج مقطع مستقيم بين رأس القطع الزائد والمنحني طوله يساوي d، طول القطر العرضاني، أي مسألة تحديد نقطة على القطع تبعد عن القطع بمسافة d، هي طول القطر العرضاني المعلوم. تحل هذه المسألة بتحديد تقاطع القطع الزائد والدائرة التي مركزها رأس القطع وشعاعها مساو للقطر العرضاني.

يتم الإنشاء بواسطة الإمالات، بأن ندرج مقطعاً أحد طرفيه معلوم بينما يحدد الآخر بالتقاطع مع القطع الزائد. فالطريقة واضحة وصارمة.

إننا نجد عندما نقارن برهان القوهي مع برهان ثابت بن قرة وبابوس قبله أنه يختلف عنهما رغم اعتماده على نفس الأفكار. سابقو القوهي يبدؤون بالبرهان على مقدمتين لا وجود لهما عنده. أولى هاتين المقدمتين هي، كما رأينا، ليست سوى القضية II.4 من *المخروطات*. أما المقدمة الثانية فهي *إمالات* أنجزت باستعمال قطع زائد قائم ودائرة. ثم إن بنية البرهانين تختلف من مؤلف إلى آخر. أما في عمل القوهي تتحقق *الإمالات*[74] أثناء البرهان وهي مصاغة مباشرة في نفس المسألة. وهو ما يعبر عنه حين يكتب أنه يعمل "بطريق أقرب وأحسن من طرق القدماء"[75].

b) *في قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية*

---

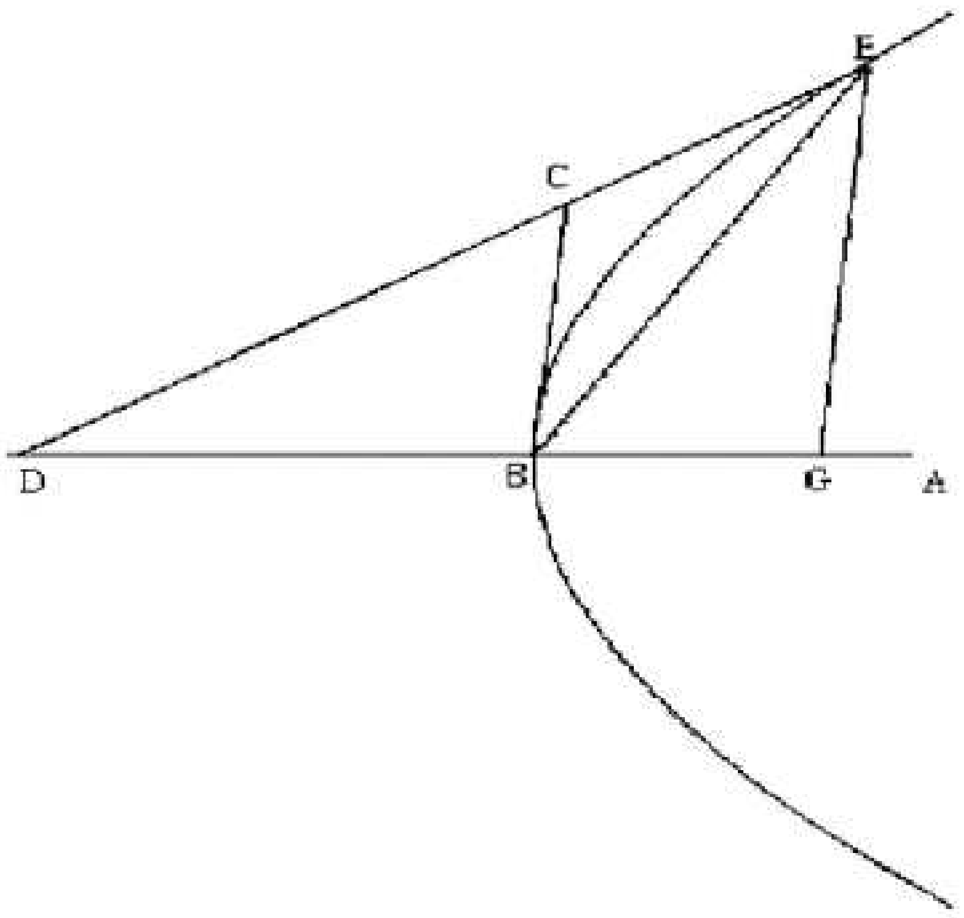
[74] We come across this *neusis* at least twice in two anonymous texts ; see R. Rashed and Ph. Abgrall, 'Le tradizioni sulle coniche e l'inizio delle ricerche sulle proiezioni', in Storia della scienza, vol. 3 : *La civiltà islamica, Enciclopedia Italiana* (Rome, 2002), pp. 385-402.

[75] ص. 495 سطر 15.

تبدأ هذه الرسالة الثانية بديباجة تعلمنا أنها كتبت استجابة لأمر من شخص ذي مقام عال، رئيس على أغلب الاحتمال لمجلس تقع فيها مناقشات المسائل اللغوية والأدبية والفلسفية على نحو ما يقع في حضرة الخليفة وملوك هذا الزمان. كما تقع مناقشات المسائل الرياضية على غرار مسألة تثليث الزاوية. فمن الطبيعي أن يتوقع المرء أن يكون القوهي قد وضع الخطوط العريضة لهذه المسألة دون الدخول في تفاصيلها. وهكذا نراه يعرض حله:

نريد إذاً أن نفصل بواسطة مقطع مستقيم ثلث زاوية ABC. لنمدد AB إلى نقطة D كيفما اتفق. نرسم القطع الزائد BE ذا القطر العرضاني BD و*الضلع القائم* المساو لـــ BD بحيث تكون الزاوية المحصورة بين الترتيب والمحور AB مساوية للزاوية ABC. هذا الإنشاء ممكن حسب أبلونيوس I.55.

لنأخذ BD = BE ولنصل E بـــ D. لدينا $E\hat{B}C = \frac{1}{3}\, A\hat{B}C$



الشكل. 48

البرهان: لنرسم ترتيب EG، لدينا

$$\frac{DG \cdot GB}{EG^2} = \frac{\text{الضلع القائم}}{\langle \text{القطر العرضاني} \rangle}$$ [من أبلونيوس I.21]

أي أن

$$\frac{DG \cdot GB}{EG^2} = \frac{BD}{BD}$$ ذلك أن BD = BE فرضاً

إذاً

$$DG \cdot GB = EG^2$$

ومنه

$$\frac{DG}{EG} = \frac{EG}{GB}$$

إضافة إلى ذلك، بما أن الزاوية EGD مشتركة بين المثلثين EBG و DEG فإنهما متشابهان، وبالتالي

$$B\hat{D}E = B\hat{E}G \qquad (1)$$

وبما أن المثلث BDE متساوي الساقين فإن

$$E\hat{B}G = 2B\hat{D}E \qquad (2)$$

ينتج عن هاتين العلاقتين (1) و(2) أن

$$E\hat{B}G = 2B\hat{E}G$$

ومن توازي المستقيمين BC و EG، فإن

$$B\hat{E}G = E\hat{B}C$$

وبالتالي

$$E\hat{B}G = 2E\hat{B}C$$

ولكن

$$A\hat{B}C = E\hat{B}G + E\hat{B}C$$

إذاً

$$A\hat{B}C = 3E\hat{B}C$$

لم يشر القوهي في هذا التركيب بشيء إلى الدائرة الداخلة ضمنياً بأخذ BE = BD.

لا تضيف هذه الرسالة شيئاً إلى سابقتها سوى أن كلا منهما توثق الحقيقة التاريخية للأخرى. فالطريقة هنا أيضاً هي إدخال المقطع BE ذي الطول المعلوم d (طول القطر العرضاني) بين رأس القطع الزائد B والمنحني نفسه؛ وهذا ما يقوده إلى الحصول على النقطة E كتقاطع المنحنيين.

$$(\mathscr{H}) = \{(x, y);\ y^2 = x(d + x),\ d > 0\};$$
$$(\mathscr{C}) = \{M;\ d(M, B) = d\}$$

ويستعمل القوهي في كلا النصين القضايا ذاتها من أبلونيوس. ومن المحتمل أن يكون النص الثاني متأخراً عن الأول وأنه كتب بعد سابقه للرد على أحد مراسليه.

c) *في استخراج خط بين خطين حتى تتوالى الأربعة على نسبة وقسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية*

تعالج هذه المقالة تقسيم زاوية معلومة E إلى ثلاثة أقسام متساوية. يأخذ القوهي مرة ثانية القطع الزائد ($\mathscr{H}$) ذا الرأس B و*الضلع القائم* المساوي للقطر العرضاني BC وزاوية الترتيب مساوية للزاوية E المطلوب تثليثها. يمكن إنشاء القطع الزائد حسب I.55 من *المخروطات*.

لتكن A نقطة على $\mathscr{H}$ بحيث يكون AB = BC. يكافئ هذا الفرض استعمال *الإمالات*، أي إدخال مستقيم AB بين المنحني ورأسه، يساوي طوله طول القطر العرضاني d. يحول القوهي هذه المسألة، بإدخاله AB = BC، إلى إيجاد النقطة التي يقطع فيها القطع الزائد $\mathscr{H}$ الدائرة $\mathscr{C}$(B; BC) التي مركزها B وشعاعها BC. لدينا

$$\frac{CD \cdot DB}{AD^2} = \frac{AB}{BC}$$ [من أبلونيوس I.21]

إذاً

$$CD \cdot DB = AD^2$$

و

$$A\hat{B}D = C\hat{A}D$$

[لأن المثلثين ACD وBAD متشابهان كما رأينا أعلاه].

لكن $D\hat{B}A = 2A\hat{C}D$، لأن $AB = BC$، إذاً

$$C\hat{A}D = 2A\hat{C}D$$

ومنه

$$C\hat{A}D + A\hat{C}D = 3A\hat{C}D$$

لكن

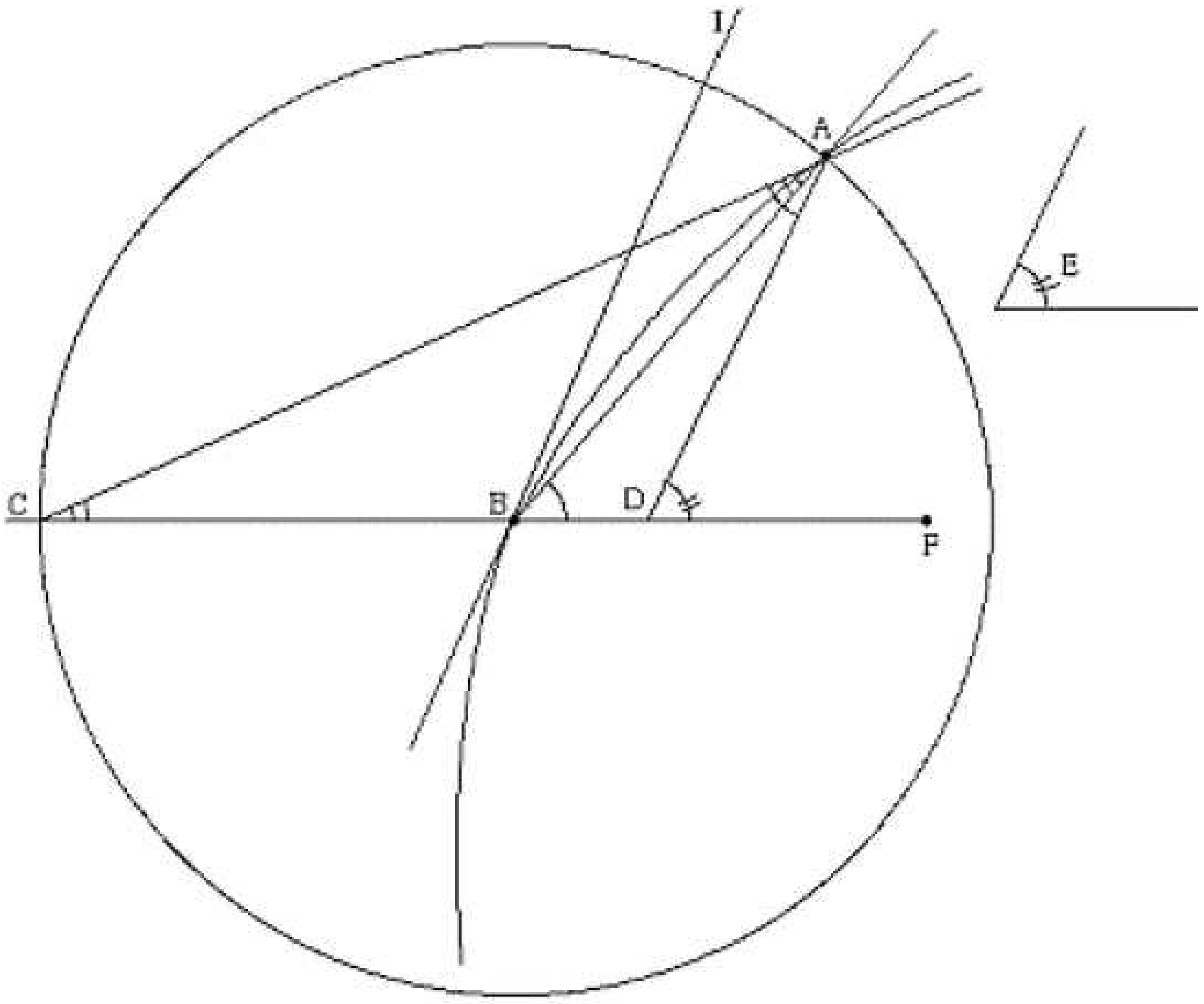
$$A\hat{D}F = D\hat{A}C + A\hat{C}D$$

إذاً

$$A\hat{D}F = 3\hat{C}$$

أي

$$A\hat{C}B = \frac{1}{3}\hat{E}$$



الشكل. 49

لقد وضع القوهي، لتثليث الزاوية E، $A\hat{D}F = \hat{E}$ ، وأصبحت المسألة هي إنشاء زاوية تساوي ثلث زاوية معلومة وليس إيجاد نصف المستقيم من الرأس الذي يقسم الزاوية إلى قسمين أحدهما ثلث الزاوية. يدخل القوهي بعدئذ المستقيم ذا الطول المعلوم حتى يجد النقطة A.

لتكن B و C نقطتين لا على التعيين على DF و (Bx, By) محورين مائلين بينهما زاوية تساوي E.

ليكن
$$(\mathscr{H}) = \{(x, y);\ y^2 = x(d + x),\ d > 0\}$$
$$(\mathscr{C}) = \{M;\ d(M, B) = d\}$$

ولتكن $A \in (\mathscr{H}) \cap (\mathscr{C})$، إذاً
$$B\hat{C}A = \frac{1}{3}\,\hat{E}$$

وهكذا تتضمن طريقة القوهي كجزء من البرهان تبيان نتيجة كان من الممكن فصلها عنه على شكل مقدمة. وهي على وجه التحديد: لتكن IBF زاوية معلومة، تساوي زاوية المسألة E. لتكن $\mathscr{C}(B, r)$ نصف دائرة مركزها B وشعاعها r. المطلوب إيجاد نقطة D على BF بحيث يتحقق، في حال توازي DA و BI، ووقوع A على $\mathscr{C}(B, r)$ ووجود C على BF، $BC = r$، ما يلي
$$AD^2 = CD \cdot BD$$
التي هي في الواقع معادلة القطع الزائد الذي رأسه B وقطره العرضاني BC و*ضلعه القائم* BC.

يصعب علينا التأكد من موقع هذه الدراسة بالنسبة للدارستين الأخرتين. فهي لا تختلف عنهما من حيث الطريقة المتبعة فحسب، وإنما من حيث التنظيم والمرمى كذلك. فهنا يجمع القوهي بين المسألتين المجسمتين الموروثتين عن سابقيه – متوسطيّ التناسب وتثليث الزاوية – وينحو فيهما منحى ثابت بن قرة وبابوس. صحيح أنه لم يستعمل المقدمات التي افتتحت بها دراساتهما، إلا أن ما من شك في وحدة الأفكار والأساليب التي تجمع بين عمل القوهي وعمل هذين السابقين[76]. لعل هذه المقالة قد جاءت قبل الدراستين الأخرتين؟ إنه على كل محال مجرد تخمين.

d) *تثليث الزاوية وعمل المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة*

إن النتائج التي يصل إليها القوهي في هذه الدراسة هي في الواقع نتائج وجدت بشكل أو بآخر في أعمال رياضيين آخرين معاصرين مما يجعلنا نطرح التساؤلات عن التاريخ المحتمل لتأليف هذه الدراسة. إنها مسألة صعبة تعود بنا إلى تاريخ المسبع المنتظم وهو تاريخ تتبعناه في مكان آخر[77]. سنذكر هنا عابرين وباختصار بعض العناصر التي سنحتاجها.

نعلم من كتابات بعض رياضيي القرن العاشر، أبو الجود، السجزي والشني[78]، أن الأول منهم كتب دراسة (لم تعد موجودة الآن) تعيد مسألة إنشاء المسبع المنتظم إلى إنشاء مثلث من النوع $\left[\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}\right]$ أي $[1, 3, 3]$. كتبت هذه الرسالة في عام 358 هـ أي في 968–969م. وقد كتب أبو الجود في جدل مشهود عن رسالته: "وعلمت أن بعض المهندسين نسب هذا العمل جزافاً إلى أبي سهل القوهي، ثم غير بعضه وانتحله لنفسه"[79]. وأضاف أنه هو من قام بهذا الإنشاء مستعملاً قطعاً مكافئاً وفرع قطع زائد. أما "أحد المهندسين" فهو ليس سوى معاصر أبي الجود وعدوه اللدود السجزي.

وفي كل الأحوال فإن هذا النص المجادل يبين بوضوح أن القوهي قام بدراسة استعمل فيها مثلثاً من النوع $[1, 3, 3]$، ادعى كل من الخصمين أن الآخر انتحلها لنفسه. ولا بد إذاً أن تكون هذه الدراسة قد ألفت في أواخر الستينات أو في مطلع العقد التالي. نعلم أيضاً أن القوهي كتب في 969–970 دراسة لإنشاء المسبع المنتظم أعاد فيها الإنشاء إلى إنشاء مثلث من النوع $[1, 2, 4]$. وهكذا فالدراسة تنتمي إلى تقليد الإنشاء الأرخميديسي. وعاد القوهي إلى كتابة دراسة لاحقة استعمل فيها مثلثاً من النوع $[1, 5, 1]$، كأحد أشكال طريقة الإنشاء. وهو بطبيعة الحال لم يعد ليهتم في هاتين الدراستين بمسألة الروابط بين تثليث الزاوية وإنشاء المسبع المنتظم. ومن ناحية أخرى فإن السجزي، معاصره، ينهي رسالته في إنشاء المسبع المنتظم بمسألة تثليث الزاوية؛ وهذا ما يقودنا إلى الاعتقاد أن الروابط بين

---

[76] علينا إضافة إلى ذلك أن نتذكر أن هاتين المسألتين مترابطتان: لقد اكتشف آ. دو موافر A. de Moivre في مطلع القرن الثامن عشر مستعملاً الأعداد التخيلية أن تقسيم الزاوية إلى n قسماً متساوياً يعود إلى استخراج الجذر النوني ($n^{ième}$).

[77] *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3, chap. III.

[78] Ibid.

[79] *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3, p. 694.

المسألتين كانت محل نقاش منذ أيام الخازن على أقل تقدير. ثم إن السجزي – الذي يعترف بمعرفته بدراسة القوهي – قد ألف رسالته في أوائل السبعينات. كما أن المقارنة بين عرض السجزي للتثليث في رسالته وعرض القوهي توضح أنهما عرض واحد أساساً.

كل هذا يشير إلى أن دراسة القوهي تعود إلى أواخر الستينات أو إلى أوائل العقد الذي يليه على أبعد تقدير وأن القوهي، متبعاً في ذلك الخازن، قد طرح مسألة الروابط بين التثليث وإنشاء المسبع المنتظم. وصلنا هذا المقطع من القوهي في نسخة عملها أحد خلفائه. ويبدأ بمقدمتين أولاهما تذكر بالقضية I.4 من *المخروطات*: يقطع مستوى مواز للقاعدة سطح المخروط حسب دائرة. تتعلق المقدمة الثانية بإنشاء قطع زائد يصنع أحد قطريه زاوية معلومة M مع اتجاه التراتيب.

يُعرف المخروط بأخذ مثلث متساوي الساقين ABC قائم الزاوية في A، A رأس المخروط، AD محوره وBC قطر دائرة القاعدة. يبين القوهي أنه إذا شكل مستوى دائرة القاعدة مع مستوى المثلث ABC زاوية مزدوجة، الزاوية المستوية المقابلة لها هي الزاوية المعطاة M، فإن قطع المخروط بمستو مواز لـ AD وعمودي على المستوي ABC هو قطع زائد يحقق شروط حل المسألة. ويساوي القطر العرضاني في هذا القطع الزائد *الضلع القائم* المقترن به.

يستعمل القوهي، بعد برهانه على هاتين المقدمتين، تقاطع هذا القطع الزائد مع دائرة مركزها رأس القطع وشعاعها مساو للقطر العرضاني لإنشاء أول تثليث لزاوية تساوي M. وإليكم ما يعمل:

نرسم قطعاً زائداً قطره العرضاني AB؛ إن مماسه في الرأس B يوازي محور التراتيب. لدينا

$$C\hat{G}B = A\hat{B}E = \pi - \hat{M}$$

لأن $C\hat{G}$ هو ترتيب C؛ كما أن

$$GC^2 = GA \cdot GB$$

وإذا فرضنا أن *الضلع القائم* يساوي القطر العرضاني، فإن

$$\frac{GA}{CG} = \frac{CG}{GB}$$

والمثلثان GCA و GBC، المشتركين بالزاوية G متشابهان وبالتالي

$$C\hat{A}G = B\hat{C}G$$

كما أن BC = BA فـ

$$C\hat{A}G = A\hat{C}B$$

ومن توازي BE و CG، فإن

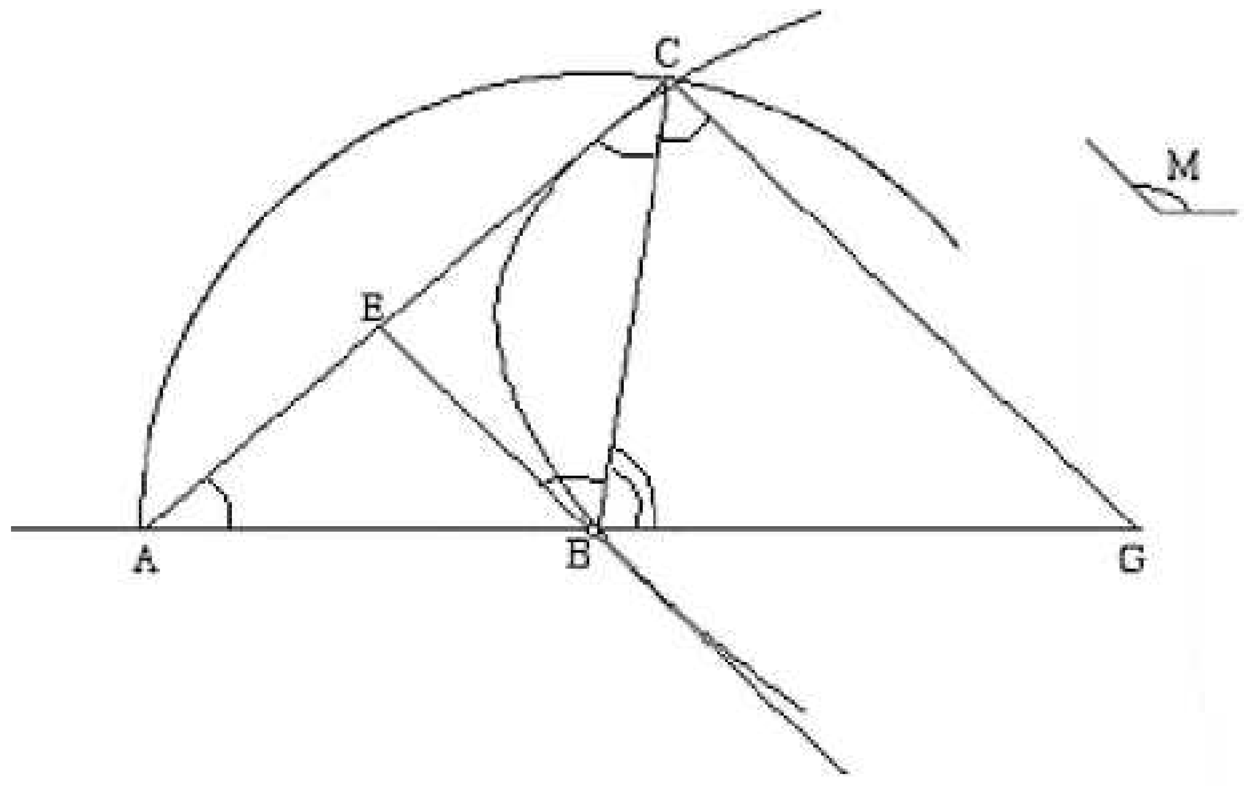
$$E\hat{B}C = G\hat{C}B$$

أي

$$C\hat{B}G = B\hat{C}A + C\hat{A}B = 2C\hat{A}B = 2B\hat{C}G = 2C\hat{B}E$$

وأخيراً

$$C\hat{B}E = \frac{1}{3} E\hat{B}G$$



الشكل. 50

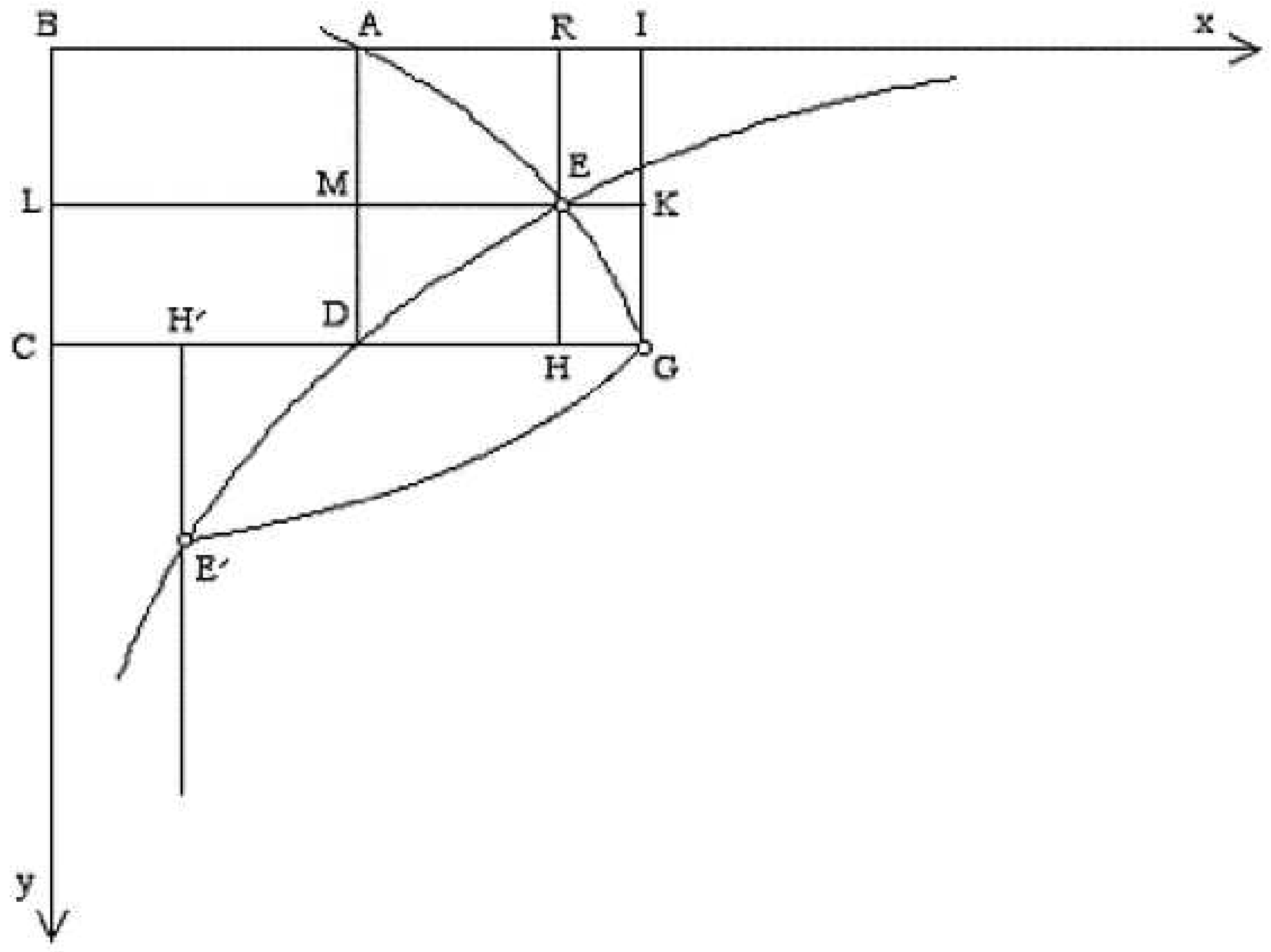
وهكذا يدخل القوهي بهذه الطريقة مقطعاً مستقيماً بين النقطة B، رأس القطع الزائد، والمنحني نفسه طوله يساوي طول القطر العرضاني. فهي إذاً لا تختلف عن الطريقة المتبعة في الدراسات السابقة. غير أنه يعرض بعد ذلك طريقة أخرى تستعمل تقاطع قطع زائد قائم وقطع مكافئ.

نبدأ من مربع ABCD وننشئ القطع الزائد المار من D ذا المقاربين AB و BC. ثم نمدد CD بطول DG يساويه ونرسم القطع المكافئ الذي رأسه G ومحوره GC و*ضلعه القائم* GD، يقطع القطع الزائد في النقطة E. نرسم ترتيبها EH، لدينا

$$EH^2 = DG \cdot GH$$

التي تعطي

$$\frac{DG}{HE} = \frac{HE}{HG} \qquad (1)$$



الشكل. 51

نرسم EML || GC و GKI || BC. لدينا ML = AB

وسطح ABCD = سطح BLER، لأن المنحني قطع زائد. فإذا طرحنا سطح AL حصلنا على

سطح LD = سطح AE

فإذا أضفنا إليهما سطح DE حصلنا على

سطح AH = سطح LH

أي

$$CH \cdot HE = AD \cdot DH \qquad \text{مع} \qquad AD = CD$$

ومنه

$$\frac{CH}{DH} = \frac{AD}{HE} \qquad (2)$$

لنعبر عن هذا بشكل آخر. لنأخذ المربع ABCD على محوري الإحداثيات المتعامدين (By ،Bx) حيث A على Bx و C على By. نرسم فرع قطع زائد قائم $\mathscr{H}_D$ يمر بـــ D وله المقاربان Bx، By، والقطع المكافئ $\mathscr{P}$ الذي رأسه: G(2a, a) وضلعه *القائم* a، ومحوره GC || Bx. لدينا

$$\mathscr{H}_D = \{(x, y);\ xy = a^2;\ x > 0,\ y > 0\}$$

$$\mathscr{P} = \{(x, y);\ (y - a)^2 = a(2a - x)\}$$

لدينا أياً كانت النقطة على $\mathscr{H}_D$.

$$a(x-a) = x(a-y) \Leftrightarrow (a-y) = \frac{a}{x}(x-a) \qquad (3)$$

بتبديل y من (3) في معادلة القطع المكافئ نحصل على

$$a(x-a)^2 = x^2(2a-x)$$

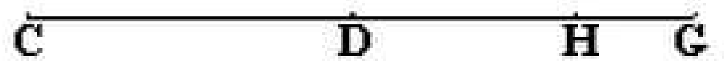
أي

$$x^3 - ax^2 - 2a^2x + a^3 = 0 \qquad (4)$$

ومنها

$$f(0) = a^3, \quad f(a) = -a^3, \quad f(2a) = a^3$$

هذا يعني أن للمعادلة (4) ثلاثة جذور $x_1 < 0$ معطياً نقطة على فرع القطع الزائد الثاني و $0 < x_2 < a$ و $a < x_3 < 2a$. يعطي الجذر الثالث x_3 النقطة E التي استعملت في المسألة. وتقابلها النقطة H التي أعطت التقسيم:



الشكل. 52

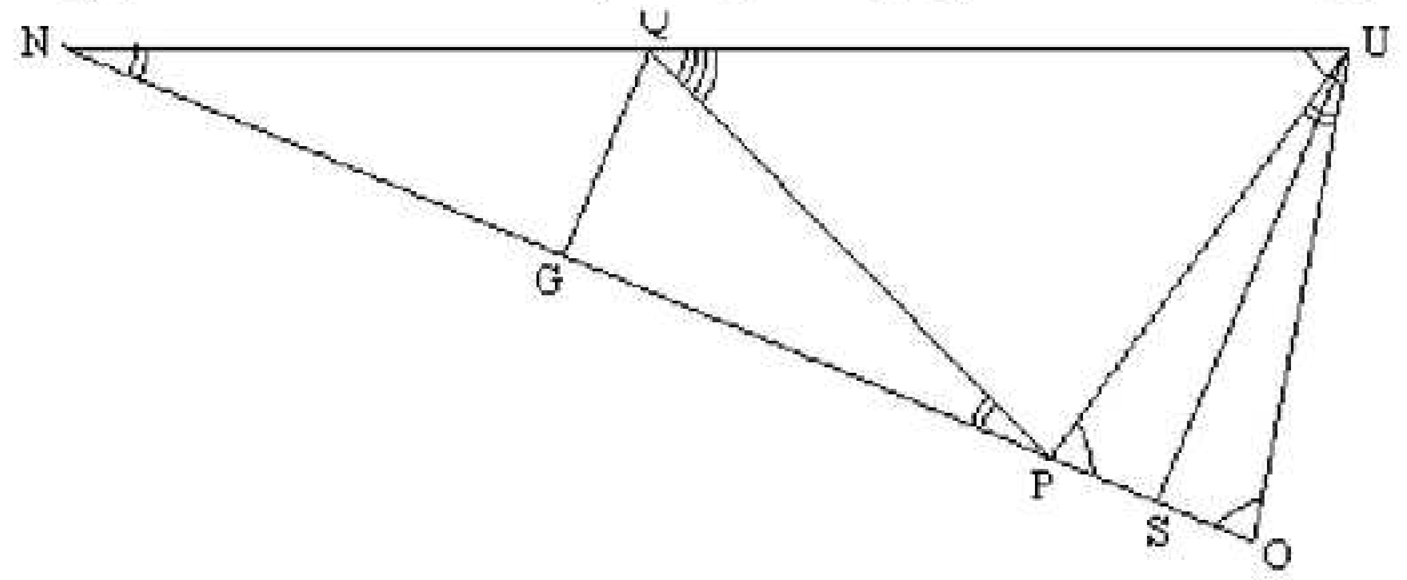
لنلاحظ أن القوهي لم يستعمل النقطة الواقعة على $\mathscr{H}_D$ التي تقابل الجذر x_2.

يأخذ القوهي بعد ذلك الأطوال CD، DH، HG وكذلك EH لإنشاء مثلث متساوي الساقين، ويبرهن أن زاوية الرأس هي ثلث كل من زاويتي القاعدة، أي من النوع [1, 3, 3]. ولذا فهو يقوم بإنشاء مثلث متساوي الساقين UNO حيث UN = NO = DC = DG. ويحدد نقطة Q على NU تحقق NQ = EH = UO، وأخرى P على NO تحقق OP = GH. فإذاً PN = HD.

ينتج من (1)

$$\frac{NU}{UO} = \frac{UO}{OP}$$

وهذا ما يبين تشابه المثلثين NUO، PUO (زاوية مشتركة O)؛ فالمثلث PUO متساوي الساقين و $\hat{PUO} = \hat{UNO}$.



الشكل. 53

ينتج من (2) أن $\frac{HE}{DH} = \frac{AD}{CH}$

$$\frac{NQ}{NP} = \frac{UN}{UN + NP}$$

لتكن S وسط PO، $US \perp NO$، إن

$$\frac{1}{2}(UN + NP) = NP + PS = NS$$

ولذا فإن العلاقتين السابقتين تعطيان

$$\frac{NQ}{\frac{1}{2}NP} = \frac{UN}{NS}$$

لنأخذ $QG \perp NO$ $(QG \parallel US)$

$$\frac{UN}{NS} = \frac{NQ}{NG}$$

$\frac{1}{2}NP = NG$، النقطة G وسط NP والمثلث NQP متساوي الساقين و

$$NQ = QP = UO = UP$$

تساوي الزاوية الخارجية $P\hat{Q}U$ ضعف الزاوية $Q\hat{N}G$: $P\hat{Q}U = Q\hat{N}G + Q\hat{P}G = 2\hat{N}$ وهي تساوي $P\hat{U}Q$ (PQU متساوي الساقين) وبما أن $P\hat{U}O = \hat{N}$، نرى أن

$$N\hat{U}O = N\hat{U}P + P\hat{U}O = 3\hat{N}$$

وبهذا تكون المسألة قد حلت.

إن هذا الإنشاء لمثلث من النوع [1, 3, 3] يمكن القوهي من إنشاء مسبع في الدائرة مستعملاً التشابه. وسنجد هذا الإنشاء عند السجزي كذلك[80].

لنلاحظ في الختام، أن القوهي يبدأ في هذه الدراسة بإنشاء تثليث لزاوية لا على التعيين ثم يعرض طريقة لإنشاء مثلث متساوي الساقين زاوية رأسه ثلث زاوية القاعدة. ويجب أن يكون مجموع الزوايا مساوياً لـــ π وهذا ما يحدد زاوية القاعدة بـــ $\frac{3\pi}{7}$. وهو ما يتطلبه الإنشاء.

ويمكن، على أي حال، النظر إلى إنشاء هذا المثلث انطلاقاً من تثليث زاوية ما يتحقق إنشاؤه بالمسطرة والبركار على النحو التالي:

---

[80] See *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3, lemma 1, p. 365 and lemma 2, pp. 367 and 368.

إن المعادلة (4) التي تعطي $x = CH$ تتحول في حقيقة الأمر إلى معادلة تحدد تثليث زاوية ما. وهي معادلة من الشكل $4z^3 - 3z - \cos\theta = 0$ حيث θ هي الزاوية المراد تثليثها و $z = \cos\frac{\theta}{3}$. لنبدل الآن في المعادلة (4) x بالمقدار $x = \frac{a}{3}\left(1 + 2z\sqrt{7}\right)$ فتصبح المعادلة بعد الآخذ بعين الاعتبار أن

$$x^2 = \frac{a^2}{9}\left(1 + 4z\sqrt{7} + 28z^2\right)$$

$$x^3 = \frac{a^3}{27}\left(1 + 6z\sqrt{7} + 84z^2 + 56z^3\sqrt{7}\right)$$

على الشكل

$$\frac{7}{27} - \frac{14\sqrt{7}}{9}z + \frac{56\sqrt{7}}{27}z^3 = 0$$

أو

$$4z^3 - 3z + \frac{1}{2\sqrt{7}} = 0$$

وبالمقارنة بين المعادلتين نرى أن الزاوية المطلوب تثليثها معرفة بـــ $\cos\theta = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$ أي أنها زاوية منفرجة.

نحدد الزاوية θ بتعيين جذر $\frac{1}{28}$ أولاً، باستعمال إنشاء معروف بالمسطرة والبركار. نطبق بعد ذلك الطريقة الأولى في تقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية ونجد بالتالي $z = \cos\frac{\theta}{3}$، لدينا إذاً

$$CH = x = \frac{1}{3}CD\left(1 + 2\sqrt{7}\cos\frac{\theta}{3}\right)$$

لقد استمر البحث في تثليث الزاوية بصورة مكثفة، بعد القوهي وفي أيامه، كما يمكن أن نراه على وجه الخصوص في أعمال السجزي والصاغاني والبيروني وغيرهم. سنعالج، لتجنب الإطالة في هذا العرض أعمال هؤلاء الرياضيين في مكان آخر[81].

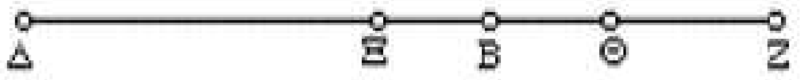
5.3 *مقدمة أرشميدس في قسمة المستقيم*

إن من بين المسائل التي ورثها الرياضيون عن سابقيهم الإغريق المسألة التي طرحها أرشميدس في كتابه في *الكرة والأسطوانة* بدون أن يعطي حلاً لها. وهي مقدمة القضية الرابعة من الكتاب الثاني التي أوردها أرشميدس على الشكل التالي:

---

[81] R. Rashed, *Œuvres mathématiques d'al-Sijzī*, vol. 1.

لذا يجب علينا قطع المقطع من المستقيم ΔZ في نقطة Ξ بحيث تكون نسبة ΞZ إلى مقطع معلوم $Z\Theta$ كنسبة مربع معلوم على $B\Delta$ إلى المربع على $\Delta\Xi$[82].



الشكل. 54

وحسب النص اليوناني، فقد تابع أرشميدس بتحديد الشروط الخاصة للمسألة المدروسة في القضية موضع البحث، أي $\Delta B = 2BZ$ و $ZB > Z\Theta$ وهو ما يرجعنا إلى الصياغة التالية:

المقطعان المستقيمان $B\Delta$ و BZ معلومان، و $B\Delta$ ضعف BZ، والنقطة Θ على BZ معطاة أيضاً. قسم ΔB في نقطة Ξ بحيث يكون المربع على ΔB إلى المربع على $\Delta\Xi$ كنسبة ΞZ إلى $Z\Theta$؛ ستفحص كل واحدة من هذه المسائل في الأخير (ἐπὶ τέλει)[83].

لم يف أرشميدس بوعده كما يشهد على ذلك ديوقليس[84] الذي أتى بعده بجيل أو جيلين؛ برهن عليها ديونيسودورس Dionysodorus بنفسه بعد ذلك، كما فعل أوطوقيوس أخيراً[85]. وقد عرض هذا الأخير حلاً بواسطة القطع المكافئ والقطع الزائد.

كان الرياضيون العرب على علم بنصوص أرشميدس وأوطوقيوس وبدأوا مبكراً بالاهتمام بهذه المسألة. وهكذا، وقبل القوهي، درس كل من الماهاني والخازن المسألة غير متوقفين عند هذا الحد، بل نقلوها إلى لغة الجبر معبرين عنها بمعادلة تكعيبية حلها الخازن بواسطة تقاطع قطعين مخروطيين[86]. لكن القوهي، رغم كونه خليفة الخازن، اختار المقاربة الهندسية متعمداً وتبعه في هذا خليفته ابن الهيثم[87]. لم يمنع هذا على كل حال الوصول إلى نتيجتين جبريتين هامتين من دراسة القوهي الهندسية: تعميم طريقة استعمال السطوح؛ وشرط وجود جذور موجبة للمعادلات التكعيبية حالما نكتب هذا الشرط الهندسي بعبارات جبرية. تبين هاتان النتيجتان بالذات أهمية رسالة القوهي. فلننظر إذاً إلى تعامله مع هذه المسألة.

[82] Archimède, *De la sphère et du cylindre*, ed. and French transl. by Ch. Mugler, p. 113. On the history of this problem, see Oskar Becker, *Das mathematische Denken der Antike* (Göttingen, 1966) pp. 89-90; Th. Heath, *The Works of Archimedes* (Cambridge, 1899; Dover Reprint), pp. 65-79; E. J. Dijksterhuis, *Archimedes*, trans. By C. Dickshoorn with a new bibliographic essay by Wilbur Knorr (Princeton, 1987), pp. 143-205.

[83] Archimède, *De la sphère et du cylindre*, p. 113, 10-14, modified translation.

[84] R. Rashed, *Les Catoptriciens grecs*, p. 121, 20-21.

[85] Archimède, *Commentaire d'Eutocius*, p. 88.

[86] See the testimony of al-Khayyām in R. Rashed and B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathematicien*, p. 116 [English trans., p. 111].

[87] *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3.

مقدمة: ليكن لدينا المقطعان المستقيمان AB و C؛ المطلوب إيجاد نقطة D على AB، بين A و B أو وراء B تحقق $\frac{AD}{C} = \frac{C^2}{BD^2}$ أو $AD \cdot BD^2 = C^3$.

نجد هنا المسألة التي طرحها أرشميدس في *الكرة والأسطوانة* II.4، مع فارق وحيد إذ يأخذ أرشميدس مقطعاً C وسطحاً Γ لا صلة له بـــ C بينما $\Gamma = C^2$ عندنا. هذا لا يعني أن معادلة القوهي أقل عمومية، لأنه من الممكن دوماً إنشاء مقطع 'C يحقق $C \cdot \Gamma = C'^3$ حالما نعرف إدخال متوسطي تناسب بين مقدارين معلومين. لنلاحظ أن القوهي بتبنيه هذا الشكل يعبر عن شروط الحل بإعطاء حد أعلى للمقطع 'C، بينما يعبر عنه أوطوقيوس في شرحه بإعطاء حد أعلى للحجم $C \cdot \Gamma$.

لنفرض $C = BE$ و E و D في نفس الجهة بالنسبة لـــ B. نتمم المربع BEGH. ليكن $\mathscr{P}$ القطع المكافئ ذا الرأس A والمحور AB و*الضلع القائم* C؛ وليكن $\mathscr{H}$ القطع الزائد ذا الرأس G والخطين المقاربين BE و BH. لتكن I نقطة مشتركة بين $\mathscr{P}$ و $\mathscr{H}$.

لدينا $ID \perp AB$، $IK \perp BH$.

(1) $I \in \mathscr{P}$ فـــ $ID^2 = C \cdot AD$

(2) $I \in \mathscr{H}$ فـــ $BE \cdot EG = BK \cdot KI = ID \cdot DB = C^2$

نستخلص من (1) و(2)

$$\frac{ID}{C} = \frac{AD}{ID} = \frac{C}{DB}$$

ومنه

$$\frac{AD}{C} = \frac{C^2}{DB^2}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

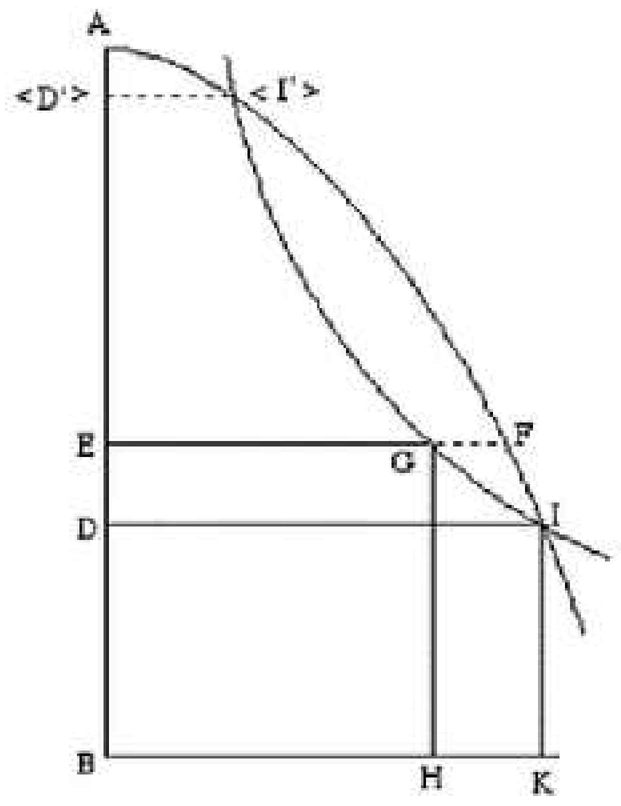
ملاحظة حول وجود I:

إن النقطة G، رأس القطع الزائد، واقعة في حال الشكل 55.2 داخل القطع المكافئ؛ ذلك أنه إذا كانت F النقطة على القطع المكافئ الواقعة على امتداد G أي التي مسقطها على AB هو E فإن $EF^2 = AE \cdot C = (AB + C)C$ وبالتالي $EF > C$ ويتقاطع القطعان $\mathscr{P}$ و $\mathscr{H}$ في النقطة I الواقعة على القوس AF.

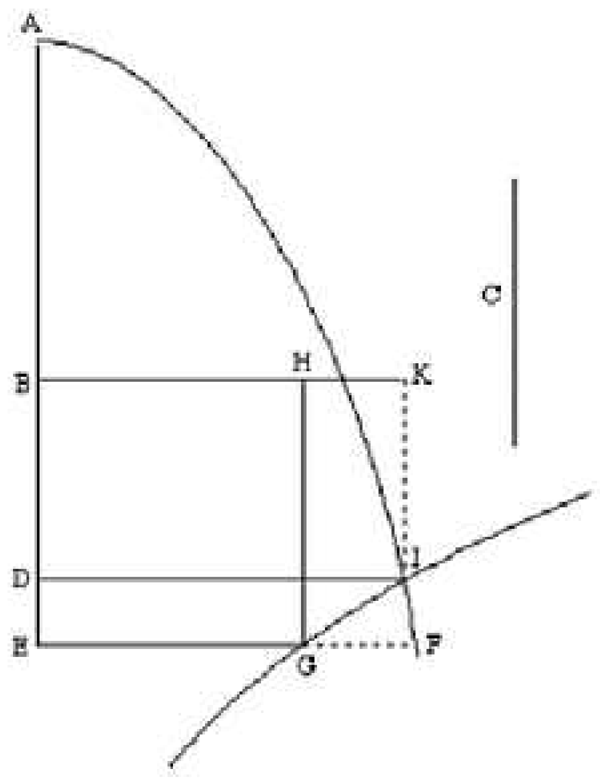
إلا أنه لا بد في حالة الشكل 55.1، من إجراء مناقشة لم يقم بها المؤلف مع أنه أعطى الشرط مما يدعونا إلى الاعتقاد أنه نظر فيه.

يمكننا في الواقع النظر في ثلاث حالات:

1) الحالة الأولى هي حالة الشكل في المخطوطة (55.1). يتقاطع القطعان في نقطتين I و 'I وبالتالي هناك حلان D و 'D.

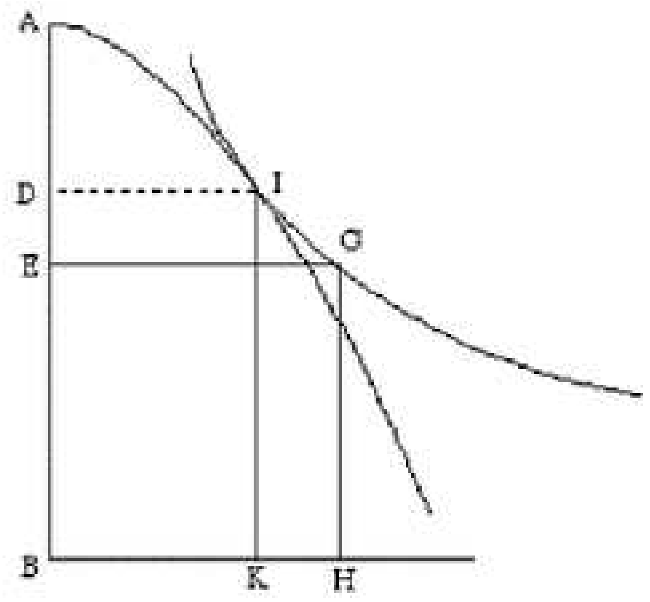


الشكل. 55.1



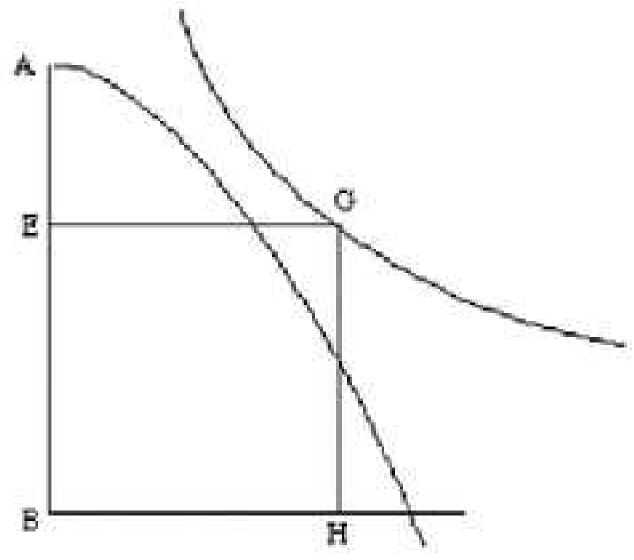
الشكل. 55.2

2) حالة الشكل 55.3. القطع المكافئ والقطع الزائد متماسان في I التي تقابلها النقطة D.



الشكل. 55.3

3) حالة الشكل 55.4. لا يتقاطع القطع المكافئ مع القطع الزائد في هذه الحالة ولا وجود للنقطة D بين A و B.



الشكل. 55.4

يمكن إعادة مناقشة هذه المسألة إلى مناقشة معادلة من الدرجة الثالثة. نأخذ نصف المستقيم AB كمحور ونفترض $AB = a > 0$، $AD = x > 0$ و $BD = a - x$، ونرمز بـــ c لطول المقطع المعلوم C. لدينا

$$\frac{AD}{c} = \frac{c^2}{BD^2}$$

أو
$$c^3 = x(a - x)^2$$

للدالة $f(x) = x(a - x)^2$ نهاية عظمى في النقطة $x = \frac{a}{3}$ ، ولدينا $M = f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{4a^3}{27}$. نكتب المعادلة $f(x) = c^3$ ولدينا

1) إذا كانت $0 < c^3 < \frac{4a^3}{27}$ فللمعادلة ثلاثة جذور

$$0 < x_1 < \frac{a}{3} < x_2 < a < x_3$$

الشكل. 56.1

2) إذا كانت $c^3 = \frac{4a^3}{27}$ ينطبق عندئذ الجذران x_1 وx_2، $x_1 = x_2 = \frac{a}{3}$ ويبقى الجذر الثالث $x_3 > a$.

الشكل. 56.2

3) إذا كانت $c^3 > \frac{4a^3}{27}$ فليس للمعادلة إلا جذر وحيد $x_3 > a$.

الشكل. 56.3

تعود طريقة القوهي في واقع الأمر إلى أخذ A وB كنقطتين معلومتين والبرهان أن للدالة $f(D) = AD \cdot BD^2$، $D \in [A, B]$، نهاية عظمى من أجل النقطة D التي تحقق $AD = \frac{AB}{3}$. ولم يأخذ بعين الاعتبار D الواقعة على امتداد AB. ومع أنه لم يقم بأي مناقشة فإنه يؤكد بدون أي لبس ضرورة أن تكون $c^3 \le \frac{4a^3}{27}$.

والآن، وقد أثبتت هذه المقدمة وجود النقطة D التي تحقق

$$AD \cdot BD^2 = C^3 \qquad (1)$$

و

$$AD = BD \pm BD \qquad (2)$$

فإن القوهي يبين ضرورة كون $\frac{4a^3}{27} \leq c^3$ في حالة $AD = AB - BD$، وهو شرط أشار إليه في مطلع النص.

نستخلص من (2)

$$AD \cdot BD^2 = AB \cdot BD^2 \pm BD^3$$

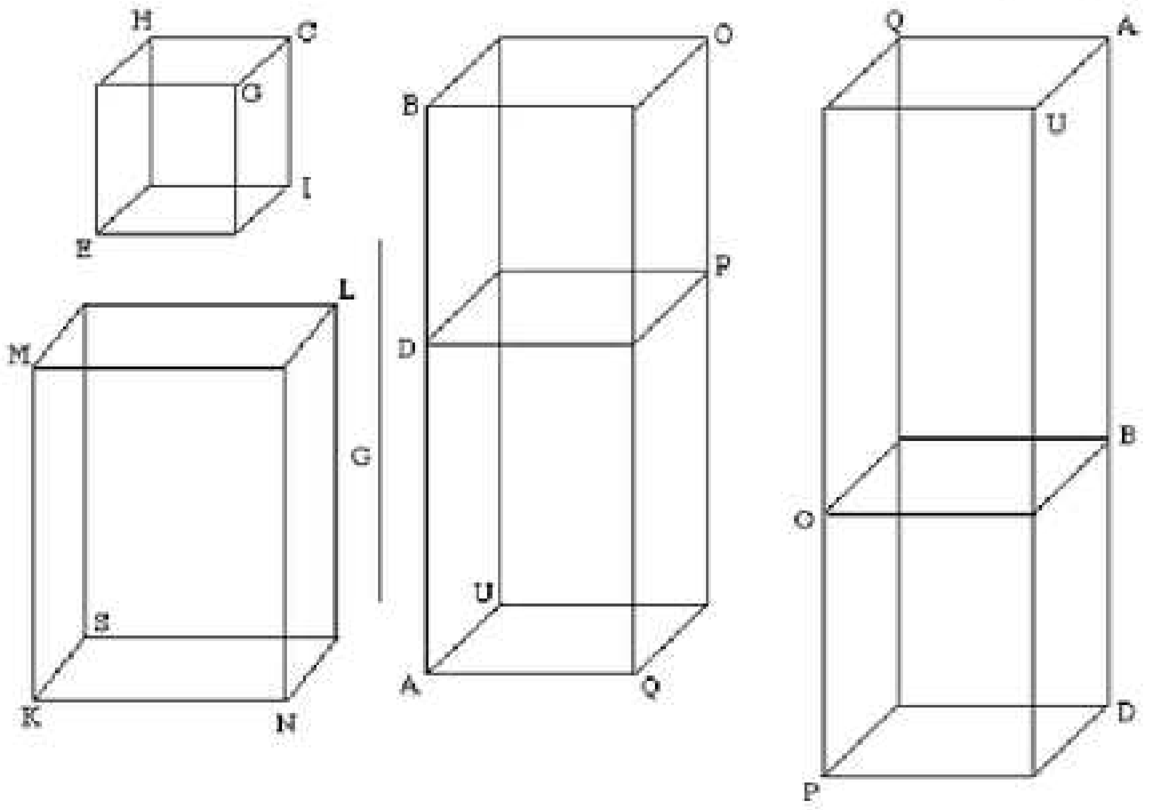
وحسب (1)

$$C^3 = AB \cdot BD^2 \pm BD^3$$

وبما أن AB و C معلومان، فإن BD معلومة حسب المقدمة. لكن $AB \cdot BD^2$ هو حجم متوازي مستطيلات (P) ارتفاعه AB وقاعدته مربع ضلعه BD. أضف إلى ذلك أن BD^3 هو حجم مكعب مقام على هذا المربع بالذات. وهكذا إذا كان C^3 هو حجم مجسم ما فإننا نتمكن من معرفة هذا الحجم بإنشاء متوازي مستطيلات على AB قاعدته مربعة وبإضافة أو بطرح مكعب له نفس القاعدة.

يأخذ القوهي لتعميم هذه المسألة نقطتين A و B ومتوازي مستطيلات (CE) معلوم الصورة، ويحل محل المكعب الذي حجمه C^3 متوازي مستطيلات شبيه بـــ (CE) معلوم الحجم (KL)، وليكن KM أحد أطرافه. إن الزاويتين ثلاثيتي السطوح (C, HIG) و(K, MNS) متساويتان. لنفرض V = (KL)؛ نأخذ على المستقيم AB نقطة D تحقق $\frac{KM^2}{BD^2} = \frac{AD}{KM}$. ننشئ على BD (في الحالتين) مجسماً (DO) شبيهاً بـــ (CE) وبـــ (KL). وننشئ على قاعدته المجسم (AP)، طرفه AD. نبرهن أن

حجم (AP) = V



الشكل. 57

البرهان: ليكن G مقطعاً يحقق $\frac{G}{KM} = \frac{AD}{G}$؛ لدينا[88]

[88] لـــ G معنيان مختلفان هنا.

$$\left(\frac{AD}{G}\right)^2 = \left(\frac{G}{KM}\right)^2 = \left(\frac{AD}{G}\right)\left(\frac{G}{KM}\right) = \frac{AD}{KM}$$

لكن $\frac{AD}{KM} = \frac{KM^2}{BD^2}$

إذاً $\frac{AD}{G} = \frac{G}{KM} = \frac{KM}{BD}$

نستخلص من هذه العلاقة

$$\left(\frac{KM}{BD}\right)^3 = \left(\frac{AD}{G}\right)\left(\frac{G}{KM}\right)\left(\frac{KM}{BD}\right) = \frac{AD}{BD}$$

إضافة إلى هذا فإن

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\text{حجم }(AP)}{\text{حجم }(DO)}$$

ذلك أن لكلا المجسمين نفس القاعدة و

$$\left(\frac{KM}{BD}\right)^3 = \frac{\text{حجم }(KL)}{\text{حجم }(DO)}$$

لتشابه المجسمين؛ ومن هنا النتيجة:

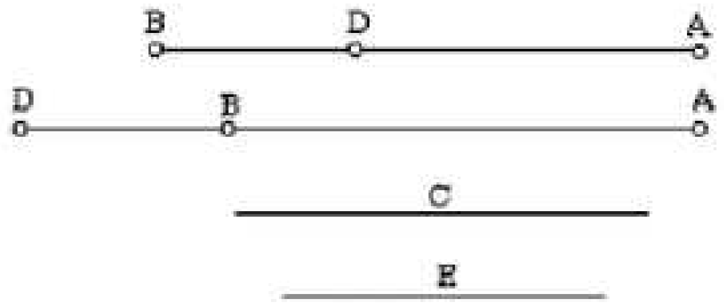
$$V = \text{حجم }(KL) = \text{حجم }(AP)$$

إن المجسم المنشأ على AB هو (AO)، ولدينا

$$V = \text{حجم }(AO) \pm \text{حجم }(DO)$$

أو $V \quad \text{حجم }(DO) = \text{حجم }(AO)$

يعرض القوهي برهاناً آخر أبسط "أقرب وأقل خطوطاً"، كما يقول. يأخذ AB و C كمقطعين معلومين و D على AB أو على امتداده بحيث يكون $\frac{AD}{C} = \frac{C^2}{BD^2}$ (حالتان ممكنتان).



الشكل. 58

ننشئ على BD متوازي سطوح P_1 وليكن $v(BD)$ حجمه، ومتوازي سطوح آخر P_2 على AD له نفس قاعدة P_1 وليكن $v(AD)$ حجمه. إذا أنشأنا على C متوازي سطوح P شبيه بـــ P_1 ذا حجم V فإن $V = v(AD)$.

البرهان: ليكن E المقطع المحدد بـــ $\frac{E}{C} = \frac{AD}{E}$؛ إن

$$\frac{AD}{C}=\left(\frac{AD}{E}\right)^2=\left(\frac{E}{C}\right)^2$$

لكننا نعلم أن

$$\frac{AD}{C}=\frac{C^2}{BD^2}$$

ولذا فإن

$$\frac{AD}{E}=\frac{E}{C}=\frac{C}{BD}$$

الهدف هنا هو القول أن E و C هما متوسطا التناسب بين AD و BD.

ينتج من تعريف D:

$$AD=\frac{C^3}{BD^2}$$

أن

$$\frac{AD}{BD}=\frac{C^3}{BD^3}$$

ولما كان لــ P_1 و P_2 نفس القاعدة، فإن

$$\frac{AD}{BD}=\frac{v(AD)}{v(BD)}$$

ثم إن P و P_1 متشابهان لذا

$$\frac{V}{v(BD)}=\left(\frac{C}{BD}\right)^3$$

ولذا فإن حجم $(AD) = V$، أو بشكل آخر حجم $(BD) \pm$ حجم $(AB) = V$.

كل هذا يرينا أن تعميم مسألة أرشميدس الذي عرضه القوهي يفسر على أنه "تطبيق الحجوم" المماثل في الأبعاد الثلاثة لتطبيق السطوح المدروس في الكتاب VI من *الأصول* لأقليدس: لدينا مقطع معلوم AB نريد أن نطبق على هذا المقطع حجماً معلوماً V بزيادة أو نقصان شبيهتين بمتوازي سطوح معلوم.

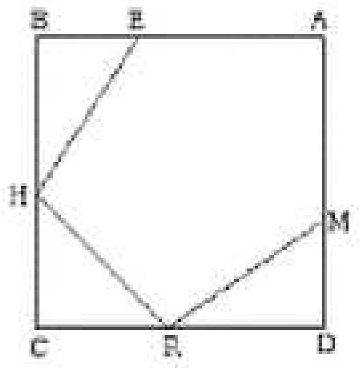
6.3 عمل مخمس متساوي الأضلاع في مربع معلوم

لم يضع القوهي الوقت، أثناء بحثه في المسائل المجسمة، في دراسة المسائل التي سبق حلها، وإنما وضع لنفسه مسائل جديدة كعمل مخمس متساوي الأضلاع لكن غير متساوي الزوايا في مربع معلوم، عل سبيل المثال، وكما هو الحال في الاختراعات الهامة، فقد تناقلت هذه المسألة الأجيال القادمة. فقد أخذها عنه ابن الهيثم في رسالة مفقودة

الآن[89]، وهذا مثال آخر عن حالة ضياع تحرم الاختراع من بعده التاريخي الحقيقي. إن ما نعنيه بجدة المسألة التي طرحها القوهي محدد تماماً: فلم تكن المسألة مجهولة كلياً من قبل أسلافه، لكن ما يطلبه القوهي هو إنشاء هندسي يستحيل القيام به باستعمال المسطرة والبركار. فقد وقع الجبري أبو كامل[90] على نفس الحالة التي ينظر فيها القوهي في

[89] *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 2, p. 512.

[90] فإن قيل لك مربع متساوي الأضلاع قائم الزوايا كل جانب منه عشرة وهو مربع ا ب جـ د . عملنا فيه مخمساً على هذه وهو مخمس ا هـ ح ز م فمعرفة كل جانب منه أن تجعل أحد جوانبه وهو خط ا هـ شيئاً فيبقى خط هـ ب عشرة إلا شيئاً، وخط جـ ح جذر نصف مال، فيبقى خط ح ب عشرة إلا جذر نصف مال، وخط هـ ب عشرة إلا شيئاً، فنضرب كل واحد منهما في مثله ونجمعهما فيكون مئتي درهم ومالاً ونصف مال إلا عشرين شيئاً وإلا جذر مئتي مال يعادل مالاً، فتقابل به كنحو ما بينت لك، فيخرج خط ا هـ الذي هو أحد أضلاع المخمس مئتين وجذر ثلاثمئة ألف وعشرين ألفاً مأخوذاً جذره منقوص من عشرين وجذر مئتين، وذلك ما أردنا أن نبين.



نرسم في المربع ABCD مخمساً AEHRM متساوي الأضلاع، وليكن a طول ضلع المربع، أوجد x طول ضلع المخمس.

$$AE = EH = HR = RM = MA = x$$

لدينا

$$EB = MD = a - x,\ CH = CR = \frac{x}{\sqrt{2}},\ HB = RD = a - \frac{x}{\sqrt{2}}$$

لدينا في المثلث EBH

$$EB^2 + BH^2 = EH^2$$

أي

$$(a - x)^2 + \left(a - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = x^2$$

$$x^2 - 2ax\left(2 + \sqrt{2}\right) + 4a^2 = 0$$

$$\Delta = a^2\left(2 + \sqrt{2}\right)^2 - 4a^2 = a^2\left(2 + 4\sqrt{2}\right)$$

للمعادلة جذران يحققان $0 < x' < a < x''$، لأن $f(a) < 0$. والجذر x' هو إذاً حل المسألة

$$x' = a\left(2 + \sqrt{2}\right) - a\sqrt{2 + 4\sqrt{2}}$$

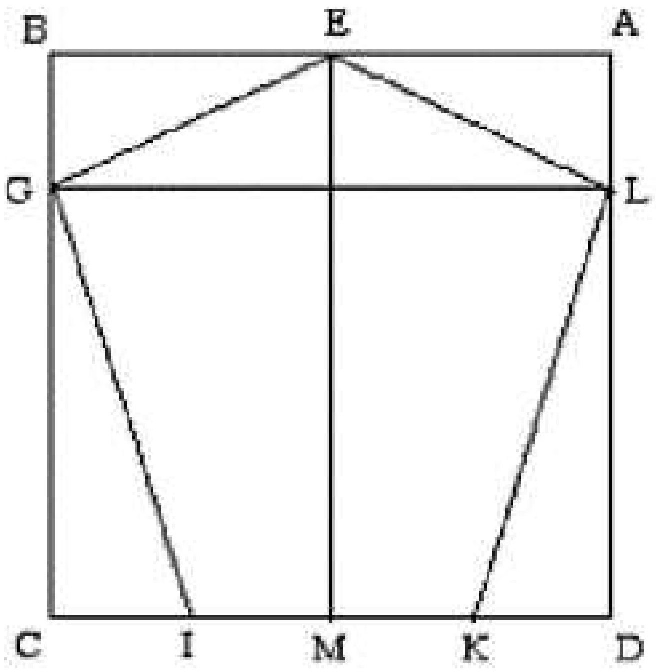
و من أجل $a = 10$ نجد

$$x = x' = 10\left(2 + \sqrt{2}\right) - 10\sqrt{2 + 4\sqrt{2}}$$

بحثه عن المخمسات الممكن إنشاؤها. لكن القوهي ينتقي الحالة التي لا حل لإنشائها بواسطة المسطرة والبركار. وهي حالة يعالجها بطريقة هندسية محضة. وهو بهذا يضيف موضوعاً جديداً إلى حقل تطبيقات المقطوع المخروطية. ويبدو لنا أن هذا كان قصده في هذا العمل.

يقول القوهي أنه بدأ عمله في *المخمس المتساوي الأضلاع في مربع معلوم* بعد فراغه من عمل المسبع المتساوي الأضلاع[91] وأهداه إلى الملك شرف الدولة بن عضد الدولة. فنحن أمام عمل كتب بعد 986، أي في نفس الفترة التي كتب فيها رسالة في قسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية[92]. يقوم القوهي بهذا العمل بالتحليل وبالتركيب معاً.

لدينا المربع المعلوم ABCD والمطلوب عمل مخمس متساوي الأضلاع فيه وليس متساوي الزوايا. يبدأ القوهي تحليله في القضية الأولى. يفرض المسألة محلولة وأن المخمس EGIKL حيث E وسط AB.



الشكل. 59

ليكن $EM \perp DC$ فـ $MC = MD$ و $MI = MK$. نحن بحاجة إذاً إلى إيجاد G على BC و I على MC بحيث يتحقق $EG = 2IM$.

نلاحظ على الفور أن القوهي يضع رأس المخمس في النقطة E وسط AB، سواء كان ذلك في النص أو في الشكل المعطيين في المخطوطات، ونستخلص من هذا الاختيار أن المنصف العمودي على AB هو محور تناظر المربع والمخمس في آن واحد. لأنه من الواضح أنه يلزم أن تكون رؤوس المخمس على أضلاع المربع الأربعة، أي أنه لابد من وجود رأسين على ضلع واحد. لدينا $EG = EL$ ومنصف $G\hat{E}L$ في المثلث متساوي الساقين GEL هو منصف GL وبالتالي هو المنصف العمودي لـ AB لأن $GL \parallel AB$. لدينا إذاً $GI = LK$ حيث تقع النقطتان I و K على CD؛ وهكذا فإن GLKI شبه منحرف متساوي الساقين، محور تناظره هو المنصف لـ GL الذي يلقى IK و DC في وسطهما المشترك M. إن

وهو الحل الذي أعطاه أبو كامل على الشكل

$$x = x' = 20 + \sqrt{200} - \sqrt{200 + \sqrt{320\,000}}$$

[91] انظر أسفله، ص. 533.

[92] انظر أعلاه، ص. 370 وأسفله، ص. 494.

$$IM = MK = \frac{1}{2} EG$$

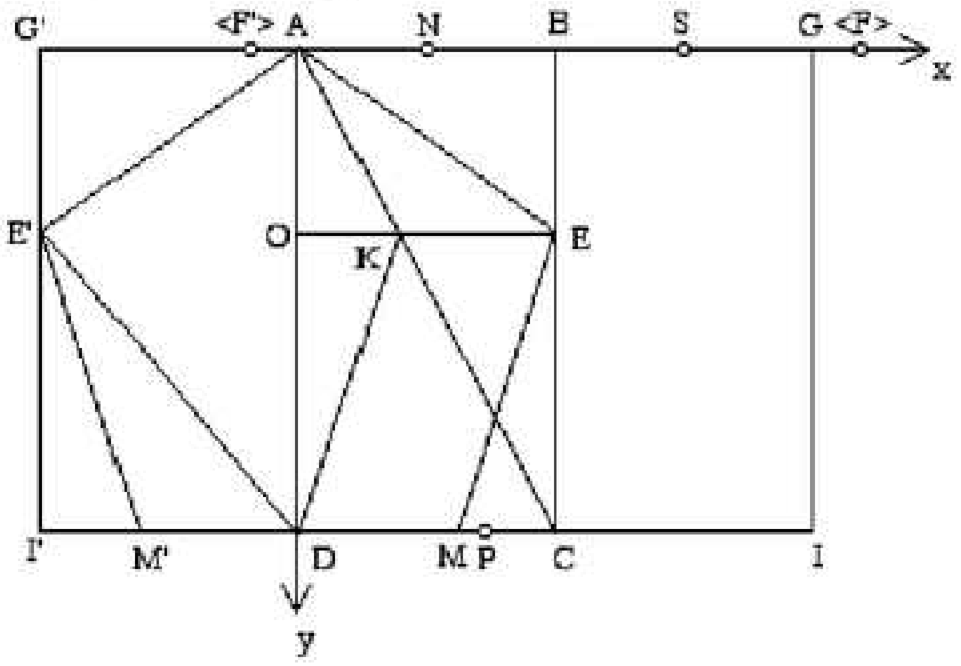
بعد ذلك يغير القوهي رموزه وترتيب المقاطع التي يعتبرها والمساوية لضلع المخمس. وهكذا فطولا AE وDK في القضية الثالثة وفي الشكل المرافق لها هما طولا ضلع المخمس، بينما يصبح المربع المعلوم AGID؛ ولم تعد أوضاع الأضلاع هي بالذات تلك التي كنا نريد أن نجدها. إلا أن كل المسألة تقوم على إنشاء النقطة K التي تحقق

$$AE = DK = 2KE$$

حيث $AB \parallel EK$ و E واقعة على BC.

يبرهن القوهي عندئذ أن K هي نقطة تقاطع قطعين زائدين $\mathscr{H}$ و $\mathscr{H}_1$، ويستعمل في برهانه القضية III.16 وعكسها I.36 من *المخروطات*. ويكرس القضايا الأخيرة من رسالته لتبيان كيفية إنشاء المخمس.

لنأخذ إذاً المربع AGID وBC المنصف العمودي على AG وDI. إن المستطيل ABCD ذا الضلعين AB = a و BC = 2a هو نصف هذا المربع. كما أنه نصف المربع BG'I'C (حيث BG' = 2AB).



الشكل. 60

ليكن AEMM'E' المخمس المرسوم في هذا المربع الثاني والمحقق لشروط حل المسألة.

رأينا للتو أن AD هو محور تناظر هذا المخمس؛ لدينا AE = EM = 2DM و EE' تلقى AD في O.

نرسم $EM \parallel DK$ حيث K على EE'. لدينا DK = EM و EK = DM.

لنأخذ جملة الإحداثيات المتعامدة التي منشؤها A ومحوراها $\overrightarrow{Ax}$ في اتجاه $\overrightarrow{ABG}$ و $\overrightarrow{Ay}$ في اتجاه $\overrightarrow{AD}$. لتكن (x, y) إحداثيي K. لدينا

$$\overline{AD} = \overline{BC} = 2a \quad \text{و} \quad x = \overline{OK},\ y = \overline{AO} = \overline{BE},\ \overline{DM} = \overline{KE} = a - x$$

لدينا في المثلث BAE

$$AE = 2DM \qquad \text{و} \qquad AE^2 = AB^2 + BE^2$$

أي

$$4(a - x)^2 = a^2 + y^2 \qquad (1)$$

ولدينا في المثلث OKD

$$DK = EM = 2DM \qquad \text{و} \qquad KD^2 = KO^2 + OD^2$$

ومنه

$$4(a-x)^2 = x^2 + (2a-y)^2 \qquad (2)$$

لدينا من العلاقة (1)

$$y^2 = 4(a-x)^2 - a^2 = (a-2x)(3a-2x)$$

أي

$$y^2 = 3(a-2x)\left(a - \frac{2}{3}x\right)$$

وهي معادلة قطع زائد $\mathscr{H}$ محوره العرضاني NS المعرف بـ $\left\{N\left(\frac{a}{2}, 0\right); S\left(\frac{3a}{2}, 0\right)\right\}$ و*ضلعه القائم* 4NS.

ولدينا كذلك من العلاقة (2)

$$(2a-y)^2 = 4(a-x)^2 - x^2 = 4\left[(a-x)^2 - \frac{x^2}{4}\right]$$

أي

$$(2a-y)^2 = 4\left(a - \frac{3x}{2}\right)\left(a - \frac{x}{2}\right)$$

وهي معادلة قطع زائد $\mathscr{H}_1$، محوره PI واقع على الخط CD طرفاه $\left\{P\left(\frac{2a}{3}, 2a\right); I(2a, 2a)\right\}$ و*ضلعه القائم* 3PI.

هذان هما القطعان اللذان حصل القوهي عليهما في القضيتين 5 و 6 وقد أدى به البحث في تقاطعهما إلى الإنشاء المطلوب كما سنرى.

إن ما وصفناه هنا بعبارات جبرية هو من حيث الأساس الطريق الذي اتبعه القوهي لكن دعونا نتتبع ما فعله خطوة فخطوة.

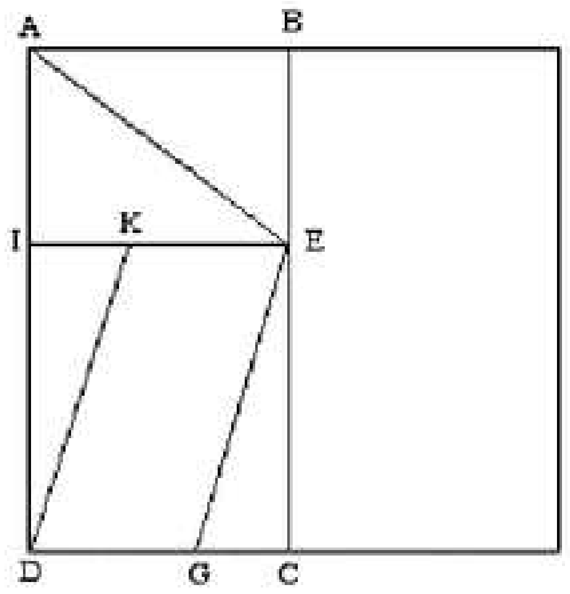
لقد رأينا كيف بدأ القوهي تحليله (انظر الشكل. 59) وبين الحاجة لإيجاد النقطة G على BC و I على MC اللتين تحققان EG = GI = 2IM.

وأراد في القضية الثانية رسم مربع ABCD (انظر الشكل. 60) هو نصف المربع المعلوم ورسم الخطين AE و EG بحيث يكون

$$AE = EG = 2GD$$

ورسم AB || EI و EG || DK ليجد

$$DK = EG = AE = 2EK \qquad (*)$$



الشكل. 61

أما في القضية الثالثة، فقد أخذ المستطيل ABCD، نصف المربع AGIC، وأراد أن يرسم في المستطيل الخطين AE و DK المحققين للشرط (*) وبناء عليه فقد عالج المسألة بالتحليل.

التحليل: لدينا من (*) $AE^2 = 4EK^2$ ، ومن جهة ثانية $AE^2 = AB^2 + BE^2$. نرسم $LKM \parallel AD$ (انظر الشكل. 62) حيث تقع L على AB. لدينا BE = KL، وبالتالي $AE^2 = AB^2 + KL^2 = 4EK^2 = 4BL^2$.

لتكن N وسط AB، $AB^2 = 4BN^2$ ، فإذاً

$$KL^2 = 4\left(BL^2 - BN^2\right) = 4SL \cdot LN \quad \text{حيث B وسط NS}$$

وهكذا تقع النقطة K على قطع زائد $\mathscr{H}$ محوره SN ورأسه النقطة N و*ضلعه القائم* c = 4SN. فالقطع $\mathscr{H}$ معلوم (أي أنه معرف تماماً) ويمر بالنقطة K.

أضف إلى ذلك أن DK = 2EK = 2MC. فإذا عرفنا النقطة O نقطة تقاطع AC و ML فإن

$$\frac{OM}{MC} = \frac{AD}{DC} = 2$$

ومنه

$$OM = 2MC \qquad \text{وبالتالي} \qquad DK = OM$$

من جهة أخرى $DK^2 = DM^2 + MK^2$. لنضع MK = MQ

$$OM^2 = OQ \cdot OK + KM^2$$

و

$$DM^2 = OQ \cdot OK$$

لنأخذ نقطة P على DC وأخرى U على AC تحققان DP = PU؛ فيكون PU = 2PC (لتشابه المثلثين PUC و ADC)؛ وبالتالي DP = 2PC والنقطة P معلومة.

كذلك

$$\frac{DM^2}{AO^2} = \frac{OQ \cdot OK}{OA^2} \qquad \text{و} \qquad \frac{DM^2}{OA^2} = \frac{DP^2}{UA^2} = \frac{PU^2}{UA^2}$$

فإذاً

$$\frac{OQ \cdot OK}{OA^2} = \frac{PU^2}{UA^2}$$

وبالتالي حسب عكس III.6 من *المخروطات*، فإن K واقعة على قطع مخروطي مماس لــ UA في A ومماس لــ UP في P ومار بــ Q.

وبما أن $DP = 2PC$ فإن $DC = 3PC$ و $DI = 3DP$ ولدينا

$$\frac{DI}{DP} = \frac{CI}{CP} \quad \text{(القسمة التوافقية)}$$

والقطع المخروطي هو قطع زائد $\mathscr{H}_1$ محوره المستقيم IP حسب I.37 من *المخروطات* التي هي عكس I.36. وبما أن A تقع على $\mathscr{H}_1$ فإن *الضلع القائم* لــ $\mathscr{H}_1$ هو c؛ ولدينا

$$\frac{AD^2}{DI \cdot DP} = \frac{c}{IP}$$

أو بشكل آخر

$$\frac{AD^2}{DI \cdot UP} = \frac{c}{IP}$$

ولما كان $AD^2 = 3DI \cdot DP$ لأن $DA = DI$ و $DI = 3DP$ فإن $c = 3IP$.

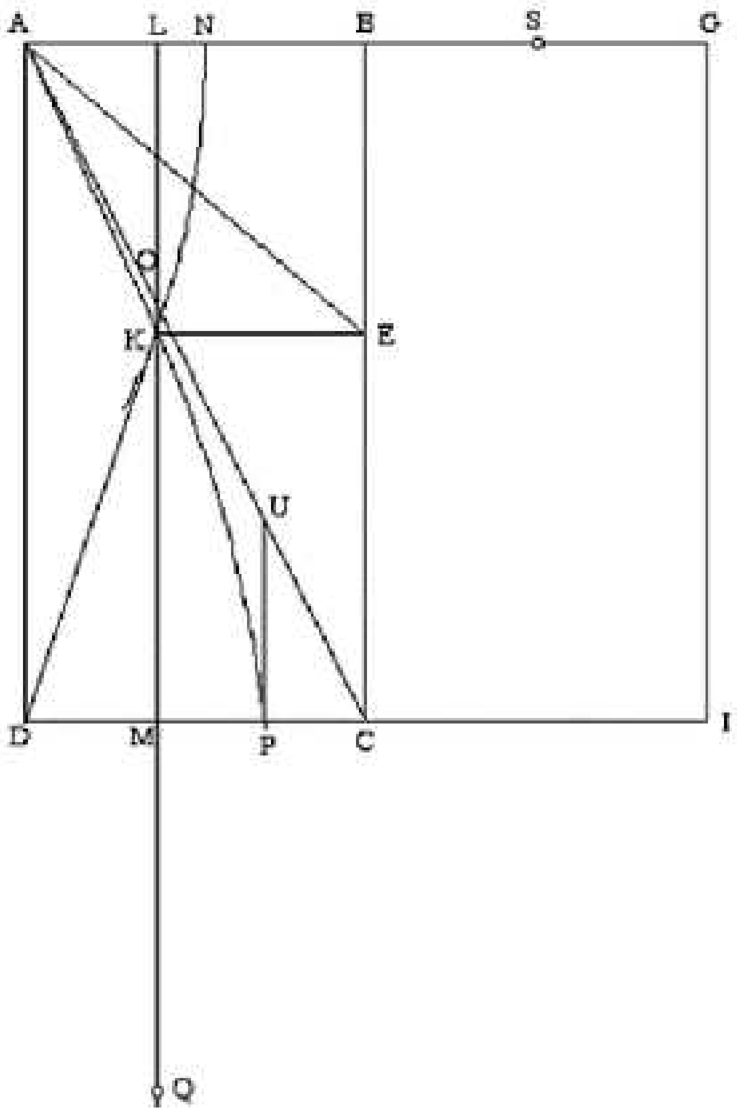
وهكذا فالقطع الزائد $\mathscr{H}_1$ معلوم.

إن النقطة K، وهي نقطة تقاطع القطعين الزائدين $\mathscr{H}$ و $\mathscr{H}_1$، معلومة الآن وكذلك النقطة E والمستقيم AE.

ينتقل القوهي بعد ذلك إلى التركيب.

التركيب: لنعد إلى المربع AGID، والمستطيل ABCD ولتكن N وسط AB و S وسط BG. ولتكن P نقطة على DC تحقق $DP = 2PC$.

نرسم القطع الزائد $\mathscr{H}$ ذا المحور NS و*الضلع القائم* $c = 4NS$؛ ثم القطع الزائد $\mathscr{H}_1$ ذا القطر العرضاني PI و*الضلع القائم* $c_1 = 3PI$ الذي يمر بالنقطتين P و A ويقطع $\mathscr{H}$ في K. نرسم $KE \parallel AB$. ونريد أن نبرهن أن $AE = DK = 2EK$.



الشكل. 62

نرسم من النقطة K المستقيم $LM \parallel AD$ والخط PU المماس لـ $\mathscr{H}_1$ في P ($PU \perp DC$). بما أن K على $\mathscr{H}$ فإن $KL^2 = 4SL \cdot LN$.

ولذا $AB^2 = 4BN^2$، ثم إن

$$AB^2 + KL^2 = 4\left(SL \cdot LN + BN^2\right) = 4BL^2$$

من جهة أخرى

$$AB^2 + KL^2 = AB^2 + BE^2 = AE^2$$

ومن العلاقتين السابقتين

$$AE^2 = 4BL^2$$

ثم إن $BL = UK$، فـ $AE = 2EK$.

أضف إلى ذلك أن $DP = \frac{2}{3}DC$ فـ $DP = \frac{1}{3}ID$ و $AD^2 = 3ID \cdot DP$؛ تقع النقطة A على $\mathscr{H}_1$ ذي المحور IP و*الضلع القائم* $c_1 = 3IP$.

لدينا $DC = IC = 3CP$ و $ID = 3DP$، فـ

$$\frac{CI}{CP} = \frac{DI}{DP} \qquad \text{(القسمة التوافقية DCIP)}$$

والمستقيم AC مماس لـ $\mathscr{H}_1$ في A.

تقع النقطة U على القطر AC فلذا

$$\frac{UP}{PC} = \frac{AD}{DC} = 2$$

ومنه $UP = 2PC$ و $UP = DP$، و UP و UA مماسان لــ $\mathscr{H}_1$؛ لذا

$$\frac{UP^2}{UA^2} = \frac{OQ \cdot OK}{OA^2} \qquad (3)$$

(المخروطات III.16)

لكن

$$\frac{AU^2}{DP^2} = \frac{AO^2}{DM^2} \qquad (4)$$

لأن $UP \parallel OM \parallel AD$

ينتج من (3) و(4) أن

$$\frac{UP^2}{DP^2} = \frac{OQ \cdot OK}{DM^2}$$

لكن $UP = DP$، فإذاً

$$DM^2 = OQ \cdot OK \quad \text{و} \quad DM^2 + KM^2 = OQ \cdot OK + KM^2$$

التي تعطينا $DK^2 = MO^2$ و $DK = OM$. ولدينا في المثلث OMC : $OM = 2MC$ أي $DK = 2MC$ و $DK = 2KE$ وهو المطلوب.

ملاحظات :

1) سنستعمل نهجاً في العرض لم يكن معروفاً في أيام القوهي لبحث تقاطع $\mathscr{H}$ و$\mathscr{H}_1$. رأينا سابقاً أن لهذين القطعين المعادلتين التاليتين

$$\mathscr{H} = \left\{(x, y) : y^2 = (a - 2x)(3a - 2x)\right\} \quad \text{مع} \quad x < \frac{a}{2}$$

$$\mathscr{H}_1 = \left\{(x, y) : (2a - y)^2 = 4\left(a - \frac{3x}{2}\right)\left(a - \frac{x}{2}\right)\right\} \quad \text{مع} \quad x < a$$

نحصل بعد نشر هاتين المعادلتين وطرح واحدة منهما من الأخرى على

$$y = \frac{x^2 + 3a^2}{4a}$$

لنستبدل y في معادلة $\mathscr{H}$ بهذه القيمة فنحصل على

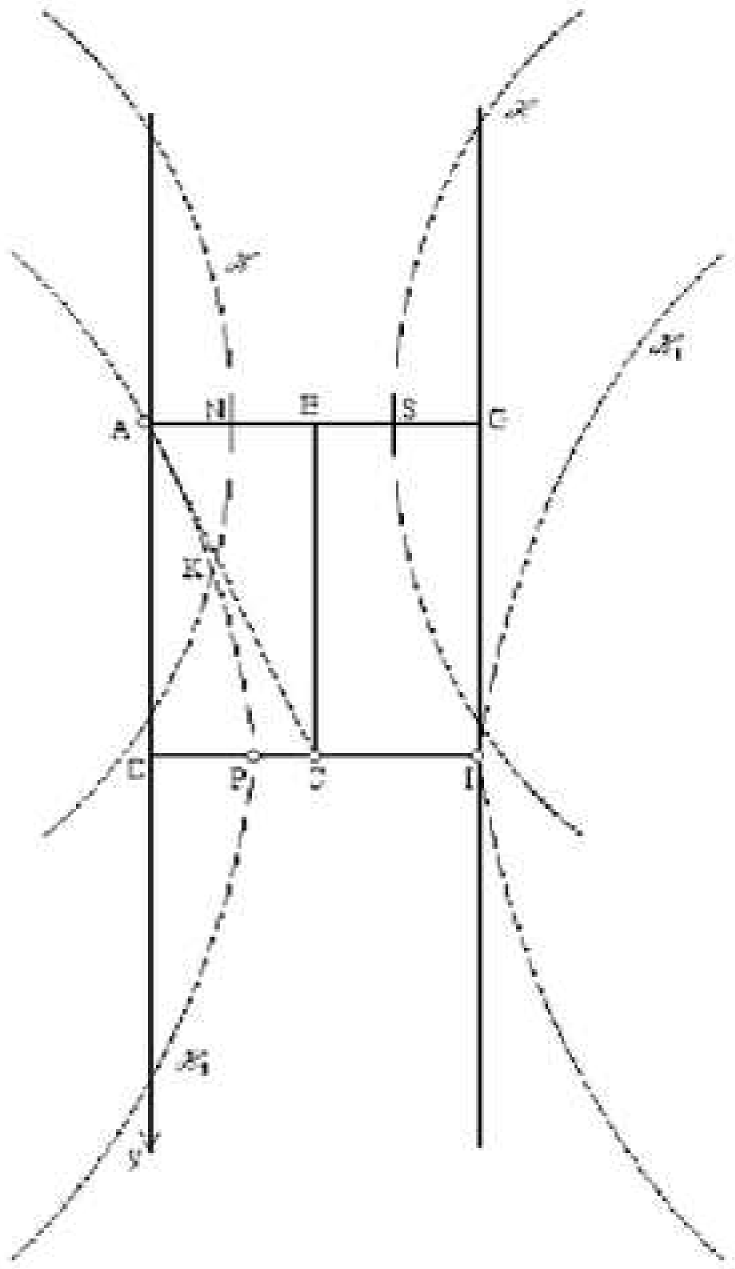
$$f(x) = x^4 - 58a^2x^2 + 128x - 39a^4 = 0 \qquad (5)$$

نرى على هذا النحو أنه من الممكن التعبير عن المسألة بمعادلة من الدرجة الرابعة وليس بمعادلة تكعيبية كما كان الحال في المسائل المجسمة الأخرى.

إن جداء الجذور سالب، ولمسألة القوهي بالتالي حل إذا كان للمعادلة (5) حل محصور بين 0 و a.

تتناهى $f(x)$ نحو $+\infty$ عندما تتناهى x إلى $\pm\infty$ و $f(0) = -39a^4 < 0$ ، $f(a) = 32a^4 > 0$ ، $f(2a) = a^4 > 0$ و $f(\frac{5a}{2}) < 0$. وجذور المعادلة الأربعة هي على الشكل التالي $x_1 < 0$ ، $0 < x_2 < a$ ، $2a < x_3 < \frac{5a}{2}$ ، $x_4 < \frac{5a}{2}$.

تقابل هذه الجذور الأربعة أربع نقط تقاطع بين القطعين إذا أخذنا بعين الاعتبار فرعي كل من القطعين. يقابل الجذر x_2 المطلوب من أجل النقطة K في المستطيل (B ،D) الذي هو نصف المربع المعلوم.



الشكل. 63

2) للقطع الزائد $\mathscr{H}_1$ الرأسان P و I ويقطع المحور Ay في النقطتين $A(0, 0)$ و $(x = 0, y = 4a)$. ومعادلة المماس هي

$$2yy' - 4ay' = 6x - 8a$$

ويتعين ميل المماس في النقطة A بـــ $y' = 2$.

أي أن المماس في A هو في الواقع قطر المستطيل AC وهذا ما أشار إليه القوهي.

3) بين القوهي، كما لاحظنا ذلك سابقاً، أن كل المسألة ترجع إلى إنشاء النقطة K ذات الخاصة (*). يمكن قراءة الخاصة DK = 2KE أنها تحدد النقطة K كنقطة على فرع قطع زائد، إحدى بؤرتيه النقطة D ودليله المستقيم BC وتباعده المركزي يساوي 2. إلا إنه للجوء إلى هذه الفكرة البسيطة كان على القوهي أن يعرف القطع الزائد بخاصة البؤرة – الدليل أو أن يصفه على هذا النحو ولكنه لم يفعل؛ مع أنه لا توجد صعوبة خاصة في هذا الشأن

لرياضيي ذلك العصر. نعلم في الواقع أن معاصر القوهي، ابن سهل، استعمل خاصة البؤرة – الدليل هذه على نطاق واسع من أجل القطع المكافئ، كما استعمل خاصة البؤرتين في القطوع المركزية في أعماله في الانكساريات[93]. نعلم كذلك أن ديوقليس استعمل خاصة البؤرة – الدليل للقطع المكافئ في واحد من أعماله المترجمة إلى اللغة العربية. والأمر يصح أيضاً على أنتيميوس الترالي في عمل له ترجم إلى العربية ولاقى انتشاراً واسعاً[94]. وأخيراً، فالكل يعلم ما قاله وكرره المؤرخون طيلة قرن على الأقل عن بابوس وعن استعماله هذه الخاصة في القطع المكافئ وعن تعريفه لما أصبح يعرف باسم "التباعد المركزي" من أجل القطوع المخروطية الثلاثة في الكتاب VII من *Collection*[95]. لعل القوهي قد أراد بالعلاقة (*)، نظراً للأحوال التي ذكرناها، استعمال هذه الخاصة معمماً لها من حالة التباعد المركزي المساوي لــ 1 (القطع المكافئ) إلى حالة التباعد المركزي الأكبر من الواحد (القطع الزائد). لقد كان يحتاج للقيام بذلك تحديد الدليل BC والبؤرة D للقطع الزائد $\mathscr{H}_1$. وكان هذا سيقوده إلى النظر في النقطة K التي تحقق، فيما لو اعتبرنا c_5 طول ضلع المخمس، العلاقة

$$c_5 = DK = 2KE$$

حيث KE $\perp$ BC (BC محور التناظر)؛ وD معطاة إذاً كنقطة ثابتة، BC مستقيم ثابت و K محققة العلاقة $\frac{KD}{KE} = 2$، وبالتالي $K \in \mathscr{H}_1$ ،K تنتمي إلى القطع الزائد ذي البؤرة D والدليل BC والتباعد المركزي 2.

لقد كان بين يدي القوهي كل الأدوات الرياضية التي يحتاجها للعمل على هذا النحو. إلا أن الإمكانية النظرية ليست بالضرورة واقعاً تاريخياً، ونحن عندما نقرأ نصه لا نجد فيه ما ينم لغوياً أو رياضياً عن استعمال خاصة البؤرة – الدليل. بل على العكس فهناك عوامل تدل على النقيض.

ما من أحد ينكر أنه لو استعمل رياضي بحجم القوهي خاصة البؤرة – الدليل هذه من أجل $\mathscr{H}_1$ لاستعملها بنفس الشكل من أجل $\mathscr{H}$. ولما قبل إطلاقاً عدم التجانس في إجراءاته في حال إمكانية التجانس. أضف إلى ذلك أن التعريف الوحيد للقطوع المخروطية في ذلك الزمان كان بإعطاء الخاصة المميزة *Symptoma*، وفيما لو ظن القوهي أن العلاقة DK = 2KE تقدم تعريفاً جديداً للقطع الزائد لما تردد لحظة واحدة في لفت الأنظار إلى هذا الواقع.

ثم إنه كان في حوزة القوهي، في بحثه عن محل هندسي آخر للنقطة K انطلاقاً من العلاقة (*)، المسافة بين النقطة K ومستقيم ثابت BC (وهو ليس دليل $\mathscr{H}$)، ولكنه لم تكن لديه المسافة بين K ونقطة ثابتة، أي أن فكرة النسبة بين بعد K عن نقطة ثابتة وبعدها عن مستقيم ثابت لم تتبدى له، لقد قادته المساواة (*) مباشرة من جهة أخرى، إلى اللجوء إلى العلاقات المترية لتوصيف القطع الزائد $\mathscr{H}$ بدليل محوره العرضاني NS و*ضلعه القائم* c = 4NS. وهكذا وبعد أن وجد توصيف للقطع الزائد $\mathscr{H}$ بهذه الطريقة استعملها لإيجاد $\mathscr{H}_1$. وما من شيء يشير في نصه من قريب أو بعيد إلى تغيير في الطريقة. ولقد قام في واقع الأمر، حتى يجد المحل الهندسي الثاني لــ K، أي $\mathscr{H}_1$، مستعملاً

---

[93] انظر أعلاه.

[94] R. Rashed, *Les Catoptriciens grecs*, pp. 55-62.

[95] *Pappi Alexandrini*, ed. Hultsch, p. 58, note 2.

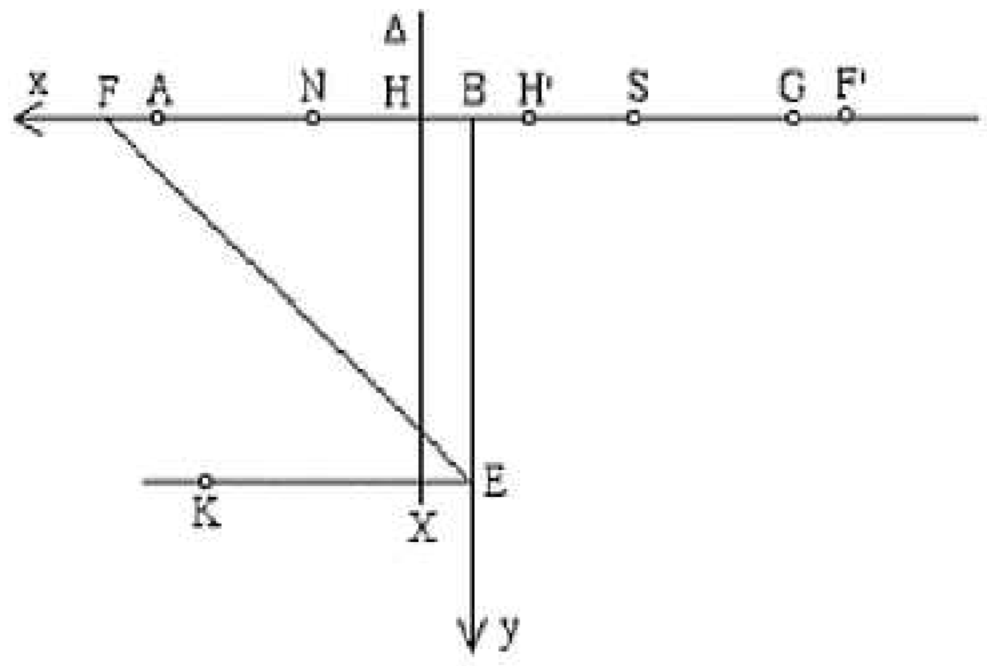
العلاقات المترية انطلاقاً من $DK = 2KE$ بحسابات أكثر تعقيداً من تلك التي سمحت له بإيجاد $\mathscr{H}$، وهي الحسابات التي استدعت استعمال III.16 و I.37 من *المخروطات* للبرهان أن $K \in \mathscr{H}_1$ ولإيجاد محوره العرضاني و*ضلعه القائم*.

والأمر ذو المغزى الأكبر، هو أنه لو كان القوهي قد فكر حقاً في استعمال خاصة البؤرة – الدليل من أجل $\mathscr{H}_1$ لكان علينا (كما قلنا) أن ننتظر منه استعمال نفس الطريقة في تعامله مع $\mathscr{H}$. ولكانت لديه القدرة التامة على القيام بذلك. لكان استطاع إيجاد البؤرة F (وبالترتيب 'F) للقطع $\mathscr{H}$ بسهولة، فقد كان لديه المحور $NS = d$ و*الضلع القائم* $c = 4NS$. فالبؤرة F (وبالترتيب 'F) لـــ $\mathscr{H}$ محددة بالعلاقة $FN \cdot FS = \frac{1}{4}dc = NS^2$. فإذا وضعنا $AB = NS = a$، $BN = BS = \frac{a}{2}$، $BF = x$ فإن

$$x^2 - \frac{a^2}{4} = a^2$$

ومنه

$$x = \pm \frac{a\sqrt{5}}{2}$$



الشكل. 64

لتكن H مسقط البؤرة F العمودي على الدليل $H\Delta$ المرتبط بها (أو 'H مسقط البؤرة 'F على الدليل المرتبط بها) ولتكن النقطتان N و S على $\mathscr{H}$. إذاً

$$\frac{NF}{NH} = \frac{SF}{SH}$$

ومنه

$$\frac{FN}{FS} = \frac{HN}{HS}$$

والنقطتان F و H هما على الدوام مترافقتان توافقيتان بالنسبة لـــ N و S ولما كانت B وسط NS فإن

$$BS^2 = BN^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BF}$$

إذاً

$$\frac{a^2}{4} = \overline{BH} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

و

$$\overline{BH} = \frac{a}{2\sqrt{5}} < \frac{a}{4}$$

وهكذا يمر الدليل $H\Delta$ بين النقطتين B و N. وبما أن F' و F متناظرتان بالنسبة لـ B فإن H' نظيرة H بالنسبة لـ B.

سنحسب الآن التباعد المركزي: $N \in \mathscr{H}$ و $\frac{NF}{NH} = e$. إلا أن

$$NH = \overline{BN} - \overline{BH} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}} \text{ و } NF = \overline{BF} - \overline{BN} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

وهكذا فـ $e = \sqrt{5}$.

لنبين في النهاية أن K المحددة بالعلاقة AE = 2KE تنتمي إلى $\mathscr{H}$ أي أن $\frac{KF}{KX} = \sqrt{5}$ لنأخذ جملة الإحداثيات (BA, BC) وفيها

$$E(0, y) \text{ ،} X\left(\frac{a}{2\sqrt{5}}, y\right) \text{ و } F\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}, 0\right) \text{ ،} K(x, y)$$

و

$$AE^2 = 4KE^2 \Rightarrow y^2 + a^2 = 4x^2$$

$$KF^2 = y^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2} - x\right)^2 = 5x^2 + \frac{a^2}{4} - ax\sqrt{5}$$

و

$$KX^2 = \left(x - \frac{a}{2\sqrt{5}}\right)^2 = x^2 + \frac{a^2}{20} - \frac{ax}{\sqrt{5}}$$

والشرط اللازم لانتماء K إلى القطع $KF^2 = 5KX^2$ محقق: $K \in \mathscr{H}$ الذي بؤرته F ودليله $H\Delta$ وتباعده المركزي $e = \sqrt{5}$.

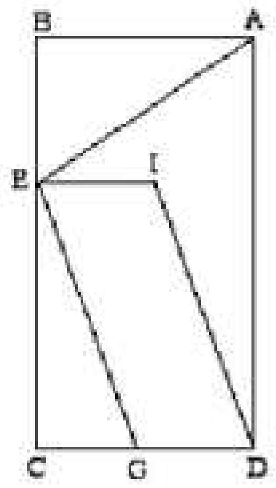
واضح أننا أخذنا فيما يخص المسألة المتعلقة بـ $\mathscr{H}$ الفرع ذا الرأس N وفيما يخص $\mathscr{H}_1$ الفرع ذا الرأس P والبؤرة D والدليل BC والتباعد المركزي 2.

تقع K على تقاطع هذين الفرعين محققة (*) أي الشرطين AE = 2EK و DK = 2EK.

يتضح تماماً أنه ما من مفهوم من المفاهيم المستعملة في هذا البرهان يقع خارج نطاق رياضيات القوهي، وأنه كان يسهل عليه لو أراد ذلك استعمال خاصة البؤرة – الدليل من أجل $\mathscr{H}$ و $\mathscr{H}_1$[96]. أما القول، وبدون أي سند رياضي أو نصي، أنه استعمل هذه الخاصة من أجل $\mathscr{H}_1$ وعالج $\mathscr{H}$ بشكل مختلف، فهو اتهامه بابتعاد عن المجانسة لا جدوى منه. إن أقل ما يقال في هذا التفسير أنه متصنع بل واعتباطي[97]. لنختم هذا كله بالإشارة إلى أن العدد 2، وقد يكون هو الذي أوحى بهذه التخيلات، يظهر في القضية الأولى لأن ضلع المخمس IK الواقع على ضلع المربع CD مقسم إلى قسمين متساويين بالخط EG، وهو محور تناظر مشترك للمربع وللمخمس. لدينا

$$c_5 = EG = GI = IK = 2IM \quad \text{(انظر الشكل. 59)}$$

تعنى القضيتان الباقيتان بإنشاء المخمس بالذات. فيعرض في القضية الخامسة رسم المستطيل ABCD (مع $BC = 2AB$) والمستقيمين AE و EG بحيث يكون $AE = EG = 2GD$.



الشكل. 65

نعرف من القضايا السابقة كيفية إنشاء DI و EI المحققين لـــ $AE = ID = 2EI$ و $AB \parallel EI$. نرسم $EG \parallel ID$ فنحصل على متوازي الأضلاع EIGD. لذا $EG = ID$ و $EI = GD$. وبما أن $ID = 2EI$ فإن $AE = EG = 2GD$.

وهكذا يكون لدينا كل ما نحتاج إليه لإنشاء المخمس في المربع ABCD وهو ما يعرضه القوهي في القضية السادسة والأخيرة.

لتكن E و G وسطي AB و CD على الترتيب (انظر الشكل. 66) نعرف من القضية 5 كيف ننشئ EI و EK بحيث يكون $EI = IK = 2GK$.

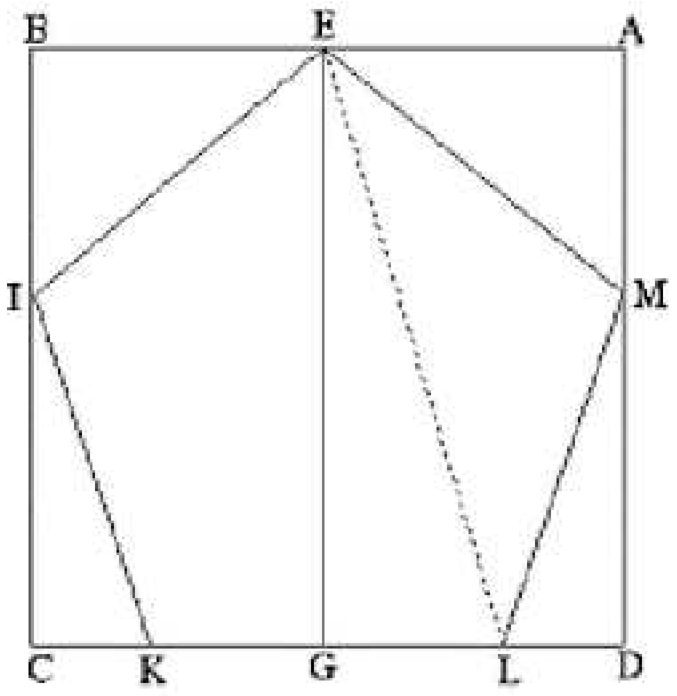
لتكن L نقطة على GD تحقق $GK = GL$ و M نقطة على AD تحقق $DM = IC$. إن المخمس EIKLM هو حل المسألة.

[96] يمكننا الملاحظة أنه كان بوسع القوهي في رسالته في البركار التام حساب التباعد المركزي بسهولة لو فكر بهذا المفهوم ولكفاه في الواقع الأمر أن يكتب $e = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$، ولكنه لم يفعل شيئاً من هذا القبيل (انظر ص. 643 وبعدها).

[97] Cf. J. P. Hogendijk, 'Al-Kūhī's Construction of an Equilateral Pentagon in a Given Square', *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamichen Wissenschaften*, 1 (1984), pp. 100-144.

ذلك أنه ينتج عن $GK = KL$ أن $KL = IK = EI$ و $CK = LD$.

وينتج عن المساواتين $CK = LD$ و $CI = DM$ أن $LM = KI$، وعلى نفس النحو $EM = EI$ وهكذا فالأضلاع الخمسة متساوية.



الشكل. 66

ملاحظة: بما أن $AB = MI$ و$EG < EL$ فإن $L\hat{M}E < M\hat{E}I$، وبالتالي فالمخمس ليس متساوي الزوايا. لعل جلاء عدم التساوي هذا جعل القوهي لا يرى ضرورة للإشارة إليه.

7.3 الخلاصـــــــة

لقد أعدنا جزئياً رسم الطريق التي خطها رياضيون من النصف الثاني للقرن التاسع وما بعده لوضع الأسس التي يقوم عليها موضوع بحث جديد: الإنشاءات الهندسية لحل المسائل المجسمة. فقد عمل كل من ابن سهل والقوهي بنشاط لتنفيذ هذه المهمة. وتابع معاصروهما من أمثال أبي الجود، السجزي، ابن العراق وغيرهم هذا العمل كما فعل ذلك أيضاً الخلفاء من أمثال البيروني وابن الهيثم، وكان الجميع يصبو إلى ترسيخ هذا الموضوع وفتح آفاق جديدة فيه. إلا انه يمكننا التساؤل عما يبرر تسميتنا له "بموضوع بحث جديد" مادامت هذه الإنشاءات قد شغلت الرياضيين اليونانيين والهيلينيين ومادام الرياضيون العرب أنفسهم قد انطلقوا في بحوثهم من هذه الأعمال، من "شرح الكرة والاسطوانة" لأوطوقيوس، على سبيل المثال. يجب علينا، كي نعي حقاً مواضع الاختلاف ومواضع الجدة، أن نركز انتباهنا على بعض المواقف المعرفية الهامة التي طورها رياضيو النصف الثاني من القرن التاسع وما بعده.

يمكن اختصار الأمور اختصاراً شديداً بالقول: إن الرياضيين توقفوا في ذلك الزمن عن قبول الأشياء التي تبدو واضحة لمجرد وجودها. فعوضاً عن الاكتفاء بالنظر إلى الأشياء على أنها مقبولة بالبداهة، في مسائل الإنشاء، كونها ناتجة عن ابتكار شكل أو آخر من الإمالات *neusis*، فإنهم أرادوا في إجراءاتهم الهندسية الذهاب أبعد من ذلك وإيجاد ما هو متطلب فعلاً للإنشاء. إن هذا هو الدافع الأول لهؤلاء الرياضيين لقصرهم أنفسهم على الهندسة. فالهندسة وحدها

تضفي الشرعية على أي إجراء يستعمل الآلات. والأهم في هذا أن الأمر لا يتعلق بالهندسة ككل، وإنما بهندسة القطوع المخروطية. ولذا نراهم قد توقفوا عن قصد عن استعمال المنحنيات الأخرى واقتصروا على استعمال المخروطات.

يمثل شكلا الابتعاد عن الماضي هذان إنجازاً خلاقاً قام به هؤلاء الرياضيون. ولا ينقص من جدة موقف الرياضيين هذا في شيء كون هذا الرياضي أو ذاك من السابقين اليونان – لنقل بابوس أو أوطوقيوس – قد استعمل صدفة تقاطع القطوع المخروطية في إنشاء حل لمسألة مجسمة، ذلك أن المقاربة مقصودة ومنتظمة عند الرياضيين اللاحقين، ليس هذا وحسب بل إنها معروضة على أنها الوحيدة المفروضة على الجميع كما نرى في كتابات الخازن.

يؤثر هذا النشاط الخلاق على المسائل وعلى الطرق في آن. لقد استطعنا أن نرى كيف أصبح التطلب الجديد لاستعمال القطوع دون سواها يعني تحرر هذه الطريقة من كل ما يرتبط بمسألة معينة وتطبيقها على كل المسائل المجسمة، القديمة منها والحديثة. أضف إلى ذلك أنه كشف عن قدرة هذه الطريقة الذاتية، وهي قدرة في حقيقة الأمر أقوى بكثير مما كان يتصور: فقد غدت من الآن فصاعداً تطبق في مجالات أوسع من مجال تطبيقها الأصلي. فمنذ أيام الماهاني وبعدها تبناها الجبريون ولم تعد مقتصرة على المهندسين وحدهم. ولعلنا لسنا بحاجة للتذكير أن كل عناصر هذه السيرورة وأن الطريقة نفسها موضوعية بالتأكيد؛ بمعنى أنها تنتمي إلى الرياضيات وأن تأسيسها رياضي. لا شك أن ما امتازت به بغداد بمجالسها وبلاطاتها كاف لتفسير اهتمام المجتمع بتلك الأعمال، وأن حدة الذكاء في طرح الأسئلة وغيرها من العوامل قد أسهمت في نجاح هذا البحث؛ ولكنها لم تكن لتؤثر في حالة من الأحوال في دينامية هذا التطور الداخلي.

يعبر اختيار هذه الطريقة عن تصور جديد للأغراض الهندسية كما يقوي في الوقت ذاته هذا التصور: نقصد هنا تصور المسائل المجسمة. فلم تعد المسألة ترى ككيان منعزل وإنما كعنصر ينتمي إلى جماعة. وأصبحت مسائل تثليث الزاوية أو متوسطيّ التناسب أو المسبع المنتظم الخ. كلها أعضاء في جماعة الموضوعات التي يمكن إنشاؤها باستعمال القطوع المخروطية. ومن جهة أخرى، فإن دراسة كل منها يتطلب الأخذ بعين الاعتبار كل الحالات الخاصة. أي أنه لم يعد من الممكن الاكتفاء بإيجاد حل لحالة خاصة منفردة، وإنما أصبح المطلوب على العكس ومنذ البداية إعطاء برهان قبلي يطبق على كل الحالات الخاصة. ويمكن القول أن هذا التصور التركيبي للغرض الهندسي لم يتبدى في هذا المجال وحده بل نجده في مجالات دراسات أخرى في ذلك العصر: الهندسة المتناهية في الصغر والهندسة الجبرية، الخ.

تجب الإشارة أخيراً أن تقديم بيان عن تاريخ هذه الإنشاءات الهندسية لحلول مسائل مجسمة اقتضى منا تفهم القوانين المعرفية (الأبستمولوجية) المذكورة أعلاه وتقييم التأثير الذي خلفته. ذلك أن إهمال هذه المسائل والتركيز فقط على بقايا الكتابات الرياضية اليونانية في أعمال الرياضيين العرب في القرنين التاسع والعاشر يعني السير في طريق مسدود سيفوت علينا لا محالة معرفة كنه إسهامات هؤلاء الرياضيين.

4. التوجه الجديد في هندسة القطوع: السطوح التربيعية

يكشف الشوط الممتد من ترجمة *المخروطات* لأبلونيوس في منتصف القرن التاسع إلى أعمال القوهي الهندسية عن مشهد جديد، غني ومتنوع، تحرينا بعض جوانبه: فقد تعددت وتنوعت فروع الهندسة وتحولت هندسة القطوع من حيث سعتها وعمقها. ونحن مضطرون، حتى ولو لم نركز انتباهنا إلا على هندسة القطوع، إلى التساؤل عن وجود اتجاهات أخرى فتحت أبواب البحث في مجالات تقع على حدود هندسة ذلك العصر إن صح التعبير. ذلك أن معاصر القوهي الشاب، السجزي، فتح باب بحث جديد في السطوح التربيعية.

عاد السجزي أكثر من مرة في كتاباته إلى كتابه في *القطع الناقص*. وهو كتاب مفقود إلا أن القليل الذي يخبرنا فيه السجزي عنه يسمح لنا بالتخمين على احتوائه دراسة لخواص القطع الناقص مبنية على النظر في مجسمين البيضي والعدسي[98] ناتجين عن تدوير القطع الناقص حول محوره الكبير أو محوره الصغير على الترتيب. كما كرس دراسة لهذين المجسمين *في خواص الشكل البيضي والعدسي*، فقدت هي أيضاً. إلا أن هذه المقاربة هي نفسها في دراستين أخرتين وصلتا إلينا. عنوانهما، الأولى في *خواص القبة الزائدة والمكافئة*، والثانية في *خواص المجسم الناقص والزائد والمكافئ*. وهما عنوانان يدلان على المحتوى ولا يحتاجان إلى التعليق: ينصب اهتمام الدراستين على تحديد خواص القطوع المخروطية كقطوع مستوية للمجسمات. وعلى نحو أكثر دقة، فقد وضع السجزي نصب عينيه في هذه الدراسات تعيين طبيعة بعض السطوح التربيعية بواسطة قطوعها المستوية وتصنيف السطوح بدليل مفهوم أطلق عليه اسم المرتبة : المرتبة تابع لعدد القطوع المرتبطة بالسطح[99]. سواء كانت هذه القطوع محددة أو غير محددة.

إن أهمية هذا البحث واضحة بجلاء رغم أن هذه الأعمال ما تزال مجهولة إلى الآن. ذلك أننا نجد في هذه الأعمال أول إسهام معروف في نظرية السطوح التربيعية. صحيح أنه يمكن للمرء أن يكتشف في أشباه المخروطات وأشباه الكرات *Conoids and Spheroids* دراسة بعض المحلات الهندسة على السطوح. إلا أنه يمكن الرد أن عمل أرشميدس هذا لم يكن معروفاً عند الرياضيين العرب، الذين نجحوا منذ منتصف القرن التاسع في إعادة اكتشاف هذه المحلات بوسائلهم الخاصة. وهكذا فقد عني الحسن بن موسى وتلميذه ثابت بن قرة بهذه المحلات من خلال أعمالهما في المجسم الناقص والمجسم المكافئ. وقد ذهب الأخير منهما حداً بعيداً عندما بدأ في رسالته *في قياس القطع المكافئ* النظر في القبة المكافئة. واهتم ابن سهل أيضاً في أعماله في الانكساريات بأشباه المخروطات. ما من شك أن أعمال الأرخميدسيين العرب قد زودت السجزي ببعض الأفكار والنتائج إلا أن هذه الأعمال، كأعمال أرشميدس نفسه كانت منصبة على إيجاد حجوم المجسمات المتولدة من دوران الأشكال المنحنية. لكن منظور السجزي كان مختلفاً، واهتمامه متجهاً نحو هندسة السطوح، أي دراسة السطوح لذاتها كموضوعات هندسية. وهو ما يتيح لنا تعريف السياق الدقيق لإسهام السجزي وإلقاء الضوء على معناه الحقيقي. فالمنظور الجديد يحمل معه في الواقع صفاته المميزة. أولاً وقبل كل

---

[98] (أو البيضوي) وهما تعبيران قديمان.

[99] ترتفع المرتبة عند السجزي بارتفاع هذا العدد.

شيء، يبدو إسهام السجزي، وهذه صفته المميزة الأولى، كامتداد ولكن في اتجاه آخر، للبحوث في القطوع تحديداً التي أنجزها سابقوه ومعاصروه – خاصة منهم بنو موسى، ابن قرة، القوهي وابن سهل. فقد نظر الأولون في الكرة ومجسم القطع الناقص ومجسم القطع المكافئ المشتقة من المخروط والأسطوانة؛ ودرس ابن سهل، على صلة ببحوثه في المرايا المحرقة والعدسات، مجسم القطع المكافئ ومجسم القطع الزائد وكذا المستويات المماسة لها. أي أن السجزي وُجِد في المكان المناسب والوقت المناسب ليجمع ويستغل هذه البحوث المبعثرة؛ ولكنه وجه أعماله من منظور جديد وفتح مجال بحث جديد في هندسة المخروطات: المحل الهندسي للسطوح التربيعية.

وقد فُتح هذا المجال الجديد كامتداد طبيعي، إن صح القول، لهندسة المخروطات. وهذا ما يلقي الضوء على صفتين مميزتين أخرتين لإسهام السجزي. أولاهما تتصل بالطريقة: فطريقته لا تدين بشيء للجبر، وهي في الواقع لا تدين بشيء كذلك للهندسة الفراغية؛ لأن ما تتطلبه هو الرجوع إلى الهندسة المستوية وذلك بأخذها قطوعا يحدثها مستوى عام. وثانيتهما تتعلق بحدود مجال المحالات الهندسية على السطوح هذه، فقد قصر السجزي الأمر على سطوح تربيعية خاصة، تلك المتولدة بالدوران. فلم يدرس السطوح المسطرة (مجسم القطع الزائد ومجسم القطع المكافئ الزائدي) واضعاً بذلك إطاراً للبحث ظل متبعاً خلال القرون الثمانية التالية.

سنجد أغلب هذه المميزات في تكرار هذا العمل على يد فيرما في قطعته Introduction to loci on surfaces المؤرخة 1643. ومع أن هذا التجديد قد اقترن ببعض المظاهر الجبرية، فإن فيرما لم يأخذ بعين الاعتبار إلا بعض المحلات الهندسية في السطوح التربيعية مستعملاً طريقة، مماثلة لطريقة السجزي، قائمة هي أيضاً على إعادة الأمور إلى الهندسة المستوية.

يبقى علينا تقديم عرض تحليلي لإسهام السجزي ونشر دراستيه مع ترجمتهما.

1.4 في خواص القبة الزائدة والمكافئة

إن هدف السجزي في رسالته هذه في خواص القبة الزائدة والمكافئة هدف مزدوج. ففي حين درس أبلونيوس الأشكال الأربعة – الدائرة والقطع الناقص والقطع الزائد والمكافئ – المشتقة كقطوع مستوية لمخروط ذي قاعدة دائرية، فقد هدف السجزي إلى دراسة القطع الناقص المشتق من الأسطوانة تابعاً في ذلك الحسن بن موسى وثابت بن قرة، هذا من جهة. وكان يقصد من خلال ذلك أن يبين وجود إجراءات أخرى غير تلك التي اعتمدها أبلونيوس للحصول على هذه الأنواع الأربعة من القطوع المستوية التي أشرنا إليها. ولذا نراه يأخذ بعين الاعتبار المجسمات الدورانية التي تحدثها هذه القطوع الأربعة ويدل على عدد القطوع المستوية التي يمكن الحصول عليها من كل واحدة من هذه المجسمات. ويرجع على وجه الخصوص إلى المجسم البيضي والمجسم العدسي اللذين ناقشهما على ما يبدو في رسالته الضائعة في القطع الناقص؛ وإلى القبتين الزائدة والمكافئة اللتين حظيتا بمناقشة مفصلة.

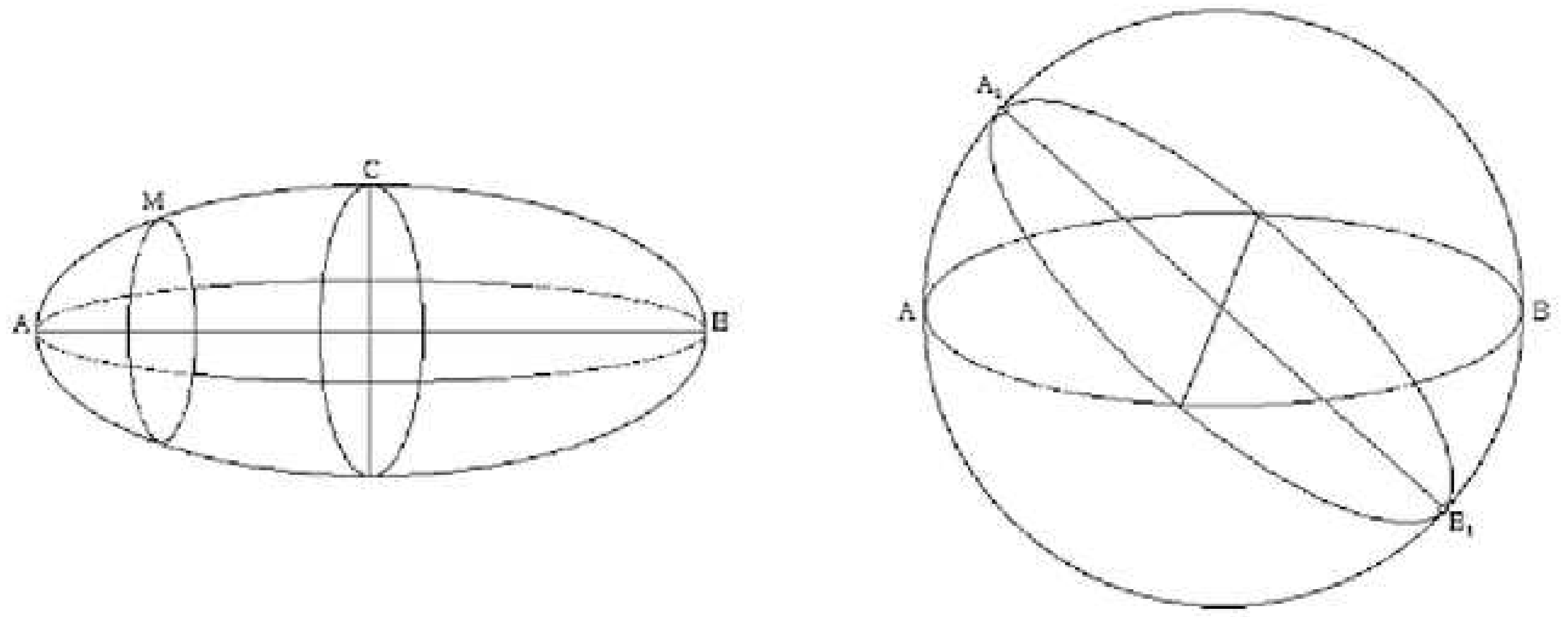
وكان هدفه الثاني تصنيف المجسمات الدورانية بشكل "طبيعي" كما يقول، أي حسب عدد القطوع المستوية مختلفة الأنواع التي يمكن الحصول عليها من المجسمات وحسب عدد القطوع غير المحدودة. يعين هذان العددان "مرتبة" المجسم.

وهكذا فقد وجد السجزي نقطة انطلاق عمله في أعمال الحسن بن موسى وثابت بن قرة. ويكيفنا أن نتذكر أن ثابت بن قرة في رسالته *في قياس المجسم المكافئ* قد عرف[100] خمسة مجسمات مكافئة، سميت ثلاثة منها "قبب". تحدث من سطح مستو يحدده قوس قطع مكافئ AB والقطر المنشأ من النقطة A وترتيب النقطة B، BC، وذلك بتدوير السطح حول القطر AC.

فإذا كان AC هو محور القطع المكافئ فيقال عن القبة إن لها رأساً منتظماً – وهي القبة التي درس السجزي قطوعها المستوية في الأخير. أما إذا كان AC قطراً لا على التعيين فنحصل علي قبة يقال عنها إن "رأسها نقطي" أي قبة محدبة، أو على قبة يقال عنها إن "رأسها غارق" أي قبة معقرة. ليست هاتان القبتان الأخيرتان سطوحاً تربيعية.

لقد اهتم ابن قرة من جهته بقياس حجوم القبب الثلاث. أما السجزي فقد ارتأى دراسة القطوع المستوية لكل المجسمات التي تولدها المنحنيات المخروطية (الدائرة، القطع الناقص، القطع المكافئ، والقطع الزائد) بدورانها حول محور ما – المحور العرضاني في حالة القطع الزائد – ولذا فهو يذكرنا في مدخل دراسته أن

- دوران الدائرة حول قطر ما يحدث الكرة وأن كل القطوع المستوية للكرة دوائر تساوي أشعتها شعاع الدائرة الأصلية أو تنقص عنها؛
- دوران القطع الناقص حول محوره الكبير يولد المجسم الناقص الدوراني المسمى "البيضي" ودورانه حول محوره الصغير يولد "العدسي".



الشكل. 67

إن القطوع المستوية لهذين المجسمين هي دوائر أو قطوع ناقصة. يبدو أن السجزي درس هذين المجسمين في كتابه المفقود عن القطع الناقص؛

[100] *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. 1, chap. 2.

- دوران القطع المكافئ حول محوره يولد قبة مكافئة قطوعها المستوية دوائر وقطوع ناقصة وقطوع مكافئة.
- دوران القطع الزائد حول محوره يولد قبة زائدية قطوعها المستوية دوائر وقطوع ناقصة وقطوع زائدة.

ويشير السجزي أنه يمكن الحصول على الدائرة في كل الأحوال كمقطع مستو لكل السطوح الدورانية؛ وأن الدائرة ليست سوى حالة خاصة من القطع الناقص، ولذا تظهر في كل الأصناف السابقة.

ويصنف السجزي بعد ذلك المجسمات على نحو يمكن تمثيله بالجدول التالي:

المجسم	القطوع المستوية	المرتبة
الكرة	الدائرة	1
المجسم البيضي أو العدسي	الدائرة والقطع الناقص	2
المجسم الأسطواني	الدائرة والقطع الناقص غير المحدود	3
القبة المكافئة أو الزائدة	الدائرة، القطع الناقص، القطع المكافئ أو القطع الزائد	4
المجسم المخروطي	الدائرة، القطع الناقص، القطع المكافئ القطع الزائد، المثلث (منحنيات غير محدودة الأبعاد)	5

ترتبط فكرة المرتبة التي أدخلها السجزي بعدد القطوع المستوية وبوجود منحنيات لا محدودة الأبعاد. ولنشرح ما المقصود من هذه الأشياء. إن للتعبير الأخير "غير محدود" معنيان في نص السجزي: فالمنحني غير المحدود هو الذي يمتد إلى اللانهاية؛ إنها حالة القطوع المكافئة والقطوع الزائدة وحدها. ومن جهة أخرى، فإن جماعة من الدوائر أو القطوع الناقصة "غير محدودة" عندما تكون أقطار هذه الدوائر والقطوع الناقصة بدون حد.

لنعد لتوضيح أوسع إلى الكتاب الأول في *المخروطات* لأبلونيوس (القضيتان 8 و 9)، إذ يبرهن على وجود صنفين من المنحنيات حسب وضع المستوي القاطع للمخروط: المنحنيات المغلقة – الدوائر التي ينظر فيها في القضيتين I.4 و I.5 والمنحنيات غير الدائرية، أي القطوع الناقصة التي يدرسها في القضية I.13 – والمنحنيات غير المحددة (القضية I.8) أي القطع المكافئ المدروس في I.11 والقطع الزائد في I.12. ويلاحظ أبلونيوس أنه يمكن تمديد سطح المخروط الجانبي والمستوى القاطع إلى اللانهاية.

لكن المخروط، في التقليد المتبع من قبل بني موسى وثابت بن قرة، مرتبط بالأسطوانة الدورانية. ونجد في المجسم الأسطواني دوائر محدودة وقطوعاً ناقصة غير محدودة بمعنى أنه يمكن أن يكون محور القطع الناقص الكبير المذكور كبيراً قدر ما نشاء؛ ونجد في المجسم المخروطي دوائر غير محدودة في كلا الاتجاهين *في الكبر وفي الصغر* وقطوعاً ناقصة غير محدودة.

وواضح إذاً أنه عندما يتحدث السجزي عن "الدوائر غير المحدودة" و"القطوع الناقصة غير المحدودة". فإنه يعني أنها كبيرة بقدر ما نريد. ولذا وجب علينا في حالة الأسطوانة الدورانية الأخذ بعين الاعتبار سطحاً أسطوانياً ممتداً

إلى اللانهاية وليس مجسماً تحدده قاعدتاه. فكل القطوع المستوية الدائرية متساوية فيما بينها؛ أما في القطوع الناقصة فيمكن تكبير المحور الكبير كما نريد بينما يبقى المحور الصغير على الدوام مساوياً لقطر القاعدة الدائرية.

فإذا كان r هو شعاع دائرة القاعدة في الأسطوانة و AB محور القطع الناقص الكبير ذا الطول $d = \frac{2r}{\sin \alpha}$ حيث α الزاوية بين محور الأسطوانة والمستوى القاطع فإن $d \to \infty$ عندما تتناهى α إلى الصفر.

أما في حالة المخروط الدوراني، فإن السجزي لا يأخذ بعين الاعتبار على ما يبدو مجسماً محدداً برأس المخروط وبقاعدته وإنما سطحاً مخروطياً على طرفي الرأس ممتداً إلى ما لا نهاية في الاتجاهين. وهكذا يمكننا الحصول على كل طرف من الرأس على دوائر تتعاظم أشعتها من الصفر إلى اللانهاية وعلى قطوع ناقصة يتعاظم كلا المحورين فيها إلى اللانهاية؛ ويصح الأمر نفسه على القطوع المكافئة والقطوع الزائدة التي تتمدد بقدر تمدد السطح المخروطي.

يمكننا أن نرى بوضوح أن هذه المفاهيم الأساسية في عمل السجزي تصح أيضاً في معالجته للقبب. يمكن للقطع المكافئ (أو القطع الزائد) التمدد بقدر ما نريد ونستطيع بالتالي إعطاء القبة الارتفاع الذي نبغيه، والحصول بالتالي على قطوع مستوية كبيرة كما نبتغيه.

لننظر الآن في صلب رسالة السجزي.

القضية 1: إن القطوع المستوية لقبة مكافئة هي إما قطع مكافئ أو قطع ناقص أو دائرة.

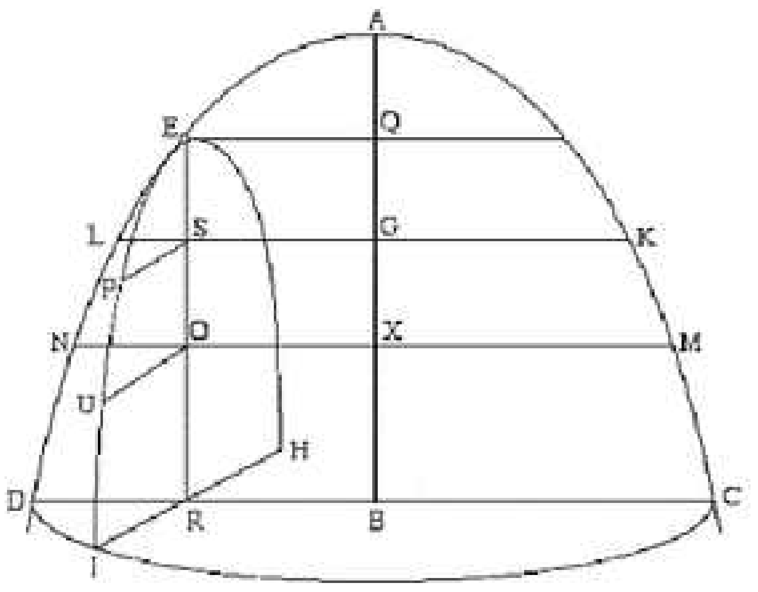
لتكن القبة المكافئة المتولدة من دوران القطع المكافئ CAD. لدينا ثلاث حالات حسب وضع المستوى القاطع.

الحالة الأولى: المستوى القاطع (HEI) موازٍ لمحور القطع المكافئ، والمستوى CAD عمودي عليه.

يقطع المستوى (HEI) المستوى (CAD) في ER والقاعدة في IH. لدينا $AB \parallel ER$ و $IH \perp CD$.

لدينا في القطع المكافئ CAD التراتيب EQ، KGL، MXN؛ يقطع ER KGL في S و MXN في O. نرسم في الدائرتين اللتين قطراهما LK و MN، الواقعتين في مستويين عموديين على AB، $LK \perp SP$ و $MN \perp OU$؛ تقع النقطتان P و U في المستوي (HEI) لدينا

$$PS^2 = SK \cdot SL \qquad \text{و} \qquad OU^2 = OM \cdot ON$$



الشكل. 68

لكن

$$MO \cdot ON = XN^2 - OX^2 = XN^2 - EQ^2$$

و

$$KS \cdot SL = GL^2 - GS^2 = GL^2 - EQ^2$$

ومنه

$$\frac{XN^2}{GL^2} = \frac{MO \cdot ON + EQ^2}{KS \cdot SL + EQ^2} = \frac{AX}{AG}$$

لأن $\frac{XN^2}{GL^2} = \frac{AX}{AG}$، من I.20 من *المخروطات*.

ومن جهة أخرى، ينتج من $KS \cdot SL = GL^2 - EQ^2$، أن

$$\frac{KS \cdot SL}{EQ^2} = \frac{GL^2}{EQ^2} - 1 = \frac{AG}{AQ} - 1 = \frac{GQ}{AQ}$$

وعلى نفس النحو من $MO \cdot ON = XN^2 - EQ^2$ أن

$$\frac{MO \cdot ON}{EQ^2} = \frac{XN^2}{EQ^2} - 1 = \frac{AX}{AQ} - 1 = \frac{XQ}{AQ}$$

ومن العلاقتين السابقتين

$$\frac{MO \cdot ON}{KS \cdot SL} = \frac{XQ}{GQ} = \frac{OE}{SE}$$

وبالعودة إلى العلاقتين الأولتين

$$\frac{OU^2}{SP^2} = \frac{EO}{ES}$$

يمكن تطبيق نفس المحاكمة على أي مستقيم مواز لـــ SP مرسوم من نقطة من ER. نحصل على سبيل المثال على

$$\frac{IR^2}{SP^2} = \frac{ER}{ES}$$

والقطع HEI هو إذاً قطع مكافئ .

لنبرهن أنه مساو للقطع المكافئ CAD.

إذا فرضنا أن $AQ = QG = GX$؛ فإن $ES = SO = AQ$ و $EO = AG$ إذاً

$$\frac{KS \cdot SL}{EQ^2} = \frac{GQ}{QA} \qquad \text{أي} \qquad KS \cdot SL = EQ^2$$

وبالتالي $SP^2 = QE^2$.

وبنفس الشكل

$$\frac{MO \cdot ON}{QE^2} = \frac{XQ}{QA} \qquad \text{أي} \qquad MO . ON = 2EQ^2 = GL^2$$

لأن
$$\frac{GL^2}{EQ^2} = 1 + \frac{KS \cdot SL}{EQ^2} = 2$$

وبالتالي $OU^2 = GL^2$.

يقابل الفواصل المتساوية تراتيب متساوية؛ فالقطعان المكافئان متساويان.

ملاحظات:

1) يعتمد السجزي في هذه القضية كما في غيرها على I.20 من *المخروطات*. سيستعين كذلك بالقضية I.21 حين يتعلق الأمر بالقطع الناقص والزائد.

تعاد القطوع المخروطية في هاتين القضيتين لأبلونيوس إلى قطرعام. لكنها ترجع إلى محاورها عند السجزي.

ثم إن أبلونيوس لم يبرهن عكسي هاتين القضيتين. أما السجزي فيطبق نتيجة أبلونيوس على القطع المكافئ والزائد، ويطبق في الوقت ذاته القضية العكسية عندما يريد أن يبين *طبيعة المنحنى* الناتج كمقطع مستو للقبب موضوع البحث.

ولهذا يبرهن أن ترتيبي نقطتين من هذا المنحني يحققان المساواة المنصوص عنها في القضيتين I.20 وI.21. ويشير إلى أن الخاصة تصح من أجل أي زوج من النقط على المنحني المذكور حين يكتب: "[...] وعلى هذا المثال أي خط أخرج من خطوط الترتيب هذه حاله"[101]. ويستنتج من هذا طبيعة المنحني. لنلاحظ أن السجزي استعمل هاتين القضيتين I.20 و I.21 والقضتين العكسيتين لا في هذه الرسالة فحسب وإنما في الرسالة التالية كذلك.

2) يمكننا إذا انطلقنا من *الضلع القائم* c للقطع المكافئ DAC أن نثبت بسرعة أن القطع HEI قطع مكافئ محوره ER و*ضلعه القائم* c. لدينا

$$GL^2 = c \cdot AG,\ XN^2 = c \cdot AX,\ EQ^2 = c \cdot AQ,\ BD^2 = c \cdot BA$$

لنجعل $AQ = QG = GX$؛ وبالتالي $AQ = ES = SO$، فنحصل

$$\frac{SP^2}{c \cdot SE} = \frac{SL \cdot SK}{c \cdot SE} = \frac{GL^2 - GS^2}{c \cdot SE} = \frac{GL^2 - EQ^2}{c \cdot SE} = \frac{AG - AQ}{SE} = 1$$

لأن $SE = GQ$.

ولدينا من مجموعة أخرى من علاقات التساوي

$$\frac{OU^2}{c \cdot EO} = \frac{XQ}{EO} = 1$$

وإذاً

$$\frac{SP^2}{c \cdot SE} = \frac{OU^2}{c \cdot EO} = 1$$

وهكذا فالقطع HEI قطع مكافئ محوره ER و*ضلعه القائم* c، ويساوي القطع المكافئ DAC.

---

[101] انظر أسفله، ص. 605 سطر 12.

لنلاحظ أخيراً أنه إذا أسقطت نقطة ما P على ER في S وعلى AB في G فإن

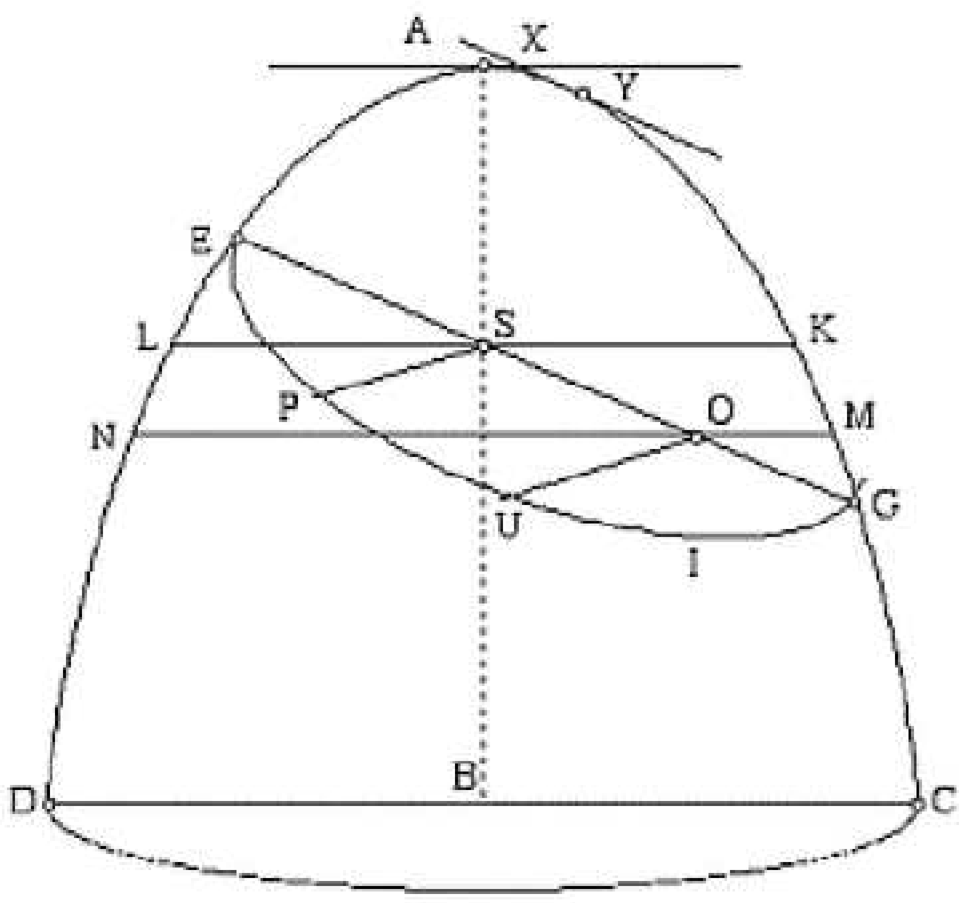
$$PS^2 = SK \cdot SL = GL^2 - EQ^2 = c \cdot AG - c \cdot AQ = c \cdot QG = c \cdot ES$$

حيث نتعرف على الخاصة المميزة (Symptoma) لقطع مكافئ مساو لــ DAC.

الحالة 2: لا يوازي المستوي القاطع GEI محور القبة AB كما أنه لا يتعامد معه.

ليكن EG خط تقاطع المستوى القاطع مع المستوى DAC المار بـــ AB والعمودي على GEI. نرسم من S، نقطة تقاطع AB مع GE، المستقيم KL خط ترتيب القطع المكافئ DAC. ثم خط ترتيب آخر MN يقطع EG في O. نرسم في المستويين العموديين على AB والمارين على الترتيب بـــ KL وMN الخط $SP \perp KL$ والخط $OU \perp MN$. تقع النقطتان P وU على الدائرتين اللتين قطراهما KL وMN، وتقعان أيضاً في المستوى القاطع. لنرسم XY المماس للقطع المكافئ DAC والموازي لــ EG. يمس القطع في Y ويلقى في X المماس للقطع في النقطة A. لدينا إذاً من القضية III.17 من *المخروطات*.

$$\frac{GO \cdot OE}{MO \cdot ON} = \frac{XY^2}{AX^2} \quad \text{و} \quad \frac{GS \cdot SE}{KS \cdot SL} = \frac{XY^2}{AX^2}$$



الشكل. 69

وبما أن $KS \cdot SL = SP^2$ و $MO \cdot ON = OU^2$، فنحصل على

$$\frac{KS \cdot SL}{MO \cdot ON} = \frac{GS \cdot SE}{GO \cdot OE} = \frac{SP^2}{OU^2}$$

والقطع هو إذاً قطع ناقص محوره GE (I.21 *المخروطات*).

الحالة 3: إذا كان مستوى القطع عمودياً على محور القبة AB فالقطع دائرة.

ملاحظة: رأينا للتو أن السجزي يستعمل القضية III.17 من *المخروطات*. وهي قضية تصح على أي قطع مخروطي وتنص على ما يلي:

ليكن AX وAY مماسين يتقاطعان في النقطة A. نرسم من نقطة Z داخل القطع المخروطي المستقيمين KE و $\Delta\Theta$ الملاقين للقطع والمحققين لـــ $AY \parallel KE$ و $AX \parallel \Delta\Theta$. يبرهن أبلونيوس أن

$$\frac{Z\Theta \cdot Z\Delta}{ZK \cdot ZE} = \frac{AX^2}{AY^2}$$

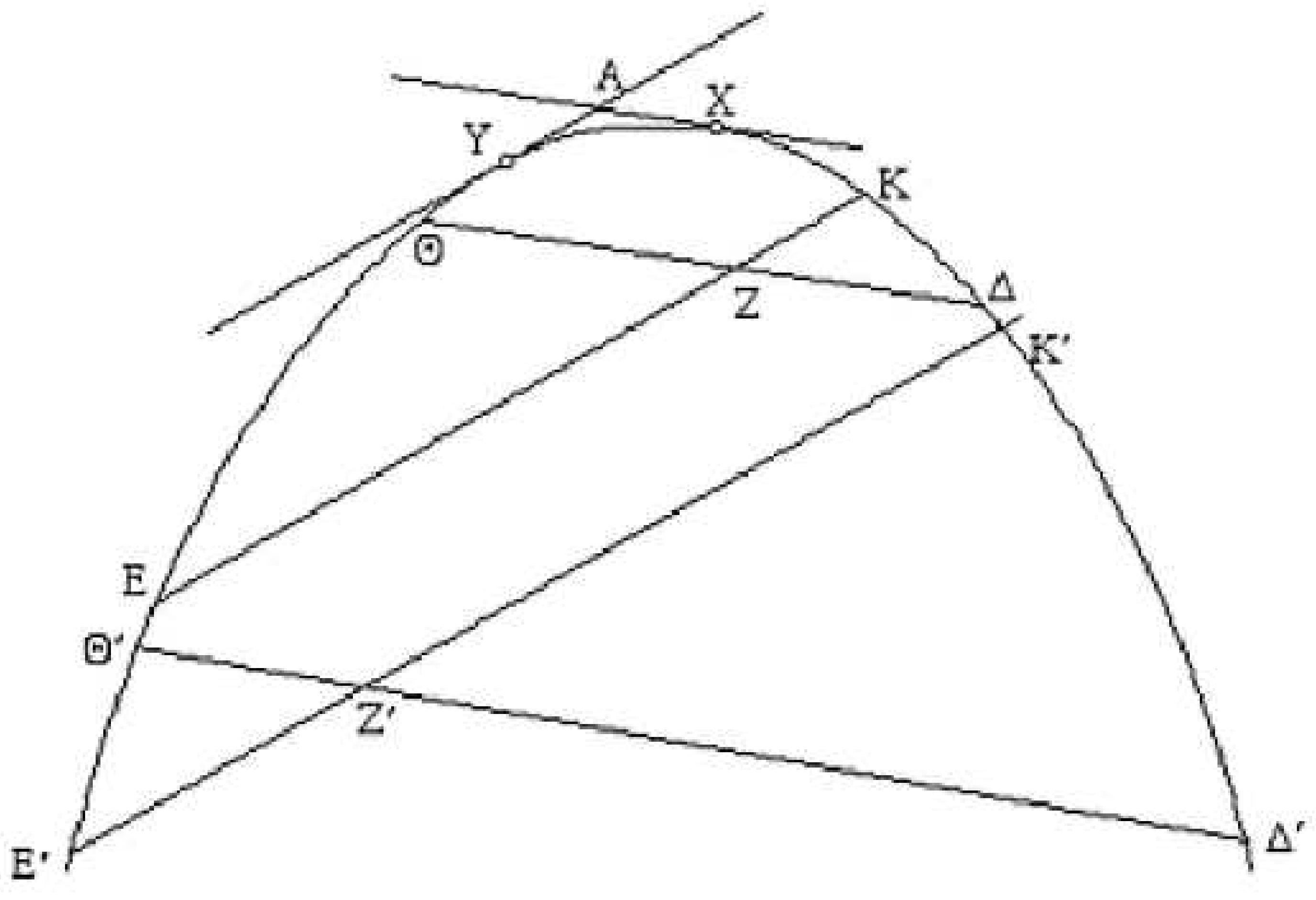
وقد استعمل السجزي القضية على هذا الشكل في مناقشته لقاطع مستو للقبة المكافئة يعطي قطعاً ناقصاً.

عندما نقيم من نقطة ما $Z' \neq Z$ الخط $K'E' \parallel AY$ والخط $\Delta'\Theta' \parallel AX$، فهنا أيضاً لدينا

$$\frac{Z'\Theta' \cdot Z'\Delta'}{Z'K' \cdot Z'E'} = \frac{AX^2}{AY^2}$$

ومنه

$$\frac{Z\Theta \cdot Z\Delta}{ZK \cdot ZE} = \frac{Z'\Theta' \cdot Z'\Delta'}{Z'K' \cdot Z'E'}$$



الشكل. 70

تطبق هذه القضية على الخطوط المقامة من نقطتين مختلفتين، القاطعة للقطع المخروطي والمتوازية: خطان من نقطة مع خطين من النقطة الثانية. ويعود السجزي لتطبيق القضية على هذا الشكل بدون أن يشير إلى المماسين.

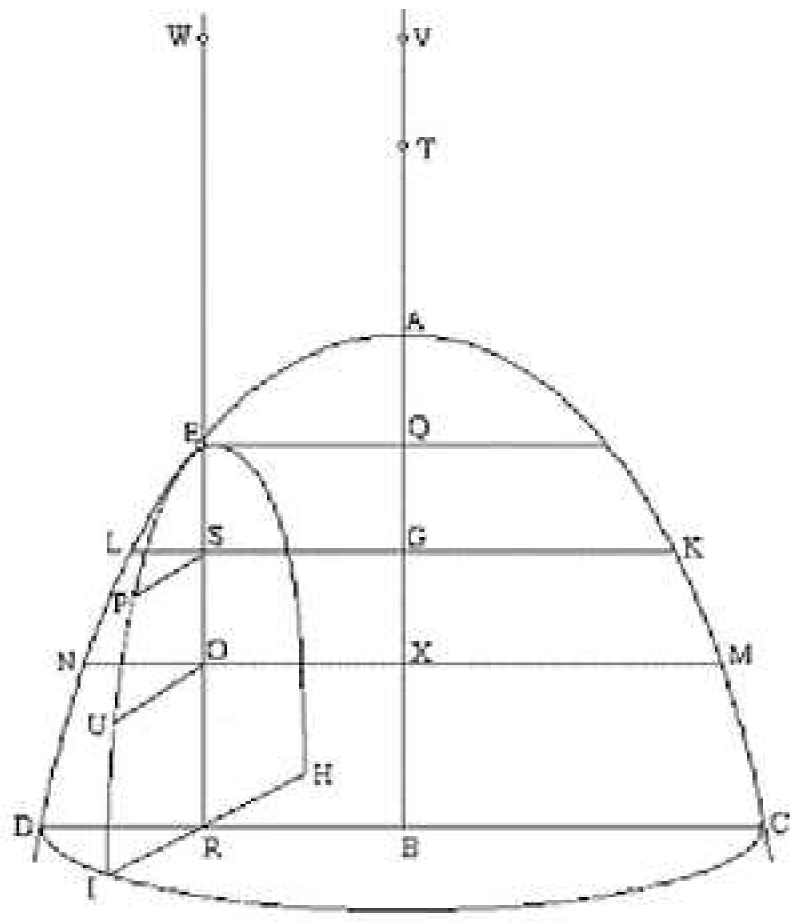
لابد من استحضار هذه القضية كذلك إذا ما أردنا تبرير النتائج التي يحصل عليها السجزي في آخر مناقشته للقبة الزائدة.

يمكن تعريف هذه الخاصة أيضاً بالقول إنها تنص *على قوة نقطة بالنسبة إلى قطع مخروطي*، وهي مبينة على هذا الشكل صراحة هنا ولأول مرة (على حد علمنا). ولم تظهر من جديد إلا في آخر القرن السابع عشر. فقد عممها ماك لوران MacLaurin لتطبق على كل المنحنيات الجبرية.

القضية 2: لتكن لدينا قبة مولدة من دوران القطع الزائد CAD حول محوره AB، وليكن AT قطره العرضاني. إن القطع HEI الذي يحدثه مستوى قاطع هو قطع زائد أو قطع ناقص أو دائرة.

نميز ثلاث حالات حسب وضع مستوى القطع.

الحالة 1: إن مستوى القطع (HEI) مواز للمحور AB وعمودي على المستوى (CAD) قاطعاً له حسب المستقيم ER وقاطعاً القبة حسب القطع الزائد (HEI).



الشكل. 71

نرسم التراتيب EQ، KL، MN للقطع الزائد (CAD) ذي المحور AB والقطر العرضاني AT. لدينا من I.21 من *المخروطات*

$$\frac{QE^2}{XN^2}=\frac{TQ\cdot QA}{TX\cdot XA} \quad \text{و} \quad \frac{QE^2}{GL^2}=\frac{TQ\cdot QA}{TG\cdot GA}$$

ومنه

$$\frac{GL^2-QE^2}{GL^2}=\frac{TG\cdot GA-TQ\cdot QA}{TG\cdot GA} \quad \text{و} \quad \frac{XN^2-QE^2}{XN^2}=\frac{TX\cdot XA-TQ\cdot QA}{TX\cdot XA}$$

لدينا كذلك

$$\frac{XN^2}{GL^2}=\frac{TX\cdot XA}{TG\cdot GA}$$

إذاً
$$\frac{XN^2 - QE^2}{GL^2 - QE^2} = \frac{TX \cdot XA - TQ \cdot QA}{TG \cdot GA - TQ \cdot QA}$$

ومن جهة أخرى

$$XN^2 - QE^2 = XN^2 - XO^2 = OM \cdot ON = OU^2 \qquad (\alpha)$$

و

$$GL^2 - QE^2 = GL^2 - GS^2 = KS \cdot SL = SP^2 \qquad (\beta)$$

نمدد AT بالمقدار TV = QA؛ فنحصل على

$$TX \cdot XA - TQ \cdot QA = TX(XQ + QA) - (TX - XQ)QA = XQ(TX + QA) = VX \cdot XQ$$

و

$$TG \cdot GA - TQ \cdot QA = TG(GQ + QA) - (TG - GQ)QA = GQ(TG + QA) = VG \cdot GQ$$

لنضع EW = QV؛ فنحصل على VG = WS و VX = WO؛ وبالنهاية من (α) و(β)

$$\frac{OM \cdot ON}{KS \cdot SL} = \frac{VX \cdot XQ}{VG \cdot GQ}$$

أي

$$\frac{OU^2}{SP^2} = \frac{WO \cdot OE}{WS \cdot SE}$$

بالتالي، فإن القطع HEI هو قطع زائد قطره العرضاني EW. هذا القطر أطول من القطر العرضاني للقطع الزائد CAD بالمقدار 2AQ = AQ + VT، أي بضعف فاصلة رأسه E. إن القطع المستوي هو إذاً القطع الزائد HEI.

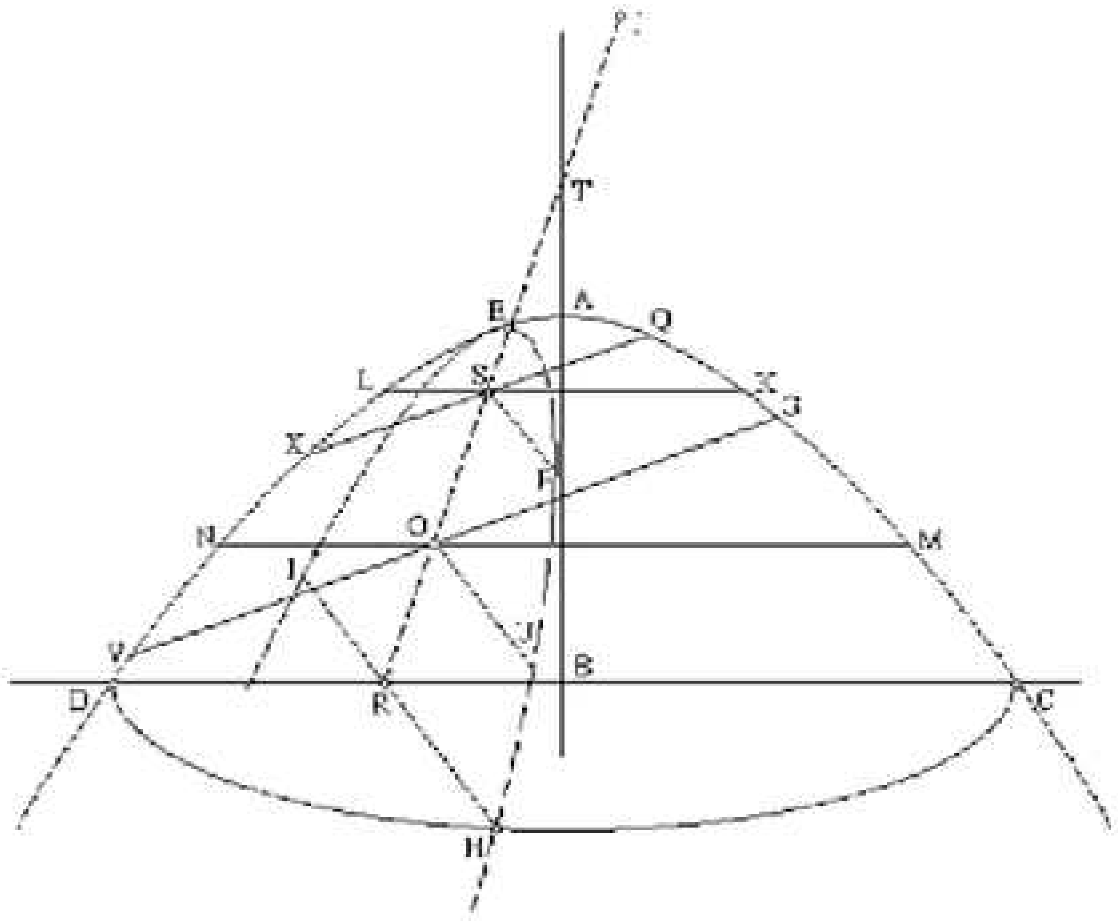
الحالة 2 لا يوازي مستوى القطع HEI المحور AB، لكنه يمر بالمركز T وهو عمودي على المستوى (CAD). يتقاطع المستويان على القطر TER. إن القطع HEI هو قطع زائد محوره ER.

ليكن هذه المرة AT نصف القطر العرضاني للقطع الزائد CAD؛ T هي النقطة التي يسميها أبلونيوس "المركز". وليكن JT = ET.

يقطع الترتيبان KL و MN بالنسبة للقطر AB الخط ER في S في O. نرسم من هاتين النقطتين الخطين QX و GV، ترتيبهما بالنسبة للقطر ER. نرسم $SP \perp QX$ و $OU \perp GV$ في مستويي الدائرتين اللتين قطراهما KL و MN.

ولدينا كما في حالة القطع المكافئ

$$\frac{QS \cdot SX}{GO \cdot OV} = \frac{KS \cdot SL}{MO \cdot ON}$$



الشكل. 72

لكن $QS \cdot SX = SX^2$ و $GO \cdot OV = OV^2$، لأن ER قطر.

ثم إن $KS \cdot SL = SP^2$، $MO \cdot ON = OU^2$، إذاً

$$\frac{SX^2}{OV^2} = \frac{SP^2}{OU^2}$$

إلا أن لدينا في القطع الزائد CAD

$$\frac{SX^2}{OV^2} = \frac{JS \cdot SE}{JO \cdot OE}$$

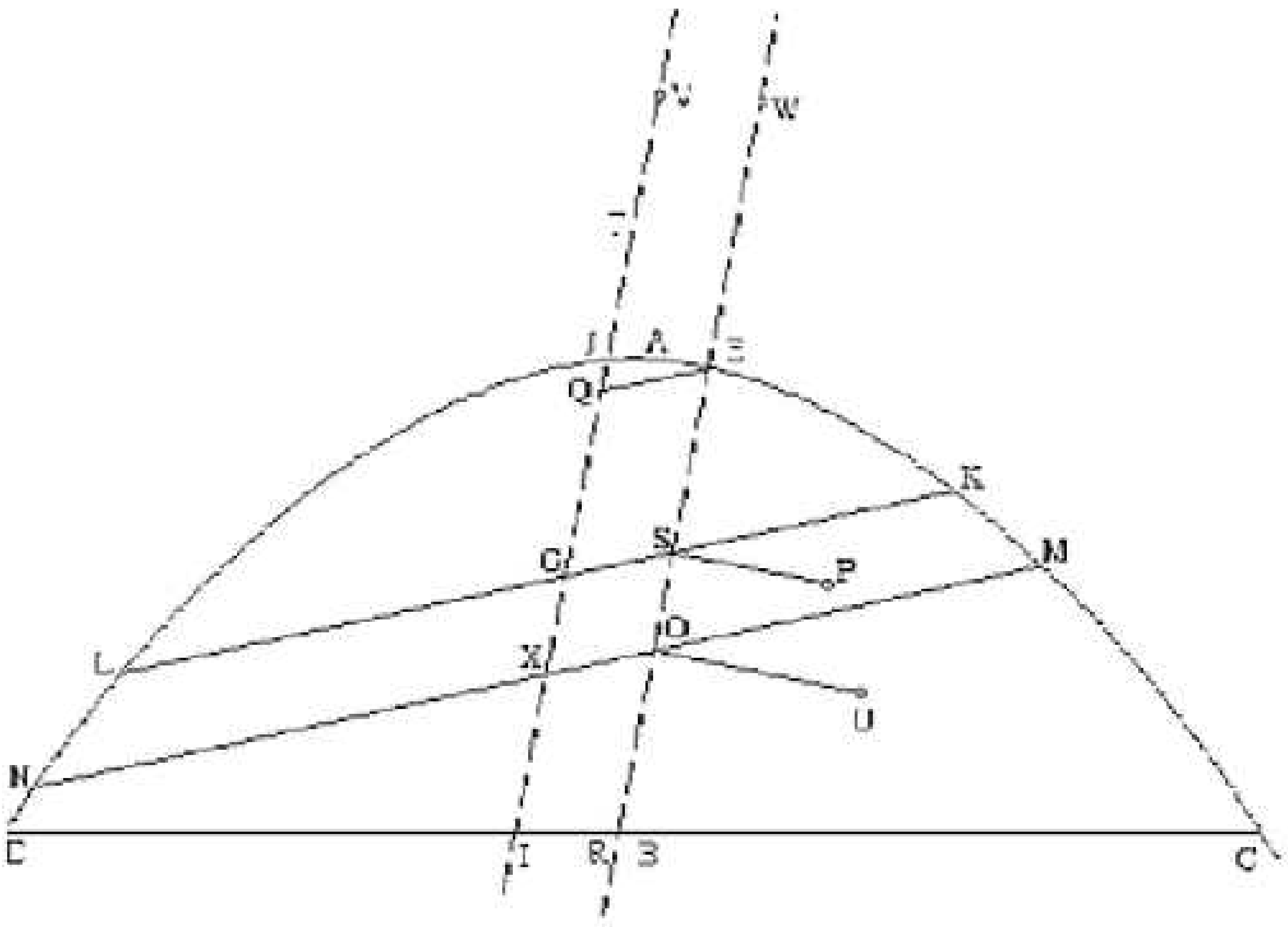
ومنه

$$\frac{JS \cdot SE}{JO \cdot OE} = \frac{SP^2}{OU^2}$$

وهكذا فالقطع HEI قطع زائد قطره EJ.

يشير السجزي أنه إذا مر المستوي القاطع للقبة الزائدية بإحدى التراتيب ولم يكن موازياً للمحور أو عمودياً عليه فمن الممكن البرهان، كما في حالة القطع المكافئ، أن القطع هو قطع *ناقص*. أما إذا كان عمودياً على المحور فالقطع هو *دائرة*.

الحالة 3: المستوي القاطع عمودي على المستوى (CAD) ويقطعه على الخط ER الموازي للقطر العرضاني TJI (حيث J على القطع الزائد و I على القاعدة و T وسط القطر العرضاني JV).



الشكل. 73

لا يعطي السجزي إلا الخطوط العريضة للبرهان ولكننا سنعرضه بالتفصيل هنا.

نرسم الترتيب EQ بالنسبة للقطر TI والترتيبين الموازيين له: KL ووسطه G و MN ووسطه X. ولدينا إذاً

$$\frac{VG \cdot GJ}{VX \cdot XJ} = \frac{KG \cdot GL}{MX \cdot XN} = \frac{KG^2}{MX^2}$$

و

$$\frac{VG \cdot GJ}{VQ \cdot QJ} = \frac{KG^2}{EQ^2} \qquad (1)$$

$$\frac{VX \cdot XJ}{VQ \cdot QJ} = \frac{MX^2}{EQ^2} \qquad (2)$$

ينتبج من (1) أن

$$\frac{KG^2 - EQ^2}{EQ^2} = \frac{GQ(VG + QJ)}{VQ \cdot QJ}$$

لكن $EQ = GS$ و $ES = GQ$، والتالي

$$KG^2 - EQ^2 = KG^2 - GS^2 = KS \cdot SL$$

نأخذ $WE = VQ + QJ$، فنحصل على $VG + QJ = WS$ وبالنتيجة

$$\frac{KS \cdot SL}{EQ^2} = \frac{ES \cdot WS}{VQ \cdot QJ} \qquad (3)$$

وينتج على نفس النحو من (2) أن

$$\frac{MX^2 \cdot EQ^2}{EQ^2} = \frac{XQ(VX + QJ)}{VQ \cdot QJ}$$

إلا أن $EQ = OX$ و $XQ = OE$؛ فإذاً

$$MX^2 - EQ^2 = MX^2 - OX^2 = MO \cdot ON \quad \text{و} \quad VX + QJ = EW + OE = OW$$

لذا ينتج عن (2) أن

$$\frac{MO \cdot ON}{EQ^2} = \frac{OE \cdot OW}{VQ \cdot QJ} \qquad (4)$$

والعلاقتان (3) و(4) تعطيان

$$\frac{KS \cdot SL}{MO \cdot ON} = \frac{ES \cdot WS}{OE \cdot OW} \qquad (5)$$

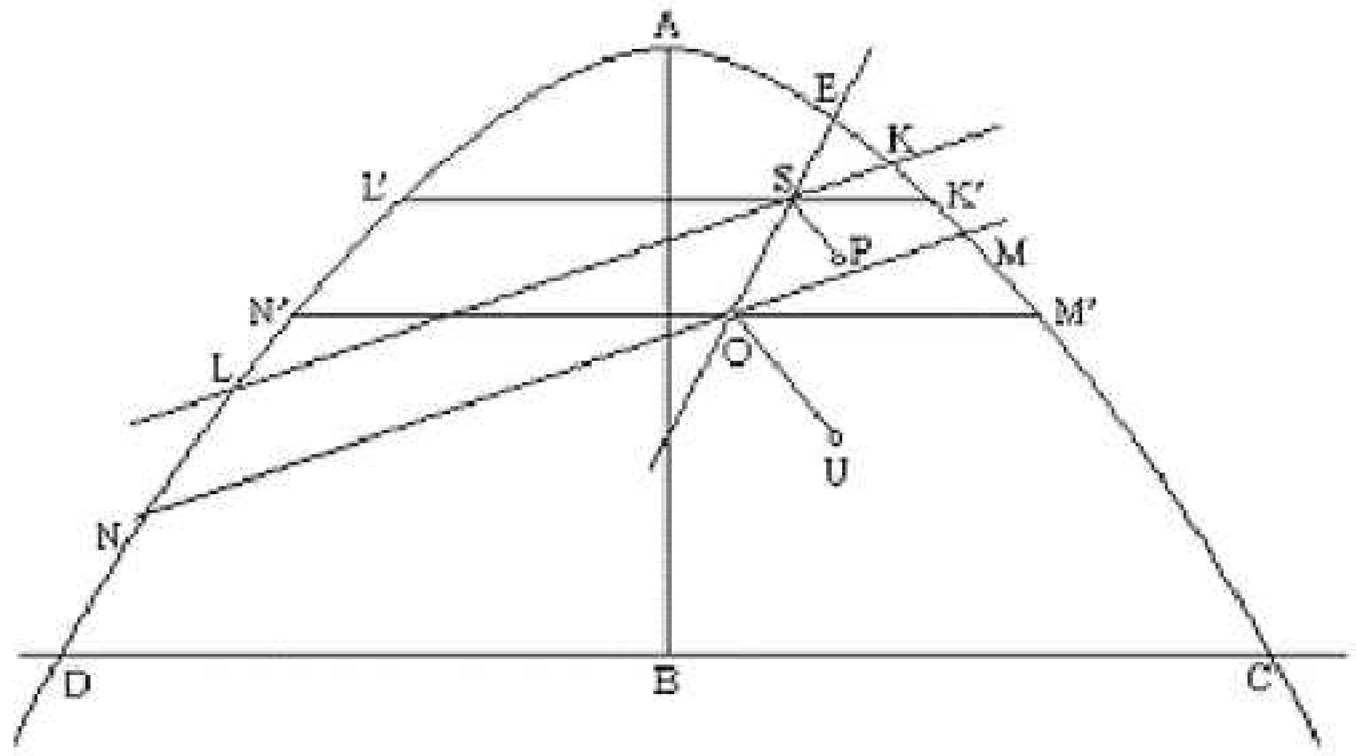
أي

$$\frac{SP^2}{OU^2} = \frac{SE \cdot SW}{OE \cdot OW} \qquad (6)$$

وهكذا فالتقاطع EPU هو قطع زائد قطره WR، رأسه E وقطره العرضاني EW.

ملاحظة: لا نزال في حاجة إلى تبرير الخطوة من (5) إلى (6)، لأن KL و MN ليسا هذه المرة قطري دائرتين. إلا أننا إذا رسمنا من النقطتين S وO مستويين عموديين على AB فإنهما يقطعان القبة بدائرتين قطراهما K'L' و M'N' على الترتيب ولدينا

$$\frac{KS \cdot SL}{MO \cdot ON} = \frac{K'S \cdot SL'}{M'O \cdot ON'} \qquad \text{(}\textit{المخروطات}\text{ III.17)}$$



الشكل. 74

ولما كان SP وOU عموديين على المستوى (CAD) وبالتالي $SP \perp K'L'$ و $OU \perp M'N'$، أي أن $K'S \cdot SL' = SP^2$ و $M'O \cdot ON' = OU^2$ ولدينا (6).

2.4 التفسير الإسقاطي لمسألة القطوع المستوية للسطوح التربيعية

لنوضح منذ البداية أن هذا التفسير غريب على رياضيات السجزي، إلا أنه يتيح لنا التعرف مباشرة على ما يعنيه إسهام السجزي وعلى حدود هذا الإسهام.

لنتذكر أن تقاطع تربيعي Q ومستوى P هو مخروطي. ذلك أن Q معين بصيغة تربيعية q في فضاء متجه V يحدد الفضاء الإسقاطي **P**(V) الذي يقع فيه Q؛ ويعين المستوى P بفضاء متجه جزئي W من V ذي ثلاثة أبعاد – فوق المستوي– (Hyperplane). إن ما يعين تقاطع Q و P هو حصر q في فوق المستوي W؛ وهذا التقييد هو صيغة تربيعية إلا إذا كان مطابقاً للصفر. ولا تحدث هذه الحالة إلا إذا كان P محتوى في مجموعة نقاط Q، أي عندما تكون Q متدنية آخذة شكل مستويين (متطابقين أو متميزين عن بعضهما).

لننظر إذاً إلى تربيعي عام Q (لا ينظر السجزي إلا للتربيعيات الدورانية المحدبة) وإلى علاقته بالمستوي في اللانهاية Π من الفضاء:

- إذا مس Q المستوى Π في نقطة ω فــ Q مجسم قطع مكافئ وتعطي ω اتجاه أقطاره.
- إذا كان تقاطع Q مع Π مخروطي C فــ Q مجسم قطع زائد ويحدد C المخروط المقارب لــ Q.
- إذا لم يلق Q المستوي Π فــ Q مجسم قطع ناقص.

لنعد الآن إلى P مستوى قطع Q، وليكن d المستقيم في اللانهاية من P، خط تقاطع P وΠ. تتوقف طبيعة قطع Q بالمستوى P على العلاقة بين d وبين عناصر Q الواقعة في اللانهاية.

a) إذا كان Q مجسم قطع مكافئ وكان d يمر بالنقطة ω – أي أن P يوازي الأقطار – فإن القطع المخروطي لــ Q بالمستوى P يمس d في ω، وهو بالتالي قطع مكافئ محوره مواز لأقطار Q.

أما إذا لم يمر d بالنقطة ω فليس للقطع المخروطي لــ Q بــ P نقطة في اللانهاية وهو قطع ناقص.

b) إذا كان Q مجسم قطع زائد وإذا تلاقى d مع C (المخروطي في اللانهاية لــ Q) فإن القطع المخروطي لــ Q بــ P يلقى d في نقطتين من $d \cap C$؛ وهو بالتالي قطع زائد.

أما إذا وقع d خارج C فإن القطع المخروطي لــ Q بــ P لا يلقى d وهو بالتالي قطع ناقص.

إن ما يميز هاتين الحالتين الواحدة عن الأخرى هو أن القطر المقترن باتجاه P ليس عرضانياً في الحالة الأولى، وهو ما يعطي في التقاطع القطع الزائد، وعرضاني في الحالة الثانية معطياً في التقاطع القطع الناقص.

يشير السجزي إلى وجود التقاطع على شكل قطع ناقص في الحالة الخاصة حيث لا يوازي P محور Q وفي هذه الحالة فقط، ولذا فإن معالجته غير تامة. وعدم التمام هذا طبيعي جداً نظراً لغياب أي نظرية للمستويات المقترنة وللأقطار في ما يخص التربيعات.

وتبقى حالة حدية لم ينظر فيها السجزي: وهي الحالة التي يمس فيها d المخروطي C في النقطة ω؛ يمس القطع المخروطي عندئذ d في ω وهو بالتالي قطع مكافئ. تقع هذه الحالة عندما يكون P موازياً للمستوي المماس

للمخروط المقارب لـ Q. يجب إضافة هذه الحالة إلى قائمة السطوح الزائدية عند السجزي؛ ولذا كان من اللازم تصنيفها مع المخروط في المرتبة 5 وليس في المرتبة 4.

c) إذا كان Q مجسم قطع ناقص، فليس لأي من قطوعه المستوية نقطة في اللانهاية: فهي كلها إذاً دوائر أو قطوع ناقصة.

ويمكن أن نضيف أنه يجب تصنيف الأسطوانة، وهي مخروط رأسه ω في اللانهاية، مع مجسمات القطوع المكافئة، بينما يجب تصنيف المخروط، الذي له مخروطي C في اللانهاية في مرتبة مجسمات القطوع الزائدة.

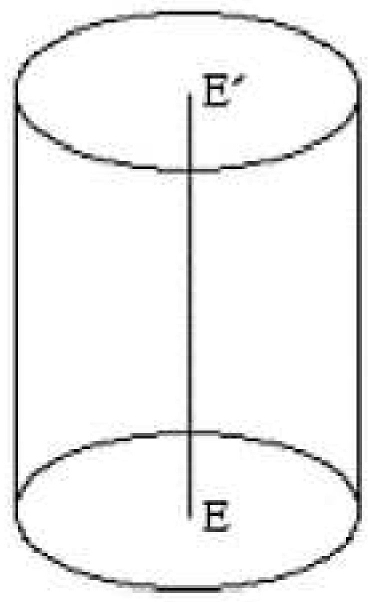
وهكذا نرى أن السجزي حين يطرح على نفسه هذه الأسئلة إنما يخوض في حقل بحث يقع على حدود المعرفة الرياضية في زمانه.

3.4 في خواص المجسم الناقص والزائد والمكافئ

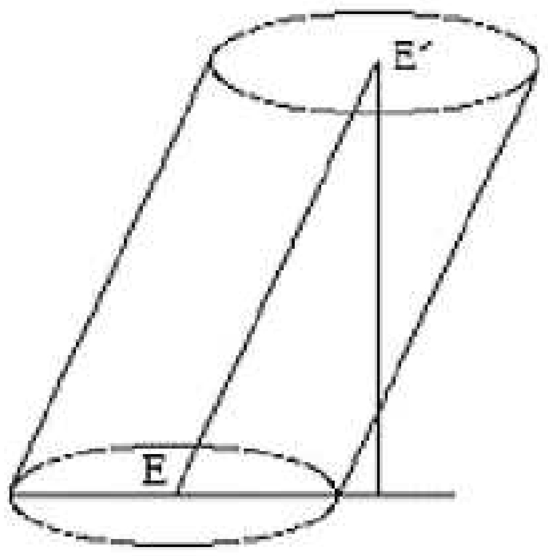
يبدأ السجزي في رسالته في خواص المجسم الناقص، والزائد، والمكافئ بتعريف هذه المجسمات ودراسة قطوعها المستوية، مبتدئاً بتعريف المجسم الناقص الناتج عن قطعين ناقصين متساويين مرسومين في مستويين متوازيين. ستدعونا الحاجة إلى تحديد وضعهما الواحد بالنسبة للآخر حتى يمكن للمستقيم الموازي للخط الواصل بين مركزيهما والذي يلقى القطع الناقص الأول أن يلقى القطع الناقص الثاني، أي حتى يمكن أن نعين القطع الثاني بالانسحاب من القطع الأول. يبدو أن تعريف السجزي مستوحى من التعريف الذي أعطاه ثابت بن قرة[102] للأسطوانة ذات القاعدة الدائرية. يبدأ ثابت بن قرة بالفعل من دائرتين متساويتين واقعتين في مستويين متوازيين في تعريفه للأسطوانة. وهكذا إذا وصلنا مركزي الدائرتين بخط مستقيم ورسمنا من نقطة ما من إحدى الدائرتين مستقيماً موازياً لهذا الخط فإنه يلقى الدائرة الأخرى. ويولد في حركته على الدائرتين مع بقائه موازياً للخط الواصل بين المركزين السطح الأسطواني. إن كل تعاريف ثابت بن قرة، وهي تعاريف من المحتمل جداً أنها وجدت في كتاب معلمه الحسن بن موسى الذي رجعنا إليه سابقاً، من تعريف ضلع الأسطوانة إلى تعريف الأسطوانة المستقيمة فالمائلة فارتفاع الأسطوانة هي نفس التعاريف التي نجدها في رسالة السجزي. وعلى نحو أعم ننظر من أجل المجسمات الثلاثة في مستوى $\mathscr{P}$ وفي خط مستقيم D يقطعه. ونأخذ في حالة المجسم الناقص قطعاً ناقصاً $\mathscr{E}$ في المستوى $\mathscr{P}$. تولد حركة مستقيم ما مواز لـ D على محيط القطع الناقص سطحاً أسطوانياً. ويولد تقاطع هذا السطح مع مستوى $\mathscr{Q}$ مواز $\mathscr{P}$ قطعاً ناقصاً $\mathscr{E}'$ مساو لـ $\mathscr{E}$. وإذا كان E و'E مركزي $\mathscr{E}$ و$\mathscr{E}'$ على الترتيب، فإن $EE' \parallel D$ ويتقابل القطعان الواحد مع الآخر بانسحاب تعينه المتجهة $\overrightarrow{EE'}$. إن المجسم المحتوى بين المستويين والسطح الأسطواني هو تحديداً المجسم الذي يدرسه السجزي. نأخذ في حالة المجسم الزائد (أو المكافئ) قوساً AEB من القطع الزائد (أو المكافئ) في المستوى $\mathscr{P}$ ونحدده بوتر AB. يمكن لهذا الوتر أن يكون أو لا يكون عمودياً على محور القطع. إن حركة مستقيم ما مواز لـ D على محيط القوس

[102] *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 1, p. 502.

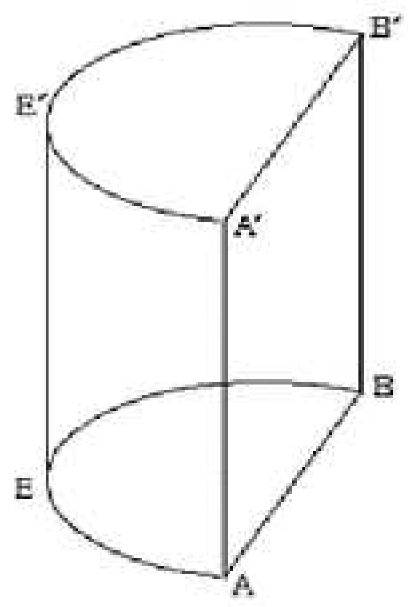
AEB والوتر BA تولد سطحاً منحنياً يغلقه مستو. إذا قطعنا هذا السطح بمستو $\mathcal{Q}$ مواز $\mathcal{P}$، نحصل على شكل (A'E'B'A') مساوٍ للشكل (AEBA) – على قطع زائد أو مكافئ. وإذا كان E و'E رأسي الشكلين على الترتيب فالشكلان متقابلان بانسحاب تعينه المتجهة $\overrightarrow{EE'}$.



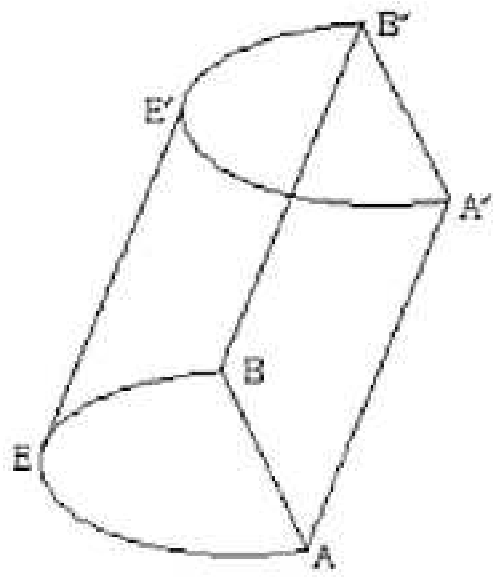
الشكل. 75



الشكل. 76



الشكل. 77



الشكل. 78

نقول في الحالات الثلاث، عندما يكون D عمودياً على المستوى $\mathcal{P}$ أن الجسم قائم؛ وإلا فهو مائل ونعرّف عندئذ ارتفاعه. نقول عن الخط المستقيم الذي يصل بين مركزي القطعين الناقصين أنه محور المجسم. ونسمي أخيراً في حالة المجسمات الثلاث أي مقطع مع المستقيم المتحرك واقع بين القاعدتين المتوازيتين ضلع المجسم.

يثبت السجزي بعد هذا المدخل ثمان قضايا نعرضها الآن.

1.3.4 القطوع المستوية

القضية 1: يقطع أي مستوٍ موازٍ لقاعدة مجسم ناقص هذا المجسم محدثاً قطعاً ناقصاً مساوياً للقاعدة.

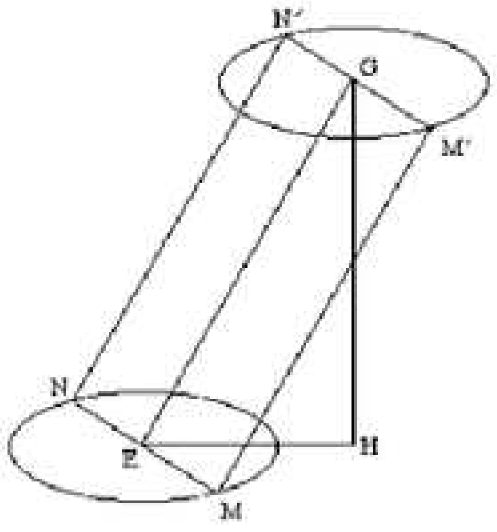
القضية 2: يقطع أي مستو مار على محور مجسم ناقص أو مواز له هذا المجسم محدثاً متوازي أضلاع.

إلا أنه من الممكن في حالة الأسطوانة المائلة الحصول على مقطع مستطيل. علينا هنا أيضاً الرجوع إلى ثابت بن قرة[103]. وسنعطي هنا الخطوط العريضة لمحاكمته.

ليكن EG محور الأسطوانة المائلة وGH ارتفاعها. لنأخذ مستوى $\mathcal{P}$ يمر على EG ويتعامد مع المستوى EGH. يقطع $\mathcal{P}$ القاعدتين على الوترين MN و'M'N ذوي الوسطين E وG على الترتيب؛ لدينا $MN \perp EG$ و $MN = M'N'$ (انسحاب بالمتجهة $\overrightarrow{EG}$). لدينا إذاً $M'N' \parallel MN$ ، إن متوازي الأضلاع مستطيل.

---

[103] Ibid., prop. 5, p. 512.



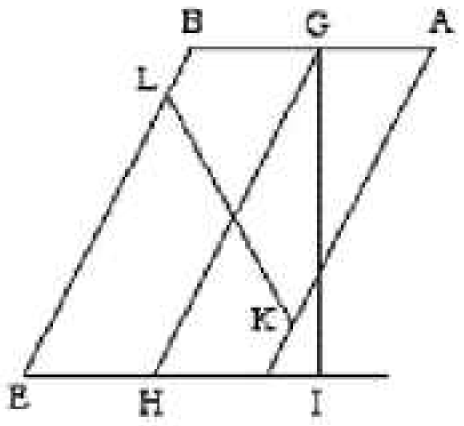
الشكل. 79

يبين ثابت بن قرة كذلك أن مستوياً ما 𝒬 موازياً لــ MNN'M' يحدث هو أيضاً مستطيلاً كقطع مستو للمجسم. ويشير إلى أن القطع المستطيل لا يحدثه إلا المستويين 𝒫 و 𝒬. وخلافاً لثابت بن قرة، فإن السجزي في هذه الرسالة غير مهتم بالقطوع المستطيلة. ترى هل درسها في رسالته المفقودة في القطع الناقص؟

القضية 3: تحدث المستويات القاطعة للمجسم الناقص مضادة التوازي مع القاعدة قطوعاً ناقصة مساوية ومشابهة للقاعدة.

لنذكر بداية أن ثابت بن قرة قد بحث في نفس هذه الرسالة *قطوع الأسطوانة* القطوع التي تحدثها مستويات مضادة التوازي مع مستوى القاعدة[104]. وأخذ كمستوى مرجعي المستوى Π المحدد بمحور الأسطوانة وبارتفاعها المرسوم من مركز القاعدة.

ليكن 𝒫 مستوى القاعدة؛ لدينا $\Pi \perp \mathcal{P}$. ليكن AB خط تقاطعهما. يحقق مستوى ما 𝒬 مضاد التوازي مع 𝒫 الشرط $\Pi \perp \mathcal{Q}$ ويتاقطع مع Π على الخط LK حيث $A\hat{K}L = K\hat{A}B = B\hat{E}I = E\hat{L}K$. وبرهن بعد ذلك على تساوي القطعين.

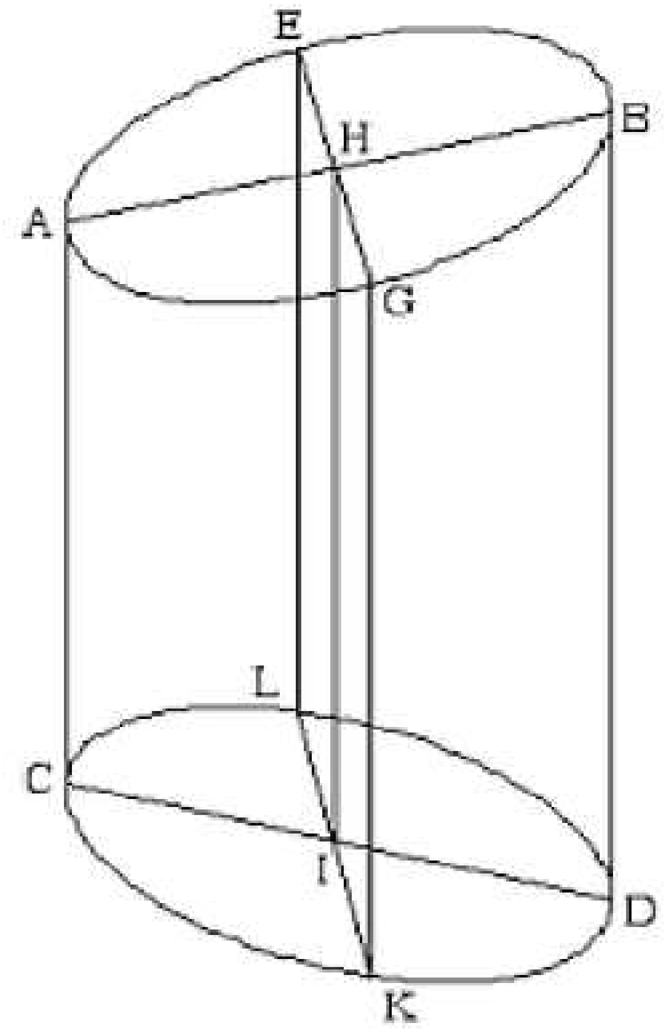


الشكل. 80

أما السجزي من جهته فلم يدخل ارتفاع المجسم. قاعدة المجسم قطع ناقص محوره الكبير AB والصغير EG ومركزه H. يأخذ كمستو مرجعي المستوى Π المعرف بالمحور AB والمولدين AC وBD. يحتوي هذا المستوي إذاً على محور المجسم. لنرمز لمستوى القاعدة AEBG بــ 𝒫. يجب علينا لتعريف مستو 𝒬 مضاد التوازي مع 𝒫 بالنسبة

[104] Ibid., prop. 9, p. 522.

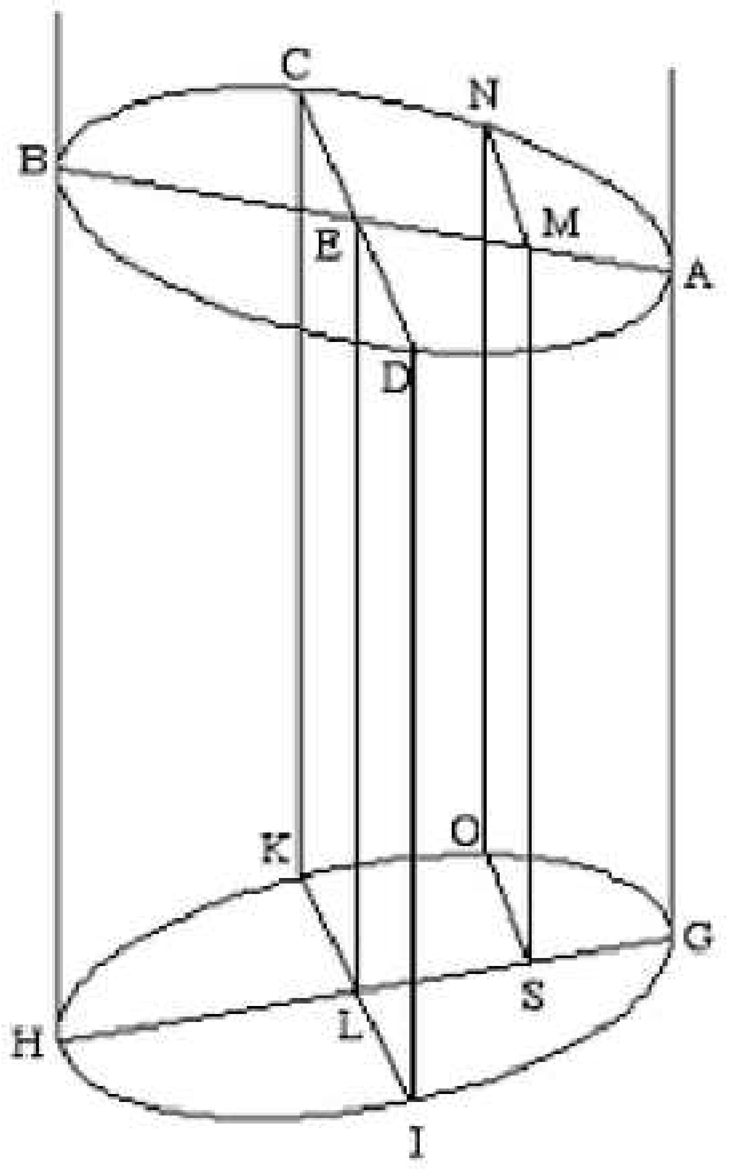
لمستو مرجعي Π، أن نفرض أن 𝒫 عمودي على Π (وهذا ما لم يقله السجزي، ويحتوي Π في هذه الحالة على ارتفاع المجسم). سنأخذ 𝒬 عمودياً على Π وقاطعاً له على الخط المستقيم DC بحيث يكون $A\hat{C}D = B\hat{A}C$.



الشكل. 81

ليكن DCKL القطع الحادث في المجسم عندما يقطع بالمستوى 𝒬. لدينا BD || AC و $A\hat{C}D = B\hat{A}C$ وبالتالي ABCD شبه منحرف متساوي الساقين و AB = CD. يمر محور المجسم في النقطة H وسط AB وكذلك في النقطة I وسط CD. لدينا فرضاً GH ⊥ AB وبالتالي GH عمودي على المستوي ABCD أي على المستوى Π. ولدينا في الواقع Π ⊥ 𝒫؛ و AB هو خط تقاطع 𝒫 و Π؛ GH ⊂ 𝒫 و GH ⊥ AB فـ GH ⊥ Π. نأخذ HI ⊥ GH. يلقى الخط الموازي لـ HI المرسوم من G المستوى 𝒬 في K وهي نقطة من القطع المطلوب. إن المستوى (GHIK) عمودي على Π. والمستقيم IK، تقالطع مستويين عموديين على Π، عمودي هو أيضاً على Π؛ وإذاً IK || HG. وبما أن HGKI مستطيل فإن GH = IK وبالنتيجة EG = KL. وبنفس الشكل فإن كل ترتيب بالنسبة لـ AB في القطع الناقص الأول عمودي على Π؛ ويمكن بنفس المحاكمة أن يبرهن أن الترتيب هو نظير الترتيب بالنسبة لـ DC في القطع الثاني وأن هذين الترتيبين متساويان. والقطع الثاني نفسه هو قطع ناقص مساو للقطع الأول.

القضية 4: ليكن لدينا المجسم الناقص، محورا قاعدته هما AB و CD ومركزها E. ولنقطع هذا المجسم بالمستوى (GIHK). النقاط L، K، H، I، G هي نظيرات النقاط E، C، B، D، A. فإذا حققت HL = LI فالقطع دائرة.



الشكل. 82

هذه القضية هي حالة خاصة من القضية التالية.

القضية 5: إن قطع مجسم ناقص بمستو لا يمر بمحوره ولا يوازيه هو قطع ناقص، ويمكن أن يكون في بعض الحالات دائرة.

يُقطع المجسم الناقص ذو القاعدة AHB بمستو لا يمر بمحوره ولا يوازيه. ليكن CID هذا المستوي وليكن AB قطراً للقاعدة وE مركزها. نرسم الترتيبين EH و KM. نأخذ في مستوى القطع النقاط G، L، D، C نظيرات النقاط K، E، B، A؛ كما نأخذ I و N نظيرتي H و M لدينا

$$\frac{DG}{GC} = \frac{BE}{EA}, \; \frac{GL}{LC} = \frac{EK}{KA} \quad \text{و} \quad \frac{EH}{MK} = \frac{IG}{NL} \qquad (*)$$

ولدينا في القطع الناقص ABH

$$\frac{EH^2}{MK^2} = \frac{BE \cdot EA}{BK \cdot KA}$$

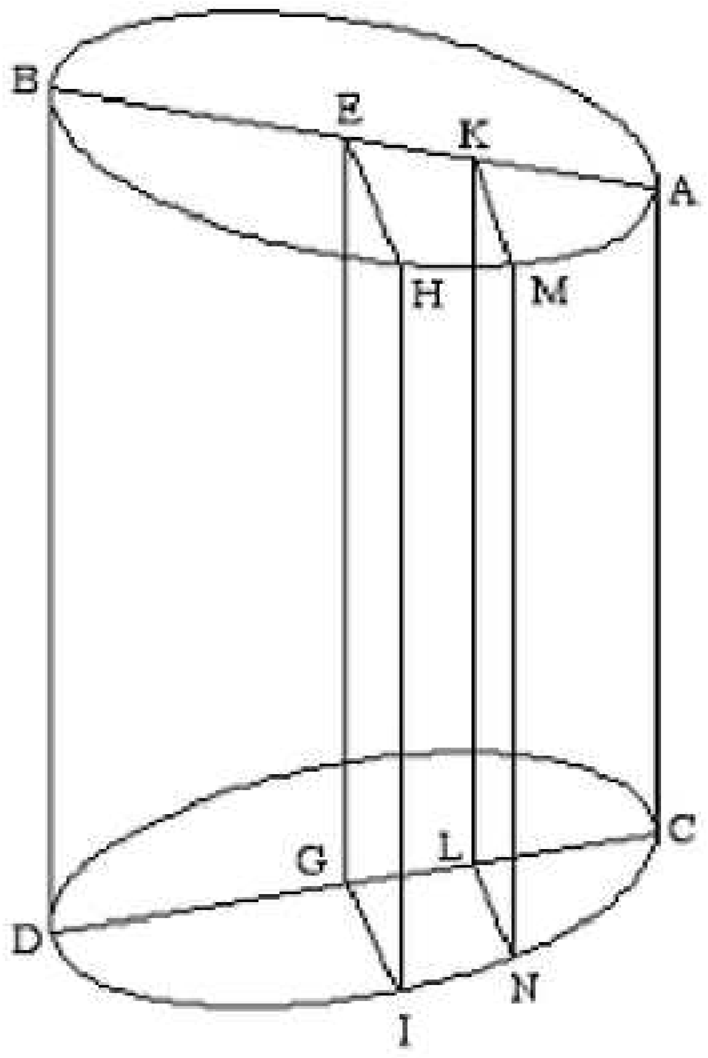
ومنه

$$\frac{IG^2}{NL^2} = \frac{DG \cdot GC}{DL \cdot LC}$$

لأن

$$\frac{BK \cdot KA}{DL \cdot LC} = \frac{BE \cdot EA}{DG \cdot GC}$$

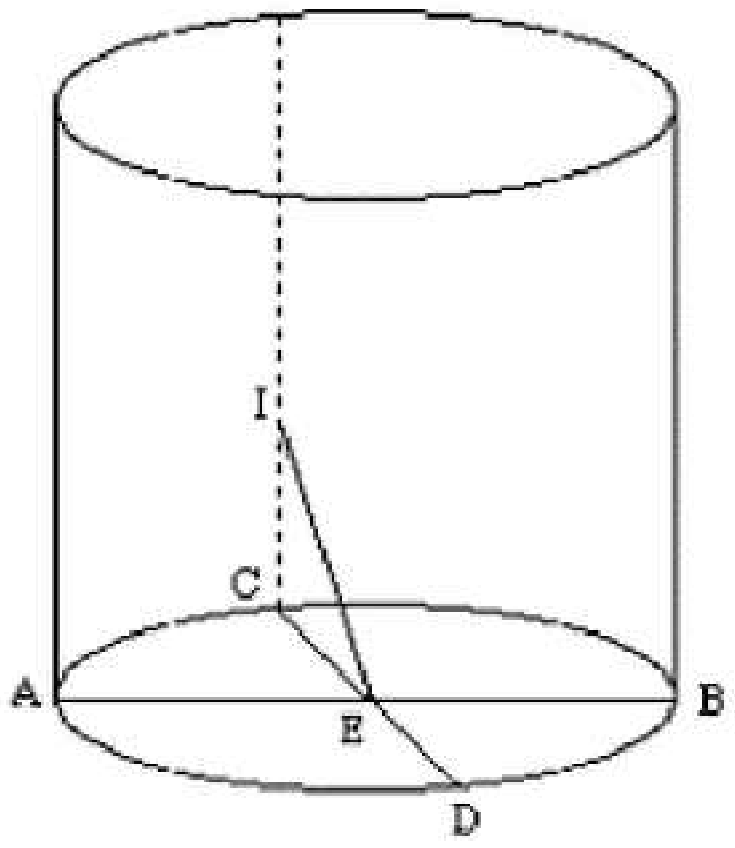
إذا كان $IG^2 = DG \cdot DC$ فإن $NL^2 = DL \cdot LC$ والمنحنى CID دائرة،
أما إذ لم يتحقق ذلك $IG^2 \neq DG \cdot DC$ فـ CID قطع ناقص.



الشكل. 83

يرجع السجزي في برهانه لهاتين القضيتين إلى كتابه في القطع الناقص لإثبات المساواة (*) المتعلقة بالنقاط المتناظرة. ولكنه لم يدل على كيفية اختيار وضع المستوى القاطع للحصول على دائرة. لعله فضل ترك هذه المسألة السهلة للقارئ كتمرين له. لنبدأ بالنظر في الأسطوانة القائمة التي قاعدتها قطع ناقص محوره الكبير AB ومحوره الصغير CD. لنعمل $AB = 2a$ و $CD = 2b$ و $b < a$. ليكن $\mathcal{P}$ المستوى القاطع المار بـ AB والقاطع للمولد القائم من C في النقطة I. فالزاوية $\hat{IEC} = \alpha$ هي الزاوية الزوجية بين المستويين $\mathcal{P}$ و ABC. فإذا أردنا أن يكون القطع الذي يحدثه $\mathcal{P}$ دائرة وجب أن يكون $IE = AE = a$، وبالتالي $\cos\alpha = \frac{CE}{EI} = \frac{b}{a}$.

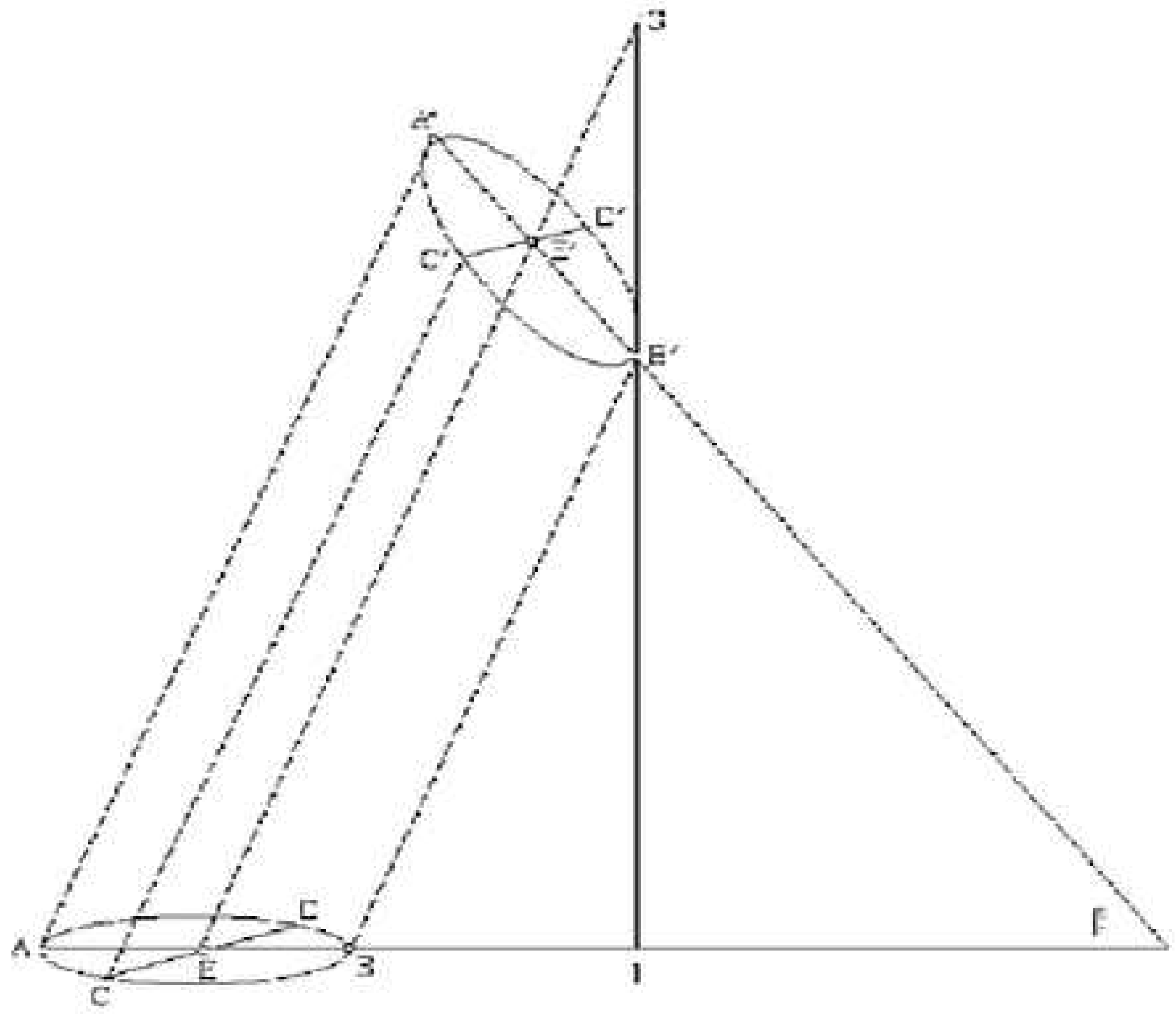
إن أي مستو يوازي AB ويصنع مع المستوي (ABC) زاوية زوجية α تحقق $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ يعطي قطعاً مستوياً هو دائرة. يمكن أخذ هذه الزاوية الزوجية في اتجاه C أو في اتجاه D، ونحصل على قطعين دائريين مضادي التوازي.



الشكل. 84

ليكن لدينا مجسم ناقص مائل قاعدته ABCD ومحوره EG. ولنفترض أن ارتفاعه GI يلقى المستقيم AB، المحور الكبير للقطع الناقص، ولنأخذ مستوياً عمودياً على المحور GE وعلى المستوي GEI. يقطع المستوي GEI في A'B'.

ليكن CD محور القاعدة الصغير؛ $CE \perp AB$، وبالتالي CE عمودي على GI فهو إذاً عمودي على المستوي GEI و $CE \perp GE$. يقطع الموازي لــ GE المرسوم من C المستوى الثاني في C'. لدينا C'E' عمودي على GE؛ وهكذا فإن $CE \parallel C'E'$ و $C'E' = CE = b$.



الشكل. 85

لتكن β الزاوية بين المستقيمين AB و'A'B؛ لدينا $A'B' = AB\cos\beta = 2a\cos\beta$. نعرف طولي محوري القطع العمودي 'A'C'B. وهذا يعيد إلى الحالة السابقة لإيجاد مستو يحقق قطعاً دائرياً. وفي النهاية يمكن للقطع 'A'B'C'D أن يكون دائرة؛ وسيقع ذلك عندما يصبح $\cos\beta = \frac{b}{a}$. من الواضح أيضاً أننا إذا وجدنا مستوى $\mathscr{P}$ يحقق قطعاً دائرياً فإن أي مستوى مضاد التوازي معه يحقق ذلك أيضاً حسب القضية 3.

ينهي السجزي مع هذه القضية الخامسة مناقشته للمجسم الناقص، الذي هو ببساطة أسطوانة قاعدتها قطع ناقص. وقد وجد القطوع المستوية التالية للمجسم

- متوازي الأضلاع والمستطيل كحالة خاصة منه؛
- القطع الناقص – وبين أن القطوع الناقصة المكونة في مستويات متوازية متساوية؛
- الدائرة كحالة خاصة من القطع الناقص، وقد نص على ذلك بعبارات صريحة؛

وبرهن أنه من الممكن إنشاء قطوع مستوية دائرية من هذا المجسم الناقص، كما بين أن قضاياه تماثل القضايا في الأسطوانة القائمة أو المائلة ذات القاعدة الدائرية.

لم يشر السجزي في هذه الرسالة إلى القطوع المستوية اللامحدودة وهو إهمال استدركه في رسالته في القبب.

2.3.4 القطوع المستوية في المجسمات الزائدة والمكافئة

كرست لهذه القطوع المستوية القضايا الثلاث الأخيرة من رسالته.

القضية 6: إذا قطع مستوى مجسماً زائداً (أو على الترتيب مكافئاً) ومر على محوره أو كان موازياً له أو موازياً لتراتيبه فالقطع هو متوازي الأضلاع.

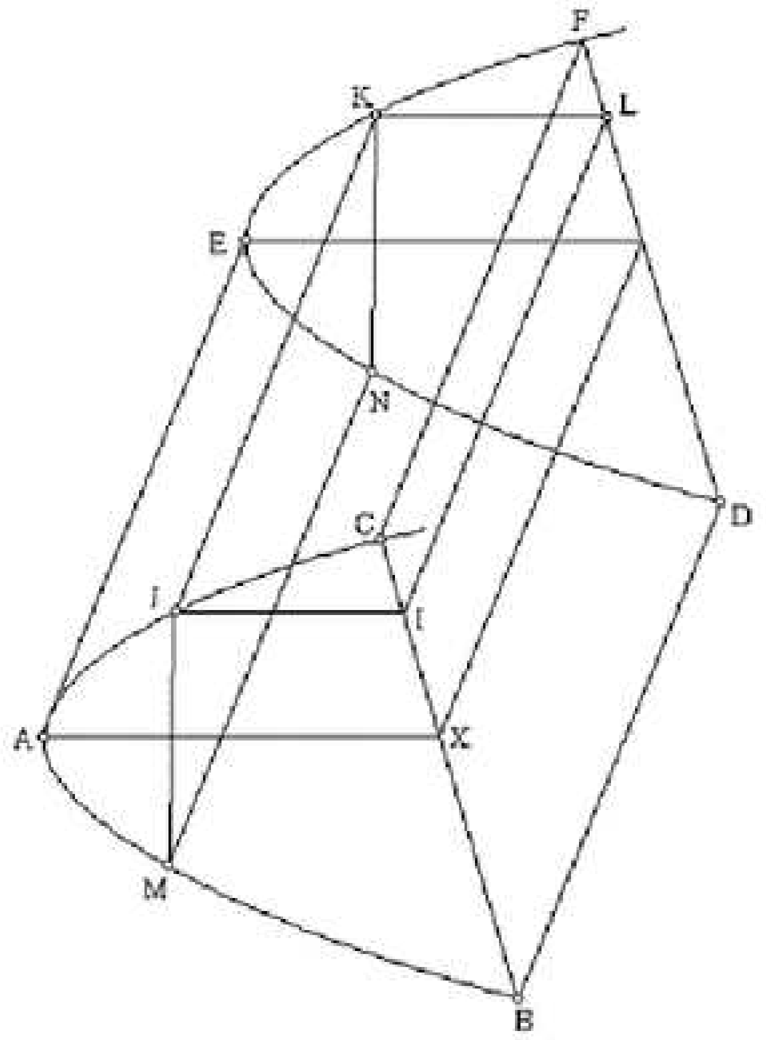
لا تختلف طريقة البرهان هنا عما هي عليه في حالة المجسم الناقص.

إلا أنه من الملاحظ أن السجزي في التعريف الذي يعطيه للمجسم الزائد (أو على الترتيب المكافئ) يسمي محور القطع الزائد أو محور القطع المكافئ القاعدي "محور المجسم". هذا في حين سمى في حالة المجسم الناقص محوراً المستقيم الواصل بين مركزي قاعدتي المجسم. ولذا يجب أن نفترض هنا أن مستوى القطع مواز لضلع المجسم؛ أي أنه مواز للمستقيم الواصل بين رأسي القطعين الزائدين (أو المكافئين) المكونين للقاعدتين. ويجب بالتالي أن يصبح نص القضية السادسة على الشكل التالي:

إن القطع من أجل أي مستوى قاطع مواز لضلع القطع الزائد (المكافئ) هو متوازي الأضلاع.

ليكن المجسم ذو القاعدتين BAC وDEF، أي الشكلين المتساويين في مستويين متوازيين. وليكن A وE رأسيهما، AX محور القاعدة؛ AE هو إذاً ضلع المجسم.

لنلاحظ أنه ليس للقطع المكافئ مركز، وأن مركز القطع الزائد (الذي لا ننظر فيه إلا لأحد الفرعين) يقع خارج الشكل.



الشكل. 86

يقطع أي مستو قاطع مواز لضلع المجسم مستويي القاعدة المتوازيين بخطين مستقيمين متوازيين، ويقطع السطح الجانبي (الجزء المنحني أو الجزء المستوي) بخطين مستقيمين موازيين للضلع. وهكذا فالقطع متوازي الأضلاع.

إذا كان المستوي موازياً للمحور AX فلدينا متواوي أضلاع مثل IJKL. وسواء أكان المستوى موازياً لخطوط الترتيب بالنسبة لـــ AX أم لا، فلدينا متوزاي أضلاع مثل MJKN. وإذا كان المجسم قائماً أي إذا كان AE عمودياً على مستوى القاعدة فالقطوع مستطيلات.

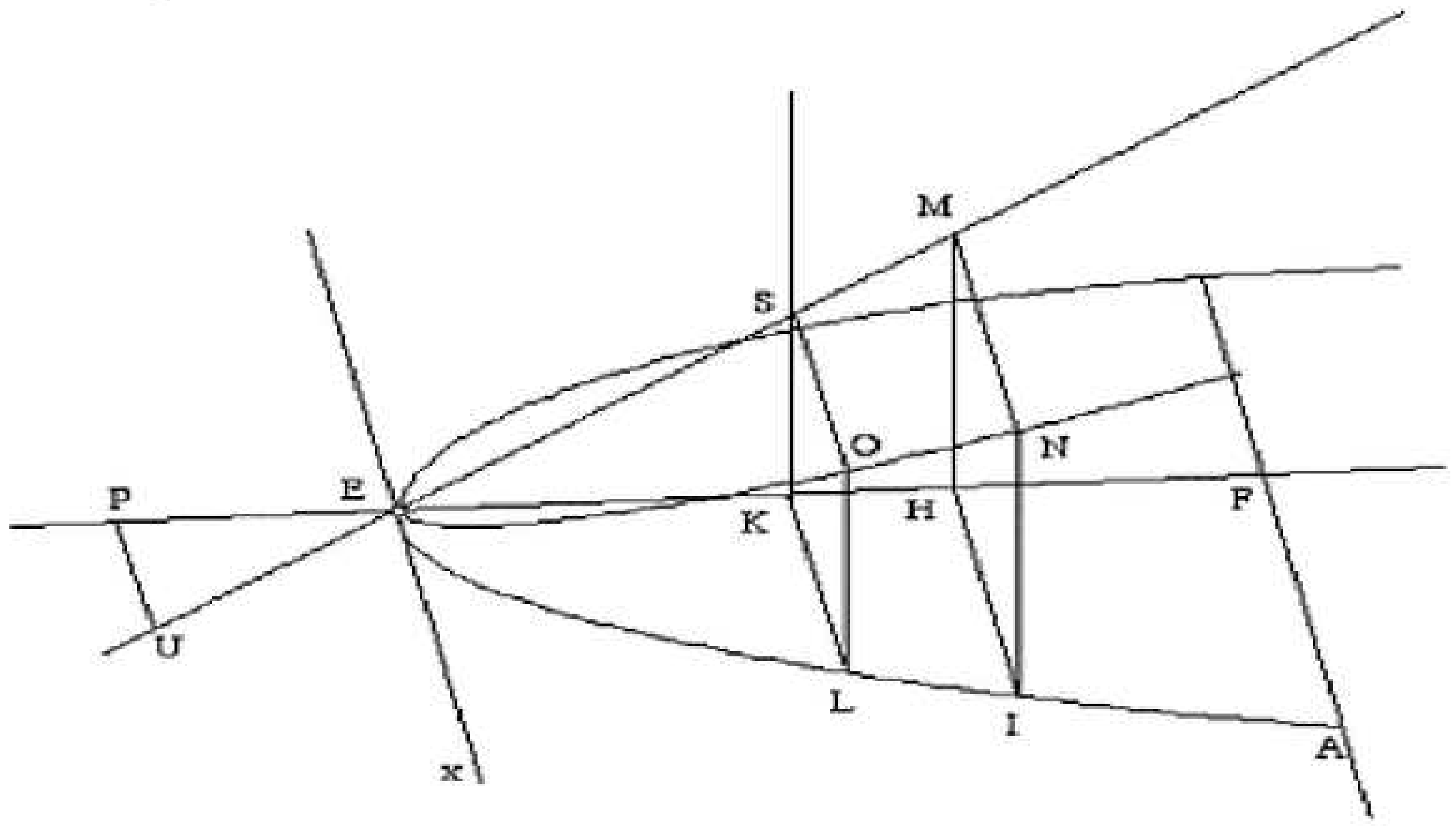
القضية 7: إذا قطع مستوى مجسماً زائداً (أو مكافئاً) ولم يكن موازياً لضلع المجسم فالقطع هو قطع زائد (أو مكافئ)[105].

يتطلب في هذه القضية أن يكون المستوى موازياً للتراتيب لكي يتفق البرهان مع المنطوق. ليكن EF محور القطع الزائد القاعدي (أو محور القطع المكافئ). نأخذ المستوى المحدد بالمحور EF وبضلع المجسم المار من E كمستو مرجعي. يقطعه المستوى القاطع في EM ويقطع القاعدة بخط مستقيم مواز للتراتيب.

يقطع المستوي القاطع القاعدة على الخط Ex المماس للقطع الزائد (أو المكافئ). لتكن H وK نقطتين من المحور EF؛ وليكن HI وKL خطي ترتيبهما. يقطع الخطان المنبثقان من H وK والموازيان لضلع المجسم الخط EM في M وS. كما يقطع الخطان المنبثقان من L وI المستوى القاطع في O وN. يقع الخطان SO وMN في المستوى القاطع. ولدينا إذاً MN || SO || Ex.

[105] إن الصيغة الواردة في النص غير صحيحة. فهو يشترط عدم مرور المستوي بالمحور وعدم موازاته لا للمحور ولا للتراتيب.

ومن جهة أخرى، فإن Ex مماس في E، ولذا فـ HI || KL || Ex وبالتالي MN || HI و SO || KL والنتيجة أن HI = MN و KL = SO و O و N نقطتان واقعتان على القاطع المطلوب.



الشكل. 87

ليكن EP المحور العرضاني للقطع الزائد ولتكن U نقطة واقعة على امتداد ME تحقق $\frac{EM}{EU} = \frac{EH}{EP}$

لكن MH || PU، لذا

$$\frac{UM}{PH} = \frac{ME}{HE} = \frac{SE}{KE} = \frac{US}{PK}$$

ثم إن لدينا، في القطع الزائد القاعدي

$$\frac{IH^2}{LK^2} = \frac{EH \cdot PH}{EK \cdot PK}$$ (*المخروطات* I.21)

ومنه

$$\frac{IH^2}{KL^2} = \frac{EM \cdot UM}{ES \cdot US}$$

ولما كان

$$\frac{IH}{KL} = \frac{MN}{SO}$$

فإن

$$\frac{MN^2}{SO^2} = \frac{EM \cdot UM}{ES \cdot US}$$

وهكذا فالتقاطع الذي نبحث عنه هو قطع زائد EON محوره EM وقطره العرضاني EU.

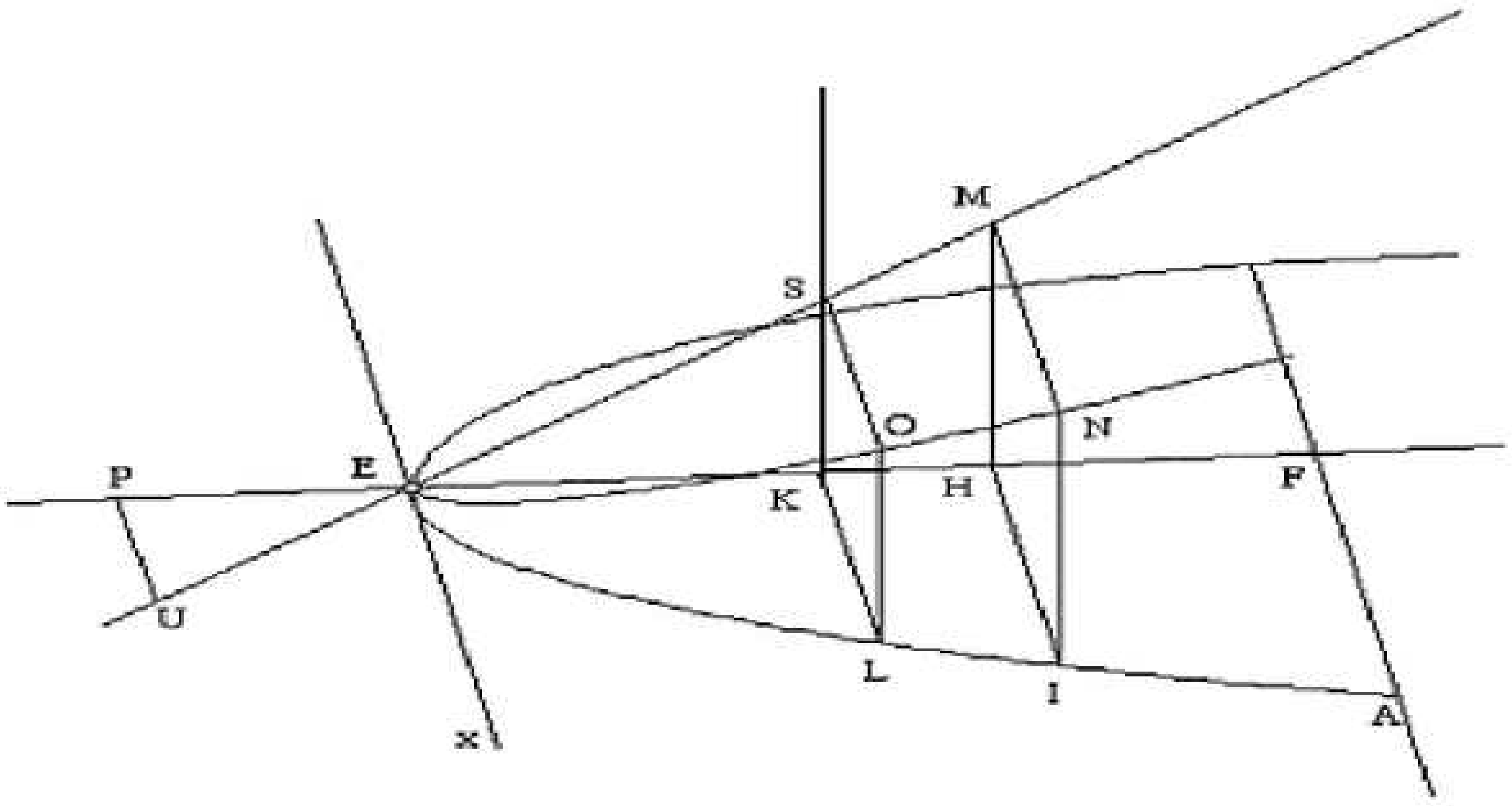
القضية 8: وهي قضية مطابقة للقضية السابقة سوى أن المستوى القاطع هنا يقطع القاعدة على خط لا يوازي خط التراتيب.

وهكذا فإذا كان Ex، خط تقاطع المستوى القاطع مع مستوى القاعدة غير مواز للترتيب HI فإننا نبرهن توازي MN وSO، ولكنهما لا يوازيان HI وKL. ولم يعد تقاطع المستوى القاطع مع قاعدة المجسم موازياً لتراتيب القطع الزائد AE.

نقوم بنفس إنشاءات القضية السابقة، ولكن HI وKL لا يوازيان MN وSO.

نحدد على الخط HI نقطة 'P بحيث يكون HP' = KL ونرسم 'P'U' ‖ IN حيث 'U على MN. لدينا إذاً

$$\frac{HI}{KL} = \frac{HI}{HP'} = \frac{MN}{MU'} = \frac{MN}{SO} \qquad \text{و} \qquad MU' = SO$$



الشكل. 88

ولدينا كما في القضية السابقة

$$\frac{EM}{EU} = \frac{EH}{EP}$$

ونستخلص أن

$$\frac{IH^2}{KL^2} = \frac{EH \cdot PH}{EK \cdot PK} = \frac{EM \cdot UM}{ES \cdot US}$$

وإذاً

$$\frac{MN^2}{SO^2} = \frac{EM \cdot UM}{ES \cdot US}$$

وما تبقى من المحاكمة فهو كما في القضية 7.

تجدر الإشارة أن نص القضية 7 وصلنا مشوباً ببعض العيوب. ويظهر الخلل الأول في السطور الأولى: يتعلق النص بالمجسم الزائد أو المكافئ. ويقع الالتباس بين محور المجسم وضلعه فيما يخص المجسم الأول. أما الفرض أن المستوى "لا مواز لخطوط ترتيبه" فهو فرض ذو صلة في القضية 8 وفي القسم الثاني من القضية 9. أما في القضية 7

وفي القسم الأول من القضية 9 فالمحاكمة قائمة على الفرض "فإن كان $\overline{\text{ح ط}}$ $\overline{\text{ك ط}}$ موازيين لـــ $\overline{\text{م ن}}$ $\overline{\text{س ع}}$..." وهو ما يتطلب موازاة المستوى القاطع مع خط التراتيب.

أضف إلى ذلك أن القسم الأول من برهان القضية 7 اشتمل على وصف للشكل بنفس الحروف من أجل المجسم الزائد والمكافئ بينما لم تشمل نهاية البرهان إلا القطع الزائد.

تتعلق القضية 9 بالمجسم المكافئ المأخوذ عن شكل القضية 7. المحاكمة مقتضبة والنتائج معطاة بدون عرض مفصل لسير البرهان. وهي في قسمين.

القضية 9: (a) نفرض أن MN || HI و KL || SO، وهو ما يعني موازاة المستوى القاطع مع خطوط تراتيب القطع المكافئ AIE ذي *الضلع القائم* EP (انظر الشكل. 87). نعلم أن

$$\frac{HE}{KE}=\frac{ME}{SE} \quad \text{و} \quad \frac{IH^2}{KL^2}=\frac{HE}{KE}$$

وبما أن MN || HI و KL || SO فإن HI = MN و SO = KL. فإن

$$\frac{MN^2}{SO^2}=\frac{ME}{SE}$$

والخط NOE هو قطع مكافئ محوره EM. وتعين *ضلعه القائم* EU العلاقة $MN^2 = EU \cdot EM$.

(b) إذا لم يكن المستوى القاطع موازياً للتراتيب فإن HI و KL لا يوازيان MN و SO. نقوم بإجراءات مماثلة لما فعلناه في القضية 8 مدخلين النقطتين 'P و 'U المحققتين لـــ HP' = KL و IN || P'U'، الذي يعطي = 'MU SO لدينا

$$\frac{HI}{KL}=\frac{HI}{HP'}=\frac{MN}{MU'}=\frac{MN}{SO} \quad \text{و} \quad \frac{IH^2}{KL^2}=\frac{EH}{EK}=\frac{ME}{SE}$$

ونستخلص أن

$$\frac{MN^2}{SO^2}=\frac{ME}{SE}$$

واصلين إلى نفس استنتاج القسم الأول، (a).

ينظر السجزي في رسالته، تابعاً في ذلك تقليد الحسن بن موسى وثابت بن قرة، في المجسمات الأسطوانية غير ذات القاعدة الدائرية التي درسها سابقوه. ويعالج المجسمات الأسطوانية ذات القواعد القطعية: قطع ناقص أو زائد أو مكافئ ويناقش القطوع المستوية لهذه المجسمات. إن طبيعة القطوع المستوية في هذه المجسمات الثلاثة ملخصة في الجدول التالي:

المجسم	القطوع المستوية
الناقص	متوازي أضلاع قطع ناقص دائـــــرة
الزائد	متوازي أضلاع قطع زائـــد
المكافئ	متوازي أضلاع قطع مكافئ

4.4 التفسير الإسقاطي للبحث عن القطوع المستوية للأسطوانة

إن التربيعي Q هنا، حسب رموز الفقرة 2.4، هو أسطوانة وتقاطعه C مع المستوي في اللانهاية Π هو النقطة الشاذة ω، الواقعة في اتجاه مولدات الأسطوانة. يتألف هذا التقاطع في حالة أسطوانة القطع الزائد من خطين مستقيمين متميزين، وفي حالة أسطوانة القطع المكافئ من خط مستقيم مزدوج وفي حالة أسطوانة القطع الناقص من خطين تخيليين مترافقين.

يقطع المستوى القاطع P المستوى Π على خط d وتتعين طبيعة القطع حسب وضع d بالنسبة إلى C. فإذا مر d بـ ω فقطع Q بالمستوى متدن ويتكون من خطين متوازيين في اتجاه ω. أما في كل الحالات الأخرى فالقطع غير متدن ونقاطه في اللانهاية هي نقاط تقاطع C وd:

1) إنهما نقطتان حقيقيتان متميزتان في حالة المجسم الزائد؛ والقطع إذاً هو قطع زائد.
2) وهما نقطة مزدوجة في حالة المجسم المكافئ؛ والقطع إذاً هو قطع مكافئ.
3) وهما نقطتان تخيليتان مترافقتان في حالة المجسم الناقص؛ والقطع إذاً هو قطع ناقص.

لا توجد القطوع الدائرية إلا في الحالة الثالثة، ونجدها عندما ننظر في تقاطع d مع المخروطي التخيلي Ω، التقاطع المشترك لكل الكرات مع المستوى Π. يتألف التقاطع $\Omega \cap d$ من زوج من النقاط التخيلية المترافقة، عليها أن تتطابق مع نقاط $C \cap d$ إذا كان القطع دائرة. نحدد بناء على ذلك اتجاهات القطوع الدائرية بأخذ نقاط تقاطع C وΩ وبالوصل بينها زوجاً زوجاً للحصول على خطوط مستقيمة حقيقية.

لنختر في الفضاء الإحداثيات الفضائية المتجانسة (ξ, η, ζ, τ)، بحيث تكون معادلة Π هي $\tau = 0$ ومعادلتي Ω و C على الترتيب $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ و $a\xi^2 + \eta^2 = 0$ (مع $\tau = 0$) وحيث $a > 0$. يعني هذا الاختيار أن محاور الإحداثيات غير المتجانسة $x = \dfrac{\xi}{\tau}$، $y = \dfrac{\eta}{\tau}$، $z = \dfrac{\zeta}{\tau}$ متناظمة. المحور الراقم z مواز لمولدات

الأسطوانة والمحوران الآخران، الفواصل والتراتيب، موازيان للمحاور الرئيسية لقطع الأسطوانة بالمستوى xy؛ وواضح أن هذا الاختيار ممكن دوماً.

يتقاطع Ω وC في أربع نقاط هي $\left(1, \pm\sqrt{-a}, \pm\sqrt{a-1}\right)$، $(\tau = 0)$. تتطابق هذه النقاط زوجاً زوجاً من أجل a = 1 ونحصل على النقطتين $(1, i, 0)$، $(1, -i, 0)$؛ يحدث هذا عندما يقطع المستوى xy (العمودي على مولدات الأسطوانة) الأسطوانة دائرياً. أي عندما يكون لدينا أسطوانة دائرية قائمة. لا يوجد في هذه الحالة إلا اتجاه واحد للمستوى لإعطاء قطع دائري، هو الاتجاه الذي يصل $(1, i, 0)$ بـــ $(1, -i, 0)$: أي اتجاه القاعدة الدائرية $z = 0$.

عندما تكون $a < 1$ فإن الزوجين المترافقين من بين نقط $\Omega \cap C$ هما إما

$$\left(1, \sqrt{-a}, \sqrt{a-1}\right) \quad ، \quad \left(1, -\sqrt{-a}, -\sqrt{a-1}\right)$$

أو

$$\left(1, \sqrt{-a}, -\sqrt{a-1}\right) \quad ، \quad \left(1, -\sqrt{a}, \sqrt{a-1}\right)$$

وعندما تكون $a > 1$، فإن الزوجين المترافقين هما إما

$$\left(1, \sqrt{-a}, \sqrt{a-1}\right) \quad ، \quad \left(1, -\sqrt{-a}, \sqrt{a-1}\right)$$

أو

$$\left(1, \sqrt{-a}, -\sqrt{a-1}\right) \quad ، \quad \left(1, -\sqrt{-a}, -\sqrt{a-1}\right)$$

وهكذا نرى أن هناك على الدوام اتجاهين متميزين للقطوع الدائرية عندما تكون $a \neq 1$. يمكننا صياغة هذه المحاكمة على نحو تحليلي محض.

لنأخذ السطح التربيعي ذا المعادلة $f(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$ في الإحداثيات المتجانسة ξ, η, ζ, τ؛ f شكل تربيعي؛ ومعادلة المستوي هي $\varphi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$ حيث φ شكل خطي (من الدرجة الأولى). نجد تقاطع السطح مع المستوى بحذف إحدى الإحداثيات، ولتكن ζ، بين هاتين المعادلتين ، فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية بـــ τ، η، ξ، وبالتالي فالقطع مخروطي. بما أن $\tau = 0$ هي معادلة المستوي في اللانهاية، فإن وضع القطع بالنسبة للمستقيم في اللانهاية من المستوى $\varphi = 0$ يحدد بحذف ζ بين المعادلتين $f(\xi, \eta, \zeta, 0) = 0$ و $\varphi(\xi, \eta, \zeta, 0) = 0$. فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية في (ξ, η)، فإذا كان المميز موجباً فالقطع قطع ناقص وإذا كان سالباً فالقطع قطع زائد وإذا كان مساوياً للصفر فالقطع قطع مكافئ.

لننظر في الحالة التي بحث فيها السجزي حيث التربيعي $f = 0$ أسطوانة؛ هذا يعني أن الشكل f من المرتبة الثالثة وأن النقطة الشاذة في اللانهاية $(\tau = 0)$. يكفينا في حقيقة الأمر أن نفرض أن المخروطي في اللانهاية $f(\xi, \eta, \zeta, 0) = 0$ متدن، وهو ما يحدث لا من أجل الأسطوانات فقط وإنما من أجل المجسمات المكافئة أيضاً. لنحاول إيجاد اتجاهات المستويات التي تعطينا قطوعاً دائرية مذكرين أن البنية المترية للفضاء محددة بمخروط تخيلي Ω

في المستوي في اللانهاية $\tau = 0$، وهو المخروط في اللانهاية المشترك بين كل الكرات، ويقابل تعامد أي اتجاهين كونهما مترافقين بالنسبة لـــ Ω.

نختار الإحداثيات المتجانسة حيث معادلة Ω هي $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$، $\tau = 0$ (محاور متعامدة). ونكتب معادلة C، مخروطي الأسطوانة في اللانهاية، على الشكل $\xi^2 + 2a\xi\eta + b\eta^2 = 0$، $\tau = 0$ (فاتجاه المولدات هو إذاً $\xi = \eta = \tau = 0$). يتقاطع هذا المخروطي C مع Ω في أربع نقط تخيلية ونحصل على اتجاه مستو قطع دائري بوصل نقطتين من هذه النقاط الأربع؛ إننا بحاجة لتعيين الاتجاهات الحقيقية للمستويات.

لننظر إلى الحزمة التي يكونها Ω و C في المستوى في اللانهاية.

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \lambda\left(\xi^2 + 2a\xi\eta + b\eta^2\right) = 0$$

مميز هذا الشكل التربيعي هو

$$1 + (b+1)\lambda + \left(b - a^2\right)\lambda^2 \qquad (1)$$

وهو يساوي الصفر من أجل

$$\lambda = \frac{-b - 1 \pm \sqrt{\Delta}}{b - a^2}$$

حيث $\Delta = (b-1)^2 + 4a^2 \geq 0$، ويعطينا إذاً مخروطين متدنيين وخطين مستقيمين بالمعادلة

$$(1+\lambda)\left(\xi + \frac{a\lambda}{\lambda + 1}\eta\right)^2 + \zeta^2 = 0 \qquad (2)$$

إذا كان $b = a^2$ فإن معادلة C هي $(\xi + a\eta)^2 = 0$ (مرتبة 1)، والحالة هي حالة أسطوانة مكافئة؛ يصبح المميز (1) في هذه الحالة

$$1 + (b+1)\lambda = 1 + \left(a^2 + 1\right)\lambda$$

ويساوي الصفر من أجل

$$\lambda = -\frac{1}{a^2 + 1}$$

إذا كان $b > a^2$ فإن $\xi^2 + 2a\xi\eta + b\eta^2$ موجب وغير متدن، إنها حالة الأسطوانة الناقصة. إذا كان $b < a^2$ فإنها حالة الأسطوانة الزائدة.

إن المخروطي المتدني (2) حقيقي من أجل $\lambda + 1 < 0$، وتخيلي من أجل $\lambda + 1 > 0$. نفحص هاتين المتراجحتين بإعطاء قيمة (1) من أجل $\lambda = -1$ مع افتراض $-a^2 \leq 0$. نجد

1) في الحالة الزائدة $b < a^2$ جذرا (1) مختلفا الإشارة ولا تقع -1 في المجال الفاصل بين الجذرين. إنها أصغر من الجذرين؛ والخطوط المستقيمة التي تعينها (2) تخيلية دوماً، ولا وجود لاتجاه لمستو يعطينا قطعاً دائرياً.

2) في الحالة المكافئة $b = a^2$، $\lambda = -\frac{1}{a^2+1} > -1$ والاتجاهات المقابلة للمستويات تخيلية أيضاً ولا وجود للقطع الدائري.

3) في الحالة الناقصة $b > a^2$ جذرا (1) سالبان وتقع -1 بينهما. فأحد الجذرين أصغر من -1 ويعين اتجاهين لمستويات تعطي قطوعاً دائرية.

لنلاحظ أن -1 هي حل للمسألة عندما تكون $a = 0$. هذا يعني أن محاور الإحداثيات هي إحداثيات الأسطوانة الرئيسية والجذران هما -1 و $-\frac{1}{b}$ ويصبح المخروطي

$$(1-b)\eta^2 + \zeta^2 = 0 \quad \text{من أجل} \quad \lambda = -1$$

و

$$\frac{b-1}{b}\xi^2 + \zeta^2 = 0 \quad \text{من أجل} \quad \lambda = -\frac{1}{b}$$

والأول حقيقي من أجل $b > 1$ و الثاني تخيلي في هذه الحالة. وعلى العكس فالأول تخيلي من أجل $b < 1$ والثاني حقيقي عندئذ. وفي كلتا الحالتين بوجد اتجاهان لمستويات تعطي قطعاً دائرياً.

إذا كان $b = 1$ فنحن أمام أسطوانة قائمة قاعدتها دائرية، وتختزل المعادلتان السابقتان إلى $\zeta^2 = 0$ ويوجد اتجاه واحد لمستو يعطي قطعاً دائرياً.

إذا كان $a = b = 0$ فنحن أمام أسطوانة (قائمة) مكافئة. ولـ (1) جذر وحيد -1، وتصبح (2) $\eta^2 + \zeta^2 = 0$ التي تعطي اتجاهات تخيلية.

يمكن اتباع نفس النوع من المحاكمة لإيجاد اتجاهات القطوع الدائرية من أجل كل التربيعات.

إن المميز (1) في هذه الحالة هو من الدرجة الثالثة بـ λ ويمكن أن نجد جذراً حقيقياً أو ثلاثة جذور حقيقية. تبين المقارنة بين هذا التفسير، الغريب عن رياضيات القرن العاشر، وبين ما نجده عند السجزي أنه ناقش في نصه كل الحالات الممكنة للأسطوانة.

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz
منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

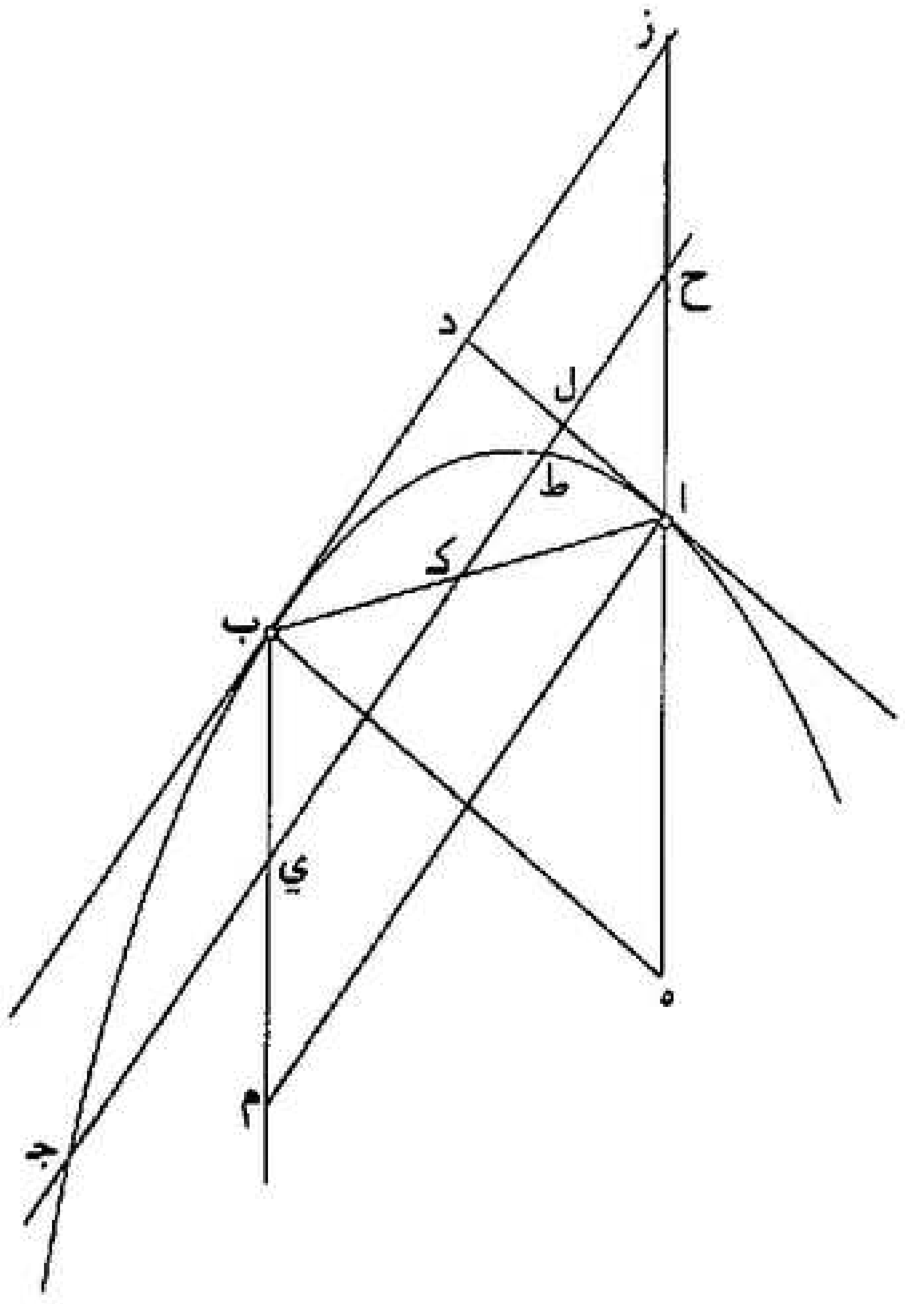
١٣٩-ظ

بسم الله الرحمن الرحيم

في خواص القطوع الثلاثة

استخراج العلاء بن سهل
أطال الله بقاءه

– آ – إذا كان قطع ا ب جـ مكافئًا وخطا ا د ب د يماسانه، فإني أقول: إنه إن أُخرج قطر ه ا ز وخط د ز على استقامة خط د ب حتى يلتقيا على نقطة ز، كان خط ز د مساويًا لخط د ب.



برهانه: أنا نخرج خطاً ب ه موازيًا لخط د ا، فلأنه على ترتيب وخط ز ب مماس القطع، فخط ه ا مساوٍ لخط ا ز. لكن خط ا د موازٍ لخط ه ب، فخط ب د مساوٍ لخط د ز.

– ب – وأقول: إنه إن وُصل خط ا ب وأخرج قطر ب ي وخط ح ل ط ك ي موازيًا لخط د ب، كان مربع ط ي مساويًا لسطح ح ي في ي ك.

برهانه: أنا نخرج خط ا م موازيًا لخط ز ب، فيكون على ترتيب، وليلق قطر ب ي على نقطة م، فنسبة مربع ا م إلى سطح ح ي في ي ك مؤلفةٌ من نسبة خط ا م إلى خط ح ي ومن نسبة خط ا م – أعني خط ح ي – إلى خط ك ي، التي هي كنسبة خط ا م إلى خط ك ي، أعني كنسبة خط م ب إلى خط ب ي. فإذًا نسبة مربع ا م إلى سطح ح ي في ي ك كنسبة م ب إلى خط ب ي، وهي كنسبة مربع ا م إلى مربع ط ي، فنسبة مربع ا م إلى سطح ح ي في ي ك كنسبته إلى مربع ط ي، فمربع ط ي مساوٍ لسطح ح ي في ي ك.

– جـ – وأقول: إنه إن أخرج خط ح ي ليلقى القطع على نقطة جـ، كان سطح جـ ل في ل ط مساويًا لمربع ل ك.

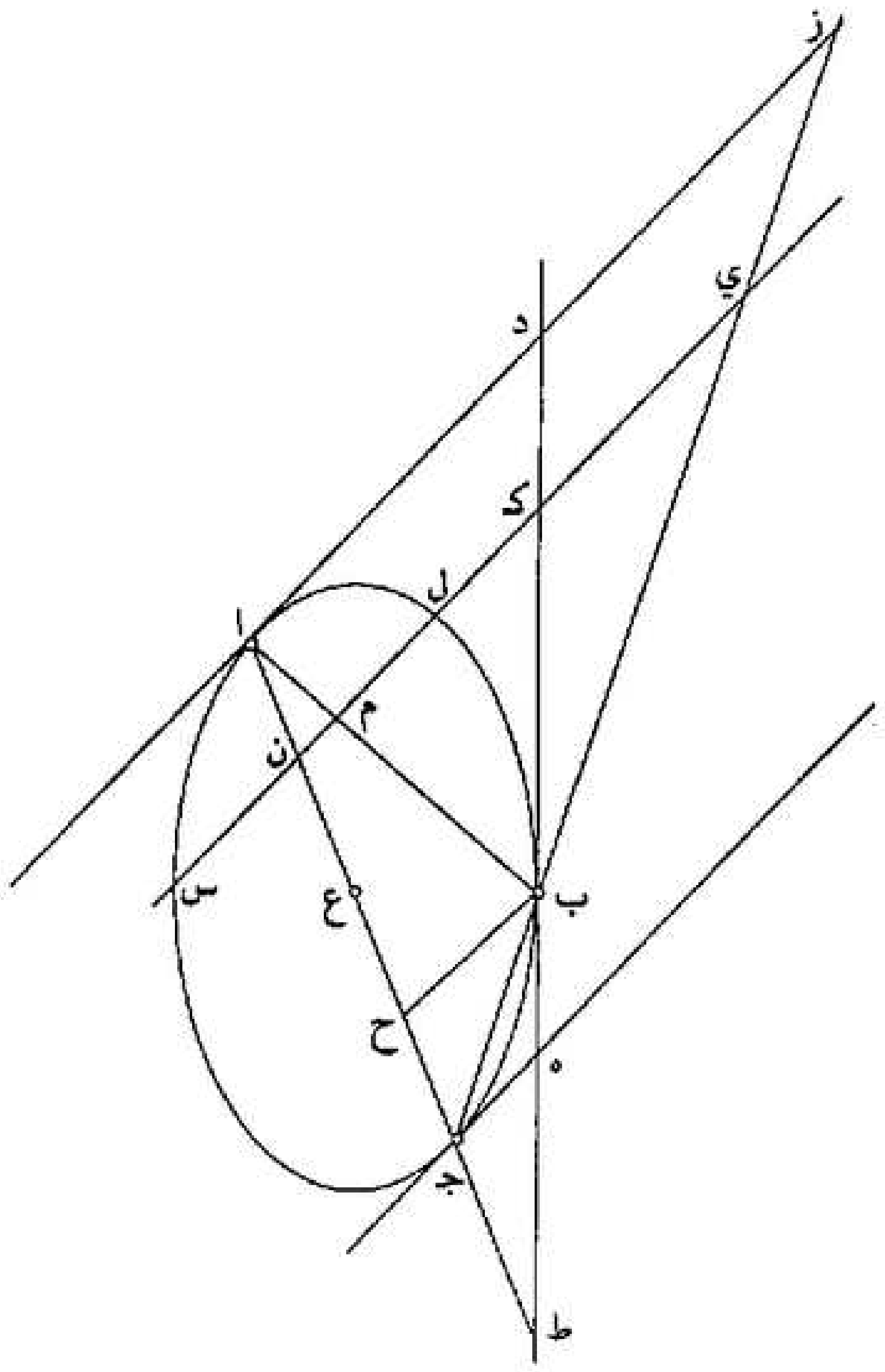
برهانه: أن خط ط جـ قُسم بنصفين على نقطة ي، وزيد عليه خط ل ط، فسطح جـ ل في ل ط مع مربع ط ي مساوٍ لمربع ل ي، كما أن خط ح ك قُسم بنصفين على نقطة ل، وذلك أنه موازٍ لخط ب ز المقسوم بنصفين على نقطة د كما تبيّن في الفصل الأول، وزيد عليه خط ك ي، فسطح ح ي في ي ك مع مربع ل ك مساوٍ لمربع ل ي؛ فإذًا سطح جـ ل في ل ط مع مربع ط ي مساوٍ لسطح ح ي في ي ك مع مربع ك ل. لكن مربع ط ي مساوٍ لسطح ح ي في ي ك، كما تبيّن في الفصل الثاني. فسطح جـ ل في ل ط مساوٍ لمربع ل ك.

– د – وأقول: إن نسبة سطح جـ ل في ل ط إلى مربع ا ل كنسبة مربع ب د إلى مربع ا د.

11 فنسبة مربع ... مربع ط ي: مكررة – 19 ح ي في ي ك: جـ ي في ي ل.

برهانه: أن سطح جـ ل في ل ط مساوٍ لمربع ل ك كما تبيّن في الفصل الثالث؛ لكن نسبة مربع ك ل إلى مربع ا ل كنسبة مربع ب د إلى مربع ا د. فنسبة سطح جـ ل في ل ط إلى مربع ا ل كنسبة مربع ب د إلى مربع ا د.

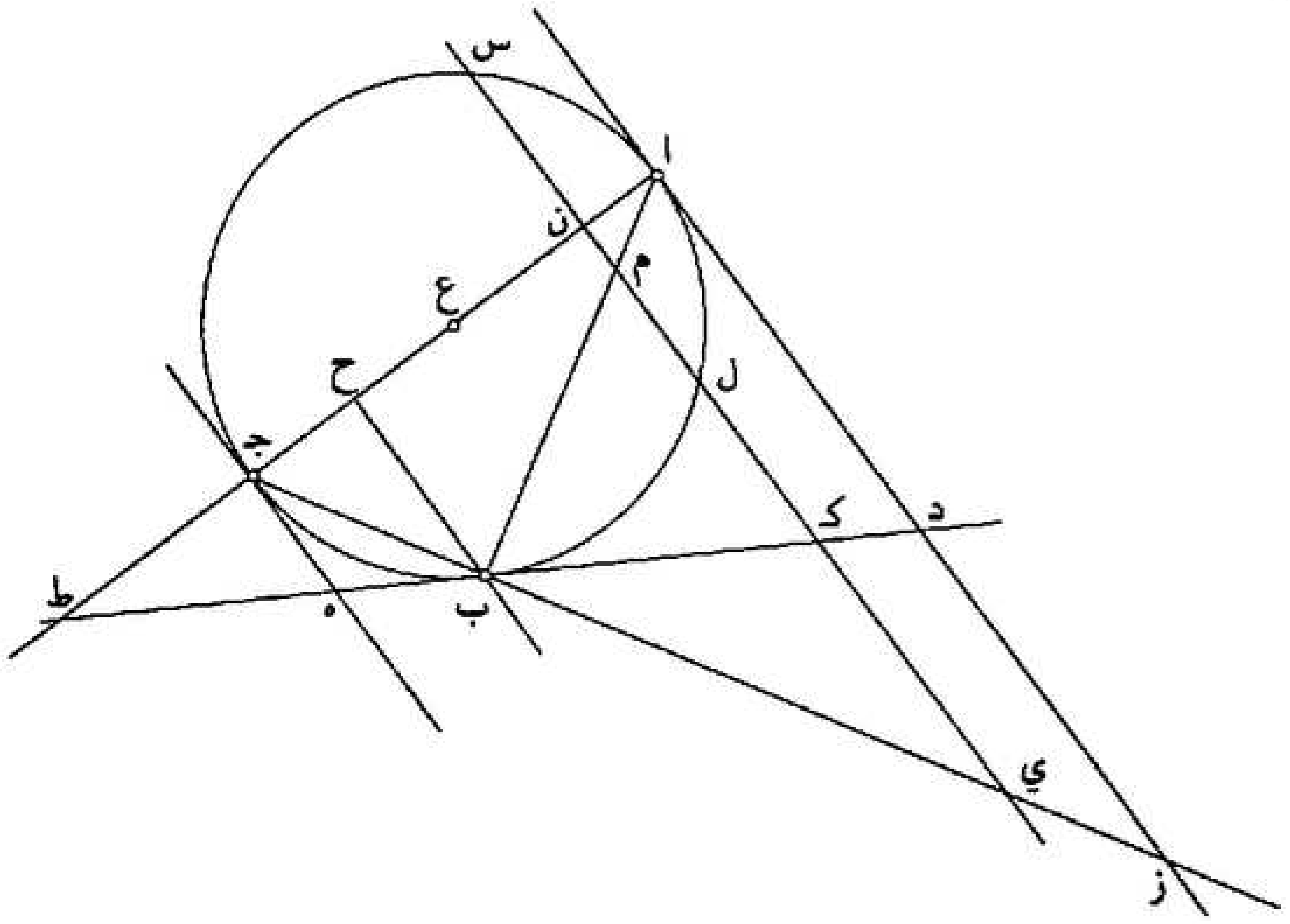
– آ – وإذا كان قطع ا ب ناقصًا أو دائرة أو زائدًا مفردًا أو متقابل الوضع، وخطا ا د ب د يماسانه، فإني أقول: إنه إن أخرج قطر ا جـ ووصل خط جـ ب ولقي خطُّ جـ ب خطَّ ا د على نقطة ز، كان خط ا د مساويًا / لخط ز د. ١٤٠ – و

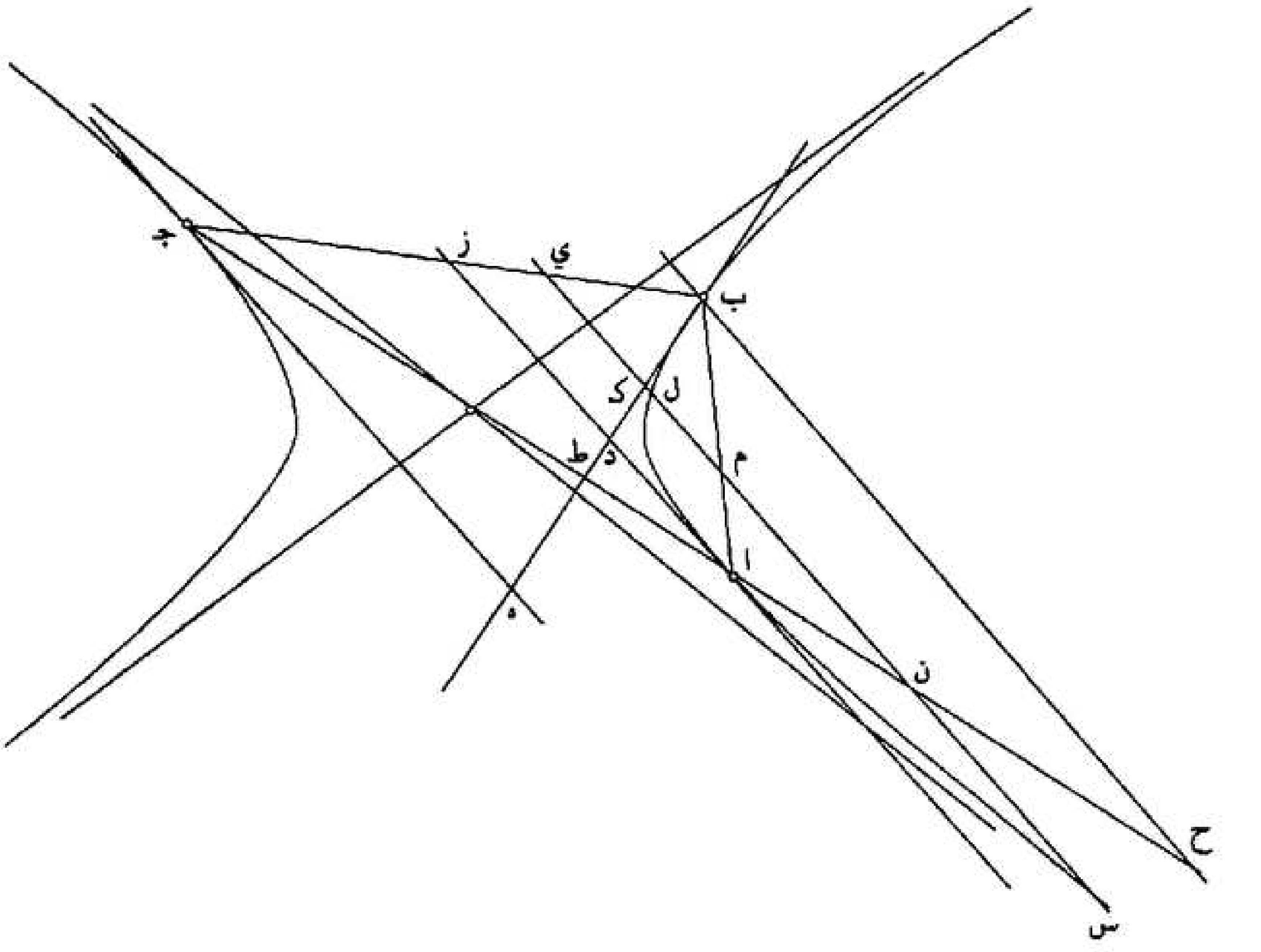


برهانه: أنه ليلق خطُّ د ب خطَّ ا جـ على نقطة ط، ولنخرج خط جـ ه موازيًا لخط ا د، وليلق خط ب د على نقطة ه، ولنخرج خط ب ح موازيًا لخط ا د حتى يكون على ترتيب، وليلق قطر ا جـ على نقطة ح. فلأن نسبة خط ا ط إلى خط ط جـ كنسبة خط ا ح إلى خط ح جـ – لكن نسبة خط ا ط إلى خط ط جـ كنسبة خط ا د إلى خط جـ ه، ونسبة خط ا ح إلى خط ح جـ كنسبة خط ز ب إلى خط ب جـ، أعني كنسبة

4 أو دائرة: فوق السطر / مفردًا أو متقابل الوضع: فوق السطر – 11 خط (الثالثة): أثبتها في الهامش مع بيان موضعها.

خط ز د إلى خط ه جـ –، فنسبة خط ا د إلى خط ه جـ كنسبة خط د ز إليه، فخطا ا د د ز متساويان.





– ب – وأقول: إنه إن وصل خط ا ب وأخرج خط ي ك ل م ن س موازيًا لخط ا د، كان سطح ي ن في ن م مساويًا لمربع ل ن.

3 ي ك ل م ن س: ي ك ل م ن،

برهان ذلك: أن نسبة سطح ي ن في ن م إلى سطح ا ن في ن جـ مؤلفةٌ من نسبة خط ي ن إلى خط ن جـ ومن نسبة خط ن م إلى خط ن ا. فأما نسبة خط ي ن إلى ‹خط› ن جـ، فكنسبة خط ب ح إلى خط جـ ح. وأما نسبة خط م ن إلى خط ن ا، فكنسبة خط ب ح إلى خط ح ا؛ فإذًا نسبة سطح ي ن في ن م إلى سطح جـ ن في ن ا مؤلفة من نسبة خط ب ح إلى خط جـ ح ومن نسبته إلى خط ح ا، التي هي كنسبة مربع ب ح إلى سطح جـ ح في ح ا، ‹وهي› كنسبة مربع ل ن إلى سطح جـ ن في ن ا. فنسبة سطح ي ن في ن م إلى سطح جـ ن في ن ا كنسبة مربع ل ن إلى سطح جـ ن في ن ا. فسطح ي ن في ن م مساوٍ لمربع ل ن.

– جـ – وأقول: إنه إن أخرج خط ي ن ليلقى القطع على نقطة س، كان سطح س ك في ك ل مساويًا لمربع ك م.

برهانه: أن خط س ل قُسم بنصفين على نقطة ن، وزيد عليه خط ك ل، فسطح س ك في ك ل مع مربع ل ن مساوٍ لمربع ك ن. كما أن خط ي م قُسم بنصفين على نقطة ك لموازاته لخط ا ز ولانقسام خط ا ز بنصفين على نقطة د، كما تبيّن في الفصل الأول. وزيد عليه خط م ن. فسطح ي ن في ن م مع مربع م ك مساوٍ لمربع ن ك. فسطح س ك في ك ل مع مربع ل ن مساوٍ لسطح ي ن في ن م مع مربع م ك. لكن مربع ن ل مساوٍ لسطح ي ن في ن م، كما تبيّن في الفصل الثاني؛ فسطح س ك في ك ل مساوٍ لمربع ك م.

– د – وأقول: إن نسبة سطح س ك في ك ل إلى مربع ك ب كنسبة مربع ا د إلى مربع ب د.

برهانه: أن سطح س ك في ك ل مساوٍ لمربع ك م، كما تبيّن في الفصل الثالث؛ لكن نسبة مربع ك م إلى مربع ك ب كنسبة مربع ا د إلى مربع ب د، فنسبة سطح س ك في ك ل إلى مربع ك ب كنسبة مربع ا د إلى مربع د ب. / ١٤٠–ظ

6 ح ا: ي ك – 12 س ك: س ل – 22 جمع الناسخ كلَّ الأشكال الهندسية في صفحة ١٤٠–ظ، وكتب في آخرها «عورض بالأصل».

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

١٢١-ظ

بسم الله الرحمن الرحيم

‹الشنّي›

كتاب تركيب المسائل التي حلّلها أبو سعد العلاء بن سهل

قد استعقب الشيخ الفاضل الأستاذ، سيدي ومولاي أطال الله بقاءه وأدام عزّه ونعماه بما التمس من تركيب المسائل التي حلّلها أبو سعد العلاء بن سهل في رسالته إليه أدام الله تأييده؛ وقابلت أمره بالواجب من الطاعة واستخرجت الوجه الذي استبعده أبو سعد فلم يتوصل إليه وحكم في آخر رسالته هذه على امتناعه لتعذره عليه مع تقدّمه في هذه العلوم الرياضية وصدق براعته في استخراج المسائل الهندسية. نعم، ولو أنه وفّى مراتب النظر حقوقها ومنحها من التفحص حظوظها لتمكن من مطلوبه وتخلص من نقص ما أتى به، إلاّ أن أحدًا لا ينجو من الخطأ نسأل الله التوفيق للصواب، إن ذلك بيده. وأنفذت ما اتفق لي من تركيب هذه المسائل المحللة إلى خزانته المعمورة مقرونًا بما أرشدت إليه من إمكان الوجه الذي استبعده أبو سعد العلاء بن سهل مقدمًا ألفاظه بعينها. وقبل شروعي فيما قصدت من التركيب، قدمت مقدمات احتجت إليها لتسهيل طريق البرهان وتقريب درك المطلوب وهي هذه:

– آ – إذا كانت ثلاثة مقادير متجانسة كيفما كانت، فإن نسبة الأول منها إلى الثالث مؤلفة من نسبة الأول إلى الثاني ومن نسبة الثاني إلى الثالث.

10 من (الثالثة): عن، يقال تخلص من لا عن، أو تخلى عن.

مثال ذلك: مقادير ا ب جـ أقول: إن نسبة ا إلى جـ مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة ب إلى جـ.

برهان ذلك: أن نسبة ‹ا إلى جـ هي كنسبة› سطح ا في ب إلى سطح ب في جـ ‹التي هي› مؤلفة من نسبة أضلاعهما، أعني من نسبة ا إلى ب ومن نسبة ب إلى جـ.

وكذلك إذا كانت المقادير أكثر من ثلاثة، بالغةً حيث ما بلغت، فنجعلها لما يُحتاج إليه أربعة، وهي مقادير ا ب جـ د، فأقول: إن نسبة ا إلى د مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة ب إلى جـ ومن نسبة جـ إلى د.

برهان ذلك ‹على› ما قدمنا: أن نسبة ا إلى جـ – إذا جعلنا ب وسطًا بينهما – مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة ب إلى جـ. ونسبة ا إلى د – إذا جعلنا جـ وسطًا بينهما – مؤلفة من نسبة ا إلى جـ ومن نسبة جـ إلى د. لكن نسبة / ا إلى جـ قد بيّنا ١٢٢-و أنها مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة ب إلى جـ؛ فنسبة ا إلى د مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة ب إلى جـ ومن نسبة جـ إلى د.

– **ب** – إذا كانت أربعة مقادير مثل مقادير ا ب جـ د، وكانت النسبة المؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة جـ إلى د نسبةَ المثل، فإني أقول: إن نسبة ا إلى د كنسبة ب إلى جـ.

برهان ذلك: أن النسبة المؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة جـ إلى د هي نسبة سطح ا في جـ إلى سطح ب في د، وهذه النسبة هي نسبة المثل، فسطح ا في جـ مثلُ سطح ب في د، فأضلاعهما متكافئة في النسبة، وضلعا سطح ا في جـ ا جـ وضلعا سطح ب في د ب د، فنسبة ا إلى د كنسبة ب إلى جـ، وكذلك أيضًا نسبة ا إلى ب كنسبة د إلى جـ.

– **جـ** – نريد أن نقسم خطًا معلومًا – وليكن ا ب – بقسمين يكون نسبة أحد القسمين إلى الآخر مؤلفة من نسبتين معلومتين، وليكونا نسبة جـ إلى د و‹نسبة› ه إلى ز.

فنجعل نسبة د إلى ح كنسبة ه إلى ز، ونقسم خط ا ب على نقطة ط حتى يكون نسبة ا ط إلى ط ب كنسبة جـ إلى ح، فأقول: إن نسبة ا ط إلى ط ب مؤلفة من نسبتي جـ إلى د وه إلى ز.

3 ب (الأولى): جـ.

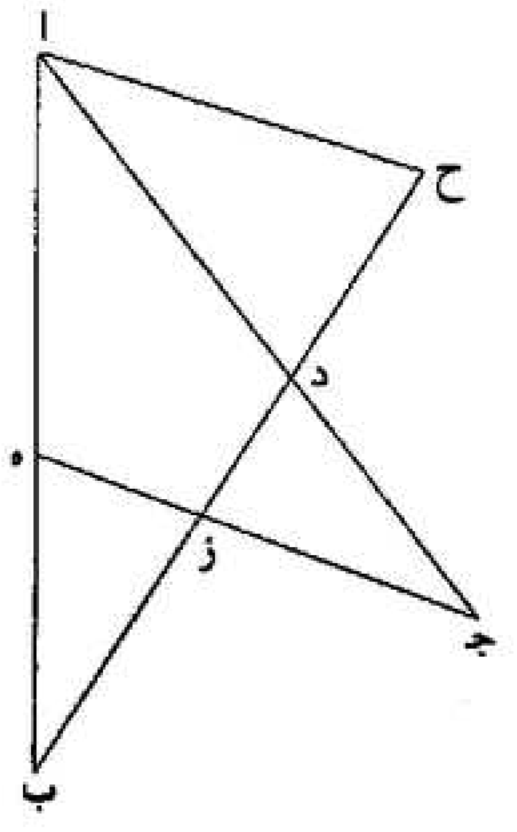
برهان ذلك: أن نسبة جـ إلى ح – إذا جعلنا د وسطًا بينهما – مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة د إلى ح، لكن نسبة د إلى ح كنسبة ه إلى ز، فنسبة ا ط إلى ط ب مؤلفة من نسبتي جـ إلى د وه إلى ز.

– د – إذا كانت ستة مقادير وكانت نسبة الأول منها إلى الثاني مؤلفة من نسبة الثالث إلى الرابع ومن نسبة الخامس إلى السادس، فإنه يكون أيضًا نسبة الثالث إلى السادس مؤلفة من نسبة الأول إلى الثاني ومن نسبة الرابع إلى الخامس.

فليكن مقادير ا ب جـ د ه ز، نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة ه إلى ز، فأقول: إن نسبة جـ إلى ز مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة د إلى ه.

برهان ذلك: أن كل أربعة مقادير فإن نسبة الأول منها إلى الرابع مؤلفة من نسبته إلى الثاني ومن نسبة الثاني إلى الثالث ومن نسبة الثالث إلى الرابع على ما تقدم، فيكون نسبة جـ إلى ز مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة د إلى ه ومن نسبة ه إلى ز. ولكن نسبة ا إلى ب مؤلفة من نسبة جـ إلى د ومن نسبة ه إلى ز؛ فنسبة جـ إلى ز مؤلفة من نسبة ا إلى ب ومن نسبة د إلى ه.

– ه – نخط قطاعًا مستقيم الخطين كيفما اتفق، وليكن قطاع ب ا جـ، / ونخرج فيه ١٢٢-ظ
خطي ب د جـ ه، يتقاطعان على نقطة ز كيفما اتفق تقاطعهما؛ فبيّنٌ بما ذكره المتقدمون أنه يلزمه في أقسامه الثمانية نسبٌ مؤلفٌ بعضها من بعض، منها أن نسبة ا ب إلى ب ه تكون مؤلفة من نسبة ا د إلى د جـ ومن نسبة جـ ز إلى ز ه.

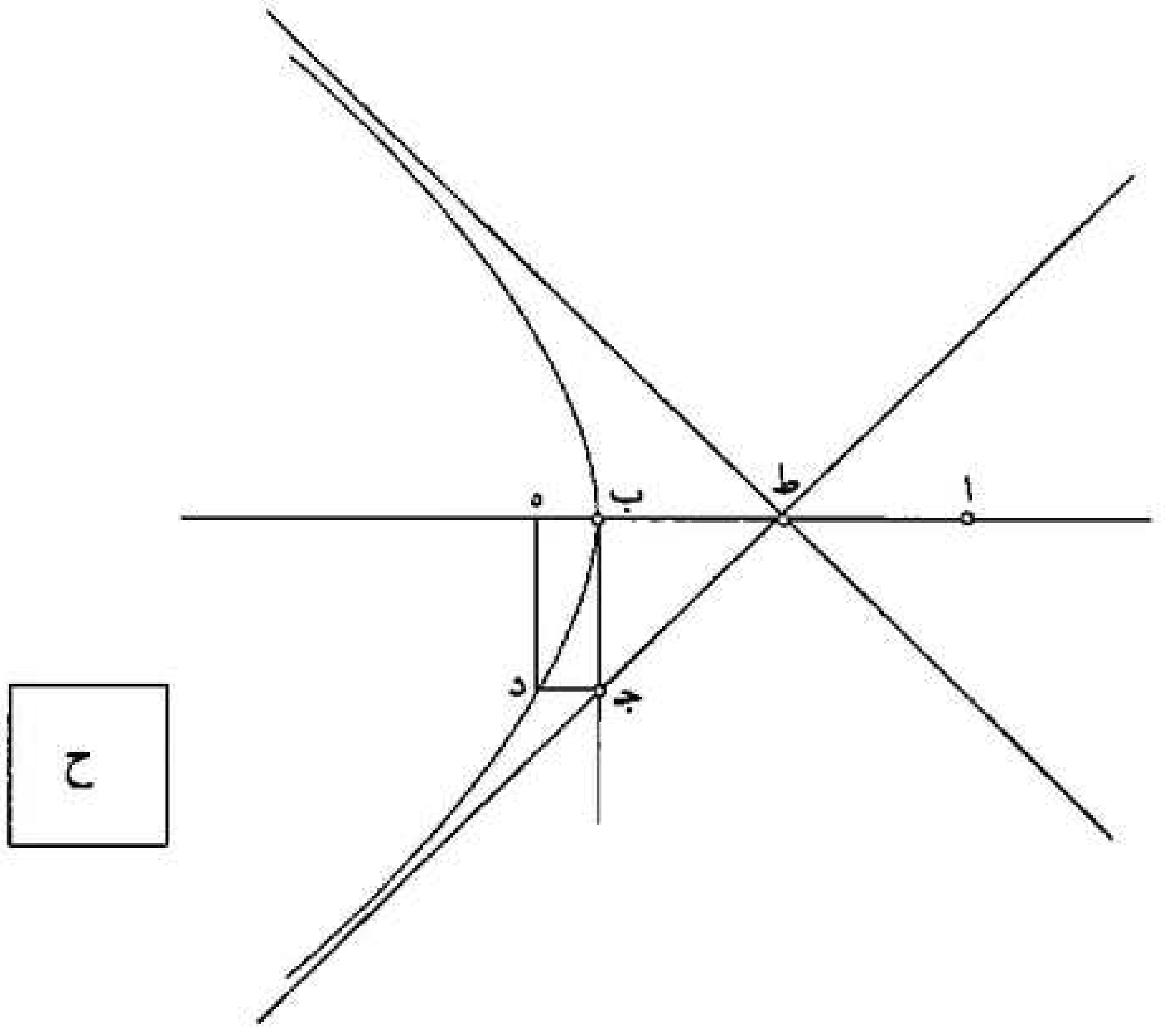


10 فيكون: يكون – 16 مؤلفٌ: مؤلفة – 17 تكون: يكون.

برهان ذلك: أنا نخرج من نقطة آ خطًا يوازي ه جـ، ونخرج إليه خط ب ز، فيلقاه على ح، فلأن نسبة ا ب إلى ب ه كنسبة ا ح إلى ه ز – ونجعل خط جـ ز وسطًا فيما بين ا ح ه ز – فيكون نسبة ا ح إلى ه ز مؤلفة من نسبة ا ح إلى جـ ز ومن نسبة جـ ز إلى ز ه. لكن نسبة ا ح إلى جـ ز كنسبة ا د إلى د جـ، فنسبة ا ح إلى ه ز، أعني نسبة ا ب إلى ب ه مؤلفة من نسبة ا د إلى د جـ ومن نسبة جـ ز إلى ز ه.

– و – نريد أن نزيد في خطٍ معلومٍ زيادة على استقامته ليكون ضرب الخط المعلوم مع الزيادة في الزيادة مثل سطح مفروض.

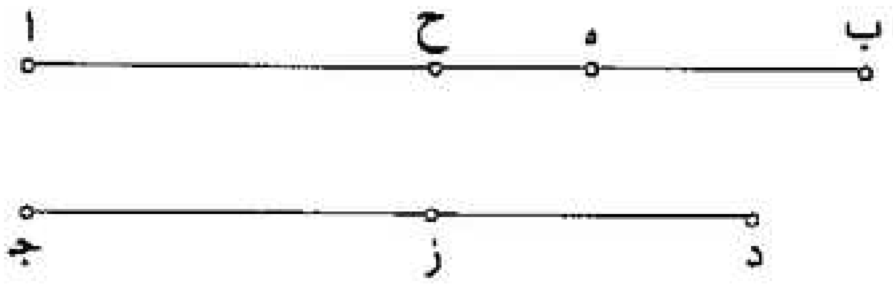
فليكن الخط المعلوم ا ب والسطح المفروض سطح ح. فليقم على نقطة ب من خط ا ب خط ب جـ على زاوية قائمة، وليكن خط ب جـ قويًا على سطح ح، ونعمل قطعًا زائدًا رأسه نقطة ب، وكل من ضلعي شكله المائل والقائم مثل خط ا ب، وزاوية خط ترتيبه قائمة، وليكن قطع ب د. ونخرج خط ا ب على استقامته من جهة ب بغير نهاية، ونخرج من نقطة جـ خط جـ د موازيًا لـ ا ب، فهو لا محالة يلقى القطع، فليلقه على نقطة د، ونخرج د ه يوازي جـ ب، فأقول: إن ضرب ا ه في ه ب مثل سطح ح.



برهان ذلك: أن نسبة سطح ا ه في ه ب إلى مربع ه د كنسبة الضلع المائل إلى الضلع القائم لقطع ب د، والضلعان متساويان، فسطح ا ه في ه ب مساوٍ لمربع د ه، أعني مربع خط ب جـ، أعني سطح ح المفروض.

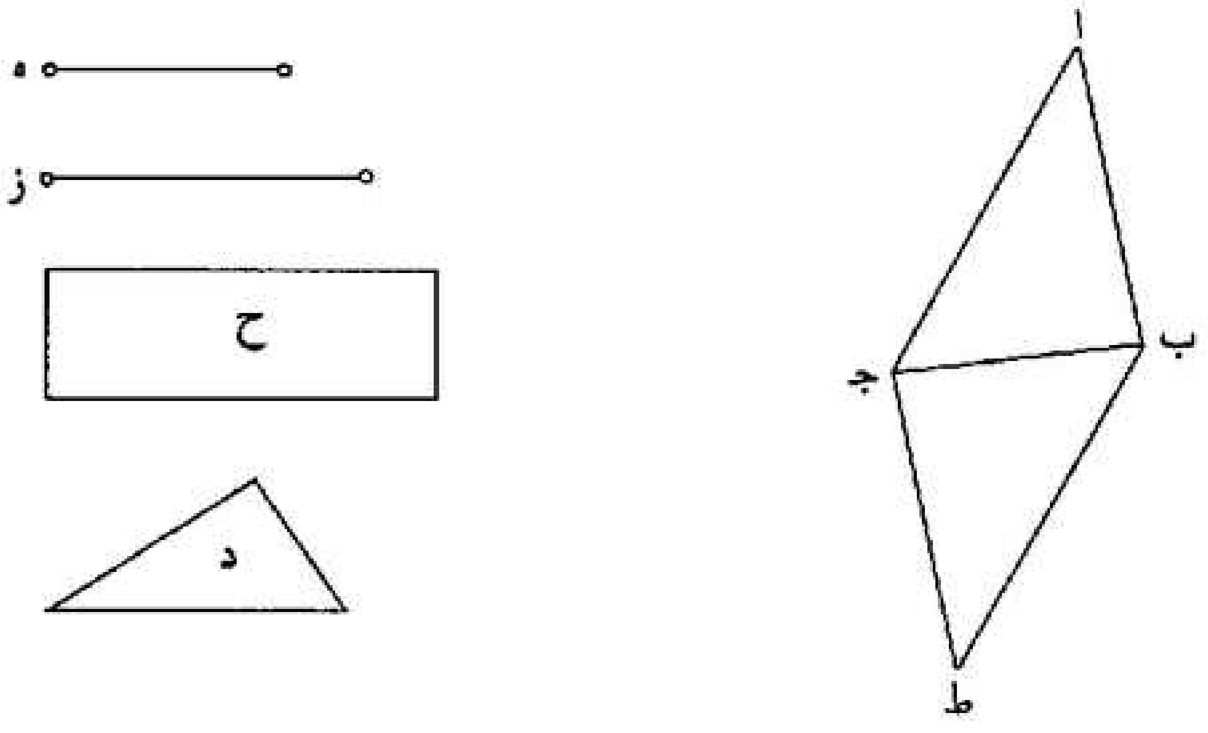
15 ا ه: ا ب.

– ز – إذا كان خطا ا ب جـ د قُسما بقسمين على نقطتي ه ز، فكان ضرب ا ب في ب ه مثل ضرب جـ د في د ز، وكان قسم ا ه من خط ا ب أعظم من قسم جـ ز من خط جـ د، فإني أقول: إن خط ا ب أطول من خط جـ د.



برهان ذلك: أنا نفصل ا ح مثل جـ ز، فلأن ضرب ا ب في ب ه أصغر من ضرب ا ب في ب ح، وضربَ ا ب في ب ه مثلُ ضرب جـ د في د ز، فضرب ا ب في ب ح أعظم من ضرب جـ د في د ز. وا ح مثل جـ ز، يكون ب ح أطول من د ز، فـ ا ب أطول من جـ د.

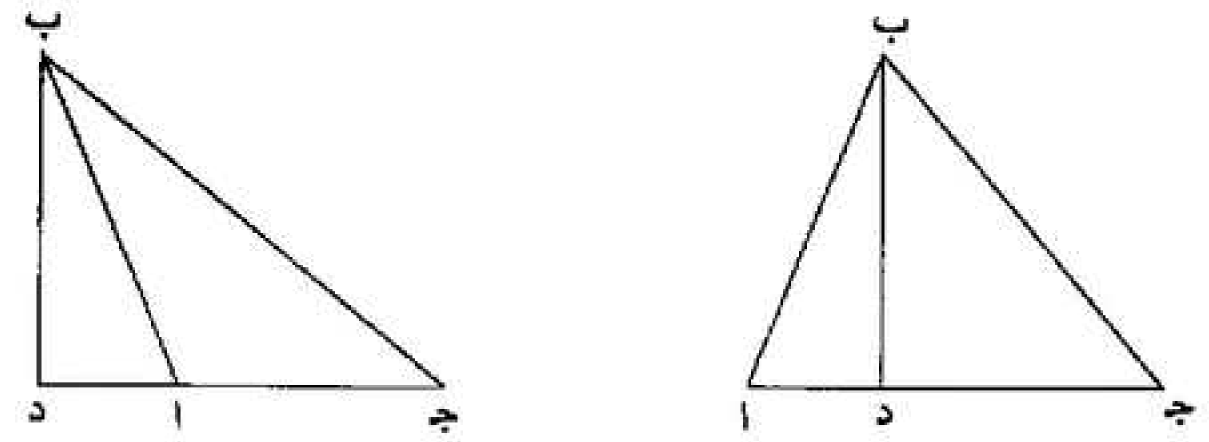
– ح – زاوية ب ا جـ ومثلث د معلومان، ونسبة ه إلى ز مفروضة، / نريد أن نفصل ١٢٣-و من زاوية ب ا جـ مثلثًا بخط مستقيم يقطع الساقين حتى يكون نسبة مثلث د إلى ذلك المثلث الحادث كنسبة ه إلى ز.



فنجعل نسبة مثلث د إلى سطح ح كنسبة ه إلى ز، ونعمل على خط ا ب سطحًا متوازي الأضلاع مساويًا لضعف سطح ح وزاويته مثل زاوية ا على ما تبين عمله في شكل مه من مقالة ا من كتاب *الأصول*، وليكن سطح ا ب ط جـ؛ ونصل ب جـ فيكون مثلث ا ب جـ مثل سطح ح، ويكون نسبة مثلث د إلى مثلث ا ب جـ كنسبة ه إلى ز.

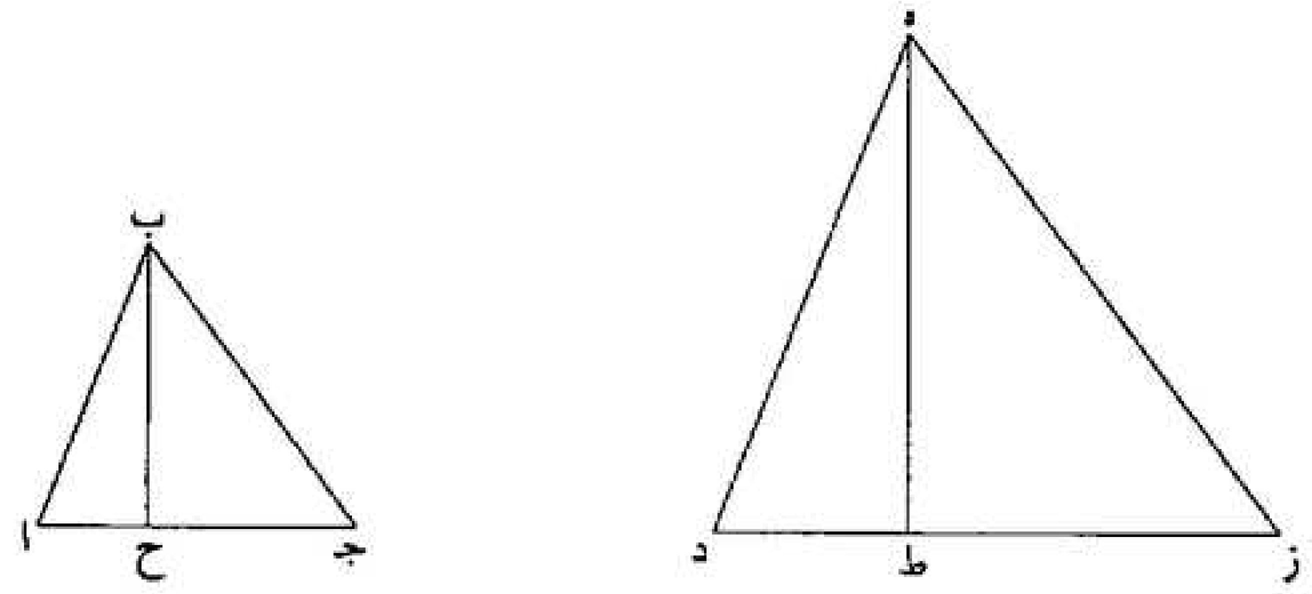
9 يقطع: لخط.

– طَ – زاوية ب ا جـ من مثلث ا ب جـ معلومة، أقول: إن نسبة ضرب ب ا في ا جـ إلى مثلث ا ب جـ معلومة.



برهانه: أنا نخرج من نقطة بَ عمودًا على ا جـ وهو ب د، فزاوية ب د ا معلومة وزاوية ب ا د معلومة، فيبقى زاوية ا ب د معلومة، فمثلث ب ا د معلوم الصورة، فنسبة ب ا إلى ب د معلومة، فنسبة ب ا في ا جـ إلى ا جـ في ب د معلومة، ونسبة ا جـ في ب د إلى مثلث ا ب جـ معلومة، فنسبة سطح ب ا في ا جـ إلى مثلث ا ب جـ معلومة.

– يَ – إذا كان في مثلثيْ ا ب جـ د ه ز زاويةُ آ مثل زاوية دَ، فأقول: إن نسبة سطح ا ب في ا جـ إلى سطح د ه في د ز كنسبة مثلث ا ب جـ إلى مثلث د ه ز.



برهان ذلك: أنا نخرج عموديْ ب ح ه ط على ا جـ د ز، فمعلوم أن مثلث ا ب ح يشبه مثلث د ه ط، فنسبة ا ب إلى ب ح كنسبة د ه إلى ه ط. لكن نسبة ا ب إلى ب ح كنسبة سطح ا ب في ا جـ إلى سطح ب ح في ا جـ، إذا جعلنا ا جـ ارتفاعًا مشتركًا لهما. وكذلك أيضًا نسبة د ه إلى ه ط كنسبة سطح د ه في د ز إلى سطح ه ط في د ز، لكن نسبة سطح ب ح في ا جـ إلى سطح ه ط في د ز كنسبة مثلث ا ب جـ إلى مثلث د ه ز، فنسبة سطح ا ب في ا جـ إلى سطح د ه في د ز كنسبة مثلث ا ب جـ إلى مثلث د ه ز؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

14 فنسبة: مكررة.

ونقدم المسألة:

إذا كانت دائرة معلومة الوضع والقدر ونقط ثلاث على استقامة معلومات، وعمدنا لإيقاع مثلث مستقيم الأضلاع في الدائرة ليجوز كل واحد من أضلاعه مستقيمًا على إحدى النقط.

تركيبنا لتحليل أبي سعد العلاء بن سهل لهذه المسألة:

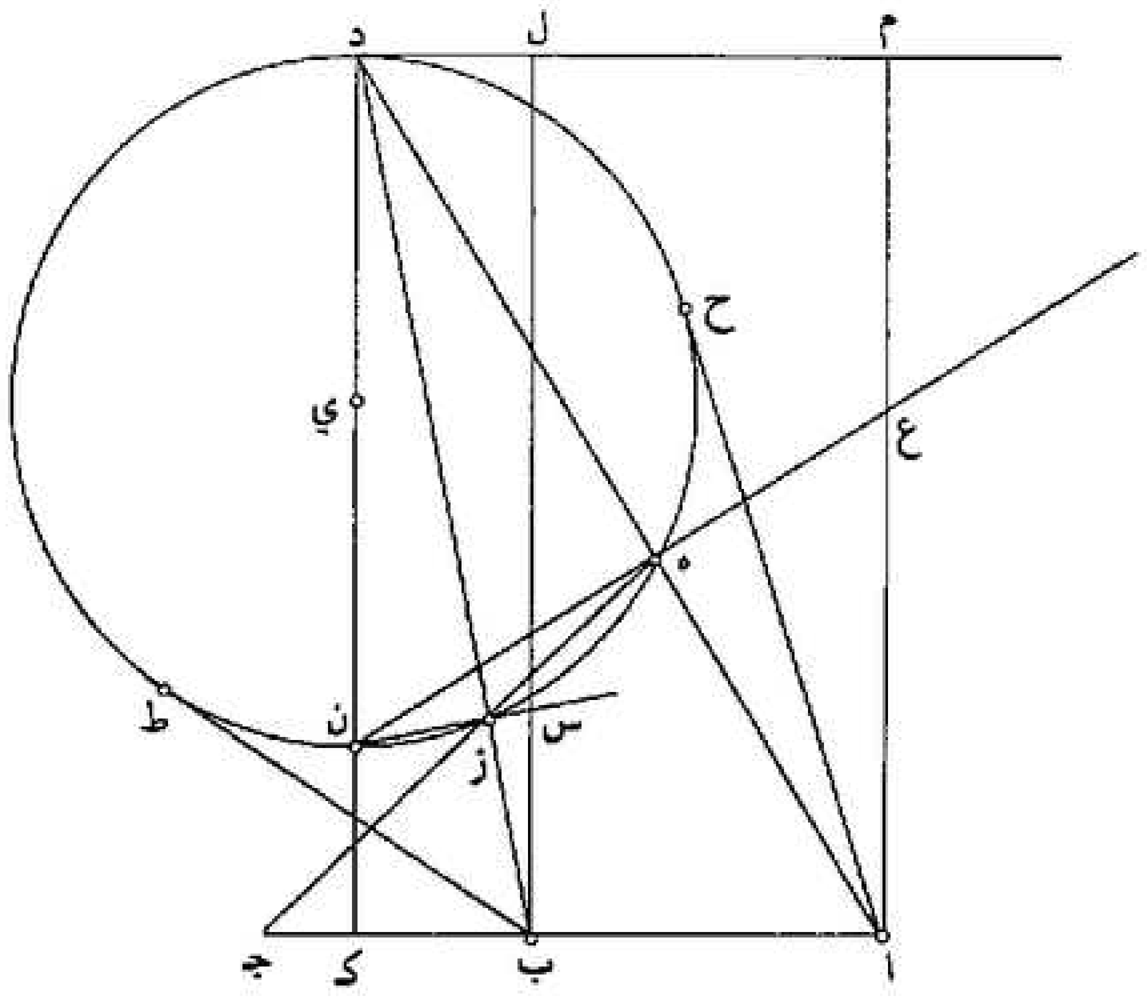
فليكن الدائرة دائرةَ د ه ز والنقط الثلاث ا ب جـ وهي على خط مستقيم، فنخرج من نقطتي ا ب خطين يماسان دائرة د ه ز، وليكونا خطي ا ح / ب ط، فيكونان معلومي ١٢٣-ظ القدر.

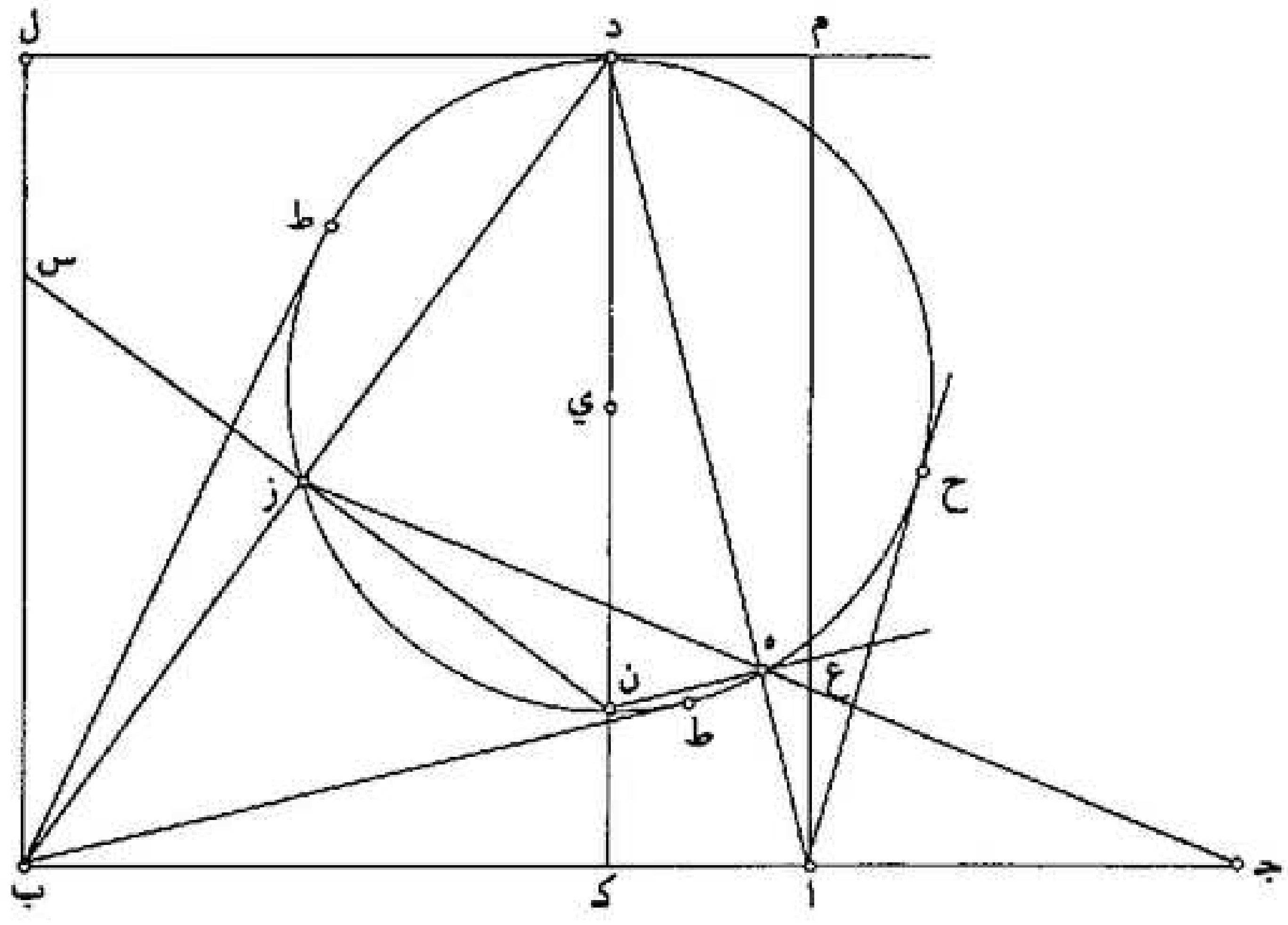
فإن اتفق أن يكون النسبة المؤلفة من نسبة مربع خط ا ح إلى خط ا جـ المعلوم ومن نسبة خط ب جـ المعلوم إلى مربع خط ب ط المعلوم نسبةَ المثل، أعني أن يكون نسبة مربع خط ا ح إلى مربع خط ب ط كنسبة خط ا جـ إلى خط ب جـ لما قدمنا في المقدمات، فإنا نطلب مركز دائرة د ه ز فنجده، وليكن نقطة ي. ونخرج من نقطة ي إلى خط ا جـ عمود ي ك يقطع دائرة د ه ز على نقطة ن، ونخرجه على استقامته إلى المحيط، فيلقاه على د، ونصل خطي د ا د ب يقطعان المحيط على نقطتي ه ز، ونصل ه ز ز جـ، فأقول: إن خط ه ز جـ مستقيم.

برهان ذلك: أنا نجيز على نقطة د خط د ل م يماس دائرة د ه ز على نقطة د، ونصل خطيْ ن ه ن ز، ونخرجهما على استقامتهما، ونخرج إليهما من نقطتي ا ب خطين موازيين لخط د ك، فيلقيانهما على نقطتي س ع، ونخرجهما على استقامتهما حتى يلقيا الخط المماس على نقطتي م ل. فلأن مربع ا ح مساوٍ لضرب ا د في ا ه، أعني ضرب ا م في ا ع لتشابه مثلثي م ا د ا ع ه، وأيضًا مربعَ ب ط مساوٍ لضرب ب د في ب ز، أعني ضرب ل ب في ب س لتشابه مثلثي ل ب د ب س ز، يكون نسبة ضرب ا م في ا ع إلى ضرب ل ب في س ب كنسبة مربع ا ح إلى مربع ب ط، وهي ‹التي مع نسبة ب جـ إلى ا جـ› نسبة المثل. لكن نسبة مربع ا ح إلى مربع ب ط كنسبة ا جـ إلى ب جـ، فنسبة ضرب ا م في ا ع إلى ضرب ل ب في ب س كنسبة ا جـ إلى ب جـ. لكن نسبة ضرب ا م في ا ع إلى ضرب ل ب في ب س مؤلفة من نسبة ا م إلى ل ب ومن نسبة ا ع إلى س ب. وا م مثل ل ب، يكون نسبة سطح ا م في ا ع إلى سطح ل ب في ب س كنسبة ا ع إلى س ب. فنسبة ا ع إلى س ب كنسبة ا جـ إلى

7 يماسان دائرة: مطموسة – 19 يلقيا: يلقيان – 20 ا ع ه: م ع ه – 24 ا جـ: ا د.

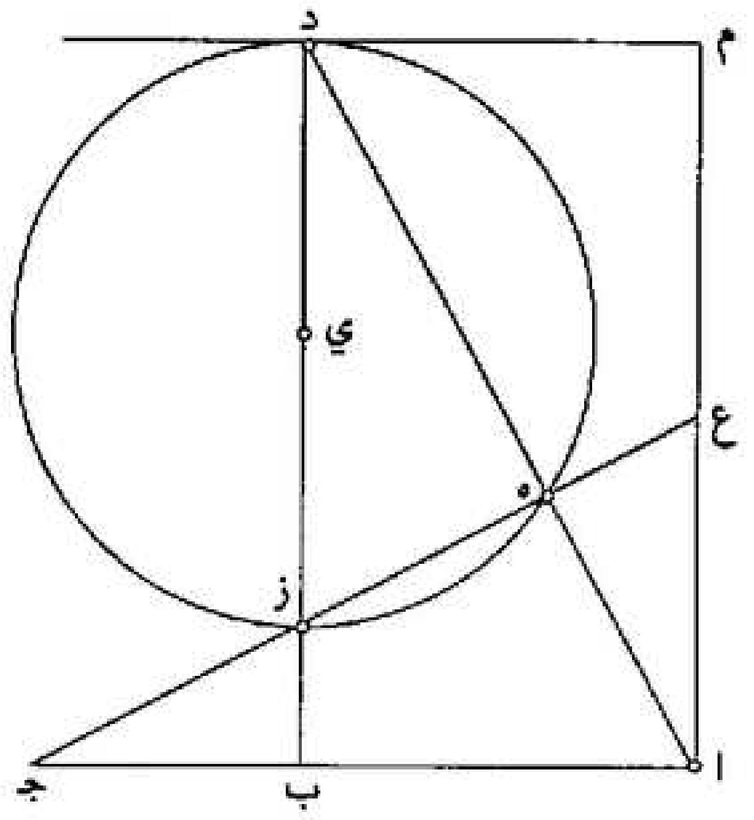
ب جـ. لكن نسبة ا ع إلى س ب – إذا جعلنا / د ن وسطًا بينهما – مؤلفة من نسبة ا ع إلى د ن – أعني نسبة ا ه إلى ه د – ومن نسبة د ن إلى س ب، أعني نسبة د ز إلى ب ز. يكون نسبة ا ع إلى س ب، أعني نسبة ا جـ إلى ب جـ، مؤلفة من نسبة ا ه إلى ه د ومن نسبة د ز إلى ز ب. ففي قطاع د ا جـ نسبة ا جـ إلى ب جـ مؤلفة من نسبة ا ه إلى ه د ومن نسبة د ز إلى ز ب. فالخط الذي يصل بين نقطتي ه جـ ينتظم نقطة ز ويمر عليها مستقيمًا، فخط ه ز جـ مستقيم وخطا د ه ا د ز ب مستقيمان، فخطوط د ه ا د ز ب ه ز جـ مستقيمة؛ فقد عملنا ما أردنا؛ وذلك ما أردنا أن نعمل. ١٢٤-و





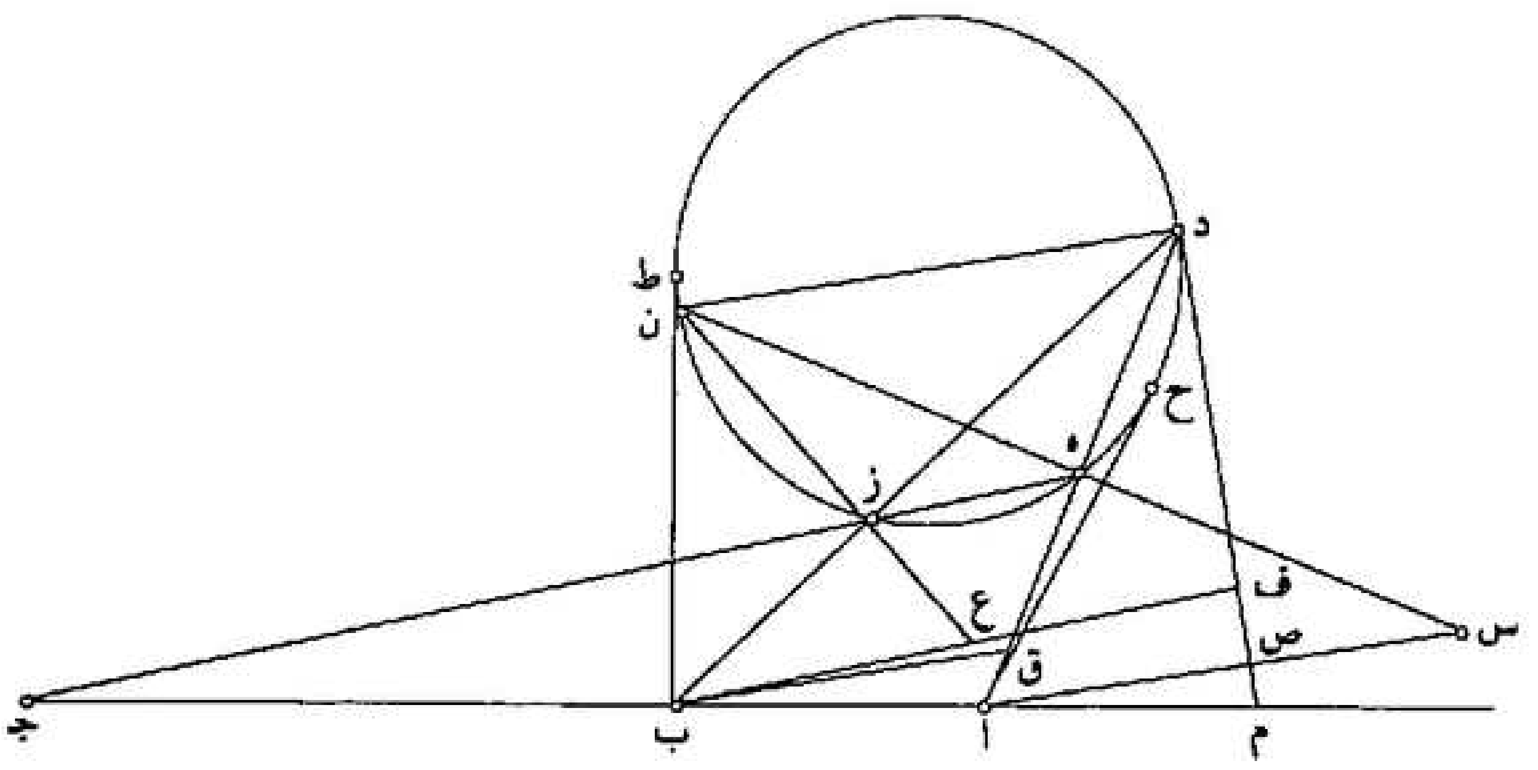
وإن اتفق أن يكون خط د ب على المركز كخطي د ي ز ب، فإنا نصل ا د ه ز جـ، فأقول: إن خط ه ز جـ مستقيم.

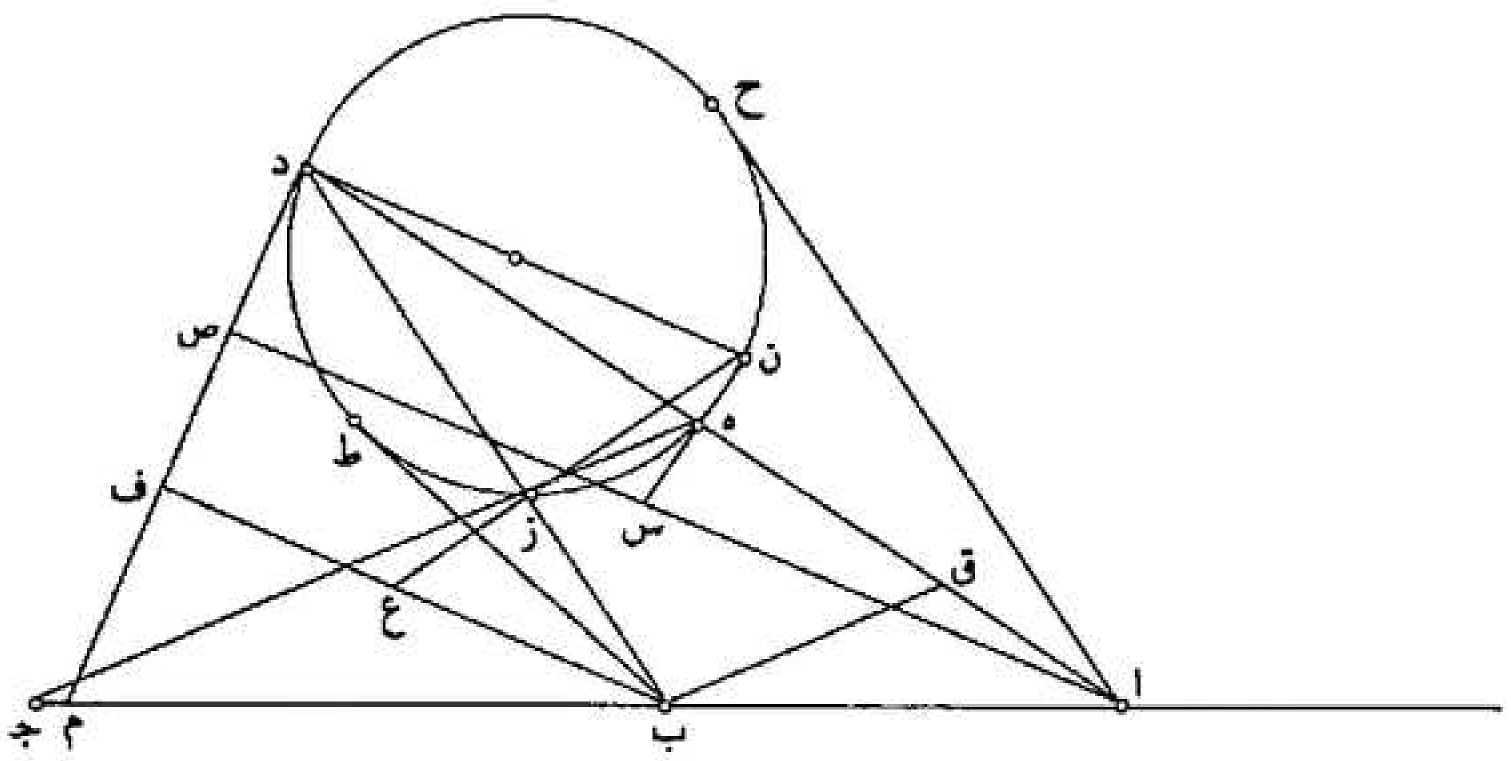
6 مستقيمان: مستقيمين – 8 كخطي: كخط.

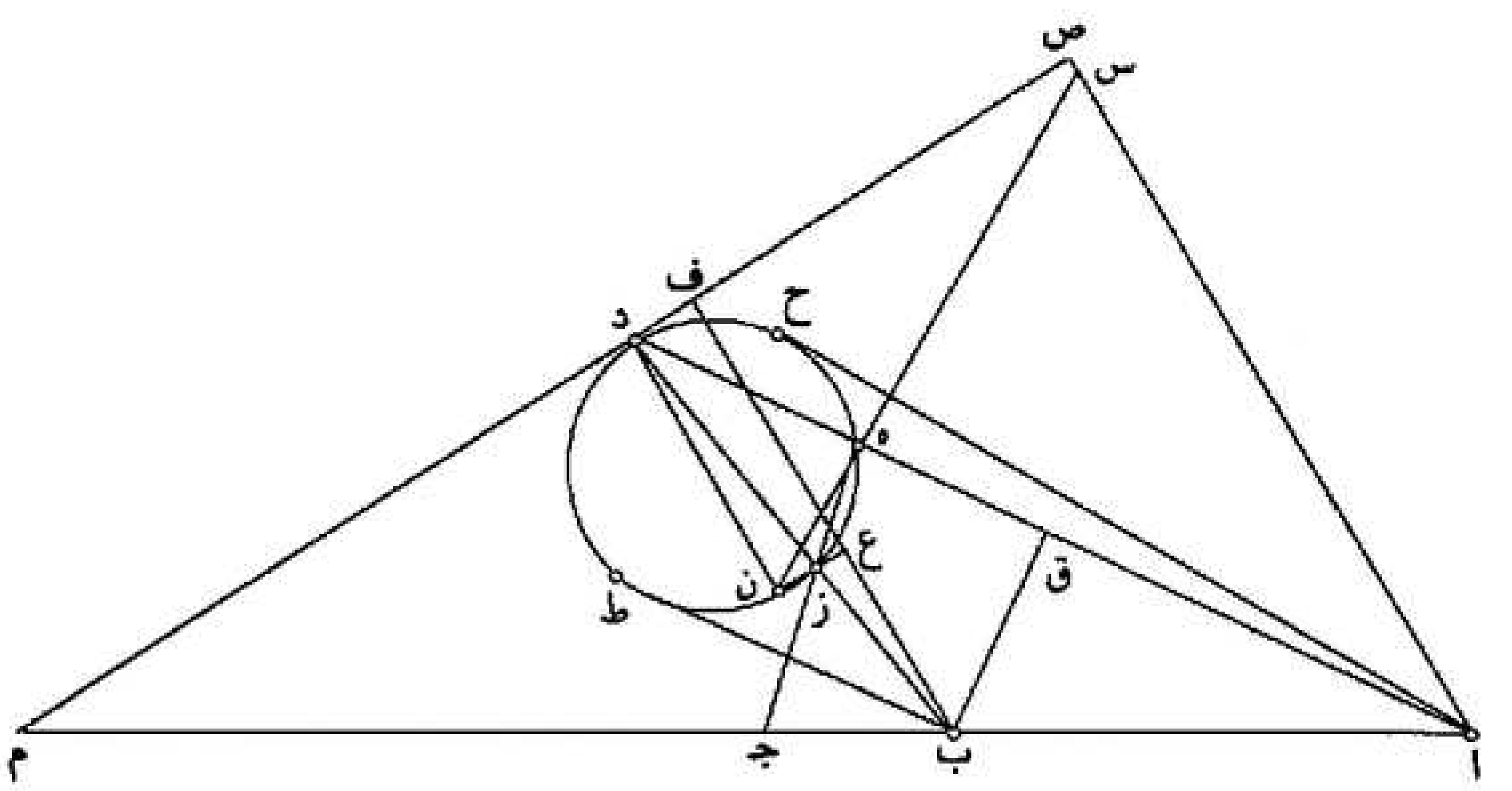


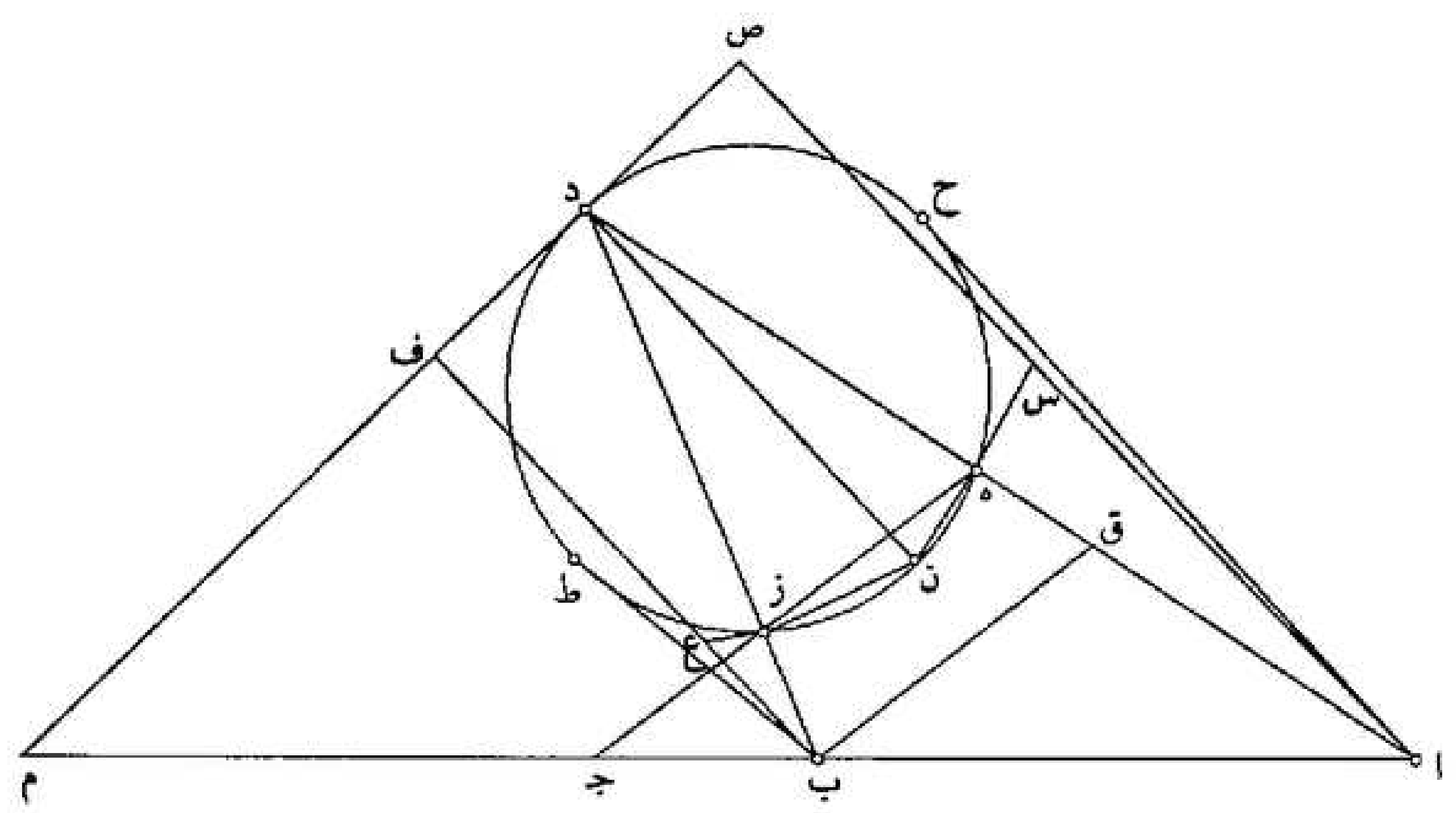
برهان ذلك: أنا نخرج من نقطة ا خطًا موازيًا لقطر د ز، ونخرج إليه خط ز ه ع مستقيمًا، فيلقاه على نقطة ع. فلأن نسبة ا جـ إلى جـ ب كنسبة ا ع إلى ب ز، ونسبة ا ع إلى ب ز – إذا جعلنا قطر د ز وسطًا بينهما – مؤلفة من نسبة ا ع إلى د ز ومن نسبة د ز إلى ز ب، لكن نسبة ا ع إلى د ز كنسبة ا ه إلى ه د، فالنسبة المؤلفة من ‹نسبة› ا ه إلى ه د ومن نسبة د ز إلى ز ب كنسبة ا جـ إلى جـ ب. فالخط الذي يصل بين نقطتي ه جـ ينتظم نقطة ز ويمر عليها مستقيمًا.

وإن كانت النسبة المؤلفة من نسبة مربع خط ا ح إلى خط ا جـ ومن نسبة ب جـ إلى مربع ب ط نسبة الخلاف، فإنا نجعلها في هاتين الصورتين – الأولى والثانية – نسبة صغير إلى كبير، كنسبة ي كـ إلى ي ل، ونجعل نسبة ا ب إلى ا م – المخرج على استقامته من جهة ا – كنسبة كـ ل إلى ي كـ، فيكون نسبة ي كـ إلى ي ل كنسبة ا م إلى م ب. وأما أن يكون نسبة كبير إلى صغير، كنسبة ي ل إلى ي كـ، فإنا نجعل نسبة ا ب إلى ب م – المخرج على استقامته من جهة ب في الصورتين – الثالثة والرابعة – كنسبة كـ ل إلى كـ ي، فيكون أيضًا نسبة ا م إلى م ب كنسبة ي ل إلى ي كـ، ونخرج من نقطة م – في الصور الأربع – خطًا يماس دائرة د ه ز، وهو خط د م، ونصل خطي د ا د ب، فيقطعان الدائرة على ه ز، ونصل ه ز ونخرجه إلى جـ، فأقول: إن خط ه ز جـ مستقيم.







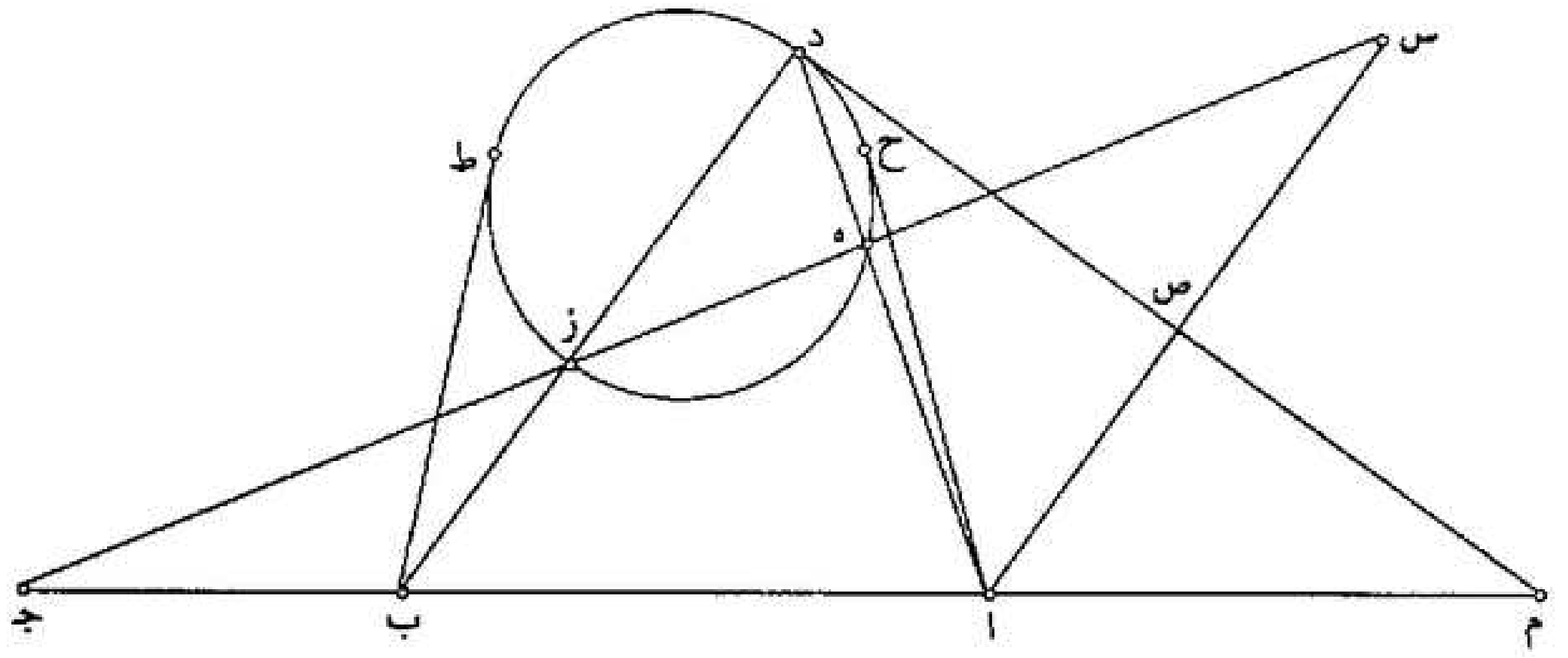


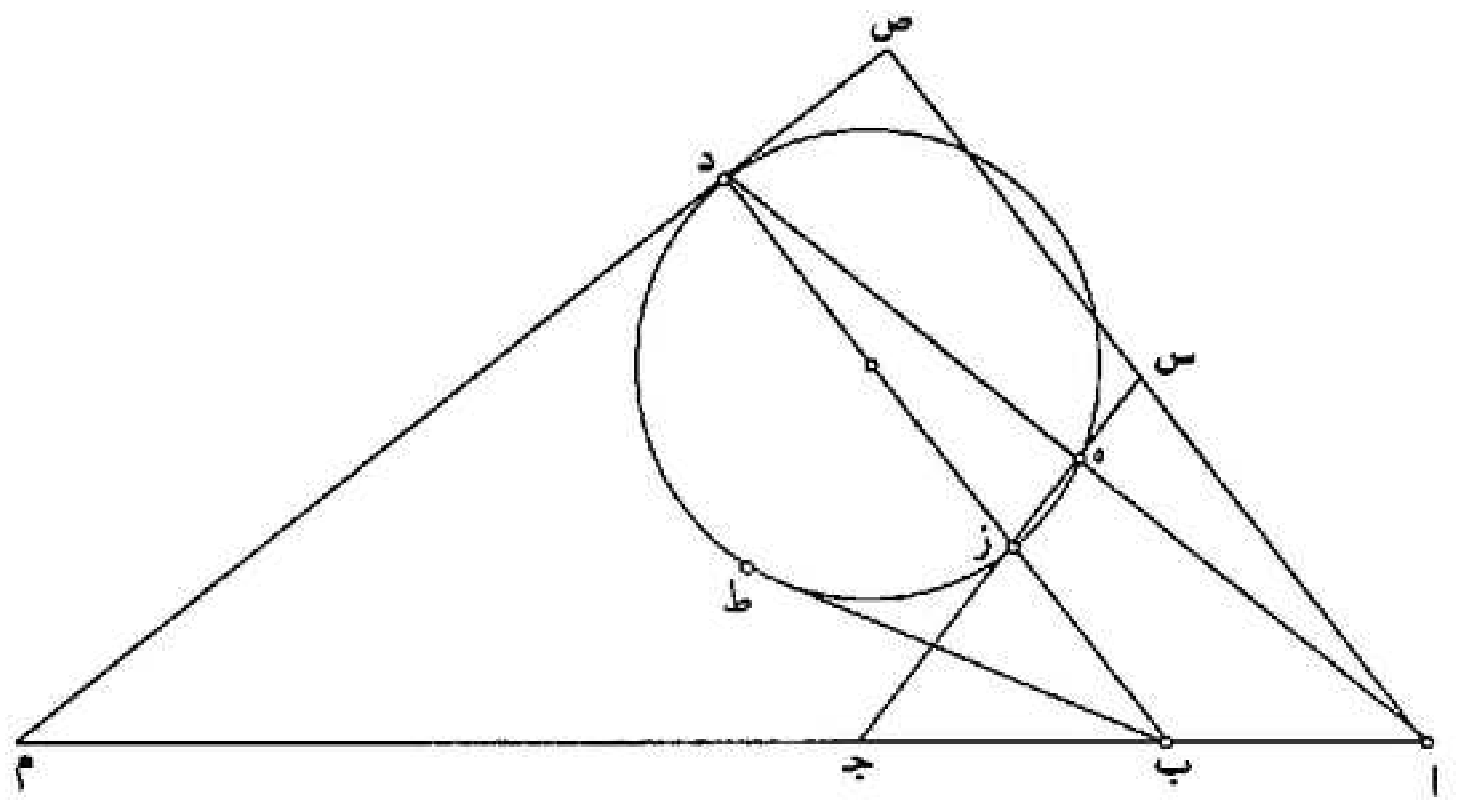
برهان ذلك: أن يخرج قطر د ن، ونصل خطي ن ه ن ز ونخرجهما على / استقامة، ١٢٤-ظ
ونخرج إليهما من نقطتي ا ب خطين موازيين لقطر د ن، فيلقيانهما على نقطتي س ع، ونخرج خط ب ع على استقامته إلى خط م د، فيلقاه على نقطة ف، ونخرج ب ق يوازي ه ز. فلأن نسبة ا م إلى م ب مؤلفة من نسبة مربع خط ا ح إلى خط ا جـ ومن ‹نسبة› خط ب جـ إلى مربع خط ب ط – وإذا كانت ستة أقدار نسبة الأول منها إلى الثاني مؤلفة من نسبة الثالث إلى الرابع ومن نسبة الخامس إلى السادس، فإنه يكون أيضًا نسبة الثالث منها إلى السادس مؤلفة من نسبة الأول إلى الثاني ومن نسبة الرابع إلى الخامس – تكون نسبة مربع خط ا ح إلى مربع ب ط مؤلفة من نسبة ا م إلى م ب ومن نسبة ا جـ إلى جـ ب. لكن مربع خط ا ح مثل ضرب ا د في ا ه، أعني ضرب س ا في ا ص لتشابه مثلثي ا ه س ا د ص، ومربع ب ط مثل ضرب د ب في ب ز، أعني ضرب ف ب في ب ع لتشابه مثلثي ف ب د ع ب ز، ونسبة السطح الذي يحيط به س ا ا ص إلى السطح الذي يحيط به ف ب ب ع مؤلفة من نسبة ص ا إلى ب ف ومن نسبة ا س إلى ب ع، ونسبة ص ا إلى ب ف كنسبة ا م إلى م ب، يبقى نسبة س ا إلى ب ع كنسبة ا جـ إلى جـ ب، لكن نسبة س ا إلى ب ع – إذا جعلنا د ن وسطًا بينهما – مؤلفة من نسبة س ا إلى د ن، أعني نسبة ا ه إلى ه د لتشابه مثلثي س ا ه د ه ن – ومن نسبة د ن إلى ع ب، أعني نسبة د ز
إلى ز ب لتشابه مثلثي د ز ن / ز ع ب، فنسبة ا جـ إلى ب جـ مؤلفة من نسبة ه ا إلى ١٢٥-و
د ه ومن نسبة د ز إلى ز ب. ففي قطاع د ا جـ المستقيم الخطين: نسبة ا جـ إلى ب جـ

10 ا د ص: ا ه ص – 17-18 ه ا إلى د ه: د ه إلى ه ا – 18 ا جـ: ا ب،

مؤلفة من نسبة ه ا إلى د ه ومن نسبة د ز إلى ز ب، فالخط الذي يصل بين نقطتي ه جـ ينتظم نقطة ز ويمر عليها مستقيمًا، فخطوط د ه ا د ز ب ه ز جـ مستقيمة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ثم إن اتفق أن يكون خط د ز ب يمر بمركز دائرة د ه ز، فإن البرهان سهل من أجل أنا نصل د ز ب د ه ا ه ز جـ، فنقول: إن خط ه ز جـ مستقيم.





برهانه: أنا نخرج خط ه ز على استقامته، ونخرج إليه من نقطة ا خطًا موازيًا لقطر د ز يلقاه على نقطة س. فلأن نسبة ا جـ إلى جـ ب كنسبة ا س إلى ز ب لتشابه مثلثي ا س جـ ز ب جـ – لكن نسبة ا س إلى ز ب، إذا جعلنا د ز وسطًا بينهما، مؤلفة من نسبة ا س إلى د ز، أعني نسبة ا ه إلى ه د، ومن نسبة د ز إلى ز ب – ففي قطاع د ا جـ المستقيم الخطين: نسبة ا جـ إلى جـ ب مؤلفة من نسبة ا ه إلى ه د ومن نسبة د ز إلى ز ب، فالخط الذي يصل بين نقطتي ه جـ ينتظم نقطة ز ويمرّ عليها مستقيمًا، فخط ه ز جـ مستقيم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

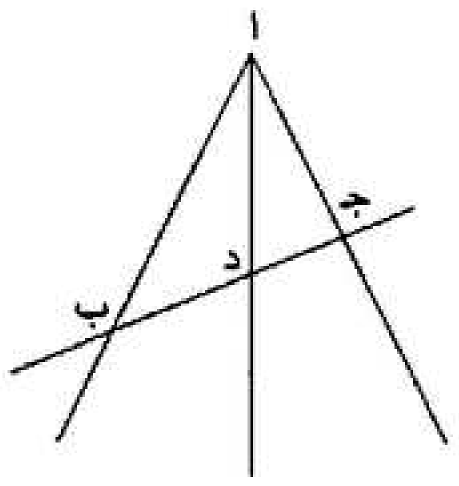
1 ه ا إلى د ه: د ه إلى ه ا – 7 د ز: د ن.

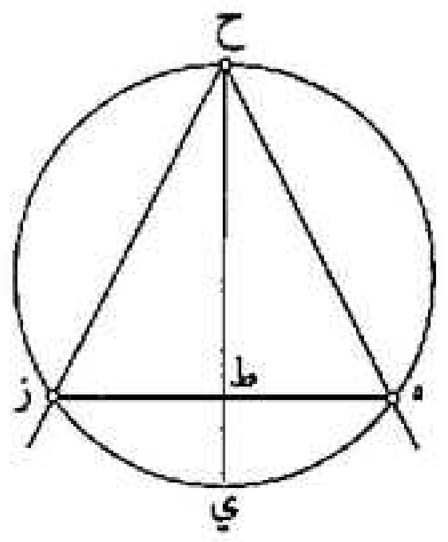
المسألة الأخرى

إذا فُرض زاويةٌ مستقيمة الخطين ونقطةٌ داخلها، على أن يقسمها الخطُّ الموصول بين النقطة وبين نهايتها بنصفين، وخطٌّ مستقيم، وقصدنا لإجازة خط مستقيم على النقطة حتى يوتّر الزاوية ويساوي الخطّ المفروض.

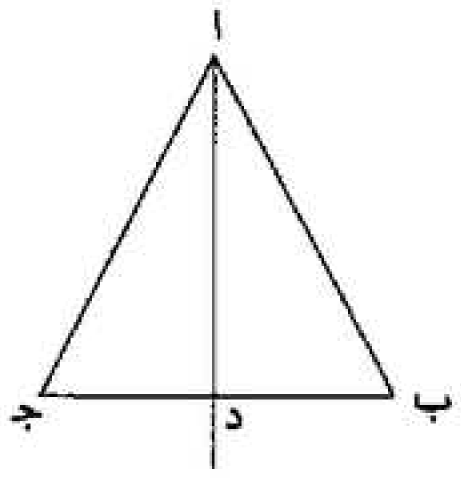
تركيبنا لتحليل أبي سعد العلاء بن سهل لهذه المسألة:

فلنفرض المعلومات زاوية ب ا جـ ونقطة د وخط ه ز، ونصل / ا د ونخط على خط ه ز قوسًا من دائرة يقبل زاوية مثل زاوية ب ا جـ، وهي قوس ه ي ز، ونتمم دائرة ه ح ز ي ونقسم ه ز بنصفين على ط، ونخرج قطر ح ط ي، فيكون معلومًا. لأنا نصل ه ح ح ز فزاوية ه ح ز معلومة، لأنها مثل زاوية ب ا جـ. وخط ه ز معلوم، فدائرة ه ح ز معلومة القدر والوضع، فخط ا د إما أن يكون مساويًا لخط ح ط أو أعظم أو أصغر. ١٢٥-ظ





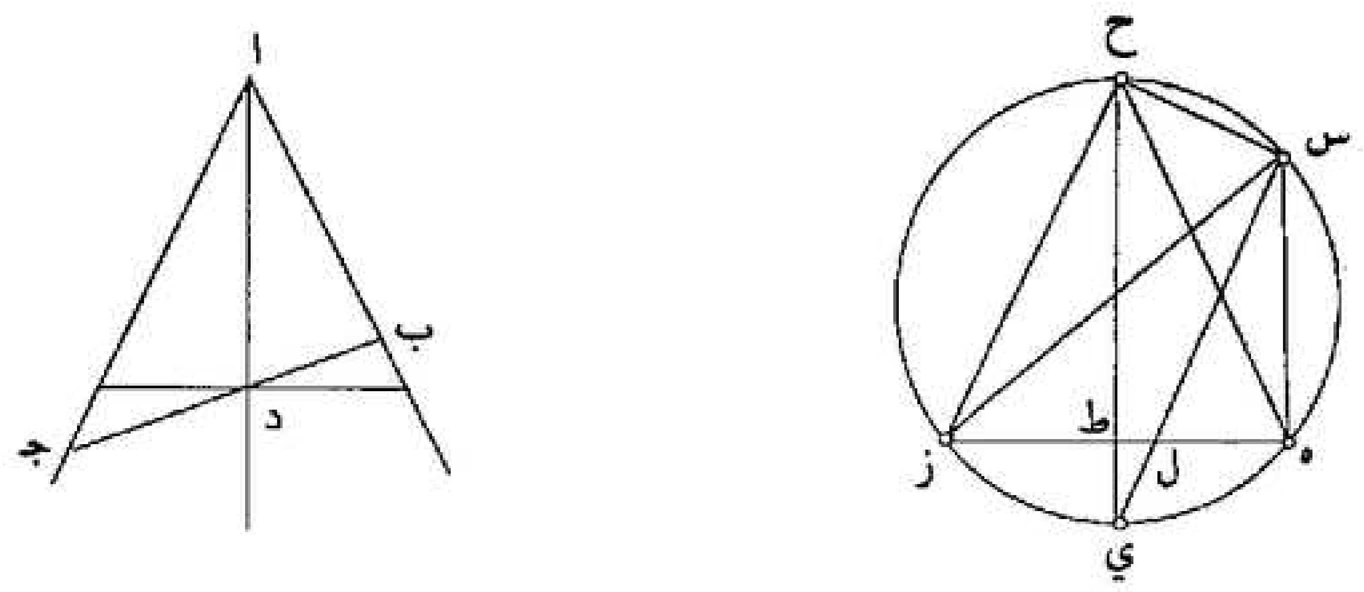
فإن اتفق أن يكون مساويًا له فإن وجود المطلوب سهل، وذلك أنا نجيز على نقطة د عمودًا على ا د وهو ب د جـ، فأقول: إن خط ب جـ مثل خط ه ز.



برهان ذلك: أن زاوية ب ا جـ من مثلث ا ب جـ مثل زاوية ه ح ز من مثلث ه ح ز، وعمود ا د على قاعدة ب جـ مثل عمود ح ط على قاعدة ه ز، فقاعدة ب جـ مثل قاعدة ه ز.

2 يقسمها: تقسمها – 7 ه ي ز: ه ح ي ز.

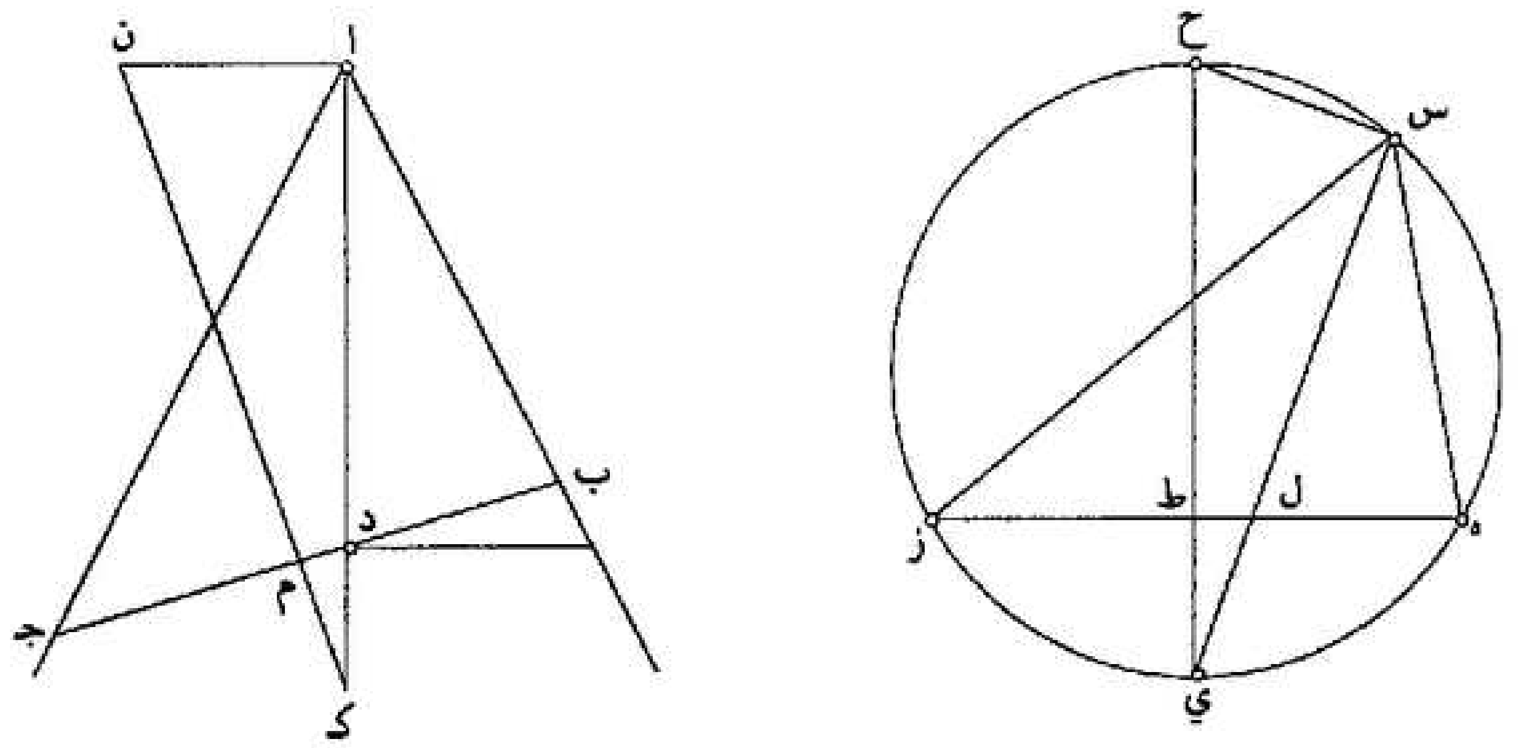
وإن اتفق أن يكون ا د أطول من ح ط، فأقول: إنه لا يمكن هنالك وجود المطلوب.



برهانه: أنه لا يمكن ذلك، فإن أمكن فليكن خط ب د جـ مثل خط ه ز، وخطا ا ب ا جـ إما أن يكونا متساويين أو مختلفين. فإن كانا متساويين فإن ا د عمود على ب جـ. ولأن زاوية ب ا جـ من مثلث ا ب جـ مساوية لزاوية ه ح ز من مثلث ه ز ح، وقاعدةَ ه ز مثلُ قاعدة ب جـ، فعمود ا د مثل عمود ح ط، وقد كان أطول منه، هذا خلف لا يمكن.

وإن كان خطا ب ا ا جـ مختلفين، فمعلوم أن قوس ه ي ز تقبل زاوية مثل زاوية ب ا جـ. وكل خط يخرج من نقطة ي إلى قوس ه ح، فإن قِسْمَه الذي يقع بين خط ه ط وقوس ه ح أبدًا أقصر من خط ح ط، مثل خط ي ل س، فإن ل س أبدًا أقصر من ح ط، فإذن خط ا د أبدًا أقصر من ح ط، إذا كان خطا ا ب ا جـ مختلفين، ومساوٍ له إذا كانا متساويين، ‹هذا خلف لا يمكن›.

وإن اتفق أن يكون ا د أقصر من ح ط، فأقول: إنه هنالك يوجد المطلوب.



7 ه ي ز: ه ح ز / تقبل: يقبل – 10 مختلفين: مختلفان – 11 متساويين: متساويان.

برهان ذلك: أنا نخرج ا د على استقامته إلى نقطة كـ، ونجعل ضرب اكـ في كـ د مثل ضرب ح ي في ي ط، على ما قدمنا عمله، ونخرج من نقطة ي وتر س ل ي مساويًا لخط اكـ، فمعلوم أنه يقطع وتر ه ط ويقع على قوس ه ح، من أجل أن ضرب ح ي في ي ط – أعني ضرب اكـ في / كـ د – مثل مربع ه ي، فـ اكـ أطول من ه ي [١٢٦-و] أبدًا، وهو أيضًا أقصر من ح ي أبدًا لما قدمنا بيانه أيضًا، فليقع مثل ي ل س، ونخرج من نقطة كـ خط كـ م ن يحيط مع خط اكـ بزاوية مثل زاوية ح ي س، ونخرج إليه من نقطة ا عمود ا ن على اكـ، ونصل ح س. فلأن زوايا مثلث ي ح س – القائم الزاوية – مساوية لزوايا مثلث اكـ ن – كل واحدة لنظيرتها – يكونان متشابهين، إلاّ أن اكـ مثل س ي، يكون أضلاعهما متساوية – كل واحد لنظيره – فالمثلثان متساويان. ومن أجل ذلك يكون د م مثلَ ل ط ود كـ مثلَ ي ل وا د مثلَ س ل. وزوايا مثلث س ه ل مساوية لزوايا مثلث ا ب د، وخط ا د مثل خط س ل، يكون ب د مثل ه ل، ويكون جميع ب جـ مثل ه ز؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

المسألة الأخرى:

إذا فرض سطح متوازي الأضلاع، وأردنا إخراج خط من نهاية إحدى زواياه إلى الخط المقابل لها المخرج على استقامةٍ ليلقاه، ويكون نسبة المثلث الحادث بين القطر المنفصل بالخط المطلوب والضلع المنقسم به إلى المثلث الحادث بين الخط المخرج على استقامة وبين الضلع المذكور معلومةً.

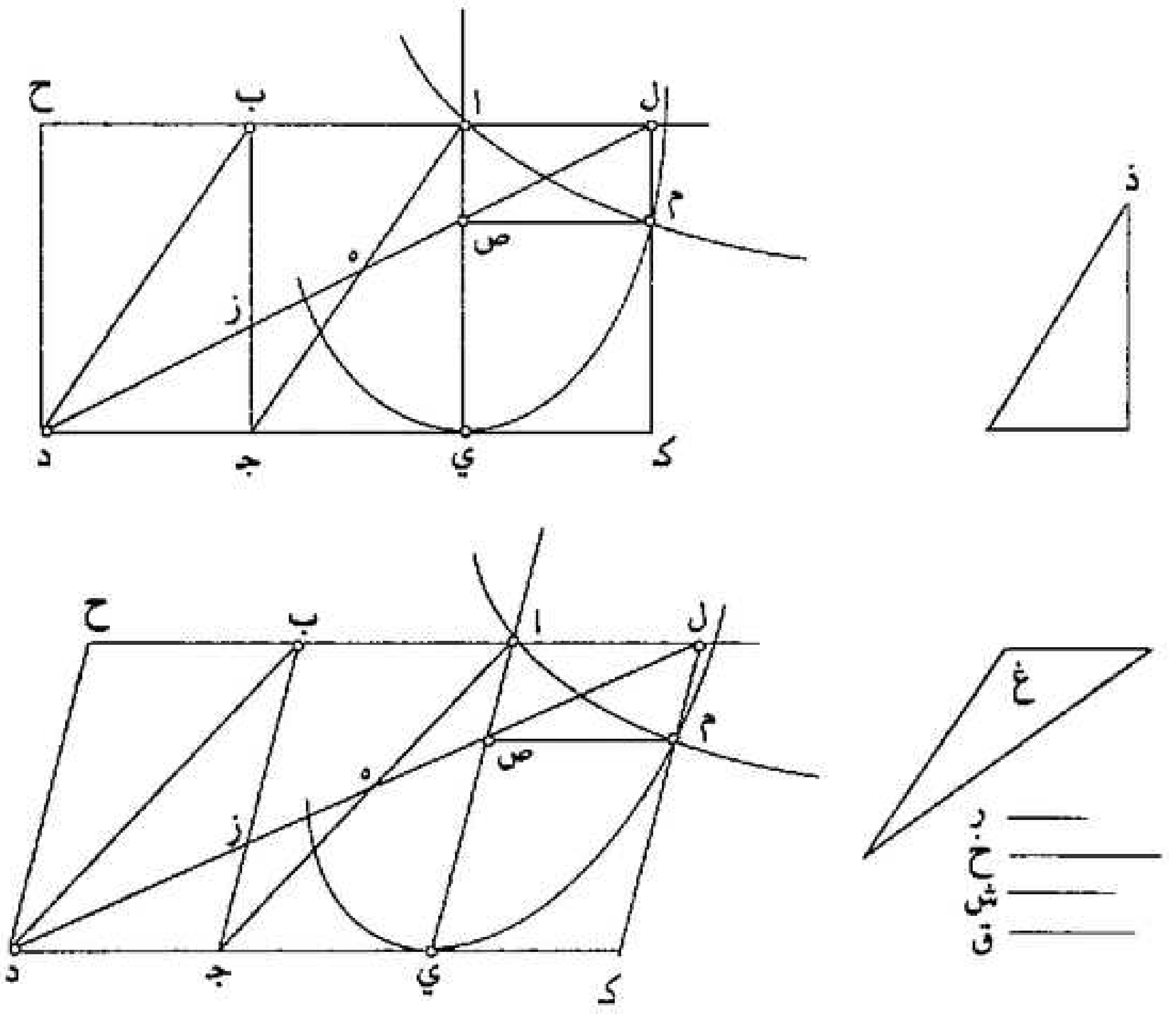
تركيبنا لتحليل أبي سعد العلاء بن سهل لهذه المسألة:

فليكن السطح المتوازي الأضلاع ا ب جـ د وقطره ب جـ، فإذا أردنا أن نعمل ما شرطناه فإنا نعمل زاوية ذ مساوية لزاوية ا جـ ب، وزاوية غ مساوية لزاوية ا جـ د. ونفصل من زاوية ذ مثلثًا – كيفما اتفق – بخط مستقيم يقطع الضلعين المحيطين بها، ونفصل من زاوية غ أيضًا مثلثًا بخط مستقيم يجوز على ساقيها، وليكن نسبة مثلث ذ إلى مثلث غ كالنسبة المفروضة، فمثلث غ معلوم وزاوية غ معلومة، فعلى ما قدمنا يكون نسبة ضرب الضلعين اللذين يحيطان بزاوية غ من مثلث غ إلى مثلث غ معلومة. فنجعل نسبة خط ز إلى خط ش كنسبة السطح الذي يحيط به الضلعان اللذان يحيطان بزاوية ذ من مثلث ذ

20 وزاوية: فزاوية.

إلى السطح الذي يحيط به الضلعان المحيطان بزاوية غ من مثلث غ. وليكن خط خ مثليْ خط ر، ونخرج من نقطتي ا د خطين موازيين لقطر ب جـ، ونخرج إليهما ضلعي ا ب جـ د، فيلقيانهما على نقطتي ي ح. فبيّنٌ أن كل واحد من خطي ب ح ي جـ مثلُ كل واحد من خطي ا ب جـ د. ونجعل نسبة خط ق إلى خط جـ د كنسبة ش إلى خ، فيصير خط ق معلومًا.

فإن كانت زاوية ا ب جـ قائمةً أو منفرجةً، فإنا نعمل في هذه الصورة قطعًا مكافئًا رأسه نقطة ي وضلعه القائم خط ق المعلوم وسهمه على استقامة ي ا وزاوية خط ترتيبه مساوية لزاوية ا ب جـ المعلومة، وهو قطع م ي، فهو / معلوم الوضع. ونجيز على نقطة ا ١٢٦-ظ قطعًا زائدًا لا يلقاه خطا ي د د ح، بل يقربانه دائمًا؛ فهو لا محالة يقطع القطع المكافئ، فليقطعه على نقطة م، ونخرج من نقطة م عمود م ل على استقامة خط ا ب، ونصل د ل يقطع قطر جـ ب على ز وضلع ا جـ على ه وخط ا ي على ص، فأقول: إن نسبة مثلث ه ز جـ إلى مثلث ا ل ه كالنسبة المفروضة.



برهان ذلك: أنا نخرج خط ل م على استقامته، ونخرج إليه خط د ي على استقامته حتى يلقاه على نقطة ك. فلأن نقطتي ا م على القطع الزائد وخطي ك د د ح اللذين لا

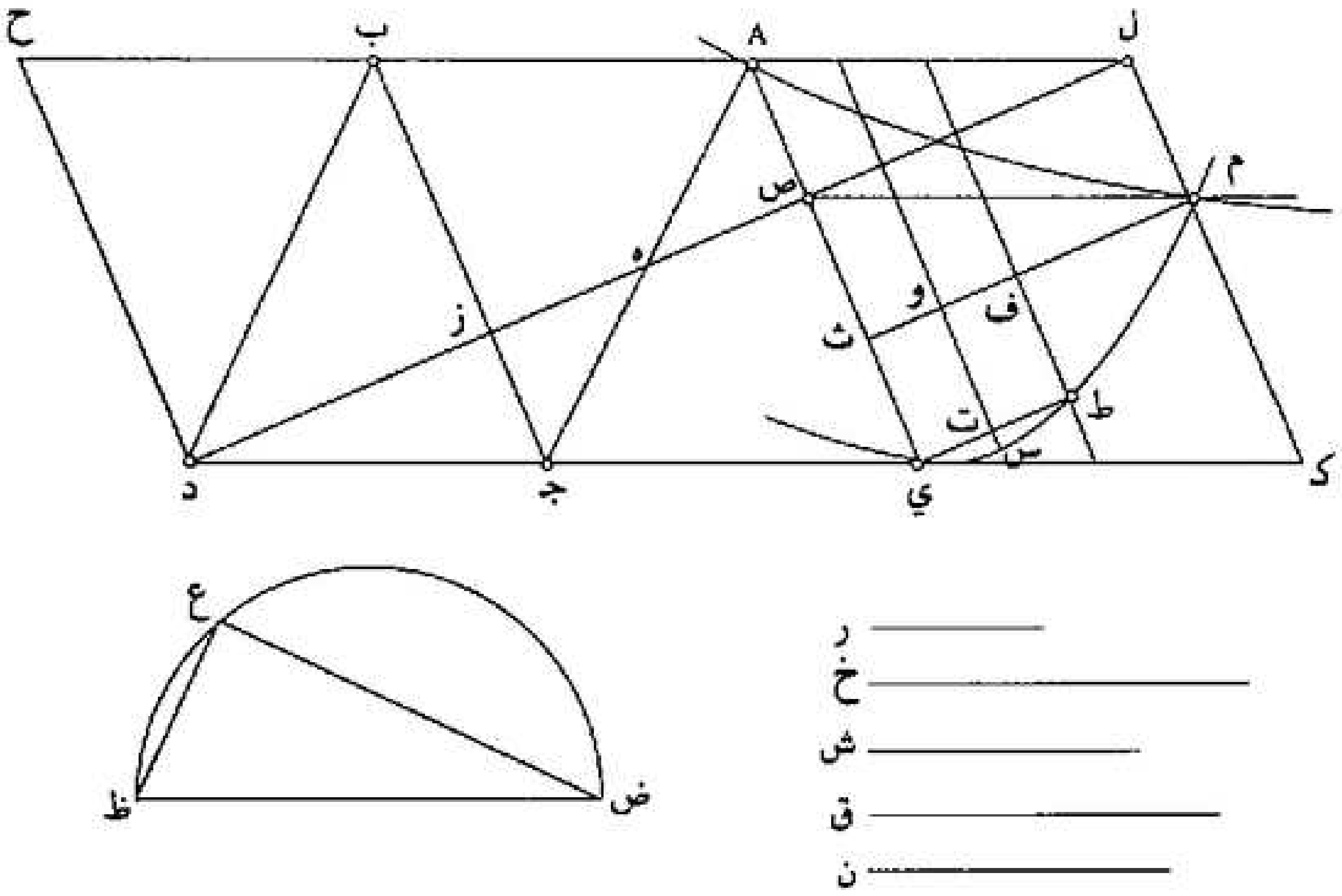
3 جـ د: جـ ز – 9 يلقاه: يلقيانه – 12 ه ز جـ: د ز جـ – 14 وخطي: وخطا.

يلقيانه وخطي كـ ل ا ي يوازيان خط د ح، يكون ضرب م كـ في كـ د مثلَ ضرب ا ي – أعني كـ ل – في ي د. فنسبة م كـ إلى كـ ل كنسبة د ي إلى د كـ، أعني نسبة ي ص إلى كـ ل، فخطا ي ص كـ م نسبتهما إلى خط كـ ل واحدة، فهما متساويان، فالخط الذي يصل بين نقطتي م ص يوازي ا ل. ولأن نسبة خط قَ إلى خط جـ د كنسبة شَ إلى خَ ونسبة خط قَ إلى جـ د كنسبة ‹سطح› خط قَ في ي ص إلى سطح جـ د في ي ص – إذا جعلنا ي ص ارتفاعًا مشتركًا لهما – وسطح خط قَ في ي ص مساوٍ لمربع خط م ص، أعني خط ا ل، فنسبة ‹سطح› خط جـ د في ي ص إلى مربع ا ل كنسبة خَ إلى شَ. وخط جـ د مثل خط ي جـ وجـ ز يوازي ي ص، فنسبة السطح الذي يحيط به خطا جـ د جـ ز إلى السطح الذي يحيط به خطا جـ د ي ص كنسبة جـ ز إلى ي ص، أعني نسبة رَ إلى خَ. يكون نسبة سطح جـ د في جـ ز إلى مربع ا ل كنسبة رَ إلى شَ. لكن نسبة سطح جـ د في جـ ز إلى مربع ا ل مؤلفة من نسبة جـ د إلى ا ل، أعني نسبة جـ ه إلى ه ا، ومن نسبة جـ ز إلى ا ل. لكن النسبة المؤلفة من نسبة جـ ه إلى ه ا ومن نسبة جـ ز إلى ا ل هي نسبة ضرب جـ ز في جـ ه إلى ضرب ه ا في ا ل، يكون نسبة رَ إلى شَ كنسبة ضرب جـ ز في جـ ه إلى ضرب ه ا في ا ل. لكن نسبة رَ إلى شَ ‹هي نسبة› ضرب / الضلعين اللذين يحيطان بزاوية ذَ من مثلث ذَ أحدهما في ١٢٧-و الآخر إلى ضرب الضلعين اللذين يحيطان بزاوية غَ من مثلث غَ أحدهما في الآخر. وزاوية ذَ مثل زاوية ا جـ ب، وزاوية غَ مثل زاوية جـ ا ل، فعلى ما قدمنا من المقدمات تكون نسبة مثلث ذَ إلى مثلث غَ كنسبة مثلث جـ ز ه إلى مثلث ل ا ه. ولكن نسبة مثلث ذَ إلى مثلث غَ هي النسبة المفروضة، فنسبة مثلث جـ ز ه إلى مثلث ه ا ل كالنسبة المفروضة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وإن كانت زاوية ا ب جـ حادةً، فإنا نعمل ما عملنا في أول الشكل المتقدم بعينه حتى يصير لنا خط قَ معلومًا، ثم نخط نصف دائرة على قطر ض ظ ونخرج فيه وتر ظ ع يحيط مع قطر ض ظ بزاوية مثل زاوية ا ب جـ، ونصل ض ع، ونجعل نسبة خط قَ إلى خط نَ كنسبة مربع ض ظ إلى مربع ض ع، فيصير خط نَ معلومًا. ونخرج من نقطة يَ عمودًا على ي ا، ونجعل نسبة عمود ي ط إلى خط نَ كنسبة ظ ع إلى ض ع، ونقسم عمود ي ط بنصفين على نقطة تَ، ونجعل نسبة ي تَ إلى تَ س – الموازي

1 وخطي: وخطا – 9 جـ ز: د ز – 18 جـ ز ه: جـ ز د – 19 جـ ز ه: جـ ز د.

لـ ا ي – كنسبة خط ن إلى ي ت. ونعمل قطعًا مكافئًا رأسه نقطة س وضلعه القائم خط ن وسهمه على استقامة س ت وزاوية خط ترتيبه قائمة، وهو قطع س م، فهو يمرّ على نقطة ط لأن ضرب ن – الضلع القائم – في ت س مساوٍ لمربع ت ط. ونجيز على نقطة ا قطعًا زائدًا لا يلقاه خطا ي د د ح، بل يقربانه دائمًا، فهو لا محالة يقطع القطع المكافئ، فليقطعه على م، ونجيز على نقطة م خط ل م ك موازيًا لـ ا ي، ونخرج إليه خطي ح ا د ي على استقامتهما، فيلقيانه على نقطتي ك ل. ونصل خط د ز ه ص ل مستقيمًا، فأقول: إن نسبة مثلث جـ ز ه إلى مثلث ه ا ل كالنسبة المفروضة.



برهان ذلك: أنا نبيّن بمثل ما بينا في الشكل المتقدم بعينه أن خط م ل مساوٍ لخط / ا ص وأن خط م ص موازٍ لـ ا ل. ونخرج من نقطة م عمود م ث على ا ي، ونخرج إليه ١٢٧-ظ
خط ت س على استقامةٍ حتى يلقاه على و. ونجعل ف و مثل و ث. فلأن ضرب خط ن – الضلع القائم لقطع س م المكافئ – في س و – قطره المجانب – مثل مربع م و – لكن ضرب ن في س و مثل ضربه في س ت وفي ت و، ومربع م و مثل مربعي م ف ف و وضرب م ف في ف و مرتين، لكن ضرب خط ن في س ت مثل مربع ت ي، أعني مربع ف و، يبقى ضرب ن في ت و، أعني ي ث، مساويًا لضرب ف و في ف م مرتين مع مربع ف م، أعني ضرب ث م في م ف – فضرب ن في ي ث مثل ضرب ث م في م ف. وقد جعلنا نسبة عمود ي ط، أعني ف ث المساوي له، إلى خط ن كنسبة ظ ع إلى ض ع، أعني كنسبة ص ث إلى ث م. يكون ضرب ن في ص ث مثل

2 خط ترتيبه: لخط ترتيب – 4 يلقاه: يلقيانه – 6 فيلقيانه: فيلقيانهما – 7 جـ ز ه: جـ ز د – 9 موازٍ: يوازي – 17 ص ث (الأولى): ض ع / ص ث (الثانية): ع ض.

ضرب م ث في ث ف. وقد كان ضرب ن في ي ث مثل ضرب م ث في م ف، يكون ضرب ن في ي ص مثل مربع م ث. وكنا جعلنا نسبة خط ق إلى خط ن كنسبة مربع ض ظ إلى مربع ض ع، ونسبة خط ق إلى خط ن – إذا جعلنا ي ص ارتفاعًا مشتركًا – كنسبة سطح ق في ي ص إلى سطح ن في ي ص. ونسبة مربع ظ ض إلى مربع ض ع كنسبة مربع ص م إلى مربع م ث [وعلى النسبة ب ل]. فنسبة سطح ق في ص ي إلى مربع ص م كنسبة سطح ن في ي ص إلى مربع م ث. وسطح ن في ي ص مساوٍ لمربع م ث، فيكون سطح ق في ي ص مثل مربع م ص. فإذْ قد تبيّن لنا أن سطح ق في ي ص مثل مربع م ص، فإنا إذا اتّبعناه ما قلنا في الشكل المتقدم بعينه، أدّانا ذلك إلى المطلوب؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وقد ذكر أبو سعد العلاء بن سهل في آخر تحليله لهذا الشكل ما أحكيه بنفس ألفاظه، وهذه ألفاظه بعينها:

فأما كيف اطراد المعرفة الرياضية بإعطاء نسبة ما بين مثلثي د جـ ز ل ا ه، فلا سبيل لاتجاه العقول إلى بلوغ استخراجه بتحليل ولا اكتساب مقدمة؛ ولو وجدنا مساغًا يوصلنا إلى نيله، لزمنا بسببه إلى علم ما شذ حتى تبع.

لكنه ما بقي لمستهزئ إلاّ وقلّل ببراعة النظر في التعاليم سعي متظاهر فيما يهدي إلى استفادته بإطنابٍ وعنّ ظاهرٍ عما يؤدي إليه الإلحاح فيه، فلنمسك عن تعدي هذه الغاية. هذه ألفاظه بعينها.

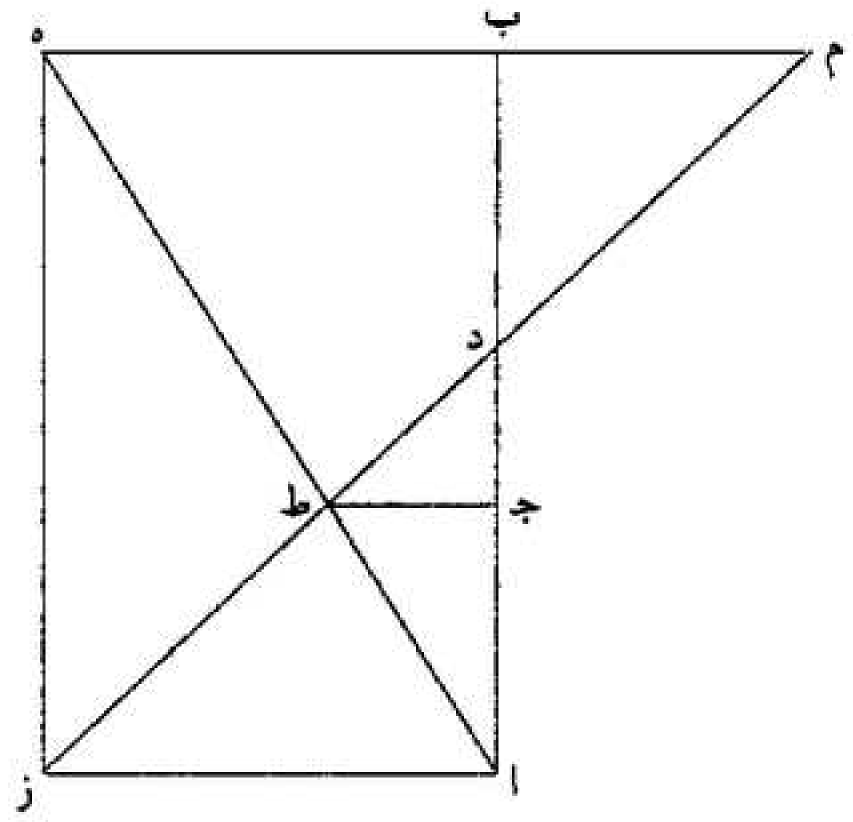
وأنا في أصدق حيرة من هذا الرجل، لا أدري كيف أفضى التعجب منه مع قوته في هذه التعاليم وإمعانه في استخراج غوامضها؛ كيف تعذّر عليه هذا حتى استبعده وحسن الظن بنفسه فيما اعتقده، وكيف حكم / فيما تعذّر عليه أنه لا يمكن الوصول لأحد إليه، ١٢٨-و
ولم يعلم أن بين هذين المثلثين نسبة ما ويمكن الوصول إلى استخراجها، وإذا تعذر ذلك على أحد تيسّر على آخر. لكني أحمل ذلك منه على ما يذكره هو بنفسه في أثناء كلامه في رسالته هذه من حداثة سنه وإعجابه بنفسه في جميع ما يأتي به وما يتكلفه من خيلائه في كل فصل من كلامه نعوذ بالله من ادعاء ما لا نعلم ونسأله التوفيق لما نعلم.

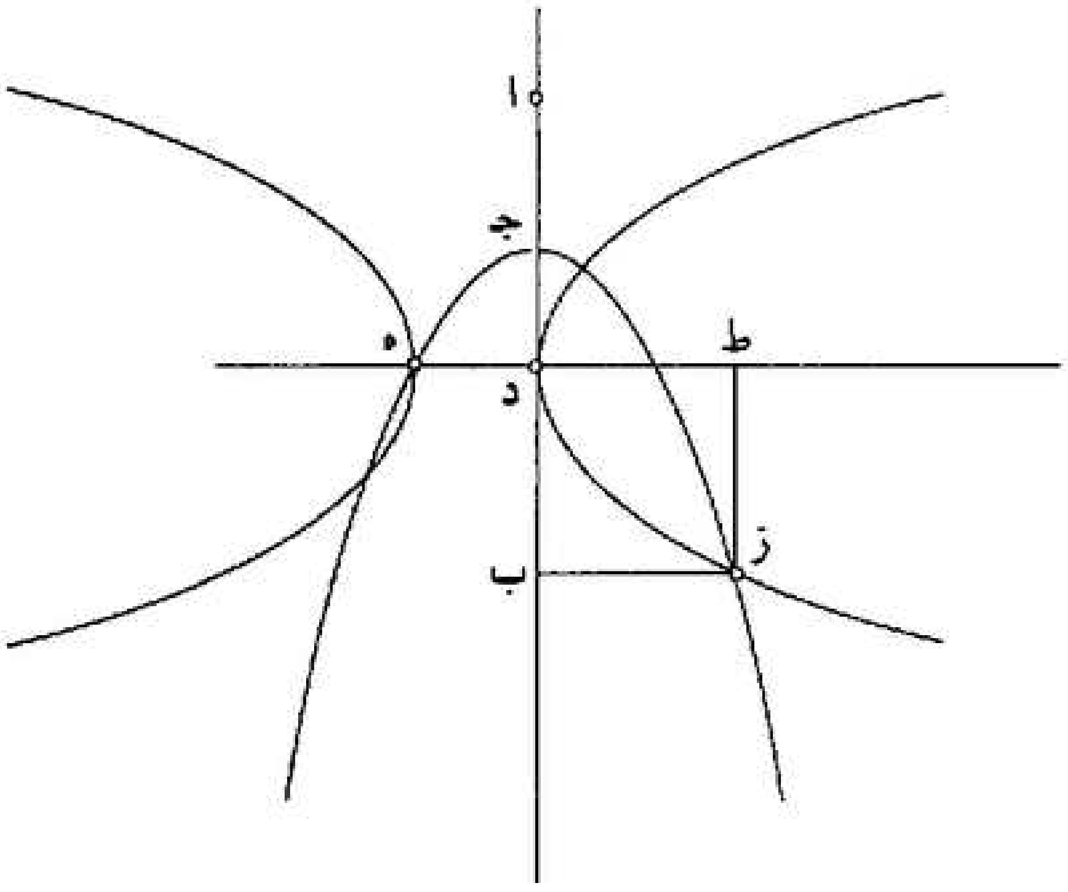
11-10 بنفس ألفاظه: وردت هكذا، والأفصح «بألفاظه نفسها»، لأن نفس جاءت للتوكيد – 13 يوصلنا: توصلنا – 14 بسببه: بسببابه / تبع: قد تقرأ «سبع» – 15 ما بقي: قد تقرأ «يلقى» / وقلّل: وقل – 16 إليه: الى / تعدي: بعدى – 18 حيرة: خبره.

أقول: إنه إذا كان سطح ا ب جـ د مربعًا، وكانت نسبة المثلثين نسبة المثل فإنه هو الشكل الذي قدمه أرشميدس بعينه لعمل المسبع وسلك فيه أبو سهل ويْجن بن رستم الكوهي طريق تقسيم الخط بثلاثة أقسام على النسبة التي تقع فيه.

ثم إذا كانت نسبة المثلثين نسبة الخلاف فإن بالشكل الذي عمله أبو سهل ينقسم الخط على النسبة المذكورة ويسهل وجود المطلوب.

مثال ذلك: أنا نثبت ما عمله أبو سهل في مقدمته للمسبع، فنفرض خطًا مستقيمًا عليه جـ د، وعمود د ه عليه مساويًا له، ونعمل قطعًا مكافئًا رأسه نقطة جـ وضلعه القائم د ه وسهمه على استقامة جـ د، وليكن قطع جـ ز، وقطعًا زائدًا رأسه نقطة د وقطره المجانب – وهو سهمه – د ه وضلعه القائم مثل قطره المجانب، فهو لا محالة يقطع قطع جـ ز المكافئ، فليقطعه على ز، وهو قطع د ز. ونرسل من نقطة ز عمودي ز ب ز ط على جـ د ود ه المخرجين، ونزيد في جـ د ا جـ مثل ب ز. فلأن ضرب جـ ب في جـ د مثل مربع ز ب، أعني مربع ا جـ المساوي له، وضرب ه ط في ط د، أعني ضرب ا د في ا جـ مثل مربع ط ز، أعني مربع د ب، فمعلوم أنا إذا فرضنا سطحًا متوازي الأضلاع عليه ا ب ه ز وقطره ا ه، وقسمنا ضلعه ا ب على نسبة أقسام خط ا ب من هذا الشكل الذي قدمنا، ووصلنا خط ز ط د م مستقيمًا، كان مثلث ا ط ز مساويًا لمثلث ب م د.





ولأن أبا سهل قد احتاج في هذا الشكل إلى أن يكون نسبة المثلثين نسبة المثل، جعل الضلع القائم من القطع الزائد مثل القطر المجانب منه. ثم إذا كانت نسبة المثلثين نسبة الخلاف – فنجعلها نسبة كـ إلى ل – فإنا نعمل ما عملنا في هذا الشكل بعينه، إلاّ أنا

2 رستم: وستم – 3 تقع: يقع – 8 د ه: ب ز – 11 جـ د (الأولى): جـ ه – 13 ا جـ: د جـ – 16 جعل: فجعل.

نجعل نسبة خط معلوم – وليكن ح – إلى خط د ه كنسبة ك إلى ل، ونعمل القطع الزائد الذي عملنا، ونجعل ضلعه القائم خط ح، فيكون ضرب ب جـ في جـ د / مثل ١٢٨-ظ مربع ا جـ. ونسبة مربع ب د إلى ضرب ا د في ا جـ كنسبة الضلع القائم إلى القطر المجانب، أعني كنسبة خط ح إلى خط د ه، أعني كنسبة ك إلى ل. ثم إذا قسمنا خط ا ب في المتوازي ‹الأضلاع› على نسبة هذه الأقسام على نقطتي جـ د، ووصلنا خط ز ط د م كان مستقيمًا، وكانت نسبة مثلث ب م د إلى مثلث ا ز ط كنسبة ك إلى ل.

برهان ذلك: أن مربع ا جـ مثل ضرب ب جـ في جـ د، فنسبة ب جـ إلى ا جـ كنسبة ا جـ إلى جـ د، وبالتركيب نسبة ا ب إلى ا جـ كنسبة ا د إلى جـ د. لكن نسبة ا ب إلى ا جـ كنسبة ب ه إلى جـ ط، فنسبة ا د إلى جـ د كنسبة ب ه – أعني ا ز – إلى جـ ط. وا ز يوازي جـ ط، فخط ز ط د خط واحد مستقيم، وكذلك جميع خط ز ط د م خط واحد مستقيم. وأيضًا نسبة مربع ب د إلى ضرب ا د في ا جـ كنسبة ك إلى ل. وهذه النسبة مؤلفة من نسبة ب د إلى ا د ومن نسبة ب د إلى ا جـ. فالنسبة المؤلفة من نسبة ب د إلى ا د ومن نسبة ب د إلى ا جـ كنسبة خط ك إلى خط ل. فأما نسبة ب د إلى ا د فكنسبة ب م إلى ا ز. وأما نسبة ب د إلى ا جـ فكنسبة م د إلى ط ز، من أجل أن نسبة ب د إلى د م كنسبة ا د إلى د ز، أعني كنسبة ا جـ إلى ط ز. وإذا بدلنا كانت نسبة ب د إلى ا جـ كنسبة م د إلى ط ز. فالنسبة المؤلفة من نسبة ب م إلى ا ز ومن نسبة م د إلى ط ز كنسبة ك إلى ل. والنسبة المؤلفة من نسبة ب م إلى ا ز ومن نسبة م د إلى ط ز كنسبة مثلث ب م د إلى مثلث ا ط ز. فنسبة مثلث ب م د إلى مثلث ا ط ز كنسبة ك إلى ل المفروضة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فقد أعطينا من النسبة بين المثلثين المذكورين ما قال أبو سعد إنه يبعد، وبرهنا عليه ببرهان يقنع، وأنا أسأل الشيخ الفاضل الأستاذ أطال الله بقاءه أن يتفضل بتأمل ما ألقيت إليه، ويصير إليّ من جميع ما يكون منه في ذلك على علم لأسكن إلى ذلك، ويستخدمني فيما يستصلحني له إن شاء الله تعالى، والحمد لله حق حمده والصلاة على محمد نبيه وعبده وآله وأصحابه.

تمّ في يوم الاثنين الخامس عشر من جمادى الأولى لسنة ثلاث وخمسين ومائة وألف.

2 جـ د: جـ ز – 5 نقطتي: نقطة – 6 ب م د: ا ز ط / ا ز ط: ب م د – 9 جـ د: جـ ز.

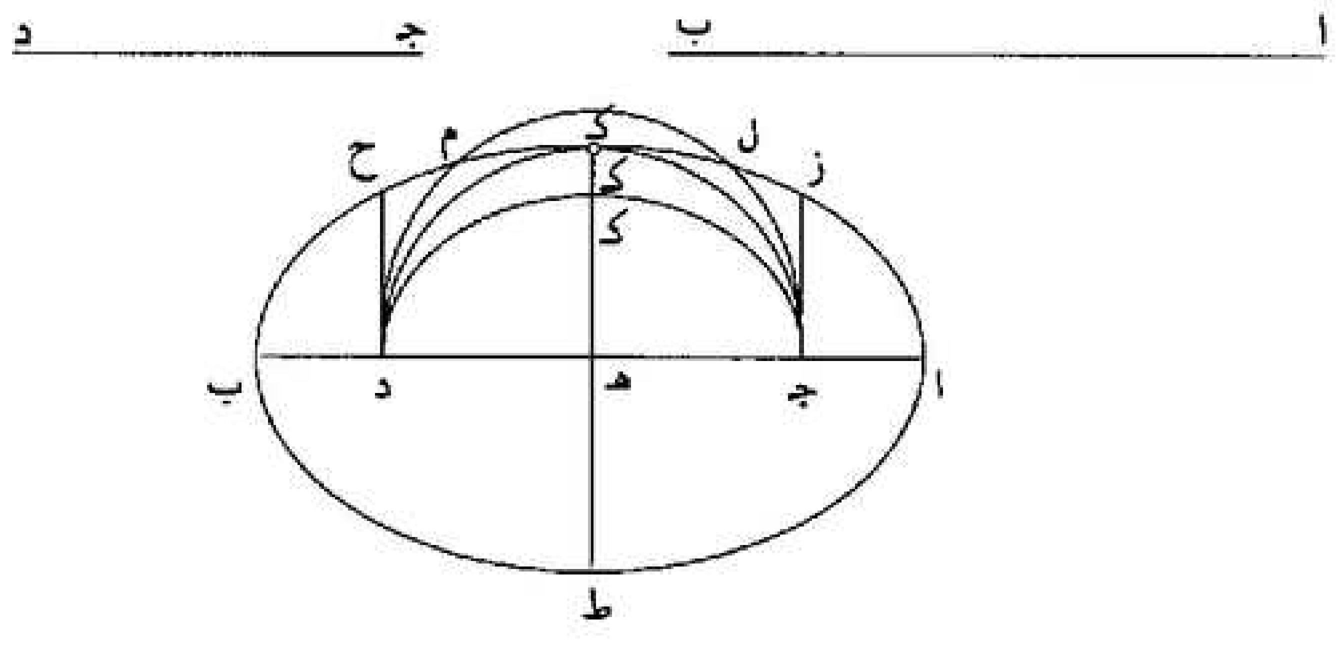
مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz
منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

‹فقرة لابن سهل في عمل مثلث بالقطع الناقص والدائرة›

للعلاء بن سهل: خطا ا ب جـ د المستقيمان مختلفان وا ب أطولهما. ونريد أن نعمل ا-٣٧-ظ ب-٣٦-ظ
منهما مثلثًا حادّ الزوايا. فلنركّب الخط ‹الأصغر› على وسط الخط الأعظم، ولنجعل ا د في د ب يعدل مربع هـ كـ. ونقيم كـ هـ ط على نصف خط ا ب، ونعمل على قطري ا ب ط كـ قطعًا ناقصًا، عليه ا كـ ب ط. وندير على قطر جـ د نصف دائرة جـ كـ د. فإمّا أن يماسّ القطع، وإمّا أن يقطعه، وإمّا أن يقع داخل القطع. ونخرج عمودي جـ ز د ح على ا ب.

فإن وقع نصف الدائرة داخل القطع، فإن الخطين المخرجين من نقطتي جـ د إلى خط ز كـ ح / من محيط القطع الناقص يحيطان بزاوية حادّة، وتكون الزاويتان اللتان على ا-٣٨-و
جنبتي جـ د حادّتين، ويكون مجموع الخطين يعدل خط ا ب الأطول المعطى. فقد عملنا ما أردنا.

وإن ماسّ القطع الناقص على نقطة كـ، فالخطان المخرجان من نقطتي جـ د إلى خط ز كـ ح، سوى نقطة كـ، يحيطان بزاوية حادّة،/ والزاويتان الباقيتان حادّتان. ب-٣٧-و



1 خطا: خطي [ا، ب] / المستقيمان: المستقيمين [ا، ب] – 3 هـ كـ: هـ ل [ا، ب] / خط: خطا [ب] – 4 ط كـ: ط ل [ا، ب] – 5 أن: مكررة [ب] / يماسّ: مماس [ا، ب] / يقطعه: نقطه [ب] – 8 ز كـ ح: د كـ حـ [ا] د [ب] / الزاويتان اللتان: الزاويتين اللتين [ا، ب] – 9 حادّتين: حادتان [ا، ب] / يعدل: يعدلان [ا، ب] / خط: خطى [ب] / فقد: وقد [ب] – 11 كـ: ل [ا، ب] / فالخطان المخرجان: فالخطين المخرجين [ا، ب] – 12 كـ: ل [ا، ب] / والزاويتان الباقيتان: والزاويتين الباقيتين [ا، ب].

وإن قطعه على نقطتي ل م، فالخطان المخرجان من نقطتي جـ د إلى خطي ز ل م ح يحيطان بزاوية حادّة، وتكون الزاويتان الباقيتان حادّتين، ويكون مجموعهما، أعني الخطين المخرجين من نقطتي جـ د، يعدل ‹خط ا ب. فقد عملنا من› خطي ا ب جـ د مثلثًا حادّ الزوايا؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

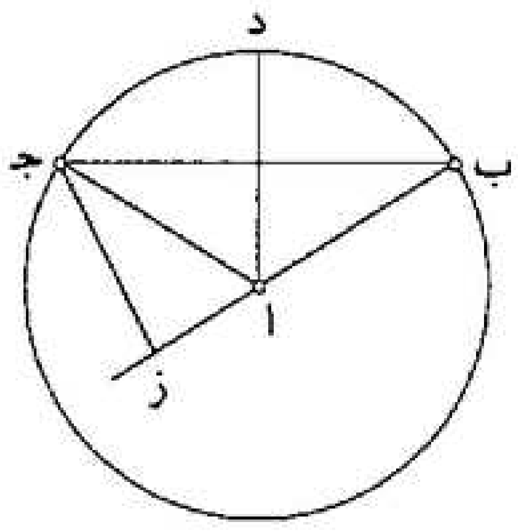
1 فالخطان المخرجان: فالخطين المخرجين [ا، ب] – 2 حادّتين: حادتان [ا، ب] – 3 يعدل: يعدلان [ا، ب].

‹مسألة هندسية لابن سهل›

ا-٣٧-و
ب-٣٥-ظ

استخراج العلاء بن سهل. دائرة ب جـ قد فرض منها قطعة ب د جـ مساوية لقطاع ب ا د.

أقول: إن قوس د جـ مساوية لجيب قوس ب د جـ، أعني خط جـ ز.



برهانه: أن نصل ا جـ. وقد بُيّن أن ضرب ب ا في قوس ب جـ مساوٍ لضعف قطاع ا ب د جـ، أعني ضعف قطاع ب ا د وضعف مثلث ب ا جـ. وضعف قطاع ب ا د مساوٍ لضرب ا ب في قوس ب د، وضعف مثلث ا ب جـ مساوٍ لضرب ب ا في ز جـ، فضرب ا ب في قوس ب جـ – أعني قوسي ب د د جـ – مساوٍ لضرب ب ا في قوس ب د وضرب ب ا في خط ز جـ؛ ونسقط ضرب ا ب في قوس ب د المشتركَ، فيبقى ضرب ا ب في ز جـ مساويًا لضرب ا ب في قوس د جـ، فقوس د جـ مساوية لخط ز جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

5 ضعف (الثانية): فوق السطر [ا] – 6 ز جـ: ب جـ [ب] – 7 ا ب: ناقصة [ب].

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

١٦٢

بسم الله الرحمن الرحيم
ربّ أعن

رسالة ويجن بن رستم المعروف بأبي سهل القوهي

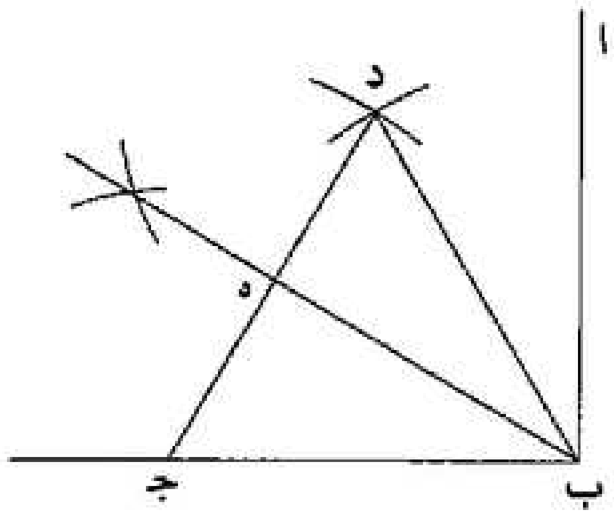
في استخراج قسمة الزاوية المعلومة بثلاثة أقسام متساوية

أما من إحدى المسائل المعروفة عند أصحاب التعاليم، والمذكورة عند قدمائهم، التي يُعجِبون باستخراجها، فهي قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية ببرهان هندسي. وعجبُ أصحاب التعاليم بعلم الهندسة أكثرُ من عجبهم بغيرها من العلوم، وكذلك افتخار الفلاسفة بعلوم أصحاب التعاليم أكثرُ من افتخارهم بعلوم غيرهم لحسنها وصحتِها، وبعدِها عن الوهم، والبراهين التي عليها، وقلةِ تعلقها بالأديان والملك، وزهدِها بالبيان واللغة، حتى لا تزول بزوال الذي يتعلم اللغة، ولا تتغير بتغير اللسان، كعلم النحو. ولهذا بقاؤها على وجه الدهر أكثر من بقاء غيرها من العلوم؛ وقصدُ الملوك إلى تأليفها ونقلها وإصلاحها والنظر فيها أكثرُ من قصدهم إلى غيرها من العلوم. ولهذا السبب قصدتُ إليها وإلى قسمة الزاوية المعلومة بثلاثة أقسام متساوية بوجه آخر، فتهيأ، بدولة مولانا الملك، السيد الأجل المنصور، وليّ النعم، أبي الفوارس بن عضد الدولة وتاج الملة، أطال الله بقاءه، وأدام سلطانه، بطريق أقربَ وأحسنَ من طرق القدماء، ورأي أسهلَ وأصوبَ من رأيهم، لعبده ويجن بن رستم المعروف بأبي سهل القوهي. وأرجو أن يكون لها موقع على حسب ذكرها وهو هذا:

نريد أن نقسم زاوية $\overline{\text{ا ب جـ}}$ المعلومة، المستقيمة الخطين، بثلاثة أقسام متساوية.

5 من: إن [س] – 6 يعجبون: يعنون [س] / فهي: هي [ل، س] / ببرهان: ببراهين [س] – 7 هندسي: هندسية [ل، س] – 8 بعلوم (الأولى): بعلم [ل، س] – 12 وإصلاحها: وأخذها [س] / والنظر: والتسلي [س] – 13 فتهيأ: وتهيأ [ل] تهيأ [س].

فعلى التحليل، ننزل أن زاوية ا ب جـ ثلاثة أمثال زاوية ا ب د حتى تكون زاوية جـ ب د الباقية ثلثي زاوية ا ب جـ. وإن قسمنا زاوية جـ ب د بقسمين متساويين بخط ب ه، تكون زاوية ا ب جـ المعلومة مقسومة بثلاثة أقسام متساوية.



ونفرض أولاً أن زاوية ا ب جـ قائمة، فزاوية ا ب د ثلث قائمة، وزاوية د ب جـ مثلا زاوية ا ب د، فزاوية د ب جـ ثلث زاويتين قائمتين. ولكن ثلث زاويتين قائمتين مساوية لإحدى زوايا مثلث متساوي الأضلاع، لأن الزوايا الثلاث من كل مثلث مساوية لزاويتين قائمتين؛ فزاوية جـ ب د هي زاوية مثلث متساوي الأضلاع، فزاوية جـ ب د معلومة / ونقطة ب معلومة، فخط ب د معلوم الوضع، وكذلك خط ب ه؛ وذلك ما أردنا أن ١٦٣ نعلم.

تركيب ذلك: أن نُعَلم على خط ب جـ نقطةً، كيفما وقعت، ولتكن نقطة جـ. ونعمل على خط ب جـ مثلثًا متساوي الأضلاع، وهو مثلث ب جـ د، ونقسم زاوية جـ ب د بنصفين بخط ب ه، فأقول: إنا قد قسمنا زاوية ا ب جـ القائمة بثلاثة أقسام متساوية بخطي ب د ب هـ.

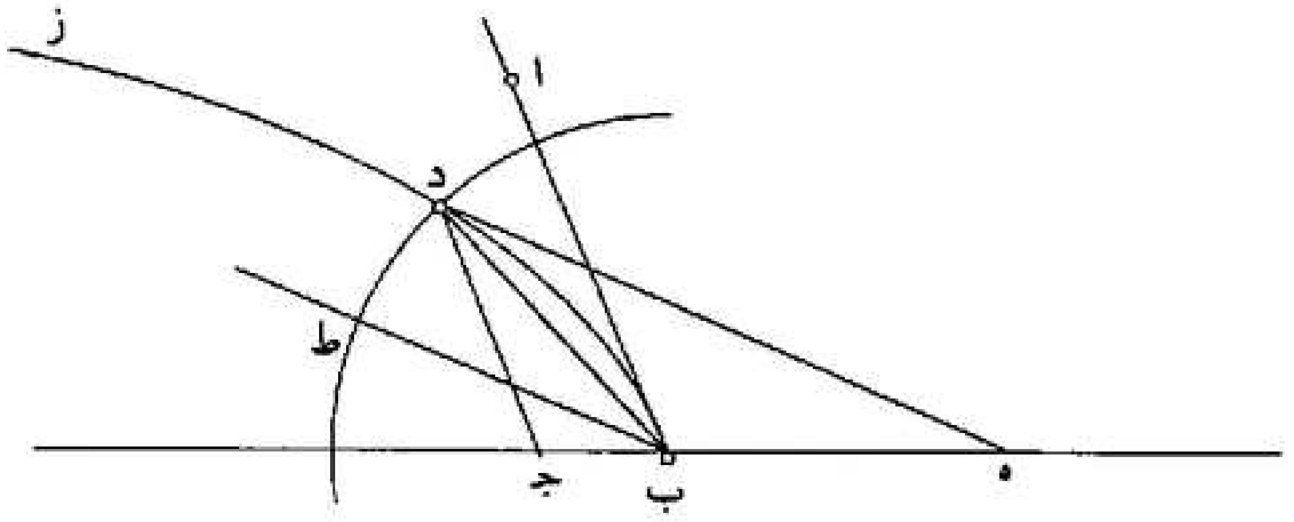
برهان ذلك: أن زاوية جـ ب د ثلث الزوايا الثلاث من مثلث ب جـ د، لأن مثلث ب جـ د متساوي الأضلاع، والزوايا الثلاث من كل مثلث مساوية للزاويتين القائمتين. فزاوية جـ ب د ثلث الزاويتين القائمتين، فهي ثلثا زاوية ا ب جـ القائمة؛ فكل واحدة من زوايا ا ب د د ب ه ه ب جـ ثلث زاوية ا ب جـ القائمة، فزاوية ا ب جـ القائمة قد قسمت بثلاثة أقسام متساوية بخطي ب د ب ه؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

3 تكون: تصير [س] / مقسومة: مقسوما [ل] – 4 مثلا: مثلي، ولن نشير إليها فيما بعد [ل] مثلاً [س] – 5 مساوية: يعني الزاوية التي هي ثلث زاويتين قائمتين؛ ولهذا أثبتناها كما هي ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 10 وقعت: وقع [ل، س] – 15 والزوايا: ولأن الزوايا [س] / للزاويتين القائمتين: لزاويتين قائمتين [س] – 16 واحدة: واحد [ل] – 17 ه ب جـ: جـ ب ه [س] – 18 قسمت: قسمنا [ل] / نبين: فوق السطر [ل].

نريد أن نقسم زاوية ا ب جـ المعلومة، التي ليست بقائمة، منفرجة هي كانت أو حادة، بثلاثة أقسام متساوية.

فعلى التحليل: ننزل أن زاوية ا ب جـ ثلاثة أمثال زاوية ا ب د حتى تكون زاوية جـ ب د الباقية ثلثي زاوية ا ب جـ. وإن قسمنا زاوية جـ ب د بقسمين متساويين، تكون زاوية ا ب جـ المعلومة مقسومةً بثلاثة أقسام متساوية. فنجعل خط د جـ موازيًا لخط ا ب، كيفما وقع، وخط ب ه، الذي على استقامة خط جـ ب، مساويًا لخط د ب، ونصل خط د ه. فزاوية د ب جـ الخارجة من مثلث د ب ه مساوية لزاويتي ب ه د ب د ه الداخلتين؛ وزاوية ب ه د مساوية لزاوية ب د ه، لأن خط ب ه مساوٍ لخط ب د؛ فزاوية جـ ب د مثلا زاوية ب ه د. ولكن زاوية جـ ب د مثلا زاوية ا ب د كما فرضنا في التحليل، فزاوية ب ه د مساوية لزاوية ا ب د. وزاوية ا ب د مساوية لزاوية ب د جـ لأنهما متبادلتان. فزاوية ب ه د من مثلث د جـ ه مساوية لزاوية ب د جـ من مثلث ب جـ د، وزاوية ب جـ د مشتركة بينهما، فالزاوية الباقية مساوية للزاوية الباقية، ومثلث جـ د ه شبيه بمثلث ب جـ د، فنسبة هـ جـ إلى جـ د كنسبة جـ د إلى جـ ب، / فضرب ه جـ في ١٦٤
جـ ب مساوٍ لمربع جـ د. فلهذا نقطة د على محيط القطع الزائد، الذي قطره المجانب خط ب ه، وضلعه القائم مساوٍ لقطر ب ه، وزاوية ترتيبه مساوية لزاوية ا ب جـ المعلومة، لأن خط د جـ موازٍ لخط ا ب. وإذا كان خط ب ه معلوم القدر، وهو معلوم الوضع، يكون محيط القطع الزائد معلوم الوضع. وأيضًا، لأن خط ب د مساوٍ لخط ب ه، المعلوم القدر، فنقطة د على محيط دائرة، مركزها نقطة ب، ونصف قطرها خط ب ه المعلوم القدر والوضع، فمحيط تلك الدائرة معلوم الوضع. فنقطة د معلومة، لأنها على الفصل المشترك بين خطين معلومي الوضع. ونقطة ب معلومة، فخروج خط ب د معلوم، وكذلك خط ب ط؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

1 هي: ناقصة [س] – 3 حتى تكون: فتكون [س] – 4 ا ب جـ: ا ب د [ل] – 9 ب ه د: ب د ه [س] – 10 التحليل: يعني بداية التحليل – 18 دائرة: الدائرة، ثم ضرب على «الـ» بالقلم [ل] – 19 معلوم: معلومه [ل] / معلومة: معلومة الوضع [س] / الفصل: فصل [ل] الحد [س] – 20 خطين: الخطين، ثم ضرب على «الـ» بالقلم [ل] / فخروج: فجميع [س]؛ لم نقابل استعمال هذا المصدر في هذا السياق من قبل، وربما كان هذا تحريفًا من الناسخ ولعلها في الأصل «فيكون». ولكنا آثرنا ترك النص كما هو / معلوم: معلومه [ل] – 20-21 وكذلك خط ب ط: أثبتها في الهامش [ل]، وربما قُصد بها أن خط ب ط سيكون أيضًا معلوم الوضع والقدر عند أخذنا دائرة ط د ه ومن ثم بعد تعريف نقطة ط / ب ط: جـ د [س].



تركيب ذلك: أن نُعَلم على استقامة خط جـ ب نقطة، كيفما وقعت، وهي نقطة ه، ونعمل على قطر ب ه قطعًا زائدًا، رأسه نقطة ب، وضلعه القائم مساوٍ لخط ب ه، الذي هو القطر المجانب له، وزاوية ترتيبه مساوية لزاوية ا ب جـ المعلومة. وليكن محيط القطع المعمول ب د ز. ونعمل على مركز ب وببعد ب ه دائرة، وليكن محيطها ط د ه، ونصل خط ب د، ونقسم زاوية د ب جـ بقسمين متساويين بخط ب ط؛ فأقول: إنا قسمنا زاوية ا ب جـ المعلومة بثلاثة أقسام متساوية بخطي ب د ب ط.

برهان ذلك: أنا نجعل خط د جـ خط ترتيب لقطر ب ه حتى يكون موازيًا لخط ا ب، ونصل خط د ه. ولأن خط ب ه القطر المجانب لقطع ب د ز الزائد، وخطَّ د جـ خط الترتيب له، فنسبة ضرب ه جـ في جـ ب إلى مربع خط جـ د كنسبة قطره المجانب إلى ضلعه القائم. وقطره المجانب مساوٍ لضلعه القائم، فضرب ه جـ في جـ ب مساوٍ لمربع جـ د. فلهذا نسبة ه جـ إلى جـ د، من مثلث / جـ د ه، كنسبة د جـ إلى جـ ب من ١٦٥
مثلث ب جـ ه. وزاوية د جـ ه مشتركة بين المثلثين جميعًا، فمثلث ه جـ د شبيه بمثلث ب جـ د، فزاوية جـ ه د مساوية لزاوية جـ د ب، وزاوية جـ د ب مساوية لزاوية ا ب د، لأنهما متبادلتان، فزاوية ب ه د مساوية لزاوية ا ب د.

وأيضًا، فإن زاوية جـ ب د الخارجة من مثلث ب د ه مساوية لزاويتي ب د ه ب ه د الداخلتين، وزاويتا ب د ه ب ه د متساويتان، لأن خطي ب د ب ه متساويان، فزاوية جـ ب د مثلا زاوية ب ه د. وزاوية ب ه د قد بينا أنها مساوية لزاوية ا ب د، فزاوية جـ ب د مثلا زاوية ا ب د، وهي مثلا كل واحدة من زاويتي جـ ب ط د ب ط، لأن زاوية جـ ب د مقسومة بقسمين متساويين بخط ب ط. فزوايا ا ب د د ب ط ط ب جـ

3 القطر: قطر [ل] قطره [س] / المعلومة: ناقصة [س] / محيط: محيطه [س] – 4 ونعمل: نعمل [س] – 7 أنا: إنا [س] – 8 القطر: قطر [ل] – 10 مساوٍ (الثانية): مساوى [ل] – 11 مثلث: المثلث [س] – 12 مثلث: المثلث [س] / ب جـ ه: ب جـ د [س] / د جـ ه: ب جـ د [س] – 13 جـ ه د: ب ه د [س] – 16 وزاويتا: وزاويتي [ل] / ب ه: د ه [س] – 18-19 لأن زاوية ... بخط ب ط: ناقصة [س].

الثلاث متساوية. فقد قسمنا زاوية ا ب جـ المعلومة، المستقيمة الخطين، بثلاثة أقسام متساوية بخطي ب د ب ط، وذلك ما أردنا أن نبين.

تمت الرسالة في استخراج قسمة الزاوية المعلومة بثلاثة أقسام متساوية، عن ويجن بن رستم المعروف بأبي سهل القوهي رحمه الله.

وفرغ من تعليقها بمدينة السلام، حماها الله، في المدرسة النظامية، عَمَّرَها الله، وغفر لبانيها بتاريخ الثالث عشر من جمادى الآخرة لسنة ست وخمسين وخمسمائة هجرية.

ولواهب العقل ومانح الصورة الحمد والشكر بلا نهاية، وصلواته على نبينا محمد وآله.

صححت بحمد الله وقوبلت بالأصل المنقول عنه.

5 حماها الله: ناقصة [س] – 6 لبانيها: بانيها [ل] / لسنة: سنة [س] – 7 الصورة: السبق [س] / نبينا: نبيه [س].

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz
منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

ا-١٨٢-و
جـ-١٦٧-ظ

بسم الله الرحمن الرحيم

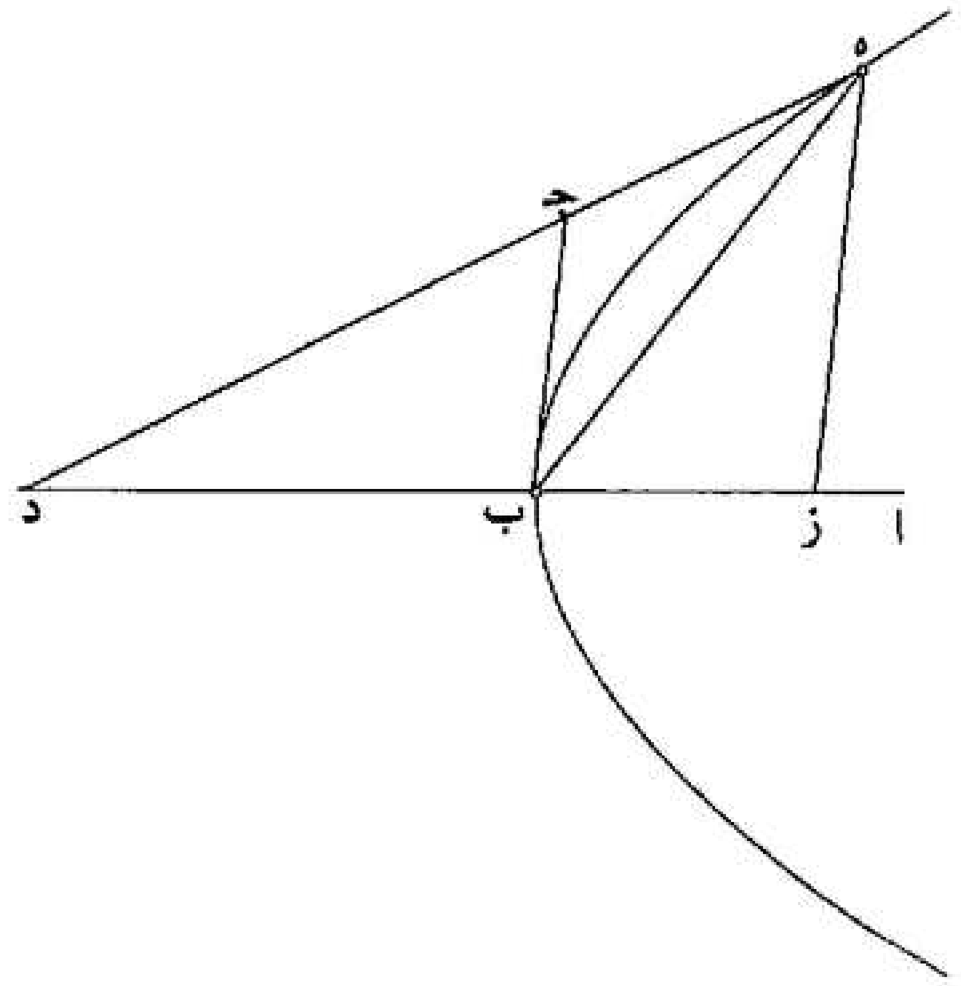
رسالة أبي سهل ويجن بن رستم القوهي
في قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية

قد كان جرى بحضرة سيدنا الأستاذ الجليل – أطال الله بقاءه، وأدام تأييده ونعمته وقدرته ودولته – ذكرُ ما عمله القدماء من قسمة الزاوية المستقيمة الخطين ثلاثة أقسام متساوية، وأمر – أدام الله تأييده – بذكر رأينا فيه، فامتثلت مرسومه – أعلى الله أمره – في إثبات ما اتفق استخراجه بيمن دولته وسعادة جده وإقبال أيامه. وأرجو أن يقع بحيث يرتضيه، والله المسهل والموفق له.

وهذا ذكر رأينا في قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية. نريد أن نفصل من زاوية ا ب جـ المستقيمة الخطين ثلثها بخط مستقيم. فنجعل ب د على استقامة ا ب، ونتعلم عليه نقطة د، كيفما اتفق، ونعمل ب د قطرًا مجانبًا لقطع ب ه الزائد، وضلعه القائم مساوٍ لقطر ب د أيضًا، وزاوية خطٍّ الترتيب وقطر ا ب مساويةٌ لزاوية ا ب جـ المعلومة، كما بيّن أبلونيوس الفاضل عمله في كتاب *المخروطات*. ونجعل ب ه مساويًا لخط ب د ونصل خط ه د.

فأقول: إن زاوية ه ب جـ ثلث زاوية ا ب جـ المستقيمة الخطين.

1 البسملة: كتب بعدها «استعنت بالله سبحانه» [ا] – 2 رسالة ... القوهي: لأبي سهل القوهي [جـ] / القوهي: الكوهي [ا] – 9-2 رسالة ... متساوية: ناقصة [جـ]، وهذا لأن مسألة القوهي قد اقتبست من مسائل هندسية عديدة – 6 فيه: نجد أيضًا في الهامش «في ذلك» بنفس الخط [ا] – 7 وأرجو: وأرجوا [ا] – 10 ا ب: ا جـ [ا] – 11 كيفما: كيف ما [ا، جـ] / ونعمل: ونجعل [جـ] / قطرًا مجانبًا: قطر المجانب [ا] – 12 خط: لخط [ا] – وقطر: ولقطر [ا] – 13 الفاضل ... *المخروطات*: ناقصة [جـ]؛ انظر *المخروطات* المقالة الأولى شكل ٥٥ – 14 ه د: به د [ا].



برهان ذلك: أنّا نخرج ه ز على الترتيب. فلأن نسبة سطح د ز في ز ب إلى مربع ه ز كنسبة القطر المجانب، وهو ب د، إلى الضلع القائم، والقطر المجانب للقطع الزائد الذي قطره ا ب د مساوٍ لضلعه القائم – لأنا قد عملنا كذلك – فسطح د ز في ز ب مساوٍ لمربع ز ه، فنسبة د ز إلى ز ه كنسبة ز ه إلى ز ب، وزاوية ه ز د مشتركة لمثلثي ه ز د ه ب ز جميعًا، فمثلث د ز ه شبيه بمثلث ه ب ز، فزاوية ب د ه مساوية لزاوية ب ه ز، وزاوية ه ب ز ضعف زاوية ب د ه، لأن خط ب د مساوٍ لخط ب ه، فزاوية ه ب ز ضعف زاوية ب ه ز / وزاوية ب ه ز مساوية لزاوية ه ب جـ، لأنهما متبادلتان، فزاوية ا-١٨٢-ظ ه ب ز ضعف زاوية ه ب جـ، فزاوية ا ب جـ ثلاثة أمثال زاوية ه ب جـ. فقد فصلنا من زاوية ا ب جـ المستقيمة الخطين ثلثها بخط ب ه، وهي زاوية ه ب جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

1 د ز: حـ ب [ا] / ز ب: د حـ [ا] – 2 القطر: قطر [ا] / ب د: د جـ [ا] / الضلع: ضلعه [ا، جـ] / والقطر: وقطر [ا] – 4 ز ه (الأولى): د ه [ا] / ز ب: د حـ [ا] – 5 جميعًا: معًا [جـ] / ب د ه: ب د حـ [ا] – 6 ب د ه: ب د حـ [ا] – 7 متبادلتان: متبادلتين [ا] – 8 فزاوية ا ب جـ ... ه ب جـ: ناقصة [جـ] – 9 زاوية: ناقصة [ا] – 10 نبيّن: نفصل [جـ]؛ وكتب بعدها «تمت الرسالة ولله الحمد والمنة كما هو أهله وفرغت من كتابة هذه الرسائل بدمشق في رمضان من شهور سنة ٦٢٦ هجرية» [ا]

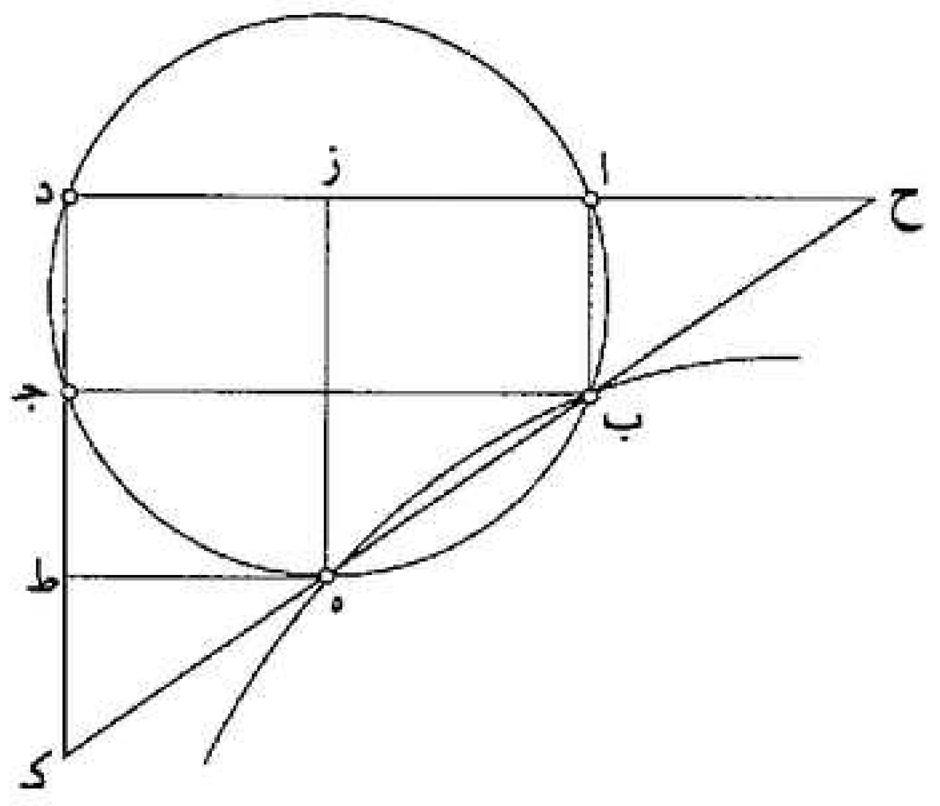
ا – ١٤٧ – ظ
ب – ١٨٩ – ظ
جـ – ٢٢٦ – ظ

بسم الله الرحمن الرحيم

مقالة في استخراج خطين بين خطين حتى تتوالى الأربعة على نسبة، وقسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية لأبي سهل ويجن بن رستم القوهي

– اَ – نجعل الخطين ا ب ب جـ، وليحيطا بزاوية ب، ونتمم سطح ب د المتوازي الأضلاع القائم الزوايا، ونعمل عليه دائرة ا ب جـ، ونعمل على نقطة ب قطعًا زائدًا لا يلقى خطي ا د د جـ؛ وليقطع الدائرة على نقطتي ب ه. ونخرج خطي ه ز ه ط موازيين لخطي ا ب ب جـ.

فأقول: إنهما بين خطي ا ب ب جـ على نسبة واحدة.



1 البسملة: ناقصة [ب] – 2–4 مقالة ... القوهي: طريق في استخراج خطين بين خطين ويتوالى على نسبة لأبي سهل الكوهي [ب] – 2 مقالة في: ناقصة [ا] / خطين (الأولى والثانية): الخطين [جـ] / تتوالى: يتوالا [ا] / الأربعة: ناقصة [ا، ب] – 4 لأبي ... القوهي: للكوهي [ا]، كتب بعدها «رحمهم الله تعالى» [جـ] / رستم: وستم [جـ] – 5 اَ: ناقصة [ب، جـ] / ب جـ: ب ح [ب] – 6 القائم الزوايا: في الهامش مع الإشارة: القائم الز [ا] / ا ب جـ: ا ب ح [ب] – 7 خطي: ناقصة [جـ] / د جـ: د ح [ب] – 8 لخطي ا ب: لـ ا ب [ب].

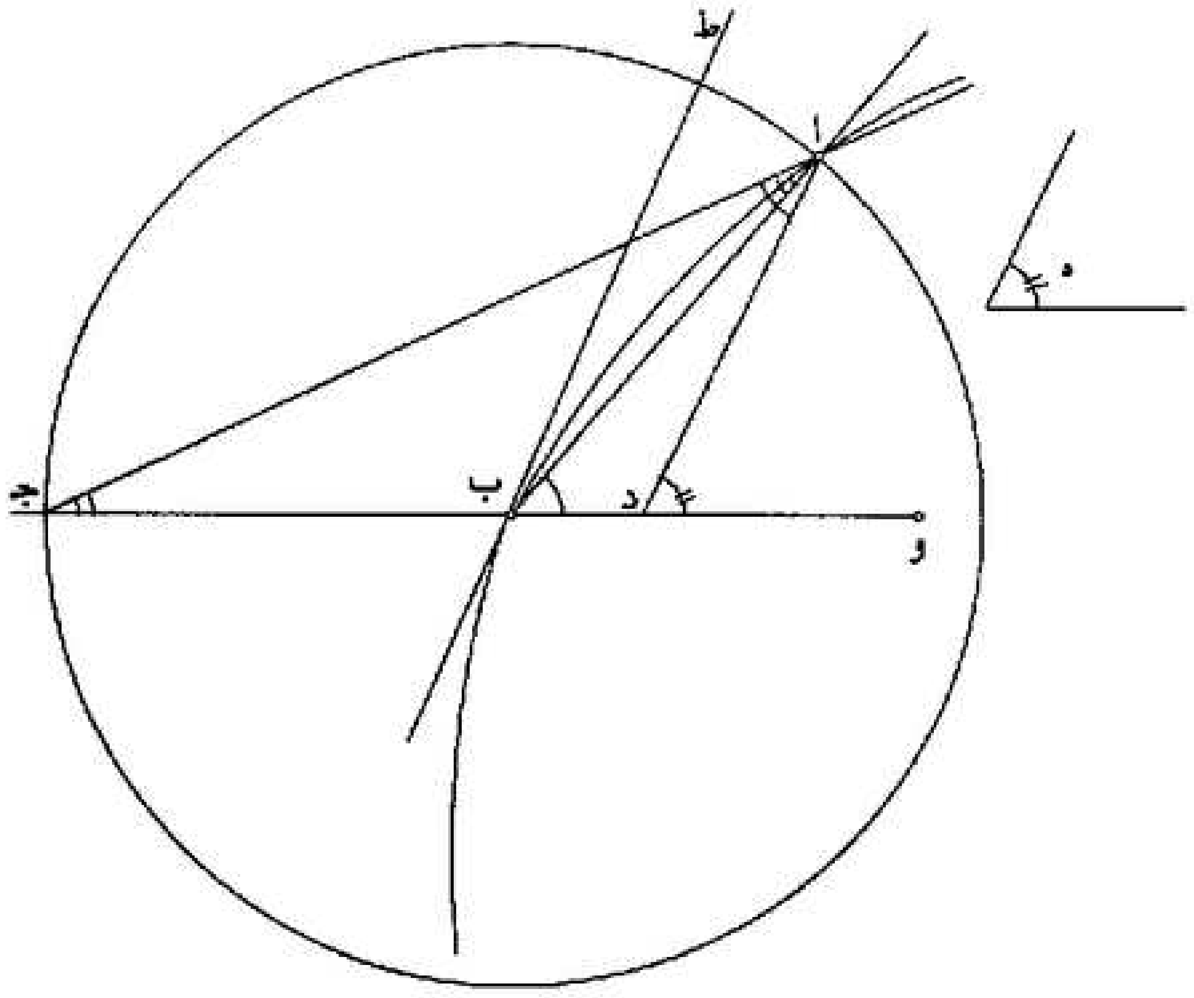
برهان ذلك: أنا نصل ه ب، ونخرجه حتى يلقى خطي ا د د جـ على نقطتي ح ك. فلأن ح ب مثل ه ك – لأن ح د د ك هما الخطان اللذان لا يلقيان قطع ب ه كما في و من ب من *المخروطات* – وه ب مشتركٌ، يكون ضرب ه ح في ح ب مثلَ ضرب ب ك في ك ه. ولكن ه ح في ح ب مثل د ح في ا ح، لأن كل واحد منهما مثل مربع الخط المماس الخارج من نقطة ح. ود ك في ك جـ مثل ب ك في ك ه، ولذلك / يكون د ح ب-١٩١-و في ا ح مثل د ك في ك جـ. فنسبة ح د إلى د ك كنسبة ك جـ إلى ا ح. وك جـ مثل ز ه، لأن مثلثي ه ح ز ك جـ ب متشابهان، وه ح مثل ب ك منهما. وا ح مثل ط ه، لأن المثلثين متشابهان متساويان، فنسبة ح د إلى د ك – أعني نسبة ب جـ إلى جـ ك، أعني ب جـ إلى ه ز – كنسبة ه ز إلى ه ط. ولأن ضرب ز ه في ه ط مثل ا ب في ب جـ، كما تبين في شكل ح من مقالة ب من كتاب *المخروطات*، ولأن خطي ح د د ك لا يلقيان قطع ه ب، يكون نسبة ه ط إلى ا ب كنسبة ب جـ إلى ه ز. فقد تبين أن نسبة ب جـ إلى ه ز كنسبة ه ز إلى ه ط وكنسبة ه ط إلى ا ب؛ فقد وجدنا ما أردنا أن نجد.

– ب – في قسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية له.

نضع الزاوية زاوية ه، ونعمل قطعًا زائدًا عليه ا ب، وليكن ضلعاه – القائمُ والمائلُ – متساويين، وليكن ا ب مثلَ ضلعه القائم وب جـ هو ضلعُه المائل، وليكن زاويةُ ترتيبه مثلَ زاوية ه، وذلك كما تبيّن في آخر المقالة الأولى من كتاب *المخروطات* عند عمله / القطعَ جـ-٢٢٧-و الزائدَ. ‹ونخرج من ا خط الترتيب على قطر القطع، وليكن ا د›. فلأن نسبة ضرب جـ د في د ب إلى مربع ا د كنسبة الضلع القائم إلى المائل، كما تبيّن في شكل ك من مقالة ا من *المخروطات*، يكون ضربُ جـ د في د ب مثلَ مربع ا د، فزاوية ا ب د إذن مثل زاوية جـ ا د، وزاوية د ب ا مثلا زاوية ا جـ د، لأن ا ب مثل ب جـ. فزاوية جـ ا د إذن مثلا

1 ح: حـ [ب] – 2-3 لأن .. المخروطات: أثبتها في الهامش مع الإشارة إلى مكانها [ا] – 3 و من ب: ٦ من ٢ [ا] الشكل الثامن من المقالة الثانية [ب] / وه ب: ووب [ب] / ح ب: حـ ب [ب] – 4 ولكن: لكن [ا، جـ] – 4-5 لأن ... ح: أثبتها في الهامش مع الإشارة إلى مكانها [ا] – 5 ك جـ: ك ح [ب] / في ك ه: ه [ب] كرر بعدها «لكن ه ح في ح ب»، ثم ضرب عليها بالقلم [ا] – 6 ك جـ (الأولى والثالثة): ك ح [ب] – 7 ط ه: ه ط [ب] – 8 ب جـ: ب ح [ب] / جـ ك: ح ك [ب] – 9 أعني ب جـ إلى ه ز: ناقصة [ب] / ه ز (الثانية): ز ه [ا، ب] / ولأن: لان [ب] / ز ه: ه ز [ب] – 10 ب جـ: ب ح [ب] / تبين: تبين كما، ثم ضرب على «كما» بالقلم [ا] / شكل ح: الشكل الثامن [ب] / مقالة ب: أثبت ب فوق السطر [ا] المقالة الثانية [ب] / كتاب: ناقصة [ب] – 11 يلقيان: يلتقيان [ب، جـ] / يكون: يخرج [ب] / ب جـ: ب ح [ب] – 12 ب جـ: ب ح [ب] / فقد ... نجد: وذلك ما أردنا أن نبين [ب]؛ انقطع هنا مخطوط [ب] – 13 ب ... له: ناقصة [جـ] – 16 ه: فوق السطر [ا] / الأولى: ا [ا].

زاوية ا جـ د، فزاويتا جـ ا د ا جـ د مجموعتان ثلاثة أمثال زاوية ا جـ د. لكن زاوية ا د و الخارجة مثل زاويتي د ا جـ ا جـ د الداخلتين مجموعتين من المثلث، فزاوية ا د و ثلاثة أمثال زاوية جـ. فزاوية جـ إذن ثلث زاوية ا د و التي هي زاوية ترتيب القطع. وقد كنا فرضنا أن زاوية الترتيب مثل زاوية ه، فيجب إذن أن يكون زاوية ا جـ ب ثلث زاوية ه المفروضة. فقد وجدنا ثلث زاوية ه؛ وذلك ما أردنا أن نجد.



تم استخراج الخطين بين الخطين على نسبة وقسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية لأبي سهل القوهي.

4 إذن: فوق السطر [ا] / ا جـ ب: جـ [ا] – 5 نجد: نبين [ا] كتب بعدها «والله أعلم. وقد وقع الفراغ من تحريرها في ليلة الثلاثاء التاسع والعشرين من ذي القعدة لسنة تسع وخمسين ومائة وألف، والحمد لله ربّ العالمين والصلوة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين» [جـ] – 7 القوهي: الكوهي [ا]؛ وكتب بعدها «والحمد لله ربّ العالمين وصلواته على نبيه محمد وآله الطاهرين».

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

١٣٠ – ظ

مقالة لأبي سهل القوهي أيضًا: في تثليث الزاوية وعمل المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة

قال: فلنقدم عليه مقدمتين يسهل بهما معرفته.

الأولى: أن كل مخروط فصله سطح على موازاة قاعدته، فإنه يحدث في سطح المخروط دائرة.

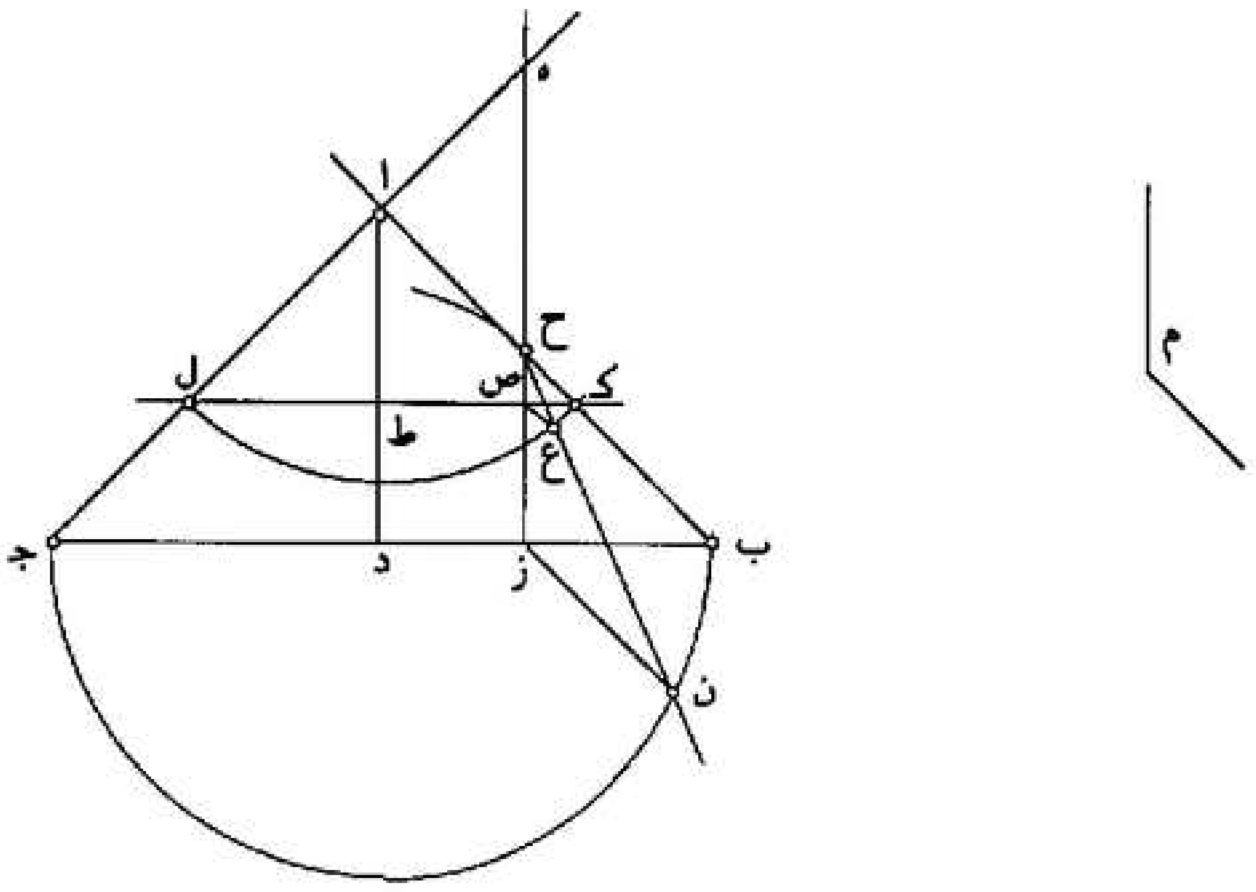
ويروي عليه البرهان المشهور المذكور في كتب *المخروطات*، فتركناه.

الثانية: نريد أن نجد قطعًا زائدًا يحيط قطره مع خطوط ترتيبه بزاوية مساوية لزاوية مفروضة، ولتكن م.

وهذه، وإن برهن عليها في الكتاب، إلا أنه أقام البرهان عليها بوجه آخر، وهو هذا:

نعمل مثلث ا ب جـ متساوي الساقين على أن زاوية رأسه قائمة؛ ونخرج عمود ا د، فينصف ب جـ. و‹نخرج› جـ ا إلى هـ، ومن هـ هـ ح ز موازيًا لـ ا د بحيث يلقي ا ب ب جـ على ح ز. ونتوهم سطحًا يمر به ح ز ويقوم على سطح المثلث على قوائم؛ ونعمل على ز من هـ ز في السطح القائم زاوية ح ز ن مثل م، ونرسم على د ببعد د جـ في سطح جـ د ن دائرة جـ ن ب، وليقطع ز ن على ن. ثم نتوهم ا جـ متحركًا على محيط الدائرة، مع ثبوت ا د، حتى ينطبق على ا ب، فيحدث نصفُ مخروط؛ و‹يحدث› قطع في بسيط المخروط من السطح القائم رأسه ح وقطره ح ز وأحد خطوط ترتيبه ز ن.

3 بهما: بها – 9 البرهان: للبرهان – 10 هذا: هذه – 13 ح ز: ح د – 15 جـ د ن: جـ ر ن.



فأقول: إنه قطع زائد يحيط قطره مع خطوط ترتيبه بزاوية مساوية لزاوية م.

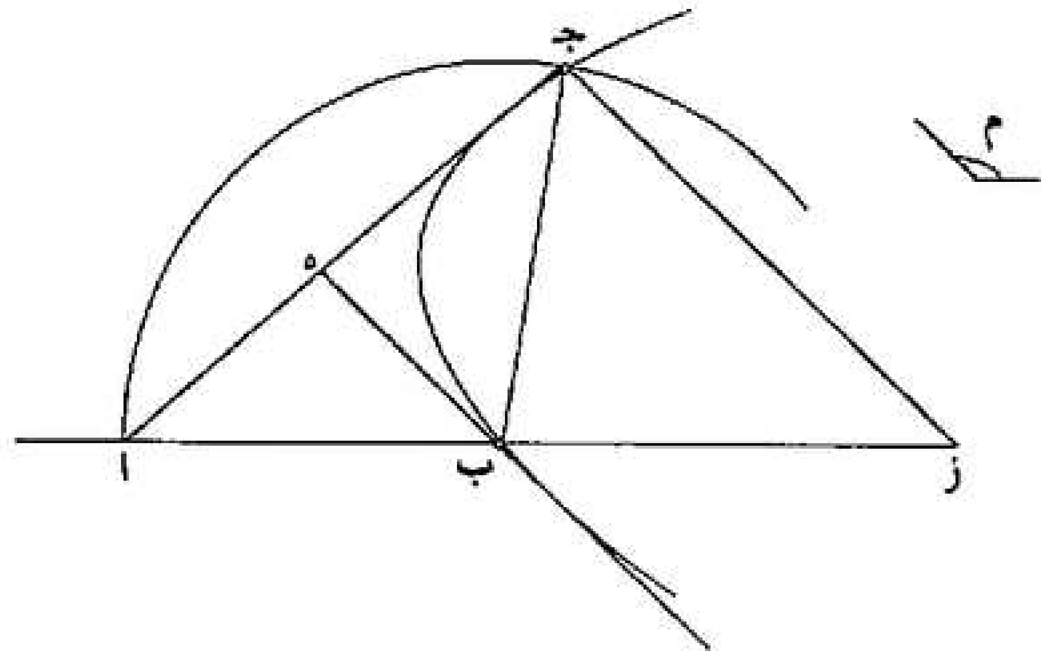
برهانه: أن جـ ز في ز ب كمربع ز ن، لأن عمود ح ز على سطح ح ز ن قاطع سطح المثلث على قوائم. وزجـ عمود على زح الفصل المشترك، فهو عمود على سطح ن ز هـ، فهو عمود على ز ن، فـ ز ن عمود على ب جـ، فـ ز ن خط الترتيب أحاط مع القطر بزاوية ح ز ن المساوية لزاوية م.

ولتساوي ز جـ ز هـ وزب ز ح، يكون ضرب ز هـ - وهو المجانب والسهم، في ز ح السهم مثل مربع خط الترتيب، فهذا هو القطع الزائد.

وأيضًا، فيتعلم ص على قطر القطع، ونخرج منه ص ع موازيًا لـ ز ن وكـ ص ل لـ ب جـ قاطعًا لـ ا د على ط، فـ ع ص ص ل يوازيان ن ز ز جـ، والزاويتان متساويتان. فالسطح المارّ بـ ع ص ص ل موازٍ للمار بـ ن ز ز جـ، أعني قاعدة المخروط. فـ كـ ع ل دائرة وص ع عمود فيها على كـ ل. فسطح ص ل - أعني ص هـ المجانب وهو السهم - في ص كـ - أعني ص ح السهم - كمربع ص ع وهو خط الترتيب.

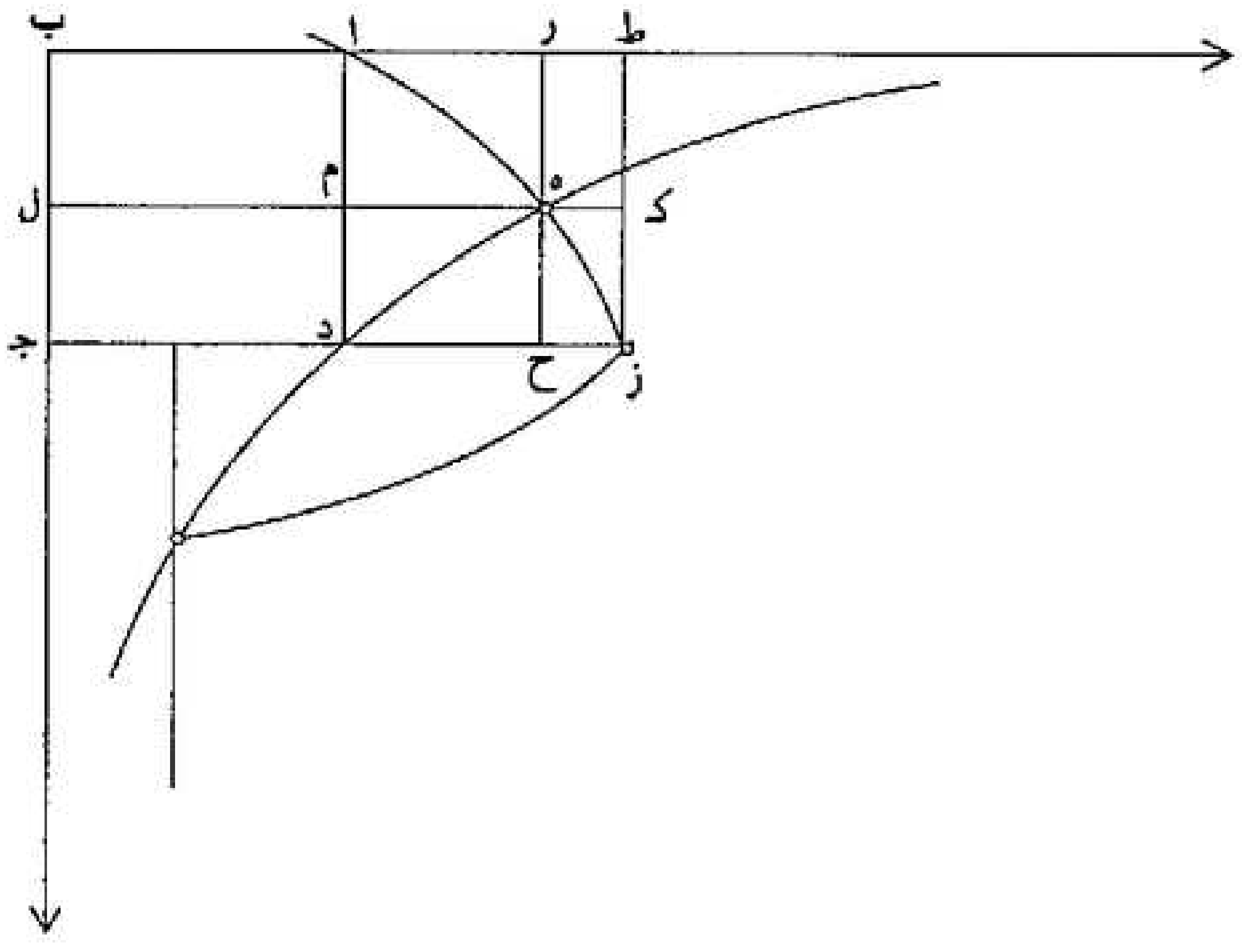
فإذا اتضحت هاتان المقدمتان، فلتكن الزاوية التي نريد قسمتها زاوية م؛ فنخط قطعًا زائدًا يحيط قطره مع خطوط ترتيبه بزاوية مساوية لتمام زاوية م القائمتين، وهو قطع ب جـ، ورأسه ب ومجانبه ا ب. ونرسم على ب وببعد ا ب المجانب دائرة تقطع القطع على جـ، ونخرج جـ ز على الترتيب؛ و‹نصل› ب جـ ا جـ و‹نخرج› ب هـ موازيًا لـ جـ ز، فـ هـ ب ز كـ م، لأنها تمام ا ب هـ المساوية لـ ا ز جـ، المساوية لتمام م إلى قائمتين.

4 ن ز هـ: ب ر هـ - 8 ص ع: خلط الناسخ بين السين والصاد، وصححناها دون أن نشير إليها.



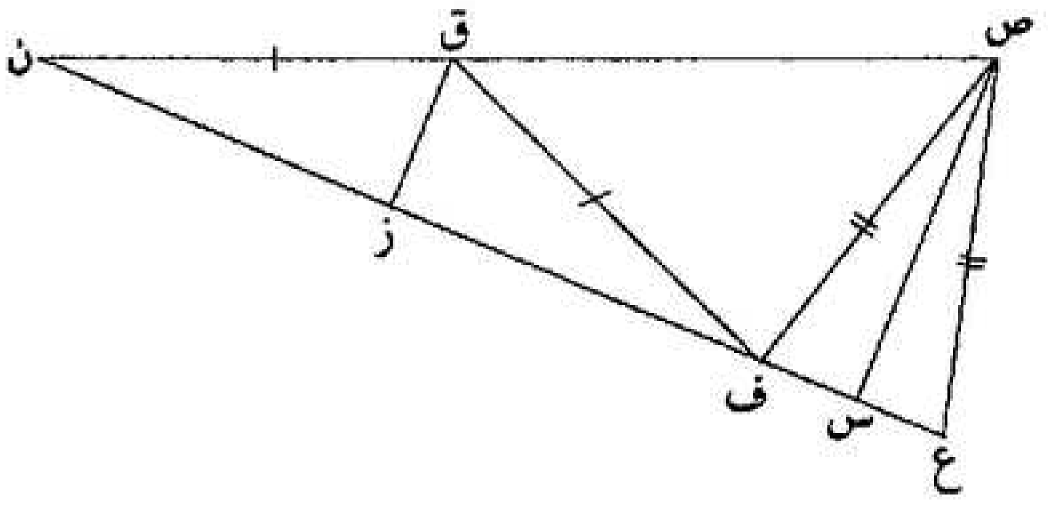
فأقول: إن جـ ب ز مثلا هـ ب جـ.

برهانه: أن ا ز في ز ب كمربع ز جـ، فـ ا ز إلى ز جـ كـ ز جـ / إلى ز ب، ١٣١-و فالمثلثان متشابهان، فـ جـ ا ز كـ ب جـ ز، وجـ ب ز ضعف جـ ا ب، فـ جـ ب ز ضعف ب جـ ز، أعني جـ ب هـ، وهو المراد في عمل المسبع في الدائرة، وهو مطلوبُ التركيبِ، لا يتأتى برهانُه إلا باستعمال القطوع المخروطية.



ليكن مربع ا ب جـ د، ونرسم قطع د هـ الزائد ورأسه د بحيث لا تلقاه ا ب ب جـ. ونخرج د ز ا ر ط، ونرسم قطع ز هـ المكافئ رأسه ز وضلعه القائم ز د وقطره على استقامة ز د. وليتقاطع القطعان على هـ، ونخرج من هـ هـ ح على الترتيب وهـ كـ ل ز كـ ط موازيين لـ ز جـ ب جـ. فلأن ا جـ كـ ر ل، يكون بعد إسقاط ا ل المشترك وأخذ د هـ مشتركًا، ا ح كـ ح ل، فـ جـ ح إلى ح د كـ جـ د إلى ح هـ. ولأن د ز في ز ح كمربع ح هـ، يكون د ز إلى ح هـ كـ ح هـ إلى ز ح.

1 مثلا هـ ب جـ: مثلى هـ ب د – 2 فـ ا ز: قد تقرأ «جـ» فوقها / ز جـ (الأولى): ز د – 3 جـ ا ز كـ ب جـ ز: جـ ا د كـ ب جـ د.



وإذ أثبت هذا، نريد أن نعمل مثلثًا متساوي الساقين كل واحدة من زاويتي قاعدته ثلاثة أمثال زاوية رأسه.

فنعمل مثلث ص ن ع متساوي الساقين على أن كل واحدة من ساقي ص ن ن ع مثل ضلع المربع، أعني د جـ، وقاعدة ص ع مثل هـ ح خط الترتيب.

ونصل ن ق كـ ح هـ وع ف كـ زح. فيبقى ف ن ح د، ونصل ف ق ص ف، ونخرج عمودي س ص ق ز. ولأن ن ع إلى ع ص كـ ع ص إلى ع ف فيتشابه مثلثا ن ص ع ف ص ع، ‹فـ ص ع إلى ن ص كـ ع ف إلى ع ص›، فـ ص ف ع ص ع ن متساويتان، فـ ص ف كـ ص ع، وس ص عمود، فـ ع س كـ س ف. ولأن د ز إلى هـ ح كـ هـ ح إلى ح ز، يكون ص ن إلى ص ن ن ف، إذا فرضنا خطًا واحدًا، كـ ن ق إلى ن ف؛ فنسبة ص ن إلى نصف ص ن ن ف، أعني ضعف ن ف ف ع كـ ن ق إلى نصف ن ف، ونصف ع ن ن ف، أعني نصف ضعف ن ف مع ف ع مثل ن س، لأن نصف ضعف ن ف هو ن ف ونصف ف ع هو ف س، فـ ص ن إلى ن س، أعني ق ن إلى ن ز، لتوازي س ص و ق ز، كـ ق ن إلى نصف ن ف، فنسبة ق ن إلى ن ز و‹إلى› نصف ن ف واحدة، فـ ق ن كـ ق ف؛ وق ز عمود، فـ ق ن، أعني ص ع بل ص ف ق ف، فالأربعة متساوية. وف ق ص، أعني ف ص ن، ضعف ن، فـ ص ثلاثة أمثال ن، وكذلك ع. فإذا نصفنا ن ص ف، انقسمت ص بثلاثة أقسام متساوية.

فإذا عملنا في دائرة مثلثًا شبيهًا به، وقسمنا كل واحدة من زاويتي القاعدة بثلاثة أقسام متساوية بخطوط تخرج منها إلى المحيط انقسمت الدائرة بسبعة أقسام متساوية على التحقيق؛ وهو أعلم بالحقائق.

3 واحدة: واحد – 7 ‹فـ ص ع ... إلى ع ص›: نجد بدل هذه العبارة «فر (؟) كـ ف س ع وس المساوية لـ ع كـ س ف ع» – 9-8 ولأن د ز .. إلى ح ز: ولأن ح م إلى حـ ح كـ زح إلى ح د – 10 ن ف ف ع: ع ن ن ف – 11 مثل: مطموسة.

‹مقدمة من استخراج أبي سهل القوهي›

بسم الله الرحمن الرحيم ٨٠-ظ
توكلت على الله

وقفت على ما ذكرتَه، أيها الأخ، من قول أبي عبد الله الماهاني المهندس في رسالة في شرح المقالة الثانية من كتاب أرشميدس في *الأسطوانة والكرة والمخروط*، إن الذي تهيأ له عمله من جملة تسعة أبواب هذه المقالة ثمانية أبواب، وتعذر عليه تصحيح الباب الرابع، وهو في قسمة الكرة بقسمين على نسبة مفروضة، لاعتياص مقدمة احتاج إليها؛ وحاول استنباطها بالجبر، فأداه إلى معادلة المكعب والأموال عددًا. وهذه الأصول غير متناسبة؛ وهي إضافة مجسم متوازي الأضلاع إلى خط مفروض، ينقص عنه مكعبًا. وسألتَ الإبانة عن هذه المقدمة، فاحتجتُ لها إلى تقديم مقدمة أخرى تُسهل السبيل إليها، وهي هذه:

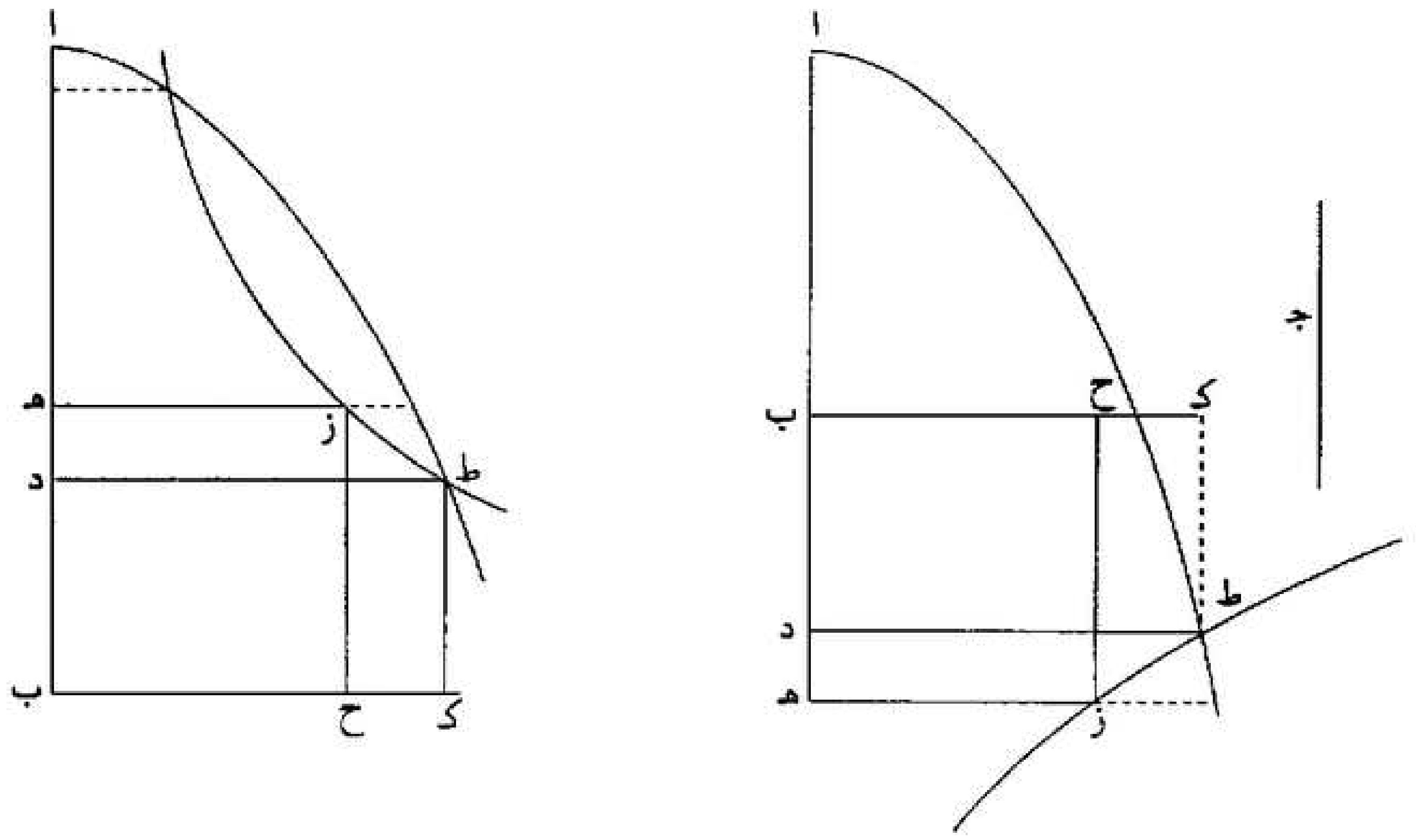
خطا ا ب جـ مفروضان، ونريد أن نقسم ا ب على د حتى تكون نسبة ا د إلى جـ كنسبة مربع جـ إلى مربع ب د. وهذا ما يُحتاج إليه للمقدمة ‹التي› اعتاصت على الماهاني.

وإنما يمكن ذلك إذا لم يكن خط جـ أطول من الخط القوي على المجسم المضاف إلى ثُلث / ا ب الناقص مكعبًا، ضلعه ثلثا ا ب، أعني الخط القوي على أربعة أتساع ثلث ٨١-و مكعب ا ب. ولكنّا أردنا أن تكون هي، وهذه أعم من ذلك؛ فنضع ا ب في موضعين:

4 وقفت: وقعت – 8 عددًا: ربما كانت في الأصل «معادلة المكعب والأموال والعدد» – 15 أطول من: مطموسة / إلى: اليه – 16 ثلث: مكررة في الصفحة التالية / مكعبًا: مربعا.

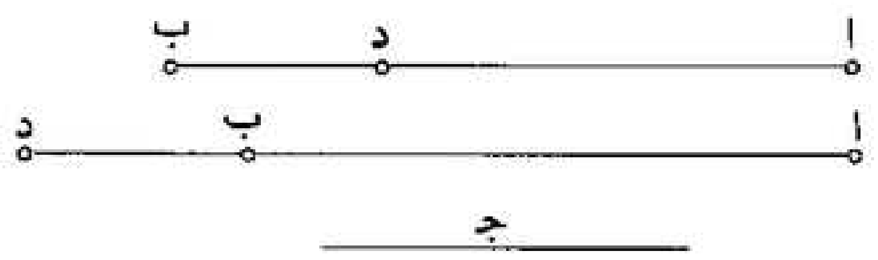
ونريد أن نفصل من أحدهما ب د ونزيد في الآخر ب د، حتى تكون نسبة ا د إلى جـ كنسبة مربع جـ إلى مربع ب د.

فنجعل ب هـ مثل جـ، ونتمم مربع ب هـ ز ح، ونعمل قطعًا مكافئًا، رأسه نقطة ا وقطره ا ب وضلعه القائم خط جـ؛ وليكن قطع ا ط. ونعمل قطعًا زائدًا يمر على نقطة ز ولا يلقاه خطا ب هـ ب ح؛ وليكن قطع ز ط. فالقطعان لا محالة يتقاطعان، فليتقاطعا على ط. ونرسل من نقطة ط عمودًا على ا ب، وليقع على د. وقد بيّن أبلونيوس في كتابه في *المخروطات* أن مربع العمود الواقع من القطع المكافئ على قطره مثل ضرب ما يفصله من القطر مما يلي رأس القطع في الضلع القائم؛ فسطح ا د في جـ مثل مربع ط د، فنسبة ا د إلى ط د كنسبة ط د إلى جـ.



وأيضًا نخرج من نقطة ط خط ط ك موازيًا لـ ب د، ونخرج خط ب ح حتى يلقاه على ك. فخط هـ ز قد وقع على القطع الزائد / من الخط الذي لا يلقاه موازيًا للخط ٨١-ظ الآخر الذي لا يلقاه؛ وكذلك خطوط ز ح ك ط ط د. فعلى ما بيّنه أبلونيوس، ضرب ب هـ في هـ ز مثل ضرب ب ك في ك ط. ولكن كلاً من ب هـ هـ ز مثل جـ، وب ك مثل ط د وك ط مثل ب د؛ فضرب ط د في ب د مثل مربع جـ، فنسبة ط د إلى جـ كنسبة جـ إلى ب د. فقد تبيّن أن نسبة ا د إلى ط د كنسبة ط د إلى جـ وكنسبة جـ إلى ب د، فنسبة ا د الأول إلى جـ الثالث كنسبة مربع جـ الثالث إلى مربع ب د الرابع؛ وذلك ما أردنا بيانه. /

5 فليتقاطعا: فيلتقاطعا – 6 ط (الثانية): فوق السطر.

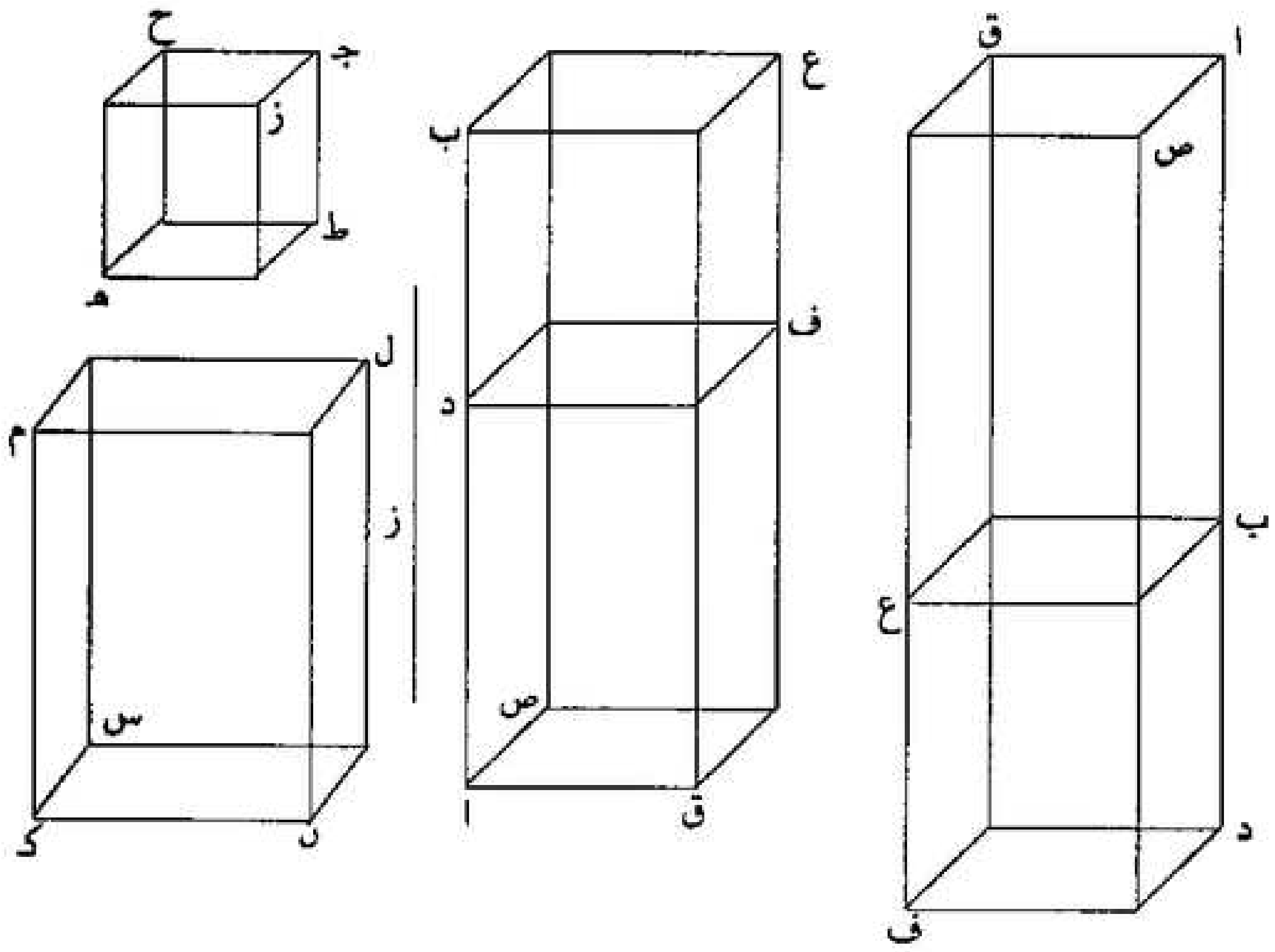


وإذ قدمنا هذه المقدمة، فليكن لنا ا ب في موضعين؛ ونريد أن نضيف إليه مجسمًا متوازي السطوح مساويًا لمجسم مفروض، يزيد عليه أو ينقص عنه مكعبًا. فليكن خط جـ ضلع مكعب يساوي المجسم المفروض؛ ونفصل من ا ب في أحد الموضعين ب د، ونزيد عليه في الموضع الآخر ب د، حتى تكون نسبة ا د إلى جـ كنسبة مربع جـ إلى مربع ب د، وهو غير محدود في الزيادة، ويجب أن يكون محدودًا في النقصان، وهو ألا يكون خط جـ أطول من الخط القوي على مكعب، وهو أربعة أتساع ثُلث مكعب ا ب وهو المضاف إلى ثلث ا ب الزائد مكعبًا، ضلعه ثلثا ا ب. فضرب ا د في مربع ب د هو مجسم متوازي الأضلاع يحيط به مربعا ب د وأربعة سطوح ا د ب د؛ وضرب جـ في مربع جـ هو المكعب المساوي للمجسم المفروض. فالمجسم المضاف إلى ا ب ينقص في الوضع الأول عن ا ب مكعبًا، ضلعه ب د، ويزيد على ا ب في الوضع الآخر أيضًا بمكعب ضلعه ب د؛ وذلك ما أردنا بيانه./ ٨٢-و

وإذ قد عملنا ذلك، فإني أريد هذا الشكل كُليًا، وهو أن يكون المضاف إلى ا ب مساويًا لمجسم متوازي السطوح مفروض، وزائدًا عليه أو ناقصًا منه مجسم شبيه بمجسم متوازي السطوح معلوم الصورة. ٨٢-ظ

فليكن المجسم المعلوم الصورة مجسم جـ هـ، وزاويته هي التي تحيط بها خطوط جـ ز جـ ح جـ ط. ولنعمل مجسمًا شبيهًا به مساويًا للمجسم المفروض، كمجسم كـ ل، وزاويته المساوية لزاوية جـ من مجسم جـ هـ هي التي تحيط بها خطوط كـ م كـ ن كـ س. ولنفصل من ا ب المفروض في أحد الموضعين ولنزيد عليه في الموضع الآخر ب د، حتى تكون نسبة ا د إلى كـ م كنسبة مربع كـ م إلى مربع ب د على الشريطة المذكورة في المقدمة، كما بيناه في الشكل الأول من هذه الرسالة. ونعمل على ب د مجسمًا شبيهًا بمجسم جـ هـ؛ وليكن مجسم د ع. ونتمم مجسم ا ف في طول ا د وفي عرض وسمك د ع، ولتكن زاويته المساوية لزاوية جـ ‹و›لزاوية د من مجسمي جـ هـ د ع هي التي تحيط بها خطوط ا د ا ص ا ق؛ فأقول: إن مجسم ا ف يساوي مجسم كـ ل.

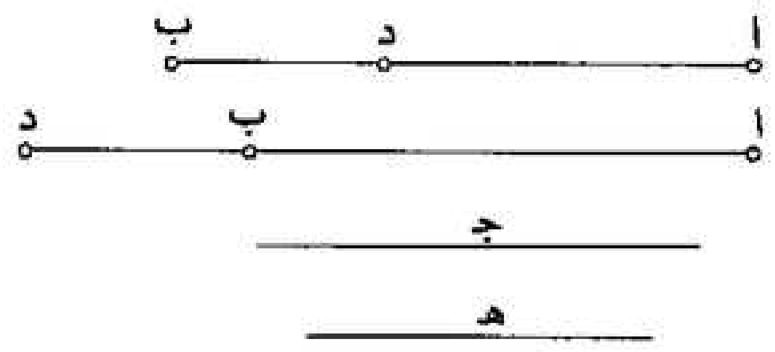
2 مكعبًا: مكعب – 7 مكعبًا: مربعا – 9 ا ب: د – 10 مكعبًا: مكعب / ب د: مطموسة – 22 مجسمي: مجسم.



برهان ذلك: أن نخرج بين خطي ا د كـ م خط / ز وسطًا في النسبة، فتكون نسبة ٨٣-و ا د إلى كـ م كنسبة ا د إلى خط ز مثناة؛ وقد كانت ‹نسبة ا د إلى كـ م كنسبة› مربع كـ م إلى ‹مربع› ب د، فنسبة ا د إلى ‹ز كنسبة كـ م إلى ب د، ونسبة› ا د إلى ز كنسبة ز إلى كـ م وكنسبة ‹كـ م إلى ب د، فنسبة ا د› إلى ب د كنسبة كـ م إلى ب د مثلثة. لكن نسبة ‹ا د إلى› ب د كنسبة مجسم ا ف إلى مجسم د ع، لأنهما على طول خط واحد وفي عرض وسمك واحد. ونسبة كـ م إلى ب د مثلثة كنسبة مجسم كـ ل إلى مجسم د ع، لأنهما متشابهان؛ فنسبة مجسم ا ف ومجسم كـ ل إلى مجسم د ع واحدة، فمجسم ا ف مثل مجسم كـ ل المساوي للمجسم المفروض. وقد أضيف إلى ا ب، فنقص عنه في أحد الموضعين وزاد عليه في الموضع الآخر بمجسم د ع الشبيه بمجسم جـ هـ المعلوم الصورة؛ وذلك ما أردنا عمله.

وأقرب من ذلك وأقل خطوطًا: إذا فرضنا خطي ا ب وجـ، وفصلنا من ا ب ب د في أحد الموضعين، ونزيد فيه ب د في الموضع الآخر، وجعلنا نسبة ا د إلى خط جـ كنسبة مربع خط جـ إلى مربع خط ب د، وعملنا على ضلع ب د مجسمًا متوازي السطوح معلوم الصورة، وعلى خط جـ مجسمًا / مشابهًا له، كان مساويًا للمجسم المعمول ٨٣-ظ على ا د في عرض وسمك وأمثال زوايا المجسم المعلوم الصورة المعمول على ب د.

1 خط: مكررة في الصفحة التالية – 3 فنسبة: ونسبة – 6 مثلثة: مثناه.



برهان ذلك: أن نخرج بين ا د وبين جـ خط هـ وسطًا في النسبة. فتكون نسبة ا د إلى جـ ‹كنسبة› ا د إلى هـ مثناة، ونسبة مربع جـ إلى مربع ب د كنسبة جـ إلى ب د مثناة، فنسبة ا د إلى هـ كنسبة جـ إلى ب د، ونسبة ا د إلى هـ كنسبة هـ إلى جـ، فخطوط ا د هـ جـ ب د الأربعة متوالية على نسبة واحدة. فنسبة ا د إلى ب د كنسبة جـ إلى ب د مثلثة بالتكرير. ونسبة ا د إلى ب د كنسبة المجسم المعمول على ا د في عرض وسمك وأمثال زوايا المجسم المعلوم الصورة المعمول على ب د إلى هذا المجسم المعمول على ب د، إذ كانا ‹في عرض وسمك واحد، ونسبة جـ إلى ب د مثلثة بالتكرير كنسبة المجسم المعمول على خط جـ إلى المجسم المعمول على د ب، إذ كانا› متشابهين؛ فالشبيه المعمول على جـ مثل المجسم المعمول على ضلع ا د في عرض وسمك وأمثال زوايا المعمول على ب د؛ وقد نقص عن ا ب في أحد الموضعين وزاد عليه في الموضع الآخر بالمجسم المعلوم الصورة الذي أحد أضلاعه ب د؛ وذلك ما أردنا. /

فإن نحن جعلنا خط جـ ضلع أي مجسم شئنا متوازي السطوح مساوٍ لمجسم مفروض ٨٤-و مشابه لمجسم معلوم الصورة، كان مساويًا للمضاف المذكور إلى ا ب الناقص عنه أو الزائد عليه بمجسم شبيه بالمجسم المعلوم الصورة. ويجب ألا يكون ضلع المجسم الذي تريد أن تضيف مثله إلى ا ب ينقص عنه مجسمًا شبيهًا بمجسم معلوم أعظم من المضاف إلى ثُلث ا ب الذي ضلع المجسم الشبيه الناقص ‹مكعب› ثلثي ا ب. /

هذه المقدمة من استخراج الأستاذ أبي سهل الكوهي، رضي الله عنه، وأنا أعطيت ٨٤-ظ نسختها للشيخ أبي الجود، رحمه الله.

7 إذ: اذا – 11 بالمجسم: فالمجسم / الذي: الى – 13 المذكور: المذكوره – 14 الذي: الذي عليه، ثم ضرب على «عليه» بالقلم – 16 نجد تحت السطر «والحمد لله وحده».

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

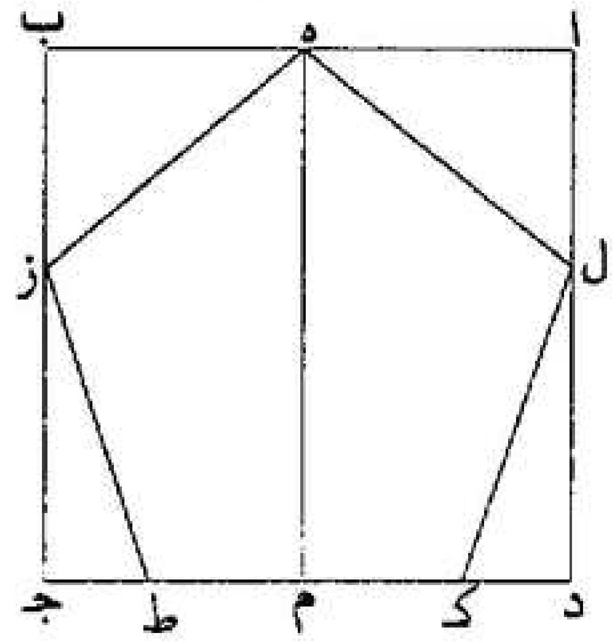
ا – ١٦٨ – ظ
ب – ٢٩ – ظ
جـ – ٢٠٣ – ظ
د – ٦٨ – ظ
س – ١٢١ – ظ

بسم الله الرحمن الرحيم

رسالة أبي سهل ويجن بن رستم القوهي
في عمل مخمس متساوي الأضلاع في مربع معلوم

بعد فراغنا من عمل المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة، نبدأ باستخراج شكل آخر أحسنَ وأبعدَ وأغمضَ وأصعبَ استخراجًا من عمل المسبع تقربًا إلى الملك شرف الدولة، وهو عمل مخمّس متساوي الأضلاع في مربع معلوم. واتفق بدولته وإقباله لعبده ويجن بن رستم، وذلك بحسن نظره وجميل رأيه لكافة الناظرين في هذا العلم؛ وأرجو أن يقع موقعًا بحسب مقداره وبعده.

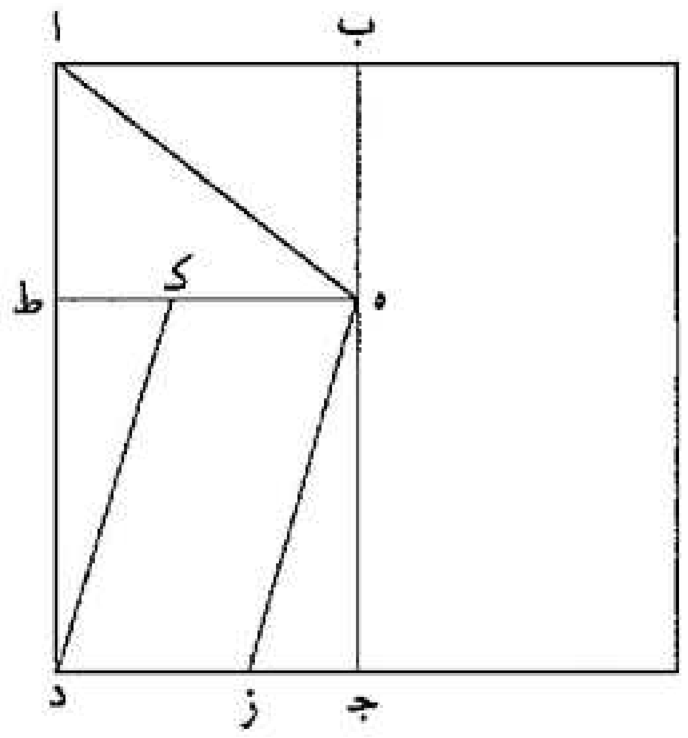
– آ – نريد أن نعمل في مربع ا ب جـ د مخمسًا متساوي الأضلاع وليس بمتساوي الزوايا، وتكون الزوايا الخمس على أضلاع المربع، كما في الصورة.



1 البسملة: كتب بعدها «على الله توكلي وهو حسن» [س] «استعنت بالله» [ا]؛ كتب البسملة بعد «رسالة أبي سهل القوهي، وأضاف «وبه نستعين» [د] – 2-3 رسالة أبي ... معلوم: رسالة في عمل ... لأبي سهل القوهي رحمه الله عليه [جـ] – 2 أبي: الشيخ الفاضل أبي [ا] / ويجن بن رستم: ناقصة [د، س] / رستم: وستم [ب] – 4-8 بعد ... وبعده: ناقصة [ا، جـ، س] – 4 آخر: ناقصة [ا، ب، جـ، س] – 7 رستم: وستم [ب] / نظره: رأيه [د] / رأيه: نظره [د] – 9 آ: ناقصة [ب، جـ، د] / نريد: قال نريد [جـ] – 10 الزوايا (الثانية): زواياه [ا، جـ، س].

فعلى التحليل: ننزل أن في مربع ا ب جـ د مخمس ه ز ط كـ ل متساوي الأضلاع وخطّ ه م عمود من نقطة ه على خط د جـ، فهو يقسم خط جـ د بنصفين؛ وكذلك خط ط كـ بنصفين. فخط كـ ط ضعف خط ط م، وكل واحد من خطي / ه ز ز ط مساوٍ لخط ط كـ، فكل واحد من خطي ه ز ز ط ضعف خط ط م. فينبغي أن نخرج في نصف مربع ا ب جـ د خطين كخطي ه ز ز ط، حتى يكون كل واحد منهما ضعف خط ط م؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ب-٣٠-و

– ب – فنريد أن نخرج في سطح ا ب جـ د، الذي هو نصف المربع المعلوم، خطين كخطي ا ه ه ز حتى يكون كل واحد منهما ضعف خط ز د.

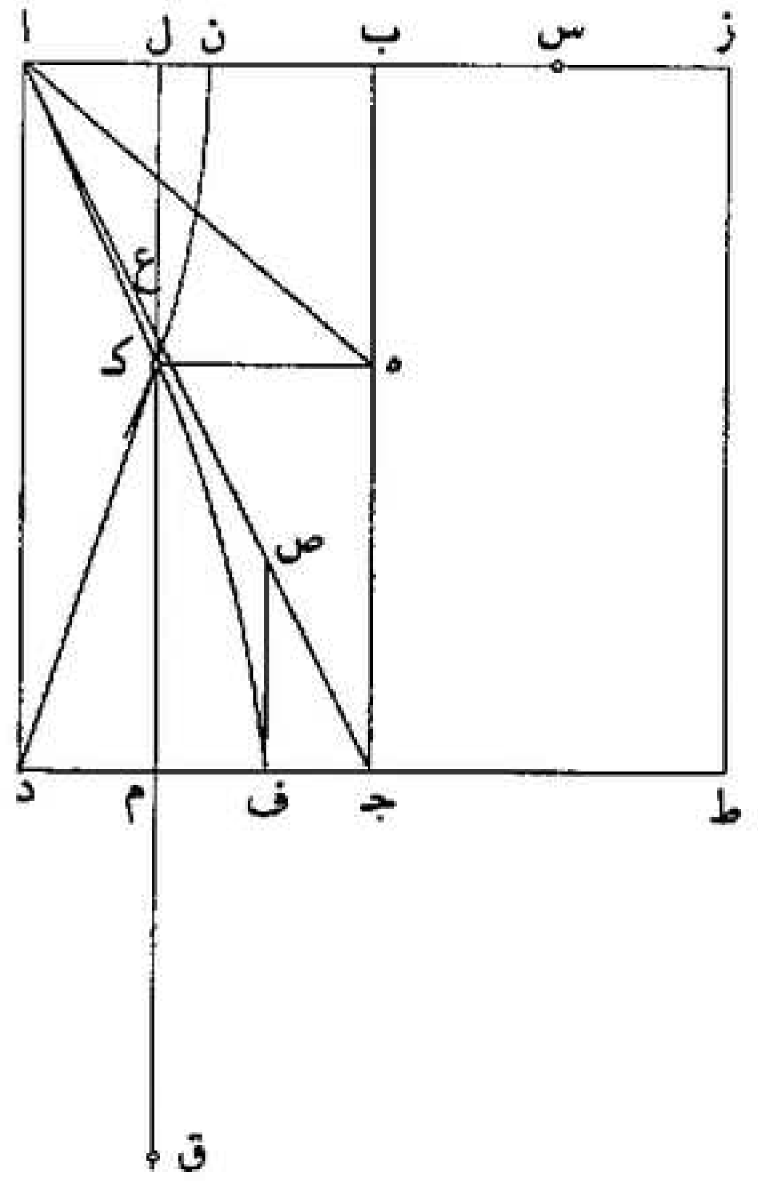


فعلى التحليل: ننزل أن كل واحد من خطي ا ه ه ز ضعف خط ز د، ونجعل خط ه ط موازيًا / لخط ا ب وخطّ د كـ موازيًا لخط ه ز، فخط د كـ مساوٍ لخط ه ز، وخط ه كـ مساوٍ لخط ز د، لأن سطح ه كـ د ز متوازي الأضلاع، فكل واحد من خطي ا ه د كـ ضعف خط ه كـ. فينبغي أن يكون في سطح ا ب جـ د، الذي هو نصف المربع المعلوم، إخراج ثلاثة خطوط مثل د كـ كـ ه ه ا، كما في الصورة، حتى يكون كل واحد من خطي ا ه د كـ ضعف خط ه كـ ويكون خط ه كـ موازيًا لخط ا ب. ا-١٦٩-و

1 في: ناقصة [ا] / ه ز ط كـ ل: ز ه ط كـ ل [ا، س] – 2 من نقطة ه: ناقصة [ا، جـ، س] / على خط د جـ: ناقصة [ب، د] / خط (الثالثة): ناقصة [ا] / جـ د: د جـ [ا، جـ، س] – 2-3 وكذلك خط ط كـ: وخط ط كـ أيضًا [ا، جـ، س] – 3 كـ ط: ط كـ [ا، جـ، س] – 3-4 مساوٍ ... ز ط: ناقصة [ب، د] – 5 كل: ناقصة [د] / منهما: منها [د] – 6 وذلك ... نبين: ناقصة [ب، د] – 7 ب: ناقصة [ب، جـ، د] / فنريد: نريد [ا] – 10 موازيًا (الثانية): مواز [ب، د] – 11 ز د: د ز [ا، جـ، س] – 12 يكون: نخرج [ا، جـ، س] – 13 كـ ه: ه كـ [ا] / كما في الصورة: ناقصة [ا، جـ، س] – 14 يكون: ناقصة [ب، د] / موازيًا: مواز [ب].

– جـ – فنريد أن نُخرجَ في سطح ا ب جـ د، الذي هو نصف المربع المعلوم، خطين كخطي ا ه د ک حتى يكون كلٌّ واحد منهما ضعفَ خط ه ک، ويكون خط ه ک / موازيًا لخط ا ب. ب-٣٠-ظ

فعلى التحليل: ننزل أن كل واحد من خطي ا ه د ک ضعف خط ه ک، وأن خط ل ک م موازٍ لخط ا د، ونصل خط ا جـ.



فلأن خط/ ا ه ضعف خط ه ک، فمربع خط ا ه أربعة أمثال مربع خط ه ک. جـ-٢٠٤-و ولكن مربع خط ا ه مساوٍ لمربعي خطي ا ب ب ه، لأن زاوية ا ب ه قائمة. وخط ب ه مساوٍ لخط ک ل،/ فمربعا خطي ا ب ک ل مساويان لأربعة أمثال مربع خط ه ک، أعني د-٦٩-و مربع خط ب ل، ومربع ا ب أربعة أمثال مربع ب ن، إذا كان / ا ب مقسومًا بنصفين س-١٢٢-و على نقطة ن، فيبقى مربع ک ل أربعة أمثال سطح س ل في ل ن، إذا كان خط س ب مساويًا لخط ب ن. فنقطة ک على محيط القطع الزائد الذي سهمه خط س ن المعلوم القدر والوضع، لأن كل واحدة من نقطتي س ن معلومة ورأسه نقطة ن المعلومة وضلعه القائم أربعة أمثال خط س ن، فهو معلوم أيضًا. فمحيط ذلك القطع، وهو قطع ن ک معلوم الوضع.

1 جـ: ناقصة [ب، جـ] – 2-3 ويكون خط ه ک موازيًا: وه ک موازٍ [ب، د] – 4 ه ک: ه ط [ا، س] – 5 ل ک م: الميم مطموسة [ا] – 6 فمربع: يكون مربع [ا، س] – 7-8 لمربعي ... مساوٍ: مكررة [د، ب] – 8 فمربعا: فمربعي، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] – 9 مربع (الأولى): موضع مربع [ب] / إذا: اذ [ب، د] – 10 س ل: س ک [ب] – 12 واحدة: واحد [ب] / س ن: ناقصة [ب] – 13 قطع: ناقصة [ب، د].

وأيضًا، لأن خط د ک ضعف خط ک ه وخطّ ک ه مساوٍ لخط م جـ، فخط د ک ضعف خط جـ م، وخط ع م أيضًا ضعف خط جـ م لأن نسبة ع م إلى م جـ كنسبة ا د إلى د جـ، وا د ضعف د جـ، فكل واحد من خطي / د ک ع م ضعف خط م جـ؛ [ب-٣١-و] فلهذا خط د ک مساوٍ لخط ع م، فمربع خط د ک مساوٍ لمربع خط م ع. ولكن مربع خط د ک مساوٍ لمربعي خطي د م م ک، ومربع خط م ع مساوٍ لسطح ق ع في ع ک مع مربع ک م، إذا كان خط ق م مساويًا لخط م ک. فإذا ألقينا مربع ک م المشترك، يبقى مربع د م مساويًا لسطح ق ع في ع ک. وإن جعلنا خط د ف مساويًا / لخط ف ص، يكون خط [ا-١٦٩-ظ] د ف ضعف خط ف جـ، لأن ص ف ضعف خط ف جـ، فنقطة ف تكون معلومة. ونسبة مربع د م، أعني سطح ق ع في ع ک، إلى مربع ع ا كنسبة مربع د ف، أعني مربع ف ص، إلى مربع ص ا؛ فلهذا نقطة ک على محيط قطع ما مماس لخطي ا ص ص ف على نقطتي ا ف، ويجوز على نقطة ق.

لأن خط د ف ضعف خط ف جـ، فخط د جـ، أعني ط جـ، ثلاثة أمثال خط جـ ف. وكذلك خط ط د ثلاثة أمثال خط د ف، فنسبة ط د إلى د ف كنسبة ط جـ إلى جـ ف؛ فلهذا القطعُ هو قطع زائد وسهمه خط ط ف.

وأيضًا، لأن نسبة مربع ا د إلى سطح ط د في د ف كنسبة / ط ف، الذي هو [جـ-٢٠٤-ظ] القطر المجانب، إلى ضلعه القائم، ومربع ا د ثلاثة أمثال سطح ط د في د ف، لأن خطي ا د د ط متساويان، فالضلع القائم له ثلاثة أمثال قطر ط ف. فمحيط قطع ا ک ف معلوم، لأن سهمه، وهو ط ف، معلوم الوضع والقدر، ورأسه نقطة ف، وهي معلومة، وضلعه القائم معلوم، لأنه ثلاثة أمثال قطر / ط ف المعلوم. فنقطة ک معلومة، لأنها على [ب-٣١-ظ] الفصل المشترك لخطين معلومي الوضع، أعني القطعين الزائدين، فخط ک ه معلوم الوضع، فنقطة ه معلومة، فخط ا ه معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبين. /

1 فخط: يكون خط [ا، جـ، س] – 2 جـ م: م جـ [ا، جـ، س] / وخط ع م ... جـ م: ناقصة [ا، جـ، س] – 3 د جـ: ا جـ [س] / فكل: وكل [د] – 4 فلهذا خط: فلذلك يكون [ا، جـ، س] / مساوٍ: مساويًا [ا، جـ، س] / م ع: ع م [جـ، س] – 4-5 لخط ... مساوٍ (الأولى): ناقصة [د] – 5 م ع: ع م [ا، جـ، س] – 6 م ک: ک م [ا، جـ، س] / يبقى: بقي [ا، جـ، س] – 8 ضعف (الثانية): مكررة [س] – 10 فلهذا: فلهذا تكون [ا، جـ، س] / ما: ناقصة [ا] م ا [د] / مماس: مماسا [د] – 12 خط (الأولى والثانية): ناقصة [ا، س، جـ] / ف جـ: م جـ [د] – 14 القطع هو قطع زائد: يكون القطع قطعًا زائدًا [ا، جـ، س] – 15 ا د: غير واضحة، ونجد «ا د» في الهامش بخط آخر [ا] / ط د: ط ه [ب، د] / د ف: ط ف [ا، جـ، س] – 17 له: ناقصة [ا] / ا ک ف: ا ک [ا] – 18 لأن سهمه ... معلوم: ناقصة [ا، جـ، س] – 19 علىَ: ناقصة [ا، جـ، س] – 20 القطعين الزائدين: قطعين زائدين [ب، د] – 21 نبين: نعلم [ا، جـ، س].

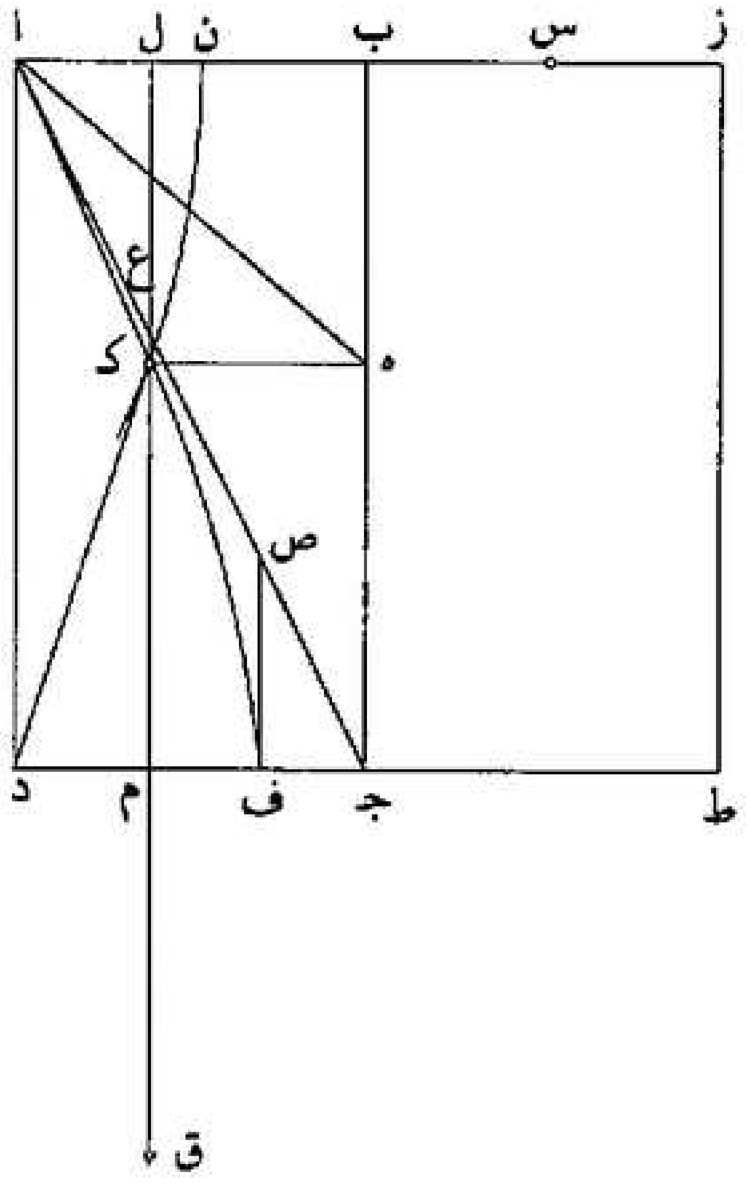
– د – تركيب ذلك: أن سطح ا ب جـ د نصف / مربع ا ز ط د، ونريد أن نخرج س–١٢٢–ظ د–٦٩–ظ في سطح ا ب جـ د خطين على ما وصفنا في التحليل.

فنقسم كل واحد من خطي ا ب ب ز بنصفين على نقطتي س ن، ونجعل خط د ف ضعف خط ف جـ، ونعمل على سهم ن س قطعًا زائدًا، يكون ضلعه القائم مساويًا لضعف خط ا ز، حتى يكون أربعة أمثال خط ن س الذي هو القطر المجانب له، وليكن القطع ن ک. ونجعل أيضًا على سهم ف ط قطعًا زائدًا، يكون ضلعه القائم مساويًا / لضعف خط د ط، حتى يكون ثلاثة أمثال خط ف ط الذي هو القطر المجانب له، وليكن ا–١٧٠–و القطع ف ک ا. ونخرج من نقطة ک التي هي تقاطع القطعين خطًا موازيًا لخط ا ب، وليكن ک ه. ونصل خطي د ک ا ه.

فأقول: إن كل واحد من خطي ا ه د ک / ضعف خط ه ک. ب–٣٢–و

برهانه: أنا نصل خط ا جـ ونجعل خط ل ک م موازيًا لخط ا د، وكذلك خط ف ص حتى يكون مماسًا للقطع. فلأن الضلع القائم لقطع ن ک أربعة أمثال قطره المجانب، وهو ن س، فمربع ک ل أربعة أمثال سطح س ل في ل ن؛ وكذلك مربع ا ب أربعة أمثال مربع ب ن، فمربعا ک ل ا ب جميعًا مساويان لأربعة أمثال سطح س ل في ل ن مع مربع ب ن، أعني مربع ب ل، فمربعا ک ل ب ا، أعني مربعي ه ب ب ا، أربعة أمثال مربع ب ل، أعني مربع ک ه، فمربعا خطي ه ب ب ا، أعني مربع ا ه، لأن زاوية ه ب ا قائمة، مساوٍ لأربعة أمثال مربع ه ک. فلهذا خط ا ه ضعف خط ه ک.

1 د تركيب: آ تركيب [جـ] / أن: ناقصة [ا، جـ، س] / ا ز ط د: ا ز ط [ب] – 6 ف ط: قط [ا] – 8 ف ک ا: ف ک [جـ] / ک: ک ا [د] / هي: على [ا، جـ، س] – 9 د ک ا ه: ا ه د ک [ا] – 11 برهانه: برهان ذلك [ا، جـ، س] – 12 ن ک: ر ک [د] – 13 فمربع: يكون مربع [ا، جـ، س] / ل ن: ل ر [د] – 14 ب ن: ن ر [د] / فمربعا: فمربعي [ب، د]، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] / مساويان: مساو [ب، د] – 15 مع: وكذلك [ب، د] / ب ن: ا ب ن [ب] ا ب ر [د] / فمربعا: فمربعي [د] / ب ا: ا ب [ا، جـ، س] – 16 مربع (الثانية): ناقصة [د] / فمربعا: فمربعي [د] / خطي: ناقصة [ب، د] / ب ا (الأولى والثانية): ا ب [ا، جـ، س] – 17 ه ب ا: ا ب ه [ا، جـ، س] / فلهذا: فلذلك يكون [ا، جـ، س] / ضعف: مكررة في بداية السطر التالي [ب].



وأيضًا، لأن خط د ف ثلثا خط د جـ، يكون خط د ف / ثلث خط ط د، وذلك ج-٢٠٥-و لأن خط د ط ضعف خط د جـ، فمربع ا د، أعني ضلع المربع المعلوم، ثلاثة أمثال سطح ط د في د ف. ولكن مربع د ا، أعني الذي ينتهي إلى القطع، ثلاثة أمثال سطح ط د في د ف، لأن ضلعه القائم ثلاثة أمثال قطره المجانب. فلهذا: قطع ف ك يجوز على نقطة ا بعينها.

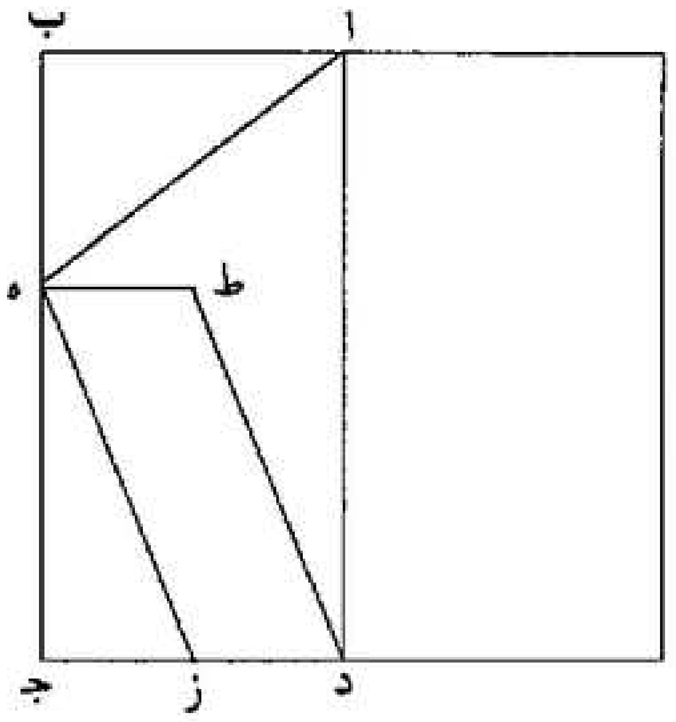
وأيضًا، لأن خط د جـ، أعني خط ط جـ، ثلاثة أمثال خط جـ ف وخط ط د ثلاثة أمثال خط د ف، فنسبة خط ط د إلى خط د ف كنسبة خط ط جـ إلى خط جـ ف. فلهذا: خط جـ ا مماس لقطع ف ك ا على نقطة ا.

وأيضًا، لأن نسبة ص ف إلى ف جـ / كنسبة ا د إلى د جـ وا د ضعف د جـ، ب-٣٢-ظ فخط ص ف ضعف خط ف جـ؛ وكذلك خط د ف ضعف خط ف جـ، فخط د ف مساوٍ لخط/ ف ص، ونسبة مربع ف ص إلى مربع ص ا كنسبة سطح ق ع في ع ك إلى س-١٢٣-و مربع ع ا، لأن كل واحد من خطي ا ص ص ف مماس للقطع على نقطتي ا ف، ونسبة

1 ثلثا: ثلثي [د] / يكون خط د ف: ويكون هو [ب، د] / ط د: غير واضحة، ونجد في الهامش «ط د» بخط آخر [ا] – 2-1 وذلك لأن خط د ط: لأن د ط: [ب، د] – 3-4 ولكن ... د ف: ناقصة [ا، جـ، د، س] – 4 فلهذا قطع ف ك يجوز: فلهذا يجوز قطع ف ك [ا، جـ، س] – 5 بعينها: بعينه [ا، د] ناقصة [ا، جـ، س] – 6 د جـ: د جـ ا [ب] – 7 د ف: ر ب [ب] / فنسبة: يكون نسبة [ا، جـ، س] – 8 فلهذا خط جـ ا مماس: فلذلك يكون خط ا جـ مماسًا [ا، جـ، س] / لقطع: لخط [ب] – 9 لأن: فوق السطر [ب] – 10 خط (الثالثة): ناقصة [ا، جـ، س] – 11 ف ص (الأولى والثانية): ص ف [ا، جـ، س] / ق ع: ف ع [د] – 12 كل واحد من خطي ا ص ص ف مماس: خطي ا ص س ف مماسين [ا، جـ، س].

مربع ا ص إلى مربع د ف كنسبة مربع ا ع إلى مربع د م وذلك لتوازي الخطوط في مثلث ا جـ د. فبالمساواة، نسبة مربع ف ص إلى مربع ف د كنسبة سطح ق ع في ع ك إلى مربع د م، ومربع ص ف مساوٍ لمربع ف د لأن خطي ص ف ف د متساويان، فسطح ق ع في ع ك مساوٍ لمربع د م. وإذا جعلنا مربع/ م ك مشتركًا بينهما، يكون سطح ق ع في ا-١٧٠-ظ
ع ك مع مربع ك م، أعني مربع ع م، مساويًا لمربع د م مع مربع م ك، أعني مربع د ك، فمربع خط م ع مساوٍ لمربع خط د ك، فخط د ك مساوٍ لخط ع م. ولكن خط/ ع م ضعف خط م جـ، لأن ا د ضعف خط د جـ، فخط د ك ضعف خط م جـ. / د-٧٠-و
وخط م جـ مساوٍ لخط ك ه، فخط د ك ضعف خط ك ه، فكل واحد من خطي ا ه د ك ب-٣٣-و
ضعف خط ك ه.

– ه – نريد أن نخرج في سطح ا ب جـ د، الذي هو نصف المربع المعلوم، خطين كخطي ا ه ه ز، حتى يكون كل واحد منهما ضعف خط ز د، فنجعل كل واحد من خطي ا ه د ط ضعف خط ه ط، وخط ه ط موازيًا لخط ا ب، كما بينا قبل. ونخرج خط ه ز موازيًا لخط د ط.



فأقول: إن كل واحد من خطي ا ه ه ز ضعف خط ز د.

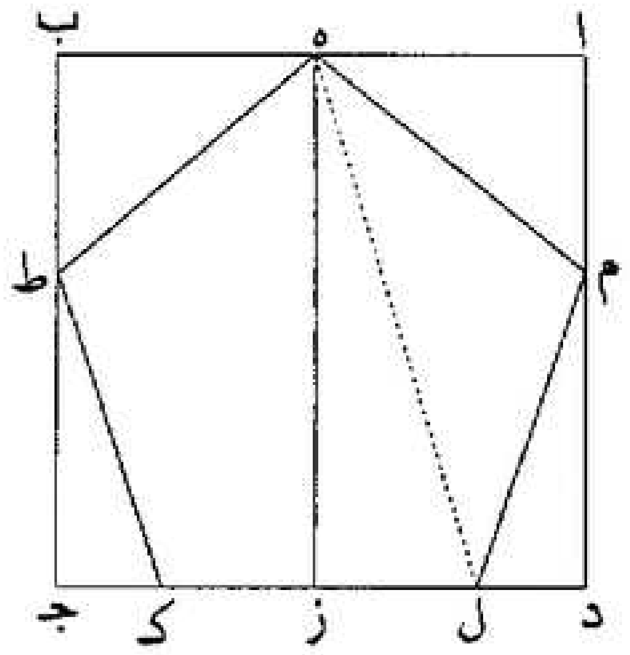
برهانه: أن خط ه ز مساوٍ لخط د ط، وخط ز د مساوٍ لخط ه ط، لأن سطح ه ط د ز متوازي الأضلاع؛ وكل واحد من خطي ا ه د ط ضعف خط ه ط. فكل واحد من خطي ا ه ه ز ضعف خط ز د؛ وذلك ما أردنا أن نبين./

1 وذلك: ناقصة [ب، د] – 3 لأن خطي ص ف ف د: لأنهما [ب، د] – 4-5 مساوٍ ... ع ك: ناقصة [د] – 4 يكون: كان [ا] – 5 ك م: م ك [ا، جـ، س] / مساويًا: مساوٍ [د] – 6 م ع: ع م [ا، جـ، س] – 7 خط (الثانية): ناقصة [ا، جـ، س] – 8 فكل: وكل [ب] / د ك: د ك ط، وضرب على الكاف بالقلم، ومن هنا إلى سطر 12 «خطي ا ه ه»، الفقرة ناقصة [د] – 10 ه: ب [جـ] ناقصة [ب] – 12 موازيًا: موازٍ [ب، د] – 15 برهانه: برهان ذلك [جـ، س] / د ط ... لخط: ناقصة [ب، د] – 16 ه ط د ز: ه ك د ر [ب] / فكل: وكل [ب].

– وَ – نريد أن نعمل في مربع ا ب جـ د المعلوم مخمسًا متساوي الأضلاع وليس جـ-٢٠٥-ظ بمتساوي الزوايا.

فنقسم كل واحد من خطي ا ب جـ د بنصفين على نقطتي ه ز، ونصل خط ه ز، ونخرج في سطح ب جـ ز ه / الذي هو نصف مربع ا ب جـ د خطين، وهما ه ط ط ك ب-٣٣-ظ حتى يكون كل واحد منهما ضعف خط ز ك، كما بينا قبل. ونجعل خط ز ل مساويًا لخط ز ك وخطَّ د م مساويًا لخط جـ ط ونصلُ خطي ل م م ه./

فأقول: إن مخمس ه ط ك ل م المعمول في مربع ا ب جـ د متساوي الأضلاع. ا-١٧١-و



برهانه: أن كل واحد من خطوط ه ط ط ك ك ل ضعف خط ك ز، فهي إذن متساوية. ولأن كل واحد / من خطي ل د د م مساوٍ لكل واحد من خطي ك جـ جـ ط س-١٢٣-ظ وزاوية ل د م مساوية لزاوية ك جـ ط، لأن كل واحدة منهما قائمة، فقاعدة م ل مساوية لقاعدة ك ط. وبهذا التدبير، يكون خط ه م مساويًا لخط ه ط، فخطوط ه ط ط ك ك ل ل م م ه متساوية. فمخمس ه ط ك ل م متساوي الأضلاع، وهو معمول في مربع ا ب جـ د المعلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

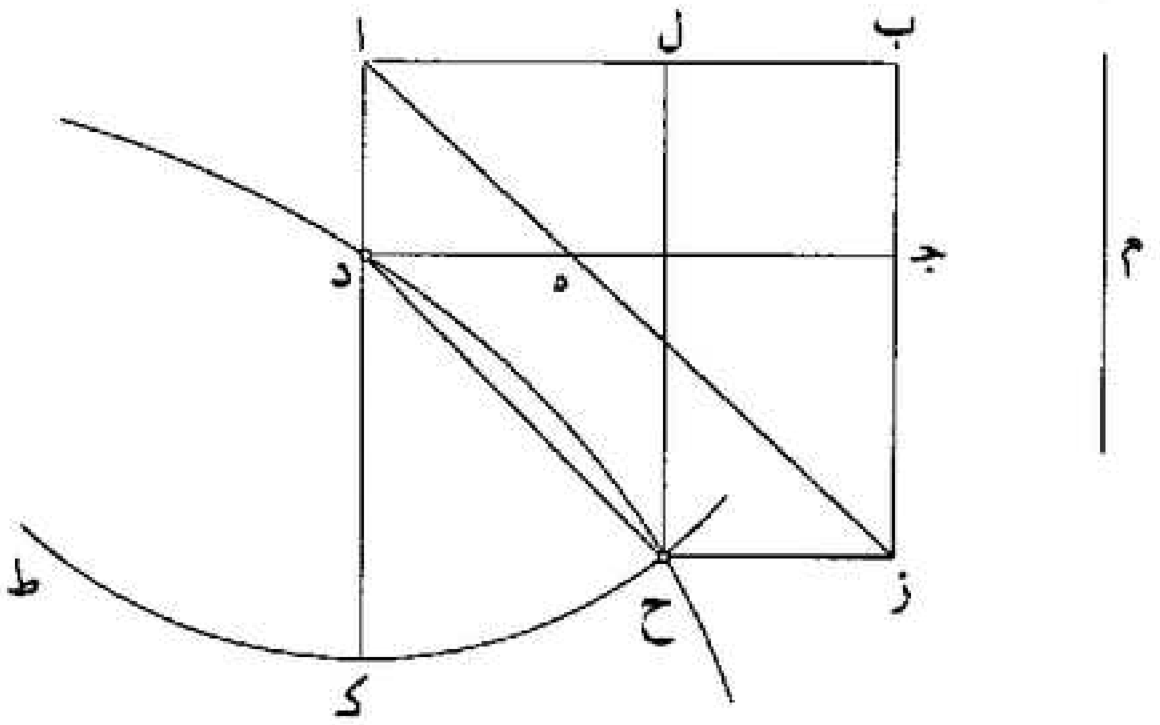
تمت الرسالة.

1 وَ: جـَ [جـ] ناقصة [ب، د] – 4 وهما: وليكن [ب، د] – 5 كما بينا: وذلك مما بيناه [ا، جـ، س] – 6 جـ ط: ط جـ [ا، جـ، س] – 8-9 ك ل ... خطي (الأولى): ناقصة [ب، د] – 8 إذن: اذًا [ا] – 10 منهما: منها [ب، د] – 11 يكون خط ه م مساويًا: خط ه م مساوٍ [ب، د، س] / ه ط: ه ك [د] / فخطوط: وكل واحد من خطوط [ب، س] فكل واحد من خطوط [د] – 14 الرسالة: نجد بعدها «بخط الحسين محمد بن علي في جـ يه ط ثمد هجرية وهو يو كانون الثاني غقسا رومية والحمد لله دائمًا والصلاة على النبي محمد وآله» [ب] «بحمد الله ومنة وصلواته على نبيه محمد وآله، في لد رمضان المبارك من سنة ١٢٥٠» [د] «ولله الحمد والمنة» [ا] «والحمد لله رب العالمين [س] «بعون الله وتوفيقه والحمد لله ربّ العالمين والصلوة والسلام على محمد وعلى آله وصحبته أجمعين. وقد استقرت سفينة القلم على جودي الزبر والرقم في يوم الأحد الحادي والعشرين من هجرة من أنزل عليه القرآن حرفًا بعد حرف عليه أفضل التحية» [جـ].

قول لأحمد بن شاكر ١٣١-ظ
في تثليث الزاوية المستقيمة الخطين

بيّن أولاً أنه إذا كان ا ب ب جـ محيطين بزاوية ب ونقطة د بينهما ونريد أن نرسم على د قطعًا زائدًا لا يقع عليه ا ب ب جـ، فذكر برهان أبلونيوس.

ثم قال: إذا كان ا جـ متوازي الأضلاع قائمَ الزوايا، وأخرج ب جـ على استقامة، ونريد أن نخرج من ا خطًا إلى ب جـ المخرج حتى يكون الواقع بين جـ د وب جـ المخرج كخط م المفروض؛ فنخرج ا د إلى كـ، ونجعل د كـ كـ م، ونخط على د قطعًا زائدًا، وعلى مركز د وببعد د كـ قطعةَ دائرة ط ح تقطع القطع على ح؛ ونخرج من ح خطًا موازيًا لـ د جـ عليه ح ز، ونخرج ب جـ حتى يلقاه على ز، ونصل ز ا، ‹فيقطع د جـ على ه›، فـ ه ز كـ م.

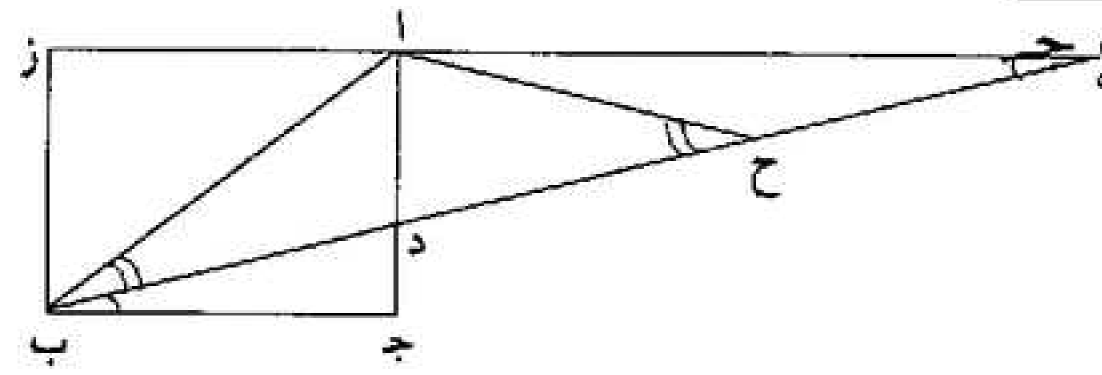


لأنا نصل د ح ونخرج ح ل موازيًا لـ كـ ا، فـ ز ح في ح ل المساوي لـ ب ز في ز ح كـ جـ د في د ا، كما تبين في يب من ب من *المخروطات*، فـ ز ب إلى ب جـ مساوية لـ ز ا إلى ا ه و‹لـ› جـ د إلى د ه، فـ جـ د إلى ز ح / مساوية لـ‹جـ د إلى› ه د؛ وقد ١٣٢-و

12 د ا: كتب بعدها «المساوي لـ ز ح في ح ل المساوي لـ ب ز في ز ح» – 14 ه ز (الأولى): ه د.

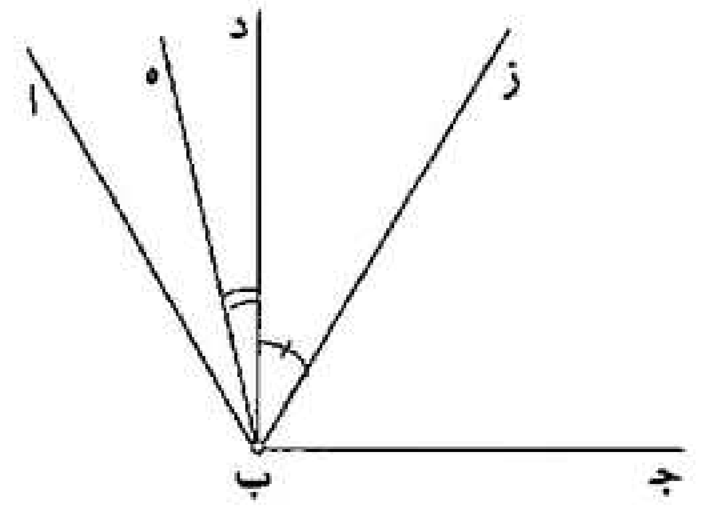
وصل بينهما بـ ه ز د ح، فـ ه ز كـ د ح ومساوٍ لـ د كـ الذي كـ م.

وإذ قدمنا ذلك، فنبين كيف نقسم زاوية ا ب جـ – ولتكن أولاً حادة – بثلاثة أقسام متساوية. فنخرج من نقطة ا ‹التي› على ا ب عمودَ ا جـ على ب جـ، ونتمم متوازي الأضلاع جـ ز، ونخرج ز ا إلى ه، و‹نصل› ب ه حتى يكون ه د ضعف ا ب، فـ ه ب جـ ثلث ا ب جـ.



لأنا ننصف ه د على ح ونصل ح ا، فـ د ح ح ا ح ه متساوية لأن ه ا د قائمة، فـ ه د ضعف ح ا، فـ ا ب كـ ا ح، فـ ا ب ح كـ ا ح د. لكن ا ح ب ضعف ه المساوية لـ د ب جـ، فـ ا ب د ضعف د ب جـ، وهو المراد.

وإن كانت الزاوية قائمة فسهل؛ وإن كانت منفرجة كـ ا ب جـ، فنخرج عمود ب د، ونجعل د ب ز ثلث د ب جـ القائمة، وه ب د ثلث ا ب د الحادة. فإذا أضفنا إلى كل واحد من ا ب ب جـ زاوية كـ ه ب ز، يكون قد قسمنا ا ب جـ بثلاثة أقسام ‹متساوية›، وهو المراد.



10-11 نجد في الهامش « وبوجه آخر ننصف الزاوية المنفرجة، فيكون نصفها حادة، ثم نثلث نصفها، فيكون ثلثاها ثلث المنفرجة».

بسم الله الرحمن الرحيم

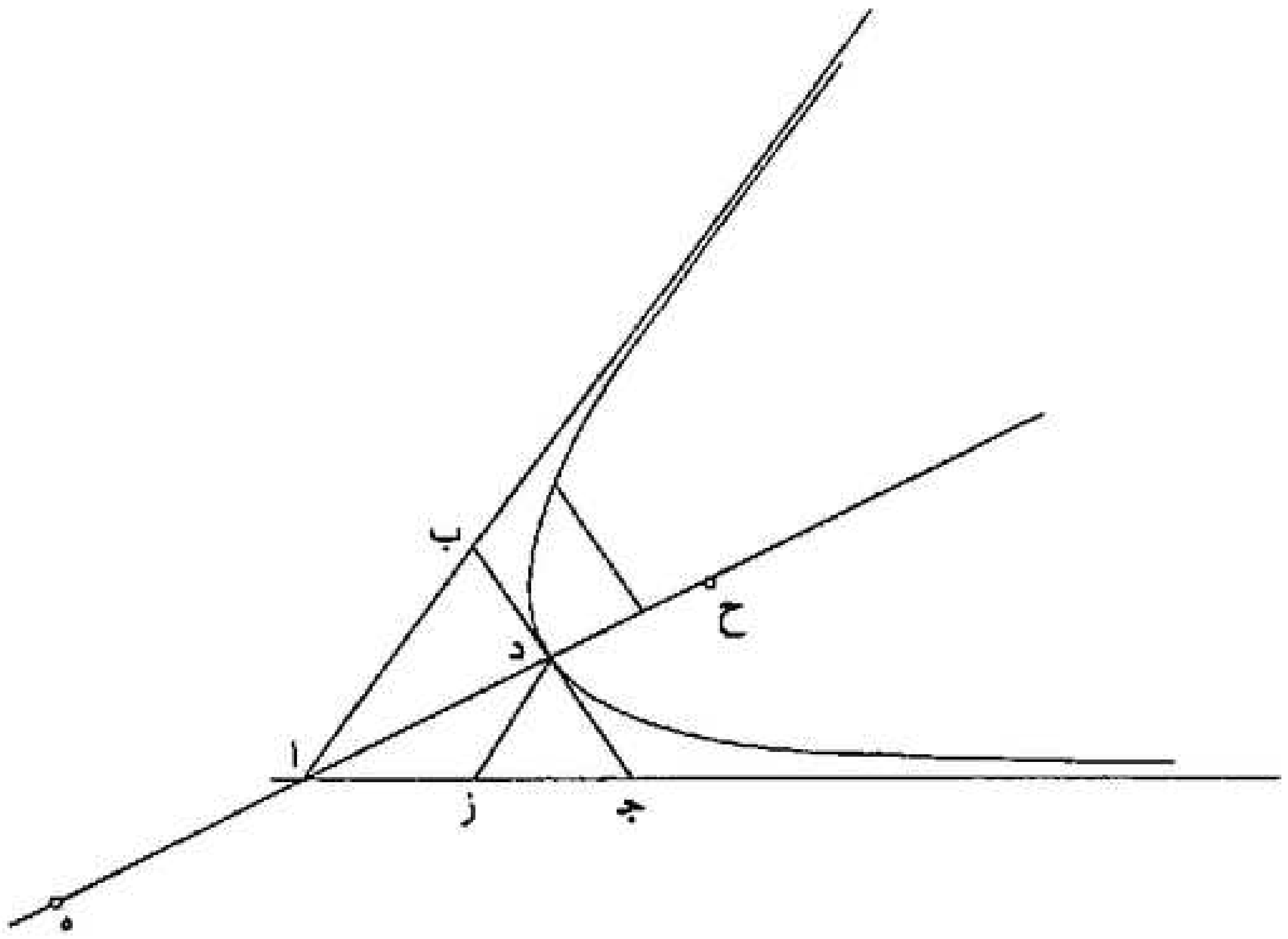
وبه نستعين

مسألة في عمل الموسطين
وقسمة زاوية معلومة بثلاثة أقسام متساوية
من قول ثابت بن قرة الحراني

〈مقدمة〉: هو الشكل الرابع من مقالة ب من *المخروطات*.

نريد أن نفرض بين خطين معلومين يحيطان بزاوية نقطةً نخط عليها قطعًا لا يماسّه خطا تلك الزاوية، وإن أخرجا بلا نهاية.

فليكن خطا ا ب ا جـ يحيطان بزاوية ا، ويُعلّم بينهما نقطة د. ونريد أن نجيز على نقطة د قطعًا زائدًا لا يماسّه خطا ا ب ا جـ.



6 هو ... *المخروطات*: في الهامش وبنفس الخط والإشارة صحيحة إلى المخروطات بحسب طبعة هيبرج.

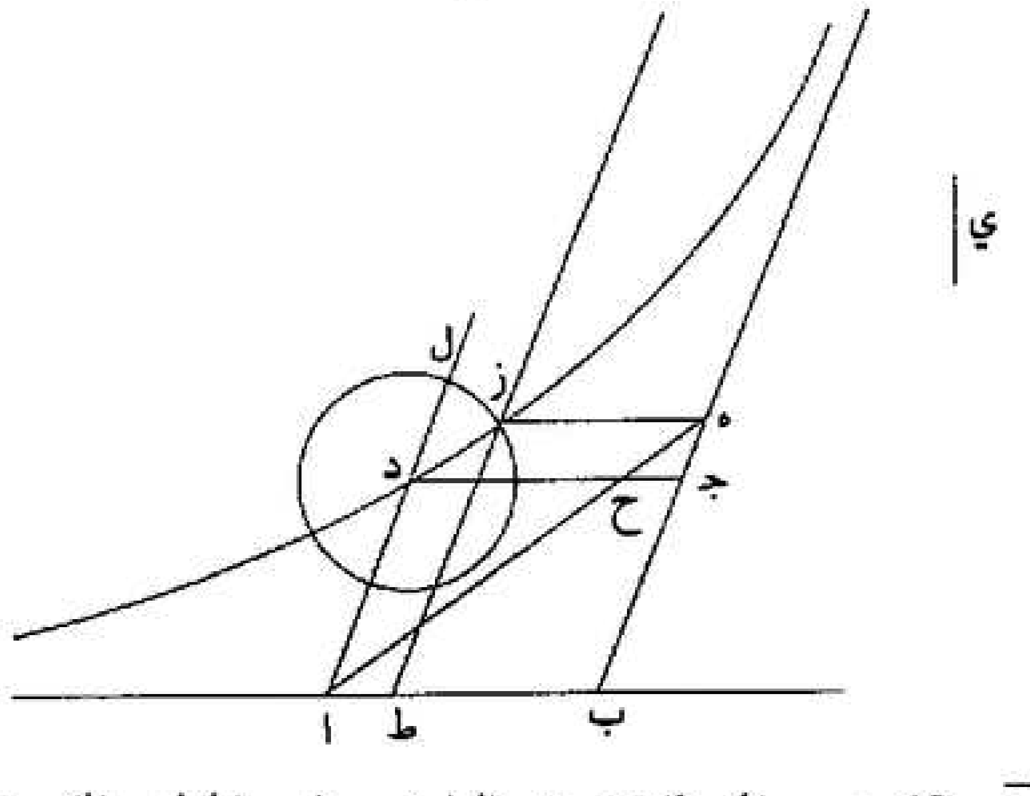
فنصل خط ا د ونخرجه إلى نقطة هـ ونجعل د ا مساويًا لخط ا هـ، ونخرج من نقطة د خطًا موازيًا لخط ا ب وهو د ز. وليكن خط ا ز مساويًا لخط ز جـ، ونصل جـ د ونخرجه إلى ب على استقامة. وليكن مربع جـ ب مساويًا لسطح د هـ في ح د. ونخرج خط ا د إلى ح، ونرسم عليه قطعًا زائدًا يجوز على نقطة د، حتى يكون الخط الذي يخرج في القطع إلى ح د يقوى على السطوح المضافة / إلى خط ح د بزيادة سطح شبيه بالذي يكون من ضرب د هـ ٢٤ في د ح. ولأن خط د ز يوازي خط ا ب، وخطَ جـ ز مثلُ خط ز ا، يكون خط جـ د مساويًا لخط د ب. فمربع جـ ب أربعةُ أمثال مربع جـ د. ولكن مربع جـ ب يساوي سطح د هـ في د ح، فكل واحدٍ من مربعي جـ د د ب مثلُ ربع سطح د هـ في د ح، فخطا ا ب ا جـ لا يقعان على القطع؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

مقدمة أخرى: من شكل يب من ب من *المخروطات*.

سطح ا ب جـ د متوازي الأضلاع، وقد أخرج ضلعه ب جـ على استقامة من جهة جـ بلا نهاية. ونريد أن نخرج من نقطة ا خطًا مستقيمًا ينتهي إليه حتى يكون ما يوتر زاوية جـ مساويًا لخط ي المفروض.

ونرسم على نقطة د قطعًا زائدًا، ونجعله لا يلقى واحدًا من خطي ب ا ب جـ وإن أخرجا بلا نهاية، وهو قطع د ز، ونخرج ا د / على استقامة إلى ل، ونجعل د ل مثل ي المفروض. ٢٥ ونرسم على مركز ‹د› وببعد د ل دائرة ل ز، ونخرج من نقطة ز خطين يوازيان خطي ا ب ب جـ، وهما هـ ز ز ط. ونصل بين نقطتي ا هـ بخط ا ح هـ.

فأقول: إنا قد عملنا ما أردناه، وإن خط ح هـ مثل ي المفروض.

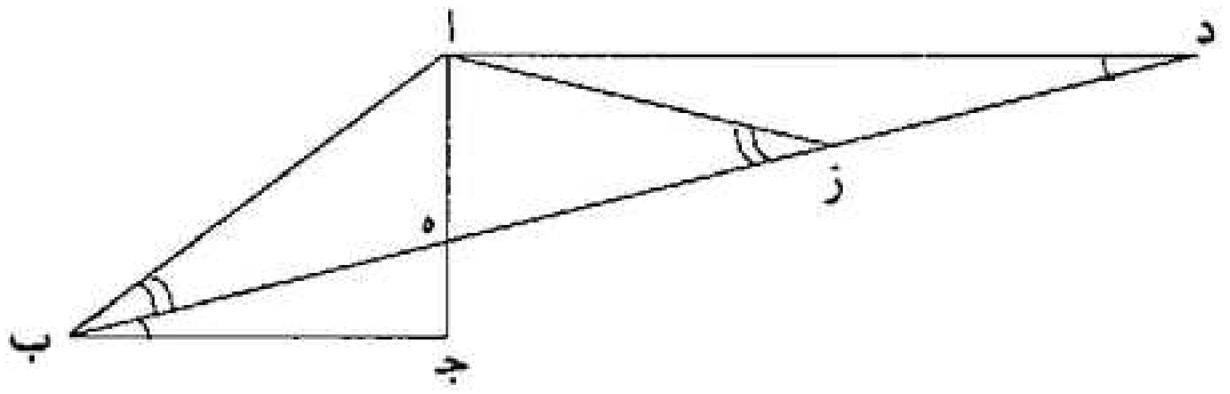


4 في: الى – 5 خط: ه د – 10 من ... *المخروطات*: في الهامش وبنفس الخط، والمقصود أن هذه المقدمة تستند في برهانها إلى هذا الشكل، وهذا الشكل هو بهذا الرقم في طبعة هيبرج. انظر الكتاب الرابع xxxvii-xxxvi من مجموعة بابوس الرياضية، فليس هناك مجال للشك في معرفة ثابت بن قرة بهذه الفقرة من بابوس – 14 أخرجا: اخراجا – 15 وهو: وهي – 18 عملنا: علمنا.

برهان ذلك: أن أبلونيوس قد بيّن في كتابه، في المقالة الثانية، أنه إذا تُعلم نقطة على القطع الذي رسمناه، أيَّ نقطة كانت، وأخرج منها خطان مستقيمان إلى الخطين اللذين لا يلقيان ‹القطع› على أي زاويتين اتفقتا، وأجيز على نقطة أخرى، أيّ نقطة كانت، خطان يوازيان هذين الخطين، فإن السطح الذي يحيط به الخطان – اللذان هذان الخطان موازيان لهما – مساوٍ للسطح الذي يحيط به هذان الخطان. فإذًا ضربُ ا د في د جـ مساوٍ لضرب ط ز في ز هـ. فعلى جهة التكافؤ تكون نسبة هـ ب إلى ب جـ كنسبة جـ د إلى جـ ح، التي هي كنسبة هـ ا إلى ا ح، أعني نسبة جـ د إلى د ح. فـ هـ ز إذًا مثل د ح، وهما متوازيان، فخط د ز مثل هـ ح ود ز مثل ي المفروض؛ لأنه خرج من مركز دائرة ل ز إلى محيطها، وقد أخرج ل د مساويًا لخط ي المفروض، فـ هـ ح إذًا مساوٍ لخط ي المفروض؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

المسألة الثانية: نريد أن نقسم زاوية ا ب جـ المعلومة بثلاثة / أقسام متساوية. ٢٦

فنخرج من نقطة ا عمودًا على خط ب جـ وهو ا جـ، ونخرج من نقطة ا خطًا يوازي ب جـ وهو ا د، ونخرج من نقطة ب خطًا يوتر زاوية جـ ا د، ويكون ما يوترها منه مثل ضعف خط ب ا؛ وليكن خط د هـ. ونقسم هـ د بنصفين على ز، ونصل ا ز، فخط ا ز مثل ز هـ، فإذًا ا ز مثل ا ب، وزاوية ا ز ب مثل زاوية ا ب ز. ولكن زاوية د مثل زاوية د ب جـ لأن ا د يوازي ب جـ، فإذًا زاوية ا ب د مِثْلا زاوية د ب جـ. فقد قسمنا زاوية ا ب جـ بثلاثة أقسام متساوية؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



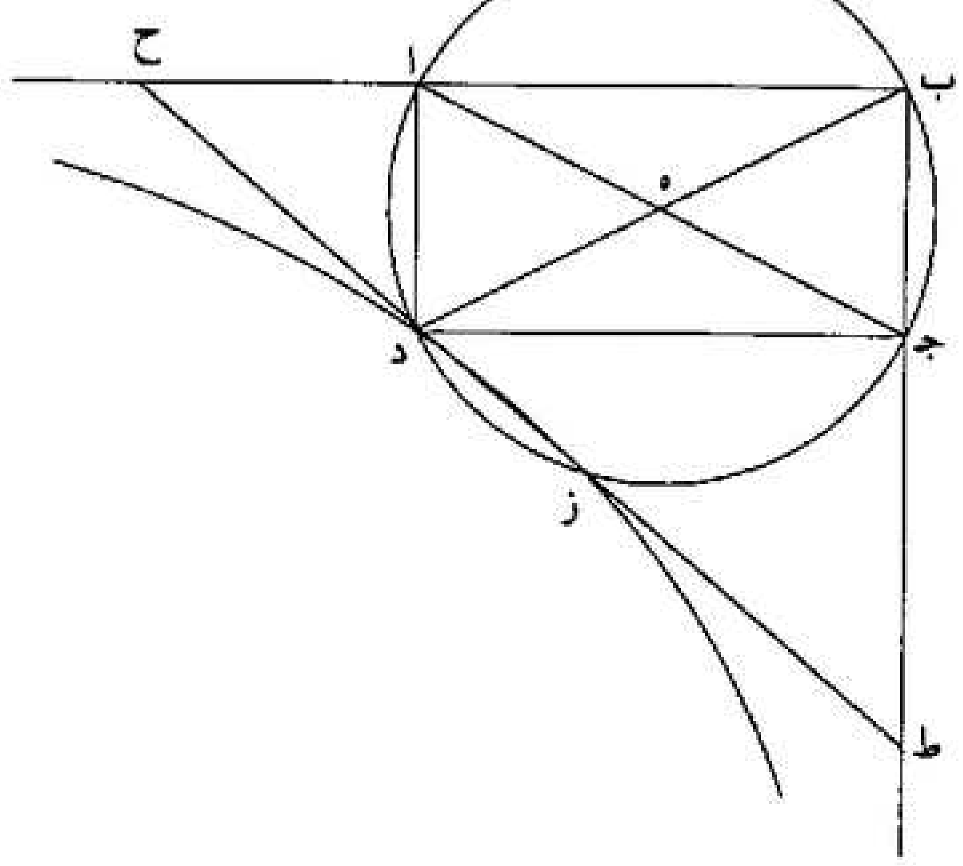
في عمل الموسطين: نريد أن نخرج بين مقداري ا ب ب جـ مقدارين، لتتوالى المقادير الأربعة متناسبة.

فنجعل ا ب ب جـ يحيطان بزاوية ا ب جـ، قائمة، ونتمم سطح ا ب جـ د المتوازي الأضلاع القائم الزوايا، ونخرج قطريه يتقاطعان على هـ، ونخط على نقطة د قطعًا زائدًا يجوز

1 أبلونيوس: ابلنيوس / المقالة الثانية: راجع المخروطات المقالة الثانية الشكل الثاني عشر – 3 يلقيان: يلتقيان – 6 التكافؤ: التكافى / تكون: تكو – 11 المسألة الثانية: كأنه اعتبر الشكل السابق المسألة الأولى – 20 فنجعل: فنجعلها، ولم نر ما يعود عليه الضمير – 21 قطعًا زائدًا: قطع زايد.

بين زاوية ب ولا يقع عليه ا ب ب جـ وإن أخرجا إلى غير نهاية. ونديرعلى مركز هـ، وببعد ب هـ دائرة ا ب جـ د تقطع القطع على نقطة ز، ونجيز على نقطتي ز د خطًا مستقيمًا يلقى بجهتيه الخطين اللذين لا يلقيان القطع؛ وليلقهما على نقطتي ح ط.

فأقول: / إن خطي ا ح ط جـ واسطان بين جـ ب ب ا في النسبة. ٢٧



برهانه: أن أبلونيوس قد بيّن في المقالة الثانية، من كتابه في *المخروطات*، أنه إذا قطع القطعَ الزائدَ خطٌ مستقيمٌ على نقطتين؛ فإن قطعتي ذلك القطع متساويتان، فخطا د ط ز ح – اللذان ينفرزان بين القطع وبين الخطين اللذين لا يلقيان القطع – متساويان. ونجعل خط د ز مشتركًا، فخط ز ط مثل ‹خط› د ح، ونقطة ح الخارجة من الدائرة خرج منها خطا ح د ح ب، فقطعا الدائرة، فخط د ح في ح ز مثلُ ب ح في ح ا. ولكن ز ح في ح د مثل د ط في ز ط لأنهما متساويان، فخط د ط في ط ز مثل ب ح في ح ا. وأيضًا خرج من نقطة ط الخارجة ‹من الدائرة› خطا ط ز ط ب، فقطعا الدائرة، فخط د ط في ط ز مثل ب ط في ط جـ. وقد استبان أن د ط في ط ز مثل ب ح في ح ا، فنسبة ب ط إلى ب ح كنسبة ح ا إلى ط جـ. ولكن نسبة ط ب إلى ب ح كنسبة د ا إلى ا ح وكنسبة ط جـ إلى جـ د، فنسبة ط ب إلى ب ح كنسبة ط جـ إلى جـ د، ود ا مثل ب جـ وجـ د مثل ا ب، فنسبة جـ ب إلى ا ح كنسبة ح ا إلى جـ ط وكنسبة ط جـ إلى ب ا. فقد وقع بين خطي جـ ب ب ا خطا ا ح جـ ط وتوالت الأربعة على نسبة واحدة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

1 زاوية: رابة / عليه: عليها / ونديرِ: ونريد – 1-2 وببعد ب هـ: ونبعد ب – 3 بجهتيه: بجهته – 5 أبلونيوس: ابلنيوس / المقالة الثانية: نجد في الهامش وبنفس الخط «من ح من مقال ب»، والإشارة صحيحة – 6 متساويتان: مساويان – 7 اللذان: اللذين / القطع (الثانية): الخط / متساويان: مساويان – 9 ح د: فوق السطر وبنفس الخط – 13 ح ا إلى: ح الى

تمت المسألة، والحمد لله ربّ العالمين، وصلواته على خير رسله محمد وآله أجمعين.

كتب في ربيع الأول ‹سنة› اثنين وسبعين وستمائة هجرية، حامدًا لله، ومصليًا على رسوله.

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

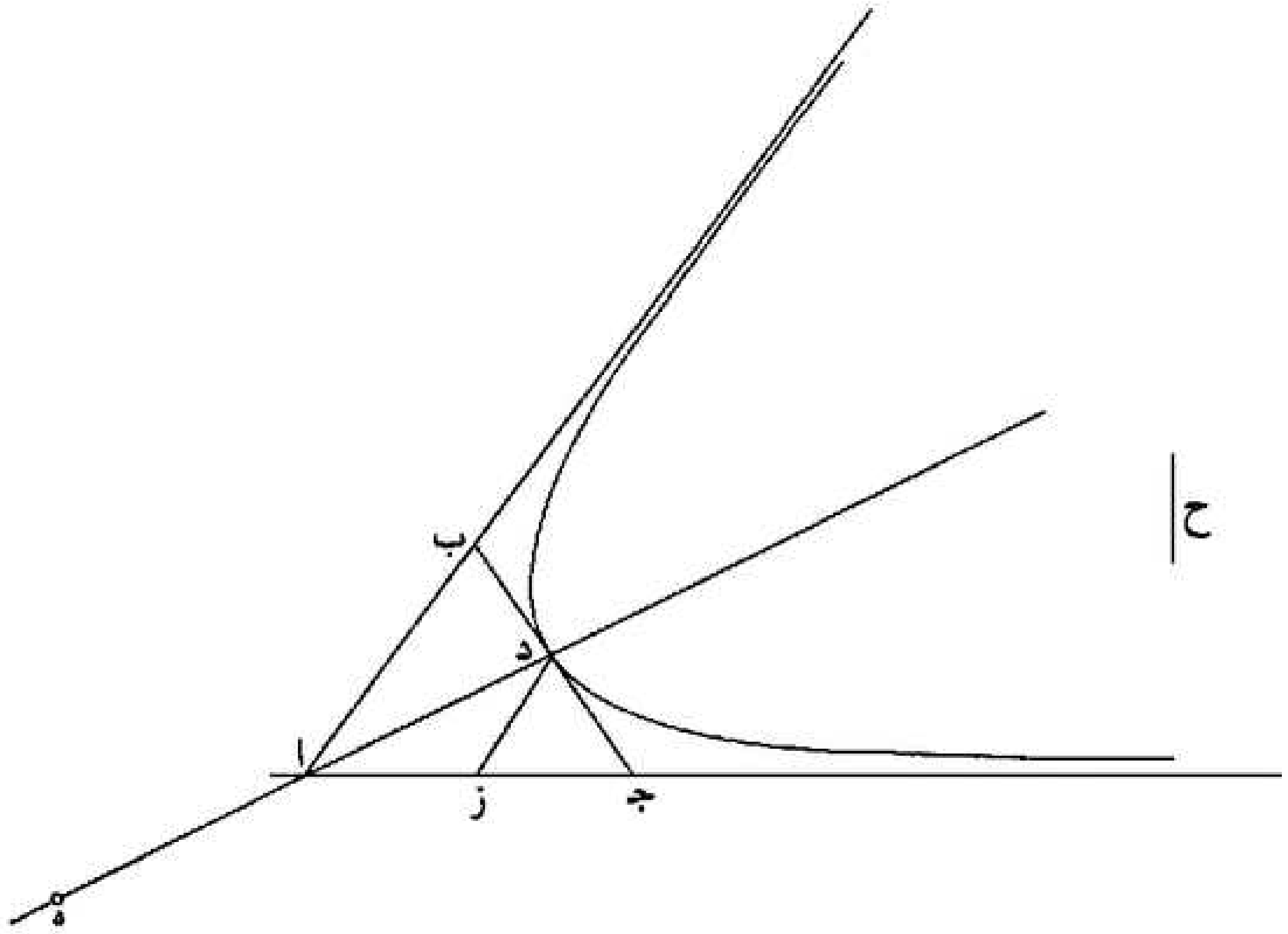
منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

بسم الله الرحمن الرحيم ١٩٢-ظ

قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية
صنعه ثابت بن قرة الحراني

إذا كان خطان معلومان مستقيمان يحيطان بزاوية، ويُعلم داخل تلك الزاوية نقطة ما، فكيف نخط قطعًا زائدًا يجوز على تلك النقطة ولا يكون خطا تلك الزاوية يقعان على ذلك القطع وإن أخرجا إلى غير نهاية؟

فليكن خطا ا ب ا جـ يحيطان بزاوية ا، ويتعلم داخلها نقطة ما، وهي نقطة د، فنريد أن نرسم قطعًا زائدًا يجوز على نقطة د ولا يقع عليه خطا ا ب ا جـ.



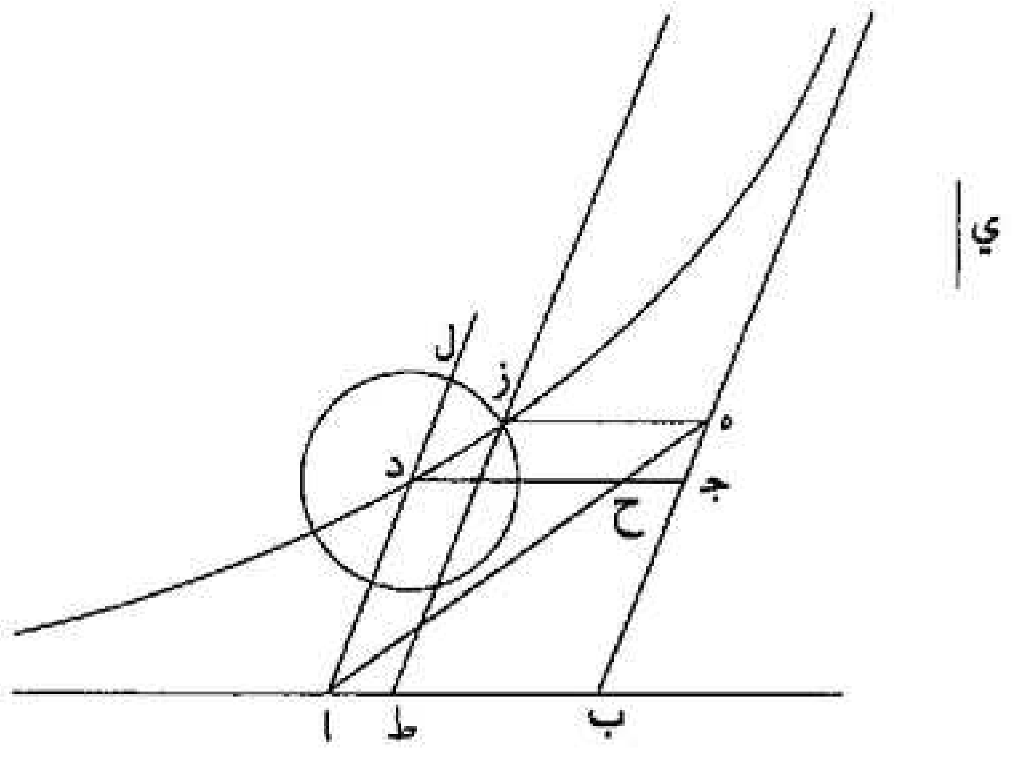
فلنصل ا د ونخرجه إلى هـ، ونجعل خط ا د يساوي خط هـ ا. ونخرج خط ا جـ إلى غير نهاية، ونخرج من نقطة د خطًا موازيًا لخط ا ب عليه د ز، ونجعل ا ز مثل ز جـ.

2 قسمة: نجد قبلها «لز» – 5 فكيف: كيف – 8 د: جـ – 9 ا د (الأولى): ا جـ.

ونصل خط جـ د ونخرجه على استقامة إلى ب. وليكن مربع ب جـ مساويًا لسطح د هـ في خط ح، فنرسم على نقطة د قطعًا زائدًا، حتى يكون الخط الذي يخرج في القطع على الترتيب يقوى على السطوح المضافة إلى ح بزيادة سطح شبيه بالسطح الذي يكون من ضرب د هـ في ح. ولأن خط ز د يوازي خط ا ب وخط ا ز يساوي خط ز جـ، يكون د جـ مساويًا لخط د ب؛ فمربع ب جـ أربعة أمثال مربع جـ د. ولكن مربع ب جـ مساوٍ لسطح د هـ في ح؛ / فخطا ا ب ا جـ لا يقعان على القطع الزائد؛ وذلك ما أردنا ١٩٣-و
أن نبين.

مقدمة: سطح ا ب جـ د متوازي الأضلاع، وقد أخرج ضلع ب جـ على استقامته من جهة جـ، ولا نجعل له غاية. ونريد أن نخرج من نقطة ا خطًا مستقيمًا ينتهي إليه حتى يكون ما يوتر زاوية جـ منه مساويًا لخط ي المفروض.

فنرسم على نقطة د القطع المسمى أوبربولى، ونجعله لا يلقى واحدًا من خطي ا ب ب جـ وإن أخرجا بغير نهاية، وليكن د ز. ونخرج ا د على استقامته إلى ل حتى يكون د ل مثل ي المفروض؛ ونرسم على نقطة د وببعد د ل دائرة ل د ونصل نقطتي د ز بخط د ز المستقيم. وليكن دائرة ل د ‹تقطع› قطع د ز على نقطة ز، ونخرج من ز خطين يوازيان خطي ا ب ب جـ وهما خطا ز هـ ز ط، ونخرج خط ا هـ ح.



فنقول: إنا قد عملنا ما أردنا وإن خط هـ ح مثل خط ي المفروض.

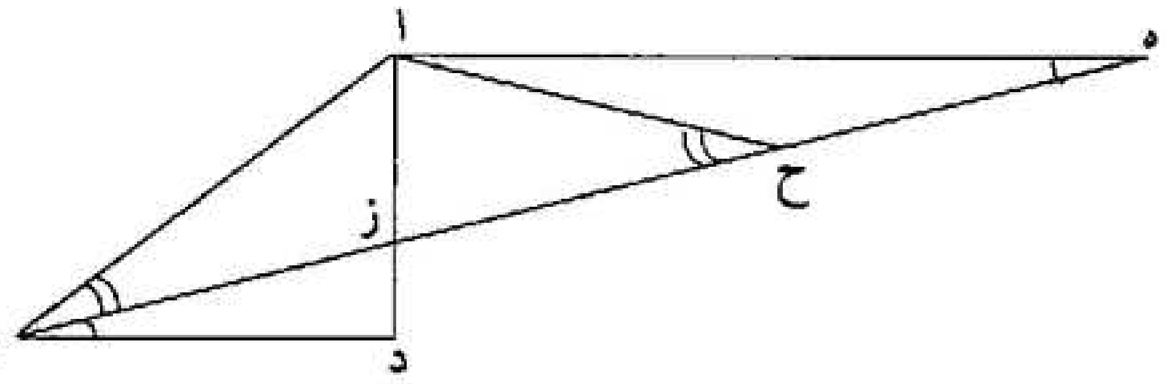
برهان ذلك: أن أبلونيوس قد بيّن في المقالة الثانية من كتابه في *المخروطات* أنه إذا تُعلم على هذا القطع الذي رسمناه أي / نقطة كانت، وأخرج منها خطان مستقيمان إلى ١٩٣-ظ

11 أوبربولى: من الواضح أن هذه الكلمة هي تعريب للكلمة اليونانية ὑπερβολή / يلقى: يلقا – 12 وليكن د ز: أي وليكن هذا القطع د ز – 13 ونرسم: الواو متصلة بالنون – 16 عملنا: علمنا.

الخطين اللذين لا يلقيان القطع على أي زاويتين اتفقتا، وأجيز على نقطة أخرى على القطع، أي نقطة كانت، خطان موازيان لهذين الخطين، كان السطح الذي يحيط به هذان الخطان مساويًا للسطح الذي يحيط به الخطان اللذان هذان الخطان موازيان لهما. فإذًا ضربُ ا د في د جـ مساوٍ لضرب ز ط في ز هـ؛ فعلى جهة التكافؤ، تكون نسبة هـ جـ ب، أعني ز ط، إلى ب جـ، أعني ا د، كنسبة د جـ إلى ز هـ. لكن نسبة هـ جـ ب إلى ب جـ كنسبة هـ ا إلى ا ح، أعني نسبة د ح جـ إلى د ح، فـ ز هـ مثل د ح، فهما متوازيان متساويان، فخط د ز مساوٍ لخط هـ ح، وخط د ز يساوي خط ل د لأنهما خرجا من مركز دائرة إلى محيطها، وقد أخرج ل د مساويًا لخط ي المفروض؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

نريد أن نقسم زاوية ا ب جـ المعلومة المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية.

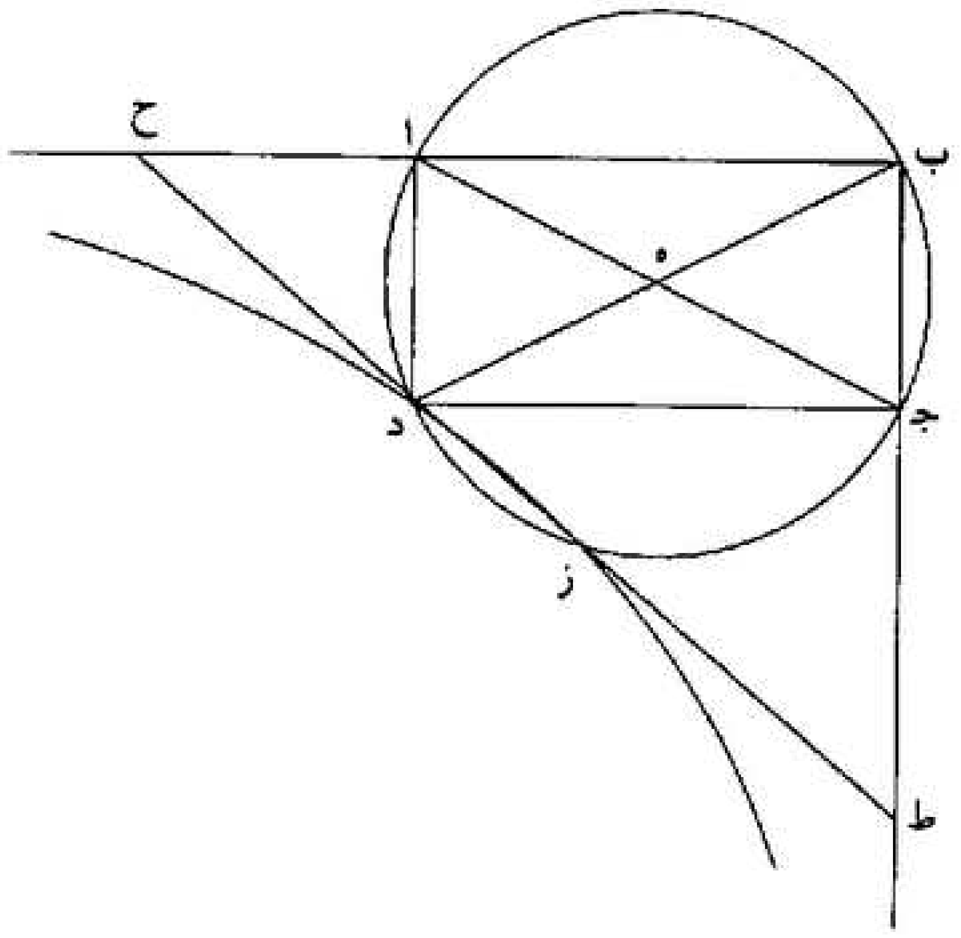
فنخرج من نقطة ا عمودًا على خط ب جـ وهو عمود ا د، ونخرج من ا / خطًا ١٩٤-و يوازي ب جـ وهو ا هـ، ونخرج من نقطة ب خطًا يوتر زاوية د ا هـ ويكون ما يوترها منه ضعف خط ا ب، وليكن خط ز هـ، ونقسم ز هـ بنصفين على نقطة ح، ونوصل خط ا ح، فـ ز هـ قطر والمركز ح، فـ ا ح إذًا مثل ا ب، وزاوية ا ح ب مثل زاوية ا ب ح. ولكن زاوية ا ح ب ضعف زاوية ا هـ ح؛ لأن ا ح مثل هـ ح، فإذًا زاوية ا ب ح ضعف زاوية ا هـ ح. ولكن زاوية هـ ب د مثل زاوية ا هـ ح لأن ا هـ يوازي ب جـ، فإذًا زاوية ا ب هـ مثلا زاوية هـ ب د. فقد قسمنا زاوية ا ب جـ بثلاثة أقسام متساوية؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



وأتى أبو بكر الهروي على عمل القطع الزائد على نقطة، فقال: نريد أن نخرج ‹خطين› بين خطين لتتوالى الخطوط الأربعة المستقيمة على نسبة واحدة.

2 السطح: سطح – 6 د ح جـ: د ح ز – 7 وخط د ز: وخط حز / ل د: الد – 12 د ا هـ: زباه – 16 هـ ب د: ا د ب / ا هـ ح: د ا هـ – 18 نبين: هناك تعليق في الهامش بخط آخر وهو لا يضيف شيئًا إلى المخطوطة – 19 وأتى: وبنى، ويمكن قراءتها وبنى أو وثنى، وكل العبارة غامضة المعنى ولا تفسر ما يعقبها من النص.

فنجعل خطي اب ب جـ المستقيمين يحيطان بزاوية ا ب جـ القائمة، ونتمم سطح ا ب جـ د المتوازي الأضلاع القائم الزوايا، ونخرج قطريه يتقاطعان على نقطة هـ، ونخط قطعًا زائدًا يجوز على نقطة د ولا يقع عليه خطا ا ب ب جـ وإن أخرجا إلى / غير نهاية، ١٩٤-ظ فندير على نقطة هـ وببعد د هـ ‹دائرة› د ب، ومن البيّن أنها تجوز على نقط ا ب د جـ التي على زوايا هذا السطح، فتقطع القطع، وليكن على نقطة ز، ونجيز على نقطتي ز د خطًا مستقيمًا يلقى بجنبتيه الخطين اللذين لا يقعان على القطع، فليلقهما على نقطتي ح ط.



فأقول: إن خطي ا ح ط جـ وسط في القسمة بين خطي ا ب ب جـ.

برهانه: أن أبلونيوس قد بيّن في المقالة الثانية من كتابه في *المخروطات* أنه إذا قطع القطعَ الزائدَ خطٌ مستقيم على نقطتين، فإن قطعتي ذلك الخط اللتين تنفرزان بين القطع وبين الخطين اللذين لا يلقيانه متساويتان. ونجعل خط د ز مشتركًا، فخط ز ط مثل خط د ح. ونقطة ح الخارجة من الدائرة خرج منها خطا د ح ح ب فقطعا الدائرة، فخط ز ح في د ح مثل خط ح ب في ا ح. وإنما خرج من نقطة ط الخارجة من الدائرة خطا ط ب ط ح، فقطعا الدائرة، فخط د ط في ز ط مثل ط ب في ط جـ، فخط ط ب في ط جـ مثل خط ح ب في ا ح؛ لأن ح ب في ا ح مثل ز ح في د ح، أعني د ط في ز ط. وقد كان استبان أن خط ز ح في د ح / مثل خط ح ب في ا ح، فنسبة ط ب ١٩٥-و

1 خطي: خطا – 4 نقط: من المحتمل أن الناسخ كتبها «نقطة» ثم صحح الطاء استدراكًا كما نجد في المخطوطة / ا ب د جـ: ا ن د ز – 5 فتقطع: فيقطع / ونجيز: ويجوز – 6 يلقى: يبقا – 11 متساويتان: متساويين / د ز: د ن / ز ط: جـ ط – 12 د ح: ز ح / الدائرة: المركز / د ح ح ب: ز ح جب – 13-14 خطا ط ب ط ح: خطا د ط ط ر ط ب ط حـ.

إلى ح ب كنسبة ا ح إلى ط جـ. لكن نسبة ط ب إلى ح ب كنسبة ا د إلى ا ح وكنسبة ط جـ إلى د جـ، فنسبة ط ب إلى ح ب كنسبة ا د إلى ا ح وكنسبة ا ح إلى ط جـ وكنسبة ط جـ إلى د جـ؛ وا د مثل ب جـ ود جـ مثل ا ب، فنسبة ب جـ إلى ا ح كنسبة ا ح إلى ط جـ وكنسبة ط جـ إلى ا ب. فقد وقع بين خطي ب جـ ا ب خطا ا ح ط جـ وتوالت الخطوط الأربعة متناسبة. فنسبة ب جـ إلى ا ح كنسبة ا ح إلى ط جـ وكنسبة ط جـ إلى ا ب؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

2 د جـ: د ح / ا د: ا ز – 3 د جـ (الأولى): د ب.

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

ح-١٠٢-ظ
ا-١٥٠-ظ
ا-١٥١-و

قسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية / واستخراج خطين بين خطين تتوالى متناسبة

مثال ذلك في قسمة الزاوية: أن يفرض لنا زاوية ا ب جـ ويُطلب منا أن نقسمها بثلاثة أقسام متساوية.

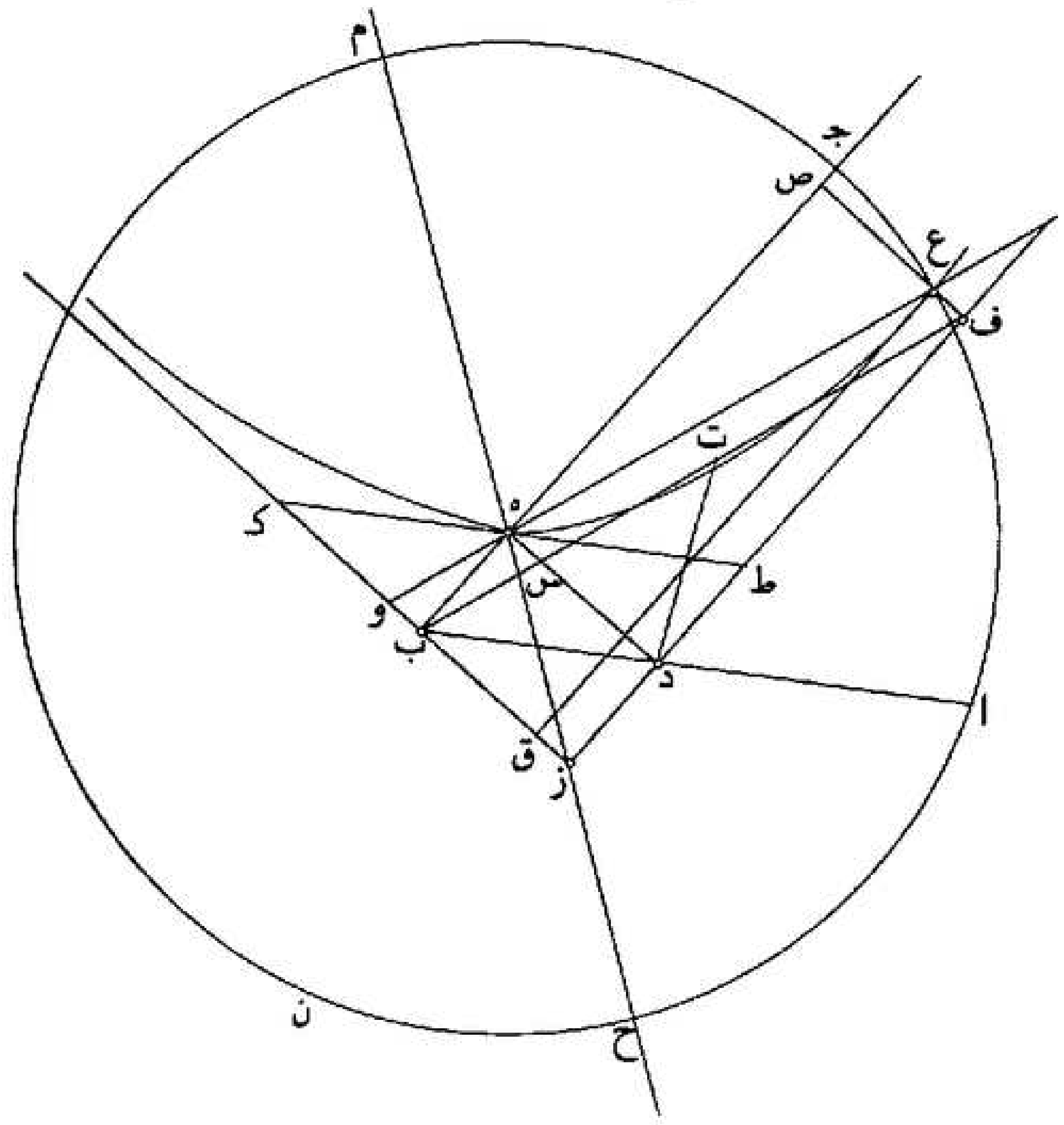
وينبغي أن تكون حادة. فإنها إن كانت قائمة، فقد تسهل قسمتُها من غير هذه الجهة. وإن كانت منفرجة، نصّفناها لتكون كلّ واحدة منها زاوية حادة.

ونأخذ من أحد خطي ب ا ب جـ أيّ مقدار كان، فليكن مثلَ ب د من ب ا، ويلقى من نقطة د عمود د ه ويُتمم سطح ز ه. ونخرج خطي ز ب ز د بلا نهاية، ونصل خط ه ز ونخرجه حتى يكون ز ح مثل ه ز. ونجيز على نقطة ه خط ط ک يوازي د ب، ونجعل سطح ه ح في خط ل مثل مربع خط ط ک، فيكون ز ط ز ک الخطين اللذين لا يلقيان القطع، ويكون رأسُ القطع نقطةَ ه وضلعُه المائل ه ح وضلعُه القائم خط ل.

ونأخذ من ه ح ضعفَ ب د، وليكن ه م. ونعمل على مركز ه وببعد ه م قوس م ن. ونرسم القطع: إمّا بإخراج خط ز ه وتجزئته بأجزاء صغار، واستخراج الخطوط الموسّطات فيما بين جزء جزء فيها وبين خط ل وإمّا بوضع حرف المسطرة على نقطة ه / وعلى خطي ز ط ز ک اللذين لا يلقيان القطع، وإثباتها على النقطة، ونقلها على الخطين يمنةً ويسرةً لنظهر بأحد العملين نقطة ع المشتركة بين قوس م ن وبين القطع، وهي التي ما بينها وبين ح-١٠٣-و

3 بين: فوق السطر [ح] – 4 مثال: بجـ مثال [ح] / يفرض: نفرض [ا] – 6 قسمتها: قسميها [ح] – 7 واحدة: واحد [ا، ح] – 8 خطي: طرفي [ح] – 9 ويتمم: ويتم [ا] / ونخرج: ويخرج [ا] – 10 يوازي: ثم يوازي [ا] – 11 سطح: خط [ح] – 12 يلقيان: يلتقيان [ا] / القطع (الأولى): ناقصة [ا] – 13 مركز ه وببعد: مركزه و نبعد [ا] – 16 يلقيان: يلتقيان [ا] / القطع: ناقصة [ا] – 17 لنظهر: ليظهر [ا] / م ن: م ل [ا، ح].

الخطّ الذي يليها من خطي ز ط ز ك مثل ما بين نقطتي ه و، بين الخط الآخر من الخط المستقيم الذي يمرّ بحرف المسطرة الواقع على النقطتين وعلى الخطين.



ونجيزُ على نقطة ع خط ف ص يوازي ز ك، ونخرج خط ع ق يوازي خط ف ز، ونصل خطي ه ع ب ف، فيكون سطح ع ف ز ق مساويًا لسطح ه د ز ب، لأن نقطتي ه ع اللتين على القطع قد خرج من نقطة ع منهما خطا ع ف ع ق موازيين لخطي ه ب ه د اللذين قد خرجا من نقطة ه. فنسبة ع ف إلى ه د كنسبة ز د إلى ز ف، أعني ب ه إلى ب ص، ونسبة ب ه إلى ب ص كنسبة ه س إلى ص ف، أعني ه د للتشابه، فنسبة ع ف إلى ه د كنسبة / ه س إلى ه د، فإذًا ع ف مثل ه س؛ ولأنهما متوازيان، ا-١٥١-ظ يكون س ف مثل ه ع. ولكن ه ع مثل ه م وه م ضعف ب د، فخط س ف ضعف ب د. ونخرج من نقطة د إلى منتصف س ف خط د ت، فيكون مثل ت س، لأن مثلث ف د س قائم الزاوية، ونقطة ت مركز الدائرة التي تمر بنقط ف د س. فخطوط

2-1 نقطتي ه و، بين الخط الآخر من الخط المستقيم: نقطة ه وبين الخط المستقيم [ح] – 4 ب ف: ر ف [ا] / ه د ز ب : ه ل ز ب [ا] – 5 منهما: منها [ا، ح] / خطا: خط [ح] – 6 نقطة: ناقصة [ا] – 7 ب ص (الأولى): بض [ا] – 8 مثل: مثلا [ا] – 11 بنقط: بنقطة [ا] / ف: ق [ا].

د ت ت ف ت س مساوية لخط د ب، فزاوية د ت ب – أعني د ت س – مثل زاوية د ب ف. وزاوية د ت س مثلا زاوية د ف س، لأنها على المركز، والأخرى على المحيط. ولكن زاويتي د ف س ف ب ه المتبادلتين متساويتان، فزاوية د ف س مثل زاوية س ب ه. فنقسم زاوية د ب س بنصفين، وقد تم المطلوب.

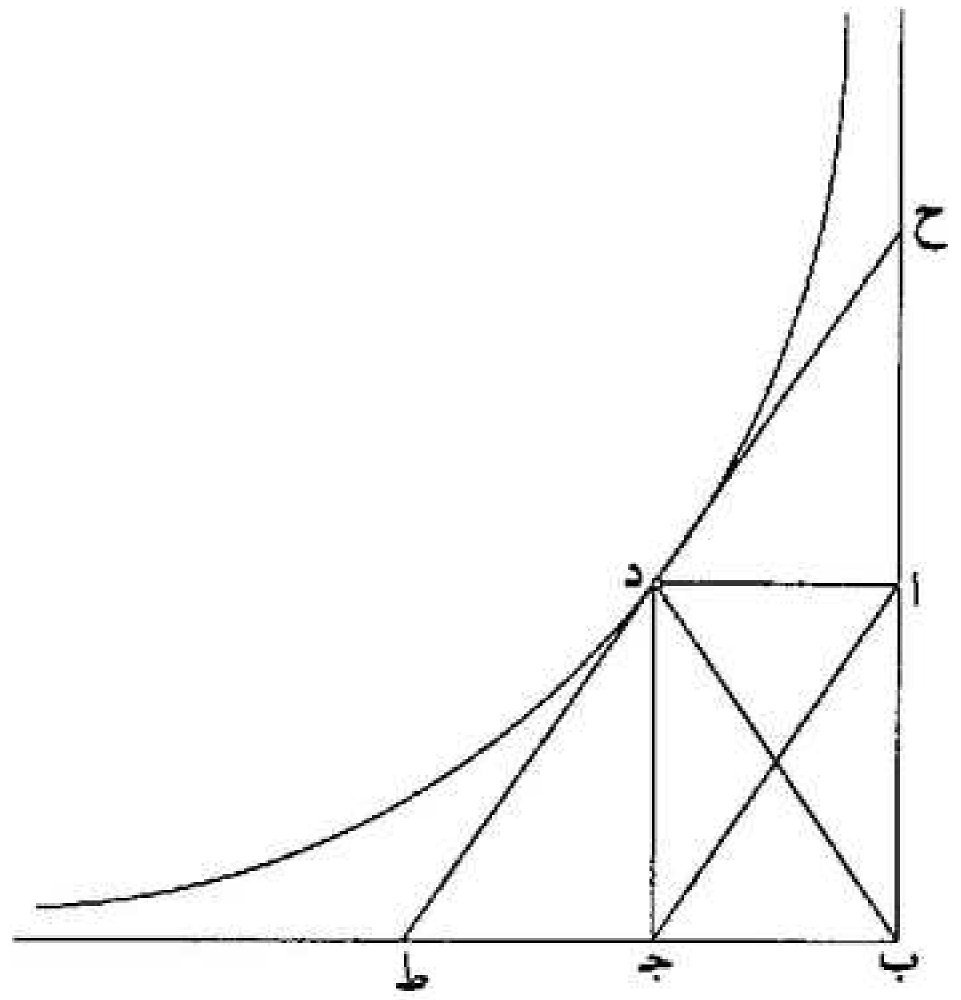
ونبيّن أيضًا أن سطح ق ص مثل سطح د ص، لأن سطح ز ع مثل سطح ز ه. ونلقي سطح ق د المشترك، فيبقى سطح د ع مثل سطح ق ه، ونجعل سطح ه ع مشتركًا، فجميع سطح د ص مثل جميع سطح ق ص، فنسبة ع ص إلى ف ص – أعني ز ب – كنسبة ص ه إلى ص ب. /

وإذا لم يُرد إقامة البرهان، فقد يُقتصر – بعد إيقاع عمود د ه على ضلع ب جـ من ح-١٠٣-ظ الزاوية ويتمم السطح وإخراج خطي ب ز ز د بلا نهاية، ونخرج خطين من نقطتي ز د بلا نهاية يوازيان د ه ب جـ كخطي ز ک د ف وأحدهم مثلا ب د – على أن نرسم قوس م ن على مركز ه، ثم نضع حرف المسطرة – إن كان عملنا بها – على نقطة ه وعلى ز ک د ف، ونثبتها على النقطة كالمركز، ثم نديرها على الخطين يمنةً ويسرةً، إلى أن نجد نقطة ع على قوس م ن، بُعد ما بينها وبين خط د ف – إذا أخرج من جهة نقطة ف – على حرف المسطرة مثل بُعد ما بين نقطة ه وبين خط ز ک، فنخرج منها خطًا يوازي ه د مثل خط ع ف، ونصل ما بين نقطتي ب ف.

وإن أردنا أيضًا أن يكون العمل أخف من ذلك، أخرجنا د ف فقط موازيًا لخط ب جـ، وأثبتنا حرف المسطرة على نقطة ب كالمركز، وأخذناها على ما دون الثلث من خط ه د، وأدرناها على د ف / يمنة ويسرة إلى أن نجد عليه نقطة يكون بُعد ما بينها وبين ا-١٥٢-و موقع حرف المسطرة من خط د ه مثلا خط ب د. فعند ذلك تنقسم زاوية ا ب جـ بالثلث والثلثين.

1 ت س: فس [ا] / د ب: كتب بعدها «مثل د ب» [ا] – 1-2 مثل زاوية ... د ت س: ناقصة [ح] – 2 مثلا: مثل [ا] – 3 زاويتي: زاويتا [ا، ح] / المتبادلتين: المتبادلتان [ا، ح] / د ف س مثل: دتس مثلا [ح] دتس مثل [ا] – 5 ق ص: فص [ا] / د ص: فط [ا] / ونلقي: وبقي [ا] – 6 ق د: ق د ب [ا] / سطح (الثانية): ناقصة [ا] / ق ه: و ه [ا] – 7 ق ص: فص [ا] – 9 يرد: ترد [ح] / د ه: ه [ا، ح] – 10 الزاوية: المثلث [ا، ح] / ويتمم السطح: ناقصة [ا] / خطي ... ونخرج: ناقصة [ا] / ب ز: ب جـ [ح] / ز د: ب جـ [ا] – 10-11 من نقطتي ز د بلا نهاية: ناقصة [ح] – 11 وأحدهم: واحدهم ط [ح] / مثلا: مثلى [ح] مثل [ا] – 12 حرف: احرف [ح] – 13 ز ک: د ک [ا] / ونثبتها: ونبينها [ح] / نجد: ف ن نجد [ح] – 14 ع: ناقصة [ح] ق [ا] / جهة: ناقصة [ح] – 15 بعد: أثبتها في الهامش مع «صح» [ح] / ه: ناقصة [ا] / بين: ناقصة [ا] – 16 ع ف: ه و [ا] – 17 د ف: ب ف [ا] – 18 وأخذناها: واجزناها [ا] – 20 مثلا: مثل [ا] / ب د: فوق السطر [ح].

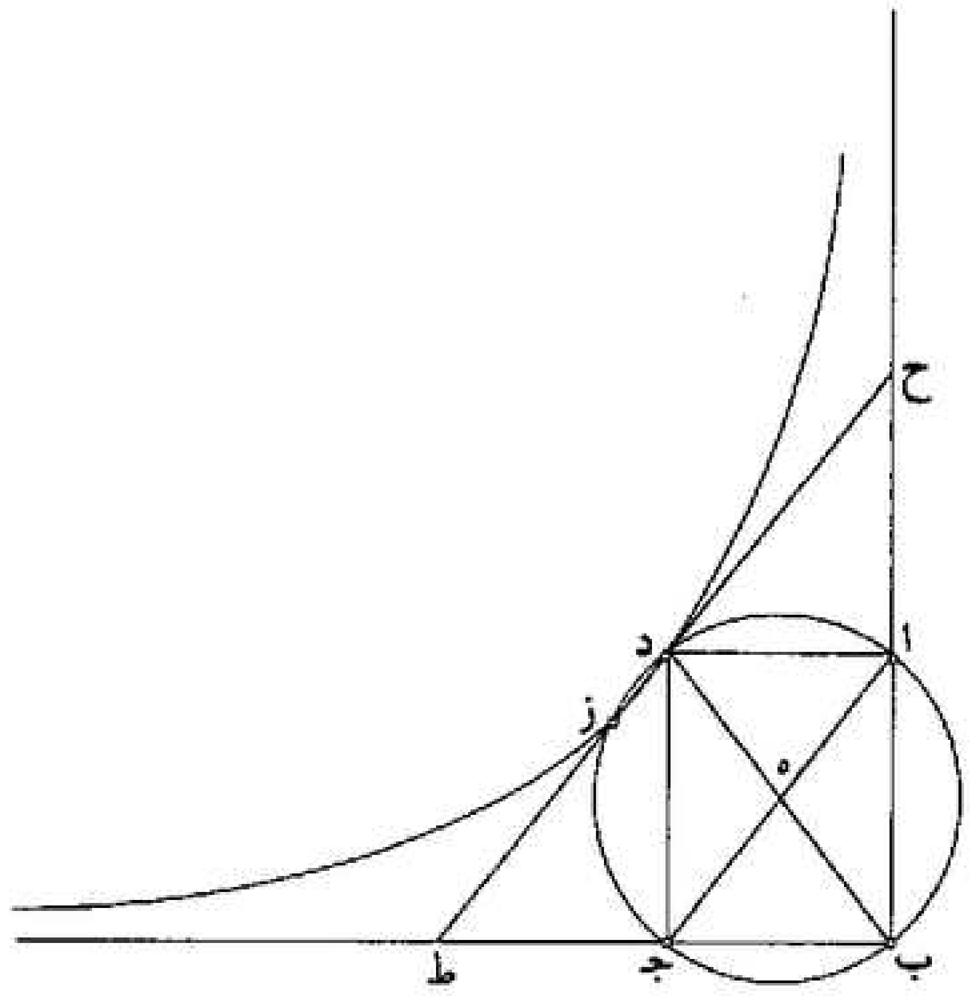
وإذا فرض لنا خطا ا ب ب جـ مختلفين، وطلب منا أن نستخرج بينهما خطين يكونان معهما على تناسب واحد، فإنا نصل أحدهما بالآخر على / زاوية قائمة كما فعلنا، ح-١٠٤-و ونتمم سطح ب د. ونخرج قطري ب د ا جـ، فيكونان متساويين وينقسمان على نقطة ه بنصفين؛ وندير ‹على› مركز ه دائرة تمر بالنقط الأربع، ونخرج ب ا ب جـ غير محدودين، فيكونان على الخطين اللذين لا يلقيان القطع، ويكون نقطة د رأس القطع الزائد، من قِبل أنا إذا أجزنا على نقطة د خطًا يوازي ا جـ ويلقى ب ا ب جـ المخرجين، انقسم بنصفين على نقطة د. لأن سطح ا جـ د ط متوازي الأضلاع، فـ ا جـ مثل د ط وأيضًا ا جـ د ح متوازي الأضلاع، فـ ا جـ مثل د ح، فـ د ط د ح متساويان. فإذا جعل مربعه مثل سطح ضعف خط د ب في خط ما، كان مربع نصفه ربع هذا السطح، وكان ضعف د ب الضلع المائل والخط الآخر الضلع القائم، ونقطة ب مركز القطع. فيستخرج إما بطريق الهندسة نقطةٌ مشتركة بين القطع وبين محيط الدائرة، وإما بوضع المسطرة على نقطة د كالمركز ونقلها على ب ا ب جـ المخرجين إلى أن نجد هذه النقطة.



فلنعمل على أنها نقطة ز، ونجيز عليها وعلى د خطًا مستقيمًا يلقى ب ا ب جـ المخرجين، / وليكن خط ط ح، فيكون ا ح ط جـ الخطين المطلوبين. ١-١٥٢-ظ

1 وإذا: يط اذا [ح] / مختلفين: ناقصة [ح] / بينهما: بينها [ح] – 2 معهما: معها [ا] – 3 ونتمم: ويتم [ا] / ه: ناقصة [ا] – 4 بنصفين ... الأربع: ناقصة [ح] / ب ا ب جـ: با جـ [ح] – 5-6 على الخطين ... أنا: ناقصة [ا] – 6 على نقطة د: ناقصة [ا] / ويلقى: ويلقى خط [ح] – 7-8 لأن ... متساويان: ناقصة [ا] – 8 مثل: مكررة في بداية السطر التالي [ح] / فإذا: واذا [ح] – 9 ما: تا [ا] / مربع نصفه: مربعه نصف [ح] – 10 فيستخرج: ويستخرج [ح] – 12 أن: ان لا [ا] – 14 ط جـ: ناقصة [ا].

برهان ذلك: أن ط ز كما قدّمنا مثل د ح، وأن ط د من قِبل ذلك مثل ز ح. ولكن سطح ز ح في د ح مثل سطح ب ح في ا ح، وسطح د ط في ز ط مثل سطح ب ط في ط جـ. فسطح ب ط في ط جـ مثل سطح ب ح في ا ح. فنسبة ب ط إلى ب ح كنسبة ا ح إلى ط جـ. لكن نسبة ب ط إلى ب ح كنسبة ا د، أعني ب جـ، إلى ا ح وكنسبة ط جـ إلى جـ د، أعني ا ب. فنسبة ب جـ إلى ا ح كنسبة ا ح إلى ط جـ وكنسبة ط جـ إلى ا ب.



وإذا لم نرد إقامة البرهان، اقتصرنا بعد ظهور نقطة د على أن نرسم قوس د ز جـ فقط، ثم نضع حرف المسطرة على نقطة د كالمركز وعلى ب ا ب جـ المخرجين، ونديرها / عليهما يمنة ويسرة إلى أن نجد نقطة على القوس بُعد ما بينها إلى الخط الذي يليها من ح-١٠٤-ظ الخطين كبُعد ما بين نقطة د إلى الخط الآخر، فتكون كنقطة ز.

وقد خاض رؤساء المهندسين من القدماء والمحدثين في هاتين المسألتين. وصنف أوطوقيوس العسقلاني كتابًا، وعَدّ فيه أحد عشر مهندسًا قد تكلموا في استخراج خطين بين خطين، ومن جملتهم أفلاطون الفيلسوف، وأثبت ما استنبطوه من الأشكال والآلات ومن ا-١٥٣-و نظر في ذلك الكتاب نظرَ تفهم، تبين قوة كل واحد منهم، وعلم أن جُلّهم راموا ذلك / بطريق الآلة، وأن من رامه منهم بطريق الهندسة احتاج إلى الاستعانة بقطوع المخروط ووقع مع ذلك في مسلك بعيد.

1 ط د: ط ل [ح] / من قبل ذلك: ناقصة [ح] – 3 ط جـ (الأولى والثانية): ط ح [ا]، وكذلك فيما يلي – 12 أوطوقيوس: اولوطوقيس [ح، ا] – 13 ما استنبطوه: ناقصة [ح] – 16 مسلك: مسالك [ا].

وأما المسألة الأولى، أعني قسمة الزاوية، فلم أسمع أحدًا منهم أتى في حلها على طريق الهندسة بما يمكن عمله، فضلاً عن أن يقرب مأخذه. وإنما سبق إليه ثابت وخاض عليه من جهة القطع الزائد، وأخذ منه أبو بكر الهروي.

1 وأما: فاما [ح].

١٩٨-ظ

بسم الله الرحمن الرحيم

في استخراج خطين بين خطين تتوالى متناسبة من طريق الهندسة الثابتة للشيخ أبي جعفر محمد بن الحسين

رحمة الله عليه

ذكر أوطوقيوس في كتابه الذي جمع فيه أقاويل القدماء من أصحاب الهندسة في استخراج خطين بين خطين معلومين تتوالى متناسبة ما عمله نيقوميذس في استخراج ذلك من طريق الآلة. ونحن نصف الشكل الذي فرضه فيه وبرهن به على عمله، إلا أنّا نعدل به إلى طريق الهندسة، وهذه هي الصفة.

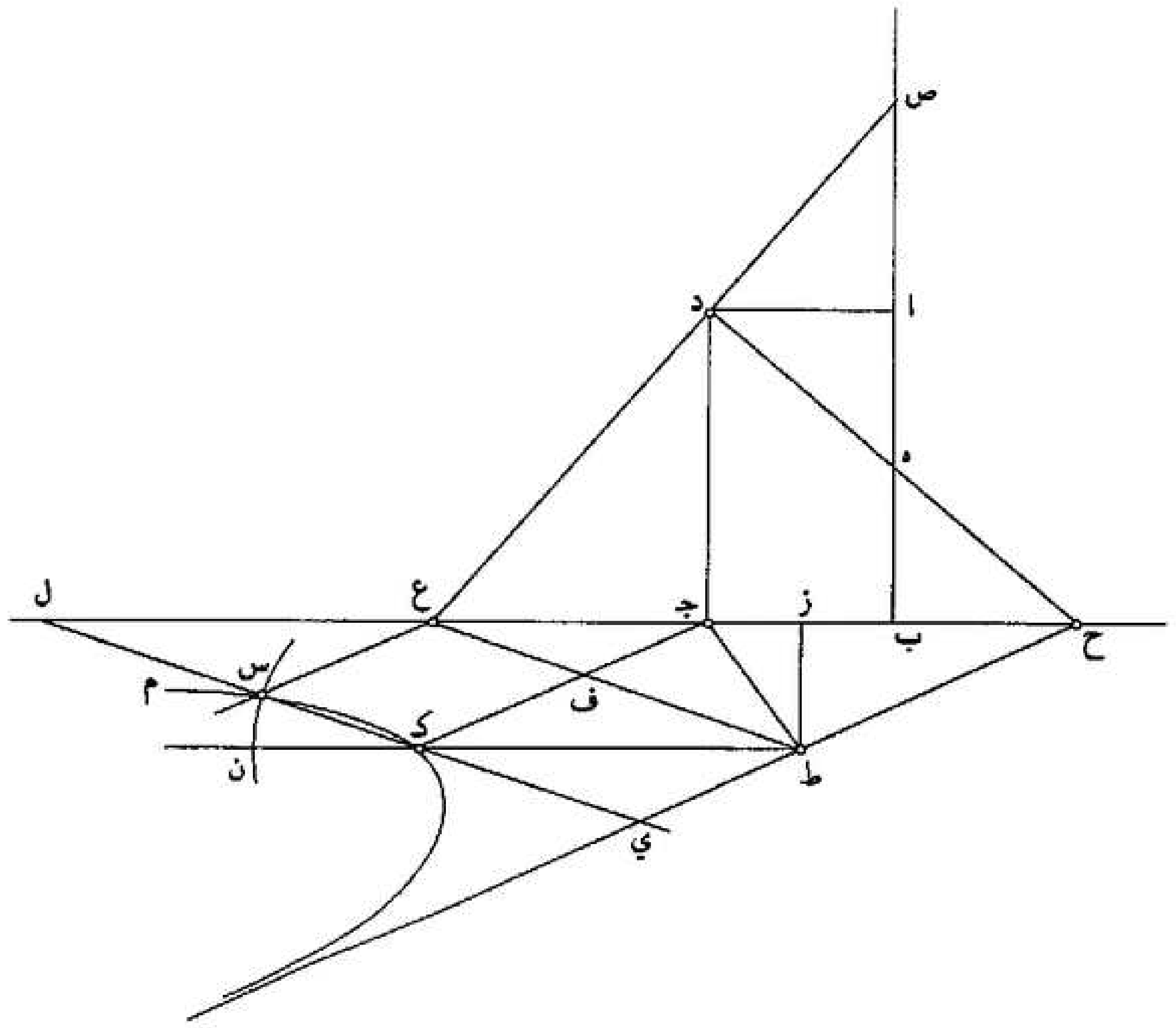
فرض نيقوميذس خطي ا ب ب جـ، وجعل ا ب أعظم من ب جـ، وأقام أحدهما على الآخر على زاوية قائمة مثل زاوية ب، وتمم شكل ا ب جـ د، ونَصَّفَ ا ب ب جـ على نقطتي ه ز، ووصل د ه، وأنفذه وجـ ب، فالتقيا على ح، وصار ب ح مثل ب جـ. ثم أخرج عمود ز ط غير محدود، ومن نقطة جـ خط جـ ط يساوي كل واحد من ا ه ه ب، ووصل ط ح، وأخرج جـ ك غير محدود يوازي ط ح، وزاد جـ ل في ح جـ غير محدود. ثم رام بالآلة التي اتخذها أن يُخرج خطًا من ط إلى جـ ل، يكون قسمُه الذي يقع بين جـ ك وبين جـ ل مثلَ خط جـ ط. وقد عملتُ أنا هذه الآلة من خشب، وامتحنتُ بها وجود هذا الخط، فصحّ ذلك عند الامتحان.

فإذا أوجدناه نحن بالقطع الزائد، فقد عدلنا به من طريق الآلة إلى طريق الهندسة.

وذلك أن نُخرج من ط خطًا إلى جـ ك يوازي ح جـ، وليكن ط ك؛ ونعمل على ك قطعًا زائدًا، يكون خطاه اللذان لا يلقيانه ط ح ح جـ، كما بيّنه أبلونيوس في الشكل

2 تتوالى: متوالى.

الرابع من القول الثاني من كتاب *المخروطات*؛ وليكن قطع ك م. ونزيد ك ن في ط ك يساوي ط جـ، وندير على مركز ك وببعد ك ن قوس ن س، ونخرج خط ك س، فيكون مثل ط جـ، ونخرج من س خط س ع يوازي ك جـ ونصل ط ع، فيكون س ع يساوي ويوازي ك ف، كما بيّنه أبلونيوس في الشكل الثاني عشر من القول الثاني. فخط ك س يساوي ويوازي ف ع، ونصل ع د ونخرجه وب ا، فيلتقيان على ص، فيكون جـ ع ص ا موسطين بين ا ب ب جـ.



برهان ذلك: أن ب جـ نُصِّفَ على ز، وزيد في طوله جـ ع، فضرب ب ع في جـ ع مع مربع ز جـ مثل مربع ز ع. ونجعل مربع ز ط مشتركًا، فضرب ب ع في جـ ع مع مربعي ز جـ ز ط، أعني مع مربع ط جـ، مثل مربعي ز ع ز ط، أعني مربع ط ع، ونسبة ص ا إلى جـ د، أعني ا ب، كنسبة ا د، أعني ب جـ، إلى جـ ع؛ ونسبة ص ا إلى نصف ا ب، أعني ا ه، كنسبة ب جـ إلى نصف جـ ع، أعني كنسبة ضعف ب جـ، وهو ح جـ، إلى جـ ع. فنسبة ص ا إلى ا ه كنسبة ح جـ إلى جـ ع، أعني ط ف إلى ف ع، لتوازي ط ح ف جـ. وإذا ركبنا، صارت نسبة ص ه إلى ا ه كنسبة ط ع إلى ف ع؛ وا ه مثل ف ع، فيكون ص ه مثل ط ع. فمربع ص ه مثل مربع ط ع، ومربع

1 الرابع: كتب أولاً «الثاني»، ثم ضرب عليها بالقلم.

ه ص مثل ضرب ب ص في ص ا مع مربع ا ه، ومربع ط ع كان قد تبين أنه مثل ضرب ب ع في جـ ع مع مربع ط جـ المساوي لمربع ا ه، فضرب ب ص في ص ا مثل ضرب ب ع في جـ ع، فنسبة ب ص إلى ب ع كنسبة جـ ع إلى ص ا. ولكن نسبة ب ص إلى ب ع كنسبة د جـ إلى جـ ع، فنسبة د جـ إلى جـ ع كنسبة جـ ع إلى ص ا. ونسبة د جـ إلى جـ ع كنسبة ص ا إلى ا د، فنسبة د جـ إلى جـ ع / كنسبة جـ ع إلى ص ا وكنسبة ص ا إلى ا د. ١٩٩-و

تم القول بحمد الله ومنه وصلى الله على محمد وآله أجمعين.

1 ه ص: ب ص.

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

ب-١٣٧-ظ
ر-٦٦-و

بسم الله الرحمن الرحيم

كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل
إلى أبيه أبي الحسين محمد بن عبد الجليل

في خواص القبة الزائدة والمكافئة للشيخ الفاضل أبي الحسين محمد بن عبد الجليل من عبده أحمد بن محمد بن عبد الجليل

والسلام عليك ورحمة الله وبركاته

قد كان خاطري مشتغلاً بعد فراغي من وجود جهات خواصّ القطع الناقص من الشكل البيضي والعدسيّ، أعني المجسمين الحادثين من إدارة القطع الناقص على قطره الأطول والأصغر، بطلب وجود خواص الشكل المجسم الحادث من إدارة القطع الزائد والمكافئ اللذين هما القبة الزائدة والقبة المكافئة، إلى أن جاريت ذكر ذلك عند بعض المهندسين، فذكر أن الأمر كما خطر ببالي وذكر أمر خواص القطع المكافئ بطريق غير الطريق الذي سلكت فيه مع ما أني استحسنته.

ولأن هذه الخواص مطردة في هذه المجسمات، وإذ فرغت من خواص الشكل البيضي والعدسي، خليق لنا ألا نغفل عما يحدث من خواص هذين الشكلين المجسمين

1 البسملة: ناقصة [ر] – 2 محمد بن: أثبتها تحت السطر [ر] – 2-4 كتاب ... والمكافئة: ناقصة [ب]، ونجد في الهامش «يو» – 6 والسلام: السلم [ب] – 7 خاطري: خاطبتي [ر] – 8 المجسمين: مجسمين [ر] – 10 اللذين: اللذان [ر] / جاريت: غير واضحة، فأعاد كتابتها في الهامش [ب]، بمعنى جاراه في الحديث، أي تناظر / عند: كتب أولاً «مع»، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] – 11 وذكر أمر: من [ر] – 12 مع ما: معما [ر، ب]، وكذلك فيما بعد / مع ما أني استحسنته: العبارة غامضة، وتحتمل معنيين حسب موقع «ما». فإن كانت «ما» زائدة على مع، فسيكون المعنى «مع استحساني إياه»، وإن كانت «ما» النافية فسيكون المعنى «مع أني لم استحسنه»، هذا ما أخذنا به – 13 ولأن: لان [ر] / إذ: أثبتها في الهامش [ب] ناقصة [ر] – 14 خليق: فخليق [ر].

الحادثين من إدارة القطع الزائد والمكافئ على المحور، وما يلزم من ارتسام حركة خط موازٍ لخط معطى على محيط قطع زائد أو مكافئ على بسيط مسطح.

وربما توجد خواص كثيرة، إذا تأملناه كعادتنا في سائر طلبنا وفحصنا. وقد أنفذت هذا المقدار الذي عملت إلى الشيخ الفاضل – أطال الله بقاءه وأدام سلامته – ليتسلى بالنظر فيه ويستأنس به، إن شاء الله.

ولما وجدنا خواص القطوع وهي الدائرة والناقص والزائد والمكافئ في المجسمات الحادثة من ارتسام حركة مثلث قائم الزاوية ومتوازي ‹الأضلاع› قائمة الزوايا، وهما المخروط والأسطوانة، طلبنا ‹القطوع› في المجسمات الحادثة من هذه القطوع، فوجدنا فيما يحدث من الكرةِ الدائرةَ إذ الأشكال الحادثة من إدارة خط على محور لا تخلو من الدائرة، والدائرة موجودة في جميع الأشكال الدورية، ولسنا نجد في الكرة شيئًا من القطوع المذكورة سوى الدائرة.

ثم طلبنا في البيضي والعدسي ‹من هذه القطوع فوجدنا القطع الناقص›، إذ القطع الناقص المتولد منه البيضي والعدسي أقرب شكل إليهما، وخاصة إلى الدائرة. فوجدنا فيهما ترتيب شيئين: الدائرة أشبه، كما وجدنا في الكرة ‹و›مما في سائر الأشكال المجسمة الدورية، ولأنهما يحدثان / من القطع الناقص، فقد وجدنا فيهما القطوع الناقصة والدوائر ر-٦٦-ظ فقط.

ثم نظرنا إلى المجسم الحادث من القطع المكافئ، فوجدنا فيه القطوع المكافئة والناقصة والدوائر. وقد ذكرنا أن الدوائر موجودة في جميع المجسمات الدورية وبأن للقطع الناقص مناسبة قريبة عند الدائرة، فلذلك لزم وجوده في هذا الشكل.

ونظرنا إلى المجسم الحادث من القطع الزائد، فوجدنا فيه القطع الزائد والناقص والدائرة: أما الزائد فلأنه حادث من ذلك الشكل؛ وأما الناقص والدائرة فلأجل ما ذكرنا في المكافئ.

فإذًا، قد وجدنا في أحد المجسمات، وهي الكرة، الدوائر فقط، مع ما أنها محدودة بالطرف الأعظم، وهو أعظم دائرة تقع عليها؛ وهو في المرتبة الأولى؛

2 أو مكافئ: ومكاف [ر] – 3 تأملناه: الضمير يعود هنا على الشكل البيضي والعدسي؛ ولن نشير إلى مثلها مرة أخرى – 4 هذا: هذه [ر] / أطال ... سلامته: رحمه [ر] – 7 قائمة: الصفة تعود على الأضلاع – 9 إذ: اذا [ر] / الحادثة: الحادث [ر] / محور: كتب بعدها «الأسطوانة»، ثم ضرب عليها بالقلم [ب] / تخلو: يخلوا [ب، ر]، ولن نشير إليها فيما بعد – 12 إذ: اذا [ر] 13 إليهما: اليه [ب، ر] – 14 ترتيب: ترتب [ر] – 18 وبأن: وكان [ب، ر] – 21 الزائد: الزاوية [ر] – 23 الدوائر: الدائرة [ر].

وفي المجسم البيضي والعدسي الدوائرَ والقطوعَ الناقصة المحدودتين ‹بطرفين›، وهما أعظم دائرة تقع عليه وأعظم قطع ناقص يقع عليه؛ وهو في المرتبة الثانية؛

وفي المجسم الأسطواني الدائرةَ المحدودة والقطوعَ الناقصة الغير المحدودة؛ وهو ‹في› المرتبة الثالثة؛

وفي القبة الزائدة والمكافئة: أما الزائدة فالقطع الناقص والدائرة والقطع الزائد؛/ وأما ب-١٣٨-و
المكافئة فالقطع المكافئ والناقص والدائرة. لكن لسنا نجد في القبة الزائدة القطعَ المكافئ، و‹لا› في المكافئة القطعَ الزائد، وهما في المرتبة الرابعة.

فأما المجسم المخروطي، فقد وجدنا فيه الدوائرَ الغير المحدودة بكلا الطرفين بالعظم والصغر، والقطوعَ الناقصةَ والزائدةَ والمكافئةَ الغير المحدودة وهو جامع للأشكال الأربعة بل للخمسة، أعني المثلث؛ وهو في المرتبة الخامسة.

فلذلك الفاضل أبلونيوس قد جعله دستورًا، وطلب خواص هذه الأشكال الأربعة عن المجسم المخروطي، وترك طلب خواص القطع الناقص عن الأسطوانة التي وجدناها بأهون سعي وأسهل مسلك، وأخذ المآخذ الصعبة، لأن المخروط جامع لهذه الأشكال المذكورة. فهذه قسمة طبيعية وفحص كليّ في هذا المعنى.

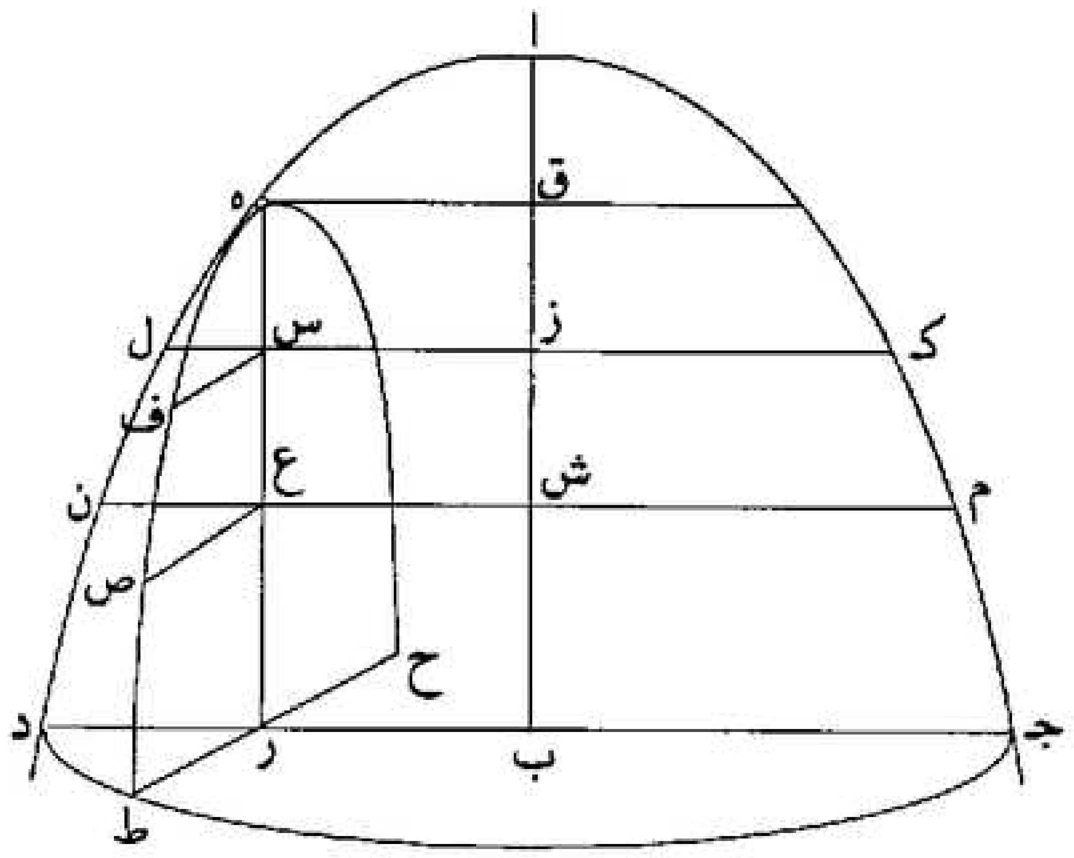
فلنبتدئ الآن بذكر ما كان غرضنا فيه.

– آ – قطع جـ ا د المكافئ، أدرناه على سهمه، وهو ا ب، فصار قبة جـ ا د المكافئة.

أقول: إن السطح القاطع له إما أن يكون قطعًا مكافئًا مساويًا لقطع جـ ا د، وإما قطعًا ناقصًا وإما دائرة.

برهانه: أن السطح القاطع له إما أن يكون موازيًا لسهم ا ب وإما غير موازٍ له.

1 الدوائر: الدائرة [ر] – 5 فالقطع الناقص والدائرة: فالدائرة والقطع الناقص [ر] / القطع: ناقصة [ب] – 6 المكافئة: المكافى [ب] فى المكافئ [ر] / والناقص: كلمة غير موجودة في [ر] – 11 فلذلك: ولذلك [ر] / أبلونيوس: ابللونيوس [ب، ر]، وكذلك فيما بعد – 15 فلنبتدئ: فلنبتدأ [ر] – 16 آ: ناقصة [ر] / أدرناه: ادرنا [ب، ر] / فصار: وصار [ر] – 18 السطح القاطع له: يعني أن السطح القاطع يحدث هذه القطوع، ولن نشير إليها مرة أخرى، وسنترجمها على حسب هذا المعنى بالإنجليزية / قطعًا مكافئًا مساويًا: قطع مكافئ مساو [ب، ر] – 19-20 قطعًا ناقصًا: قطع ناقص [ب، ر] – 20 برهانه: برهان ذلك [ر].



فليكن أولاً موازيًا له، وهو قطع ح ه ط؛ وليكن سطح ح ه ط على زاوية قائمة على سطح جـ ا د. ينبغي أن نبين / أنه قطع مكافئ مساوٍ لقطع جـ ا د وسهمه خط ه ر ر-٦٧-و المشترك بين سطح ح ه ط وسطح جـ ا د. ونخرج خطوط الترتيب في قطع جـ ا د، وهما كـ ل م ن، ونخرج ه ق موازيًا لهما، ونديرعلى قطري كـ ل م ن دائرتين على بسيط القبة المكافئة، ونخرج عمودي س ف ع ص على خطي كـ ل م ن في بسيطي الدائرتين. فبيّنٌ أن كـ س في س ل يعدل مربع س ف، وم ع في ع ن يعدل مربع ع ص. لكن نسبة مربع ش ن، أعني م ع في ع ن ومربع ش ع، إلى مربع ز ل، أعني كـ س في س ل ومربع ز س، كنسبة ا ش إلى ا ز. وكذلك نسبة مربع ل ز إلى مربع ق ه كنسبة ا ز إلى ا ق، وقد بينه الفاضل أبلونيوس في يط من الأولى من *المخروطات*.

لكن بالتفصيل نسبة كـ س في س ل إلى مربع ق ه كنسبة ز ق إلى ق ا. وكذلك نسبة م ع في ع ن إلى مربع ق ه كنسبة ش ق إلى ق ا. فبالمساواة نسبة م ع في ع ن إلى كـ س في س ل كنسبة ش ق إلى ز ق. لكن م ع في ع ن يعدل مربع ع ص، وكـ س في س ل يعدل مربع س ف؛ وع ه يعدل ش ق، وس ه يعدل ق ز، فنسبة مربع ع ص إلى مربع س ف كنسبة ع ه إلى س ه، وعلى هذا أيّ خط أخرج موازيًا لخطي ع ص س ف. فقطع ح ه ط هو المكافئ.

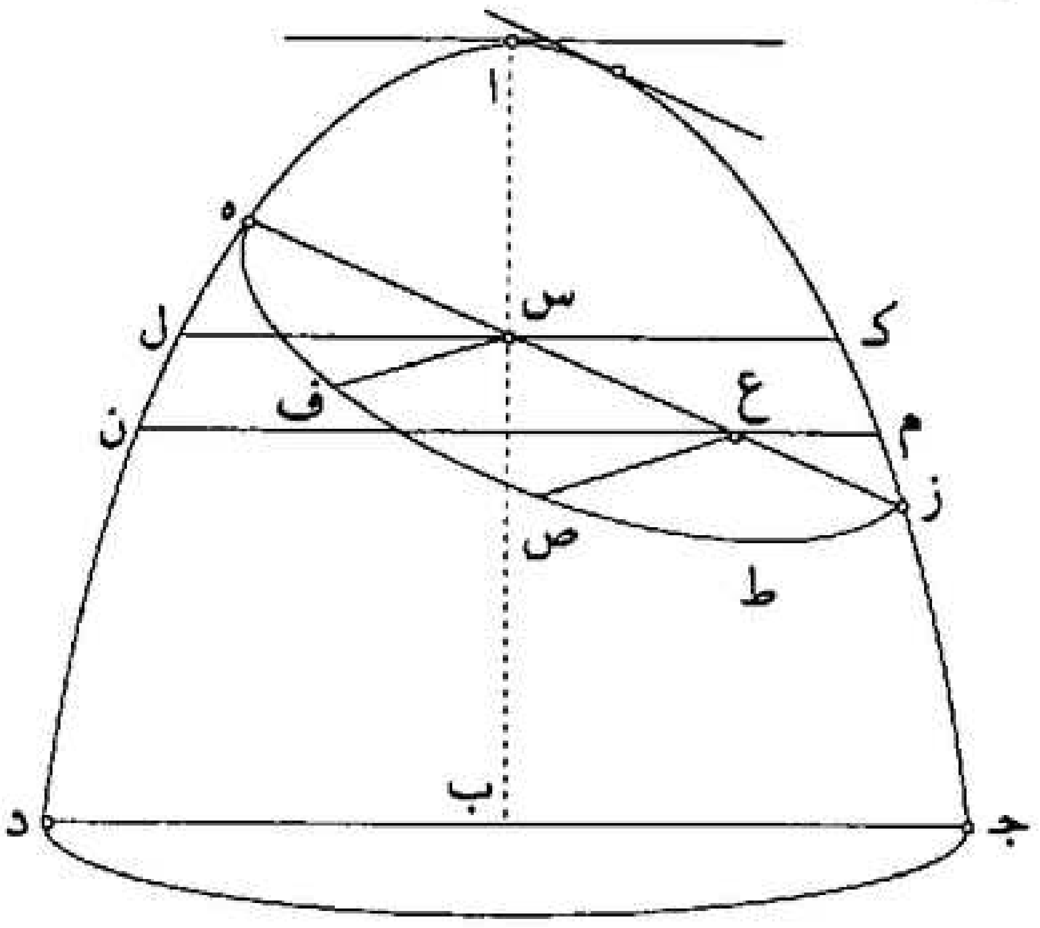
وأقول: إنه مساوٍ لقطع جـ ا دَ الأول.

2 ه ر: ه ز [ب، ر] وكذلك فيما يلي – 4 موازيًا: مواز [ب] – 7 ش ع: س ع [ر] – 8 وكذلك: ولذلك [ب] / ل ز إلى مربع: ناقصة [ر] – 10 وكذلك: ولذلك [ب] – 11 نسبة (الأولى): أثبتها في الهامش [ب] – 14 على: فوق السطر [ر].

برهانه: أن نجعل ا ق ق ز ز ش كلها متساوية، ونخرج الخطوط على الشرائط المذكورة. فلأن نسبة كـ س في س ل إلى مربع ه ق، أعني / ز س، كنسبة ز ق إلى ق ا ب-١٣٨-ظ على ما بينا متقدمًا، وز ق مثل ق ا، فإن كـ س في س ل يعدل مربع ز س. فالخط القوي عليه، وهو س ف، يعدل خط ق ه. ولأن نسبة م ع في ع ن، أعني مربع ع ص، إلى كـ س في س ل، أعني مربع س ف، كنسبة ع ه إلى س ه، وع ه / ضعف س ه، فـ‹مربع› ع ص ضعف ‹مربع› س ف و‹مربع› ز ل ضعف ‹مربع› ق ه ر-٦٧-ظ وق ه مثل س ف، فـ ع ص مثل ز ل. فأقطارهما وخطوط ترتيبهما متساوية، فهما متساويان.

ثم ليكن السطح القاطع للقبة غير موازٍ لمحور ا ب ولا ا ب عمودًا عليه مثل سطح ز ف ه ط.

أقول: إنه قطع ناقص.



برهانه: أن نخرج كـ ل م ن خطين من خطوط الترتيب يقطعان ز ه على س ع، ونخرج س ف ع ص عمودين على كـ ل م ن وفي سطحي الدائرتين الكائنتين على قطري كـ ل م ن. فلأن نسبة ز س في س ه إلى كـ س في س ل كنسبة ‹مربع› الخط المماس لقطع جـ ا د الموازي لـ ز ه إلى ‹مربع› الخط المماس له الموازي لـ كـ ل، وكذلك كنسبة

1 برهانه: برهان ذلك [ر] – 2 كـ س ... كنسبة: ناقصة [ر] – 4-5 يعدل ... س ف: كررها، ثم ضرب عليها بالقلم [ب] – 9 ليكن: لم يكن [ر] / ا ب (الأولى): ا ت [ر] / عمودًا: عمود [ب، ر] / مثل سطح: كسطح [ر] – 12 برهانه: برهان ذلك [ر] – 13 عمودين: عمود [ب، ر] / كـ ل: فل [ر] / سطحي: سطح [ب، ر] / الكائنتين: ناقصة [ر] – 15 وكذلك: ولذلك [ب].

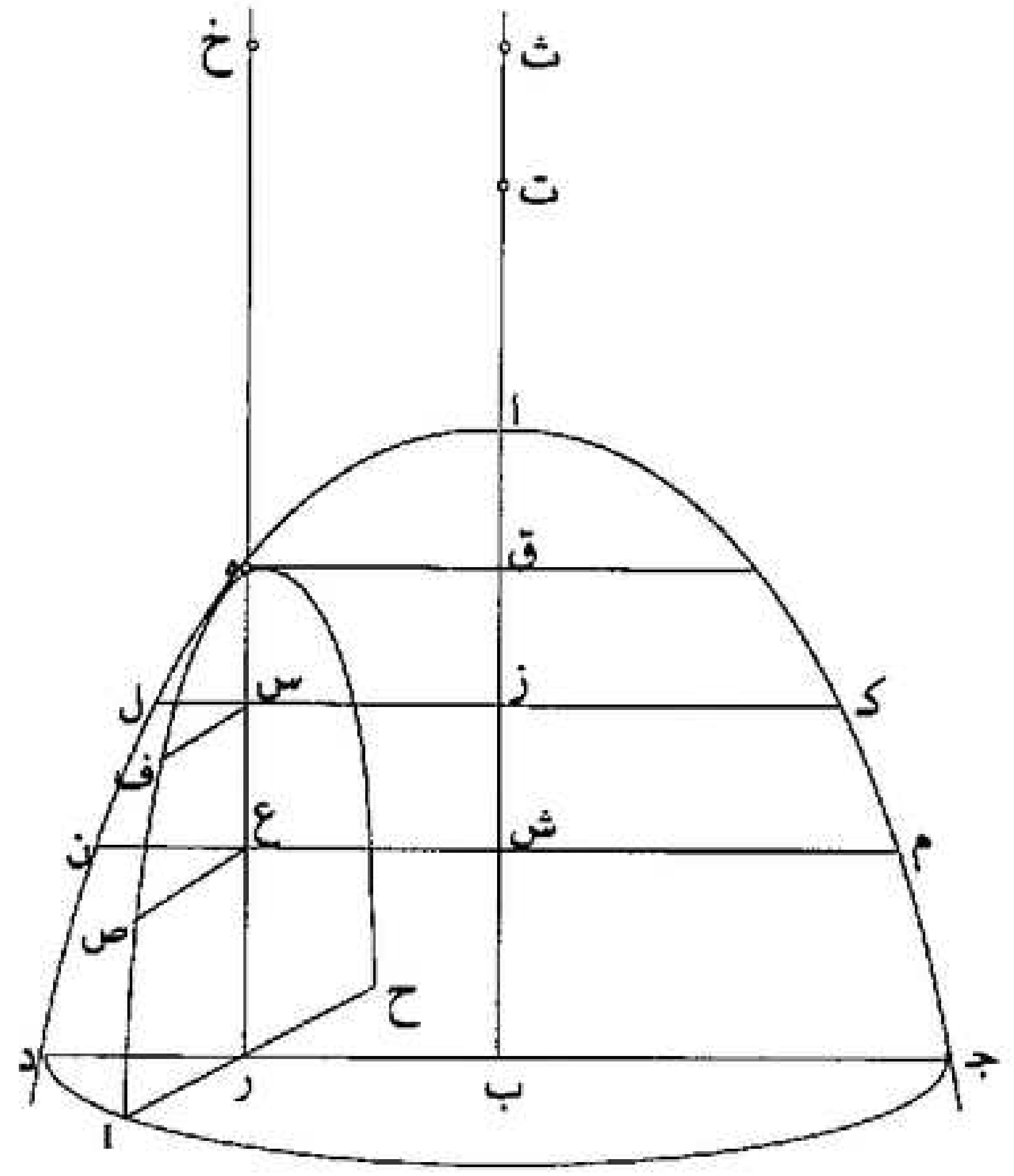
زع في ع ه إلى م ع في ع ن. و‹كما› قد بين أبلونيوس الفاضل في ‹يز› من الثالثة من *المخروطات*، تكون نسبة ز س في س ه إلى زع في ع ه كنسبة ك س في س ل إلى م ع في ع ن، أعني كنسبة مربع س ف إلى مربع ع ص، فقطع ز ط ه قطع ناقص، على ما بينه أبلونيوس الفاضل في ك من الأولى من *المخروطات*.

وبيّنٌ أنه إن كان السهم عمودًا على السطح القاطع للقبة، فإن القطع يكون دائرة. فالسطح القاطع للقبة المكافئة إما قطع مكافئ وإما قطع ناقص وإما دائرة؛ وذلك ما أردنا بيانه.

– ب – قطع جـ ا د الزائد، أدرناه على سهمه، وهو ا ب، فصار قبة جـ ا د الزائدة.

أقول: إن السطح القاطع له إما أن يكون قطعًا زائدًا وإما ناقصًا وإما دائرة.

برهانه: أن السطح القاطع له إما موازٍ لسهم ا ب وإما غير موازٍ له.



1 ‹يز›: ترك فراغًا لها [ب، ر] – 2 ز س: س [ر] – 3 ز ط ه: ز ح ه ط [ب، ر] – 4 ك: ل [ر] – 5 أنه: أثبتها فوق السطر [ر] – 6 قطع ‹الثانية›: ناقصة [ب] – 6-7 أردنا بيانه: اردناه ان نبين [ر] – 8 ب: ناقصة [ر] / أدرناه: ادرنا [ر، ب] – 10 قطعًا زائدًا: قطع زائد [ب، ر] / ناقصًا: ناقص [ب، ر] – 11 برهانه: برهان ذلك [ر] / إما ‹الأولى›: أثبتها فوق السطر [ر].

فليكن أولاً موازيًا له، وهو سطح ح ه ط، وليقطع قطع جـ ا د الزائد على زاوية قائمة، ويكون الفصل المشترك لهما، وهو ه ر، موازيًا لـ ا ب.

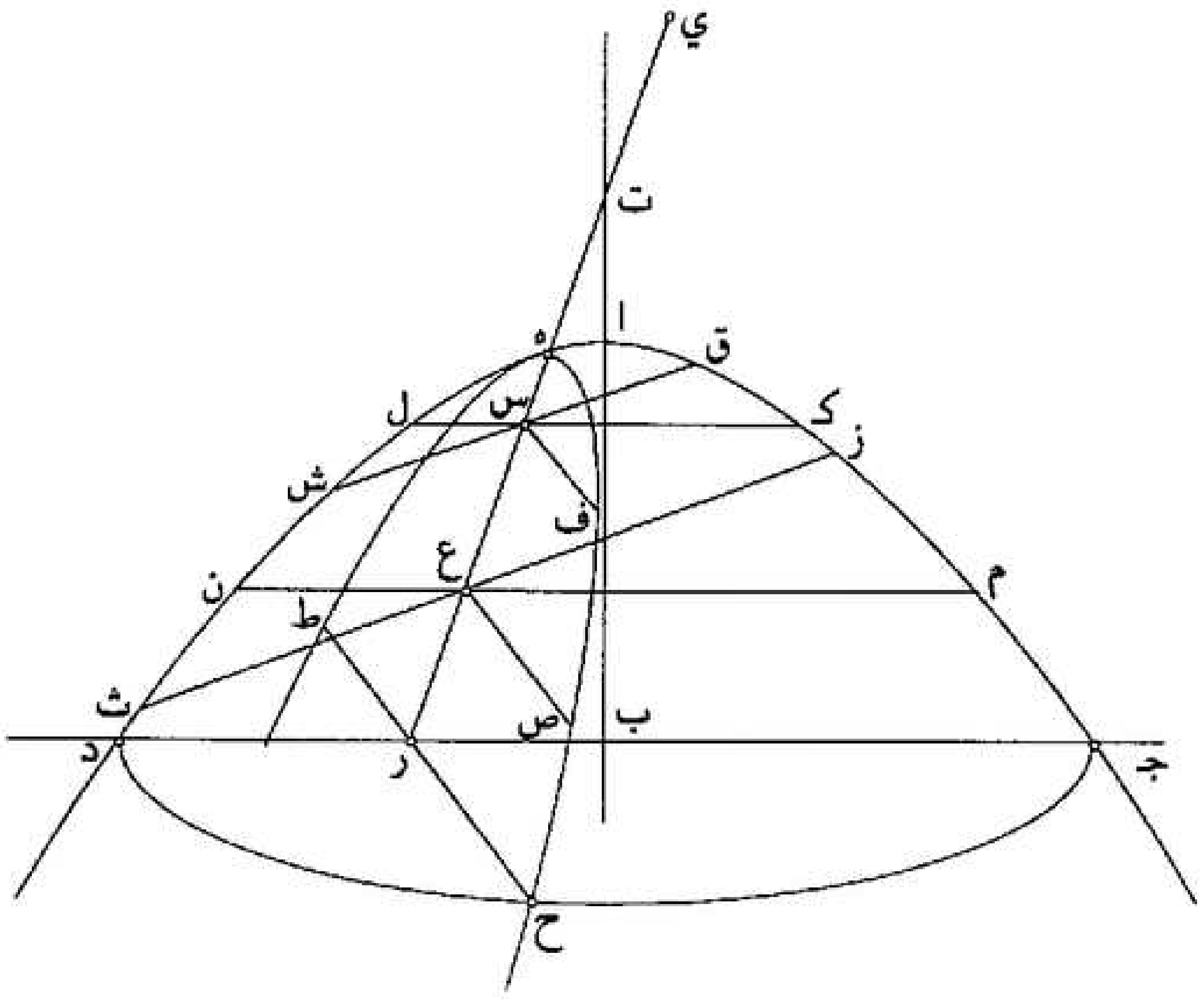
أقول: إن ح ه ط قطع زائد.

لأن خط ت ا هو القطر، ونخرج كـ ل م ن ق ه س ف ع ص على الشرائط المذكورة في الشكل الأول؛ تكون نسبة مربع ق ه إلى مربع ز ل كنسبة ت ق في ق ا إلى ت ز في ز ا، على ما بينه الفاضل أبلونيوس في كـ من الأولى من *المخروطات*. وكذلك نسبة مربع ق ه إلى مربع ش ن كنسبة ت ق في ق ا إلى ت ش في ش ا. فلنجعل ت ث مساويًا لـ ا ق. فإذا ألقينا من مربعي ز ل ش ن مربع ق ه، ومن ت ش في ش ا و⟨من⟩ ت ز في ز ا، ت ق في ق ا، تبقى نسبة م ع في ع ن إلى كـ س في س ل كنسبة ث ش في ش ق إلى ث ز في ز ق. ولنجعل ه خ مثل ق ث، فنسبة م ع في ع ن، أعني مربع ع ص، إلى كـ س في س ل، أعني مربع س ف، كنسبة خ ع في ع ه إلى خ س في س ه؛ وعلى هذا المثال أي خط أخرج من خطوط الترتيب هذه حاله. فسطح ح ه ط قطع زائد والضلع الشبيه لقطع ح ه ط خط ه خ. / ولهذا تبين أن الضلع الشبيه ر-٦٨-و
لأي قطع يكون من القطوع المتوازية زائد على ضلع ا ت بضعف فصل / الخط الفاصل ب-١٣٩-و
لخط ا ب المخرج من رأس القطع الموازي لخط جـ د .

ثم لنخرج السطح غير موازٍ للسهم، وقطع قطع جـ ا د على زوايا قائمة. فالفصل المشترك ه ر وهو قطر من أقطار قطع جـ ا د الزائد.

أقول: إن قطع ح ه ط قطع زائد.

1 موازيًا: مواز [ب، ر] / وليقطع: ولنقطع [ر] – 2 موازيًا: مواز [ب، ر] – 4 لأن: كتب قبلها «برهانه»، ثم ضرب عليها بالقلم [ب] / القطر: كتب أولاً «الضلع الشبيه»، ثم ضرب عليها بالقلم وأثبت «القطر» في الهامش [ب] نجد فوقها «قطره» [ر] – 5 تكون: كتب أولاً «فلان»، ثم ضرب عليها بالقلم وأثبت الصواب في الهامش [ب] – 6 كـ: ل [ر] / وكذلك: ولذلك [ب] – 8 مساويًا: مساوٍ [ب، ر] – 10 ه خ: ه ج [ر] – 11 كـ س: فس [ر] – 13 ه خ: ه ج [ر] – 14 ضلع: الضلع [ر] / الفاصل: الفاضل [ر] – 15 جـ د: ق ه [ب، ر] – 16 فالفصل: فالفضل [ر].



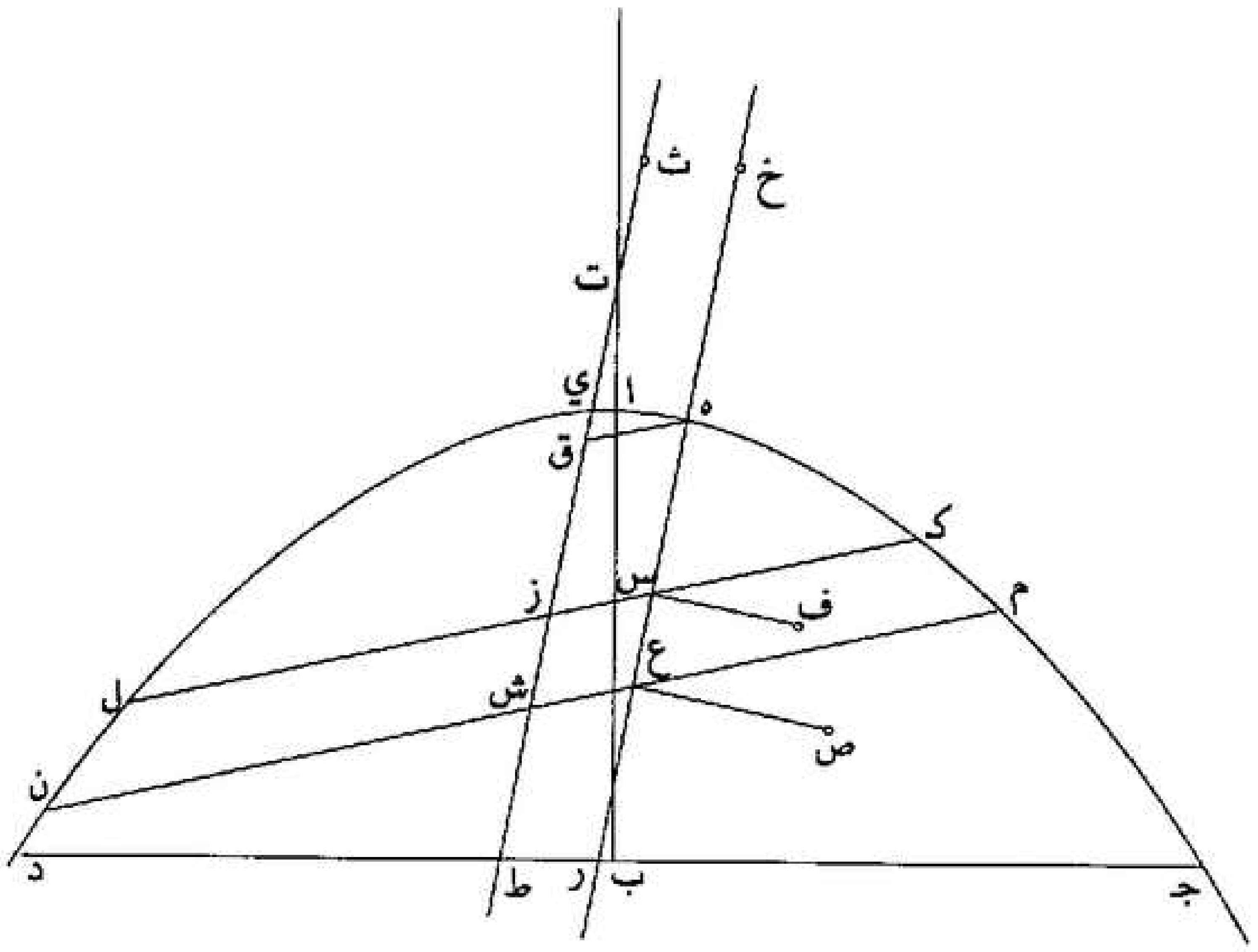
برهانه: أن نخرج ق ش ز ث خطوط الترتيب لقطر ه ر، ولنخرج س ف ع ص عمودين على كـ ل م ن وفي سطحي الدائرتين الكائنتين على قطري كـ ل م ن، على نحو ما ذكرنا. فلأن نسبة ق س في س ش إلى ز ع في ع ث كنسبة كـ س في س ل إلى م ع في ع ن، بما لزم من المقدمات التي ذكرناها من أبلونيوس في الثالثة من *المخروطات*. وكـ س في س ل يعدل مربع ف س وم ع في ع ن يعدل مربع ع ص، فنسبة ق س في س ش، أعني مربع س ش، إلى ز ع في ع ث، أعني مربع ع ث، كنسبة مربع س ف إلى مربع ع ص. فنسبة مربع ص ع إلى مربع س ف كنسبة ي ع في ع ه إلى ي س في س ه. فقطع ح ه ط قطع زائد. /

فإن قطع القبة، بسطح جائز على أحد خطوط الترتيب ولم يكن السهم قائمًا عليه، ر-٦٨-ظ فالبرهان على أنه قطع ناقص هو البرهان بعينه الذي في القطع الناقص من القبة المكافئة.

وإن كان السهم عمودًا عليه، فهو دائرة.

وإن كان السطح القاطع موازيًا لأحد خطوط الأقطار ولا يلقى القطع في الجهتين، مثل قطر ت ي، ويكون الفصل المشترك خط ه ر وهو يوازي ت ط، أقول: إن السطح القاطع الذي قطره ه ر على الشرائط المذكورة، هو قطع زائد.

1 برهانه: برهان ذلك [ر] – 2 عمودين: عمود [ب، ر] / سطحي: سطح [ر] – 4 ذكرناها : ذكرنا [ب، ر] – 5 يعدل مربع (الأولى والثانية): مساو لمربع [ر] – 7 ي ع: تع [ب] – 8 ي س: فس [ر] تس [ب] / ح ه ط: جهد [ر] – 9 قائمًا: قائم [ب، ر] – 12 موازيًا: مواز [ب] – 13 ت ي: تط [ب، ر] / الفصل: الفضل [ر] / ت ط: حط [ب، ر] – 14 هو: فهو [ر].



برهانه: أن نخرج من نقطة ه خط ه ق من خطوط الترتيب لقطر ط ت، ونخرج ك ل م ن يوازيانه، ونجعل ت ث مثل ت ي فيما قدمنا في الجهة الأولى من صورة القبة الزائدة؛ تكون نسبة ث ز في ز ي إلى ث ش في ش ي كنسبة ك س في س ل، أعني مربع س ف إلى م ع في ع ن، أعني مربع ع ص. ونجعل خ ه مثل ث ي، فتكون نسبة خ ع في ع ه إلى خ س في س ه كنسبة مربع ع ص إلى مربع س ف. فالقطع الذي يكون قطره خ ر قطع زائد؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

فأما المجسمات الحادثة من ارتسام حركة خط مستقيم موازٍ لخط معطى على محيط أحد القطوع، فقد وجدنا بعض الخواص الذي يحدث من السطوح القاطعة لتلك المجسمات.

وستممه وننفذه مع التعليقات الهندسية إذ أكثر البراهين في كتبنا متعلقة ببعض أشكال هذا الكتاب.

1 برهانه: برهان ذلك [ر] – 2 مثل: ناقصة [ر] / ت ي: خي [ب، ر] – 4 أعني: ناقصة [ر] – 7 مستقيم: ناقصة [ر] – 10 التعليقات: تعليقات [ب، ر] / البراهين: براهين [ب، ر] / في: ناقصة [ب] أثبتها فوق السطر [ر] – 11 الكتاب: كتب بعدها «وحسبنا الله ونعم الوكيل ونعم المولى ونعم النصير كتبته يوم الاثنين رام روز من بهمن ماه سنة شم يزدجردية؛ عارضت وصححت» [ب] «تم الكتاب، ذكر المصنف أنه فرغ منه في سنة شم يزدجردية وعليه خطه، الشكل في الوجه الآخر» [ر].

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

بسم الله الرحمن الرحيم ٦٣ - ظ

كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل في خواص المجسم الناقص والزائد والمكافئ

المجسم الناقص هو شكل مجسم يحدث من إدارة خط مستقيم على قطعين ناقصين متوازيين دورانًا غير زائل عن موازاة الخط الذي يصل ما بين مركزيهما؛ وهذا الخط سميناه *ضلع المجسم*، والخط المستقيم الذي يصل ما بين مركزيهما سميناه *محور المجسم*.

والقطع الناقص يسمّى *قاعدة المجسم*، وقطر القطع الناقص الأطول يسمّى ‹*قطر*› *قاعدة المجسم الأطول*، وكذلك الأصغر وسائر الأقطار على هذا السبيل. ومركز القطع يسمّى مركز *قاعدة المجسم*، وخطوط الترتيب التي في القطع سميناها *أوتارًا للقاعدة*.

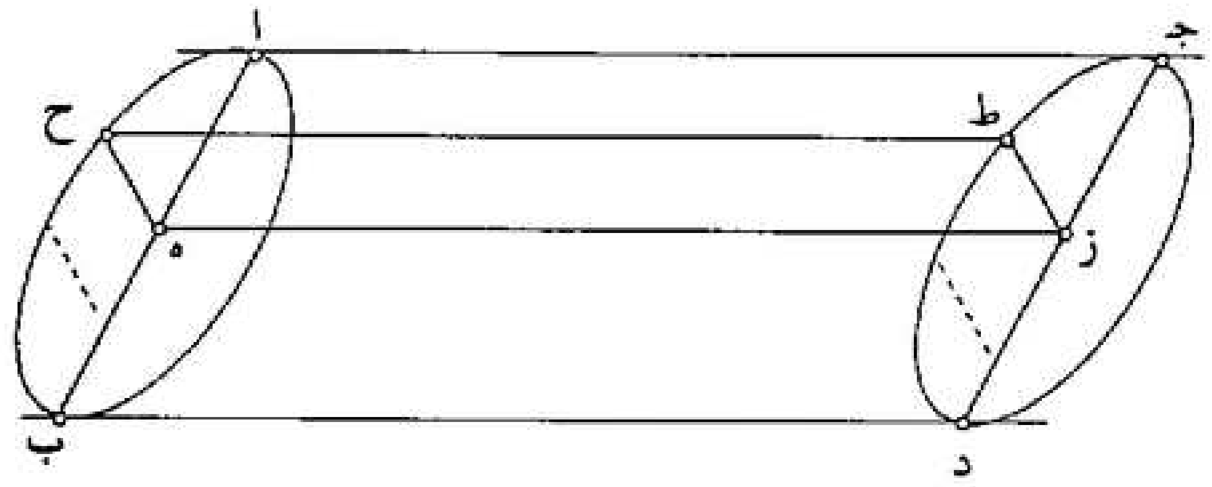
ومن المجسم ما يكون قائمًا ومنه ما يكون مائلاً. فأما المجسم القائم فهو الذي يكون محوره قائمًا على سطح قاعدته على زوايا قائمة. وأما المائل فهو الذي يكون محوره على زاوية ما مفروضة على سطح قاعدته. والزاوية المفروضة هي التي تحدث من محوره ومن الخط الذي يصل من طرف العمود الواقع من رأس المحور على سطح قاعدته إلى طرف المحور الذي يقع على سطح قاعدته.

والمجسم الزائد (المكافئ) هو الحادث من إدارة الخط المستقيم على محيطي قطعين زائدين (مكافئين) متوازيين، ويكون الخط المدير غير زائل في إدارته لموازاة الخط الذي يصل ما بين رأسي القطعين. سهم القطع الزائد (المكافئ) هو سهم قاعدة المجسم الزائد (المكافئ) ‹و›خطوط ترتيبه تسمى أوتارًا لقاعدة المجسم، ‹و›الخط المدير حول محيط القطع هو ضلع المجسم الزائد (المكافئ).

9 التي: الذي / سميناها: سميناه – 10 قائمًا: قائم / مائلاً: مائل / يكون: فوق السطر – 12 تحدث: يحدث، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 13 المحور: المخروط – 15 المكافئ: فوق كلمة الزائد؛ وهذه طريقة السجزي للتعبير في نفس الوقت عن الحالتين – 16 متوازيين: المتوازيين / زائل: زائلة – 18 أوتارًا لقاعدة: اوتار القاعدة / محيط: المحيط.

‹آ› الخطوط المستقيمة التي تصل ما بين أطراف السطوح القاطعة للمجسم الناقص المتوازية، هي أيضًا متوازية ومتساوية.

فليكن قاعدة المجسم الناقص ا ب، والسطح القاطع له الموازي لها جـ د. ولنفرض نقطة ح على محيط قاعدة ا ب، ونخرج محور ه ز، ونخرج ضلع ح ط، ونصل ه ح ط ز.



أقول: إن ح ط مساوٍ لـ ه ز وه ح مساوٍ لـ ط ز.

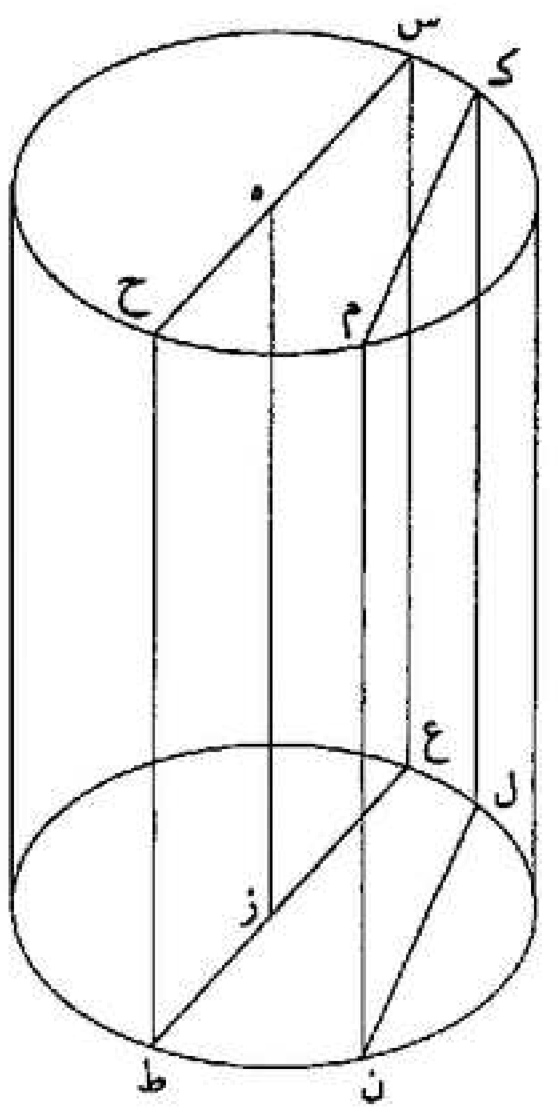
برهان ذلك: أن خطي ه ح ط ز في سطح واحد، / وهو سطح ح ط ز. والخطوط ٦٤-و التي تقع في سطحين متوازيين ‹وتكون في سطح واحد لا تلتقي، وخطا ه ح ط ز اللذان يقعان في سطحين متوازيين› يكونان في سطح واحد، فلا يلتقيان، فـ ه ح يوازي ط ز وط ح يوازي ه ز، فـ ح ط يساوي ه ز، وه ح يساوي ط ز، فقطع جـ ط قطع ناقص مساوٍ ومشابه لقاعدة ا ب. والبرهان عليه سهل بإخراج أقطارهما وخطوط ترتيبهما من المساواة والمناسبة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

‹ب› السطوح القاطعة للمجسم الناقص الجائزة على محوره أو على موازاة محوره تكون متوازية الأضلاع.

فليكن مجسم ا ب جـ د الناقص، فليقطعه سطح كـ ل ن م الموازي لمحور ه ز وسطح س ع ط ح الجائز على محور ه ز.

أقول: إن كل واحد منهما متوازي الأضلاع.

3 الموازي: الموازية.

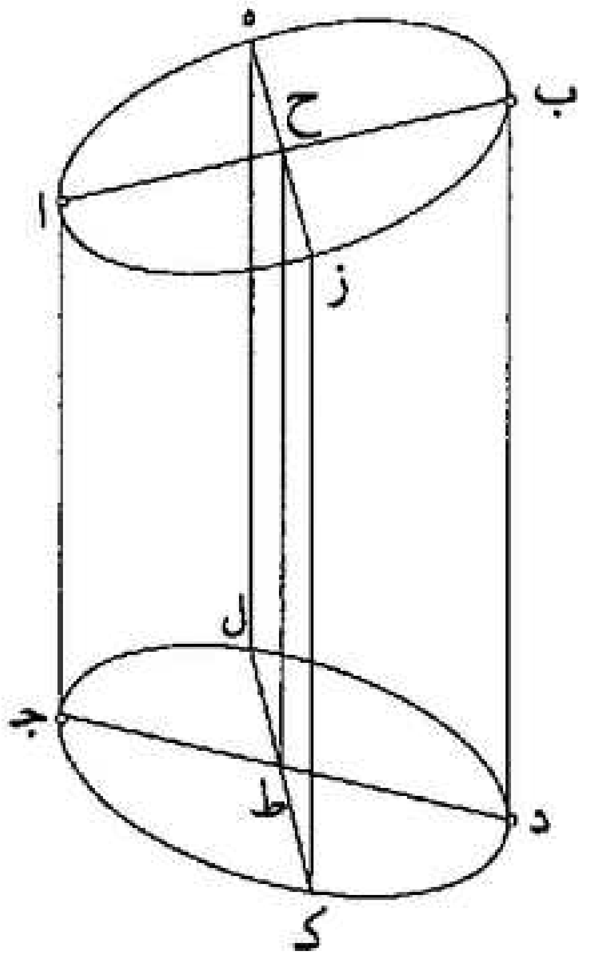


برهان ذلك: أن خطي ك ل م ن يوازيان محور ه ز، فهما متساويان لأنهما ضلعا المجسم الناقص؛ وكذلك س ع ح ط متوازيان متساويان. والخطوط التي تصل ما بين أطراف الخطوط المتوازية المتساوية هي أيضًا متوازية متساوية. فالسطحان المذكوران متوازيا الأضلاع؛ وذلك ما أردنا أن نبين [وذلك ما أردناه].

〈جـ〉 السطوح القاطعة للمجسم الناقص على خلاف وضع قاعدته تكون قطعًا ناقصًا مساويًا ومشابهًا للقاعدة.

فليكن قاعدة المجسم الناقص ا ب تقطع سطح جـ د على خلاف وضعه.

أقول: إنه قطع ناقص مساوٍ ومشابه له.



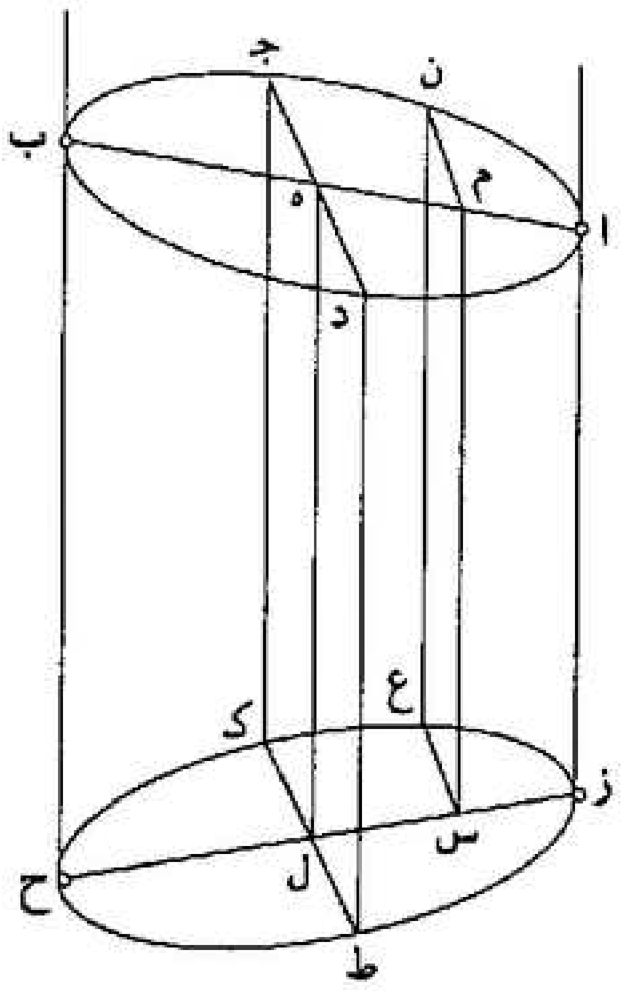
1 ضلعا: ضلعي – 3 فالسطحان المذكوران متوازيا: فالسطحين المذكورين متوازيي – 7 المجسم: مجسم.

برهان ذلك: أنا نخرج قطري ا ب ه ز الأطول والأصغر، ولنخرج ضلعي ا جـ ب د. فبيّنٌ أنهما متوازيان؛ ولنصل جـ د. فلأن زاوية د جـ ا مساوية لزاوية جـ ا ب وا جـ يوازي ب د، يكون جـ د مساويًا لـ ا ب. ولنخرج من مركز ح خط ح ط إلى نصف جـ د. فبيّنٌ أن ح ط يوازي ا جـ، فخط ح ط هو محور المجسم الناقص. فلنخرج ضلع ز ك ونخرج ك ط ل. فلأن ز ك ح ط متوازيان، فخطا ه ز ك ل على خلاف وضع الآخر، فزاوية ز ك ط ل مثل زاوية ك ز ح ه. وزاوية ز ح ط مثل زاوية ك ط ح، فكل واحدة منهما قائمة وز ك يوازي ح ط، فكل واحدة من زاويتي ز ك قائمة؛ فـ ط ل مثل ز ح، وكذلك / ط ل مثل ح ه، فقطرا ك ط ل جـ ط د مثل قطري ا ح ب ز ح ه، كل واحد ٦٤-ظ مثل نظيره. وكذلك أي خط أخرج على الترتيب في قطع ا ب يساوي نظيره، فهو قطع ناقص مساوٍ له ومشابه له؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

‹د› إذا قطع سطحٌ مجسمًا ناقصًا يكون قطراه في سطحي قطري قاعدة المجسم الناقص الأطول والأقصر، ويكونان متساويين، فإنها دائرة.

فليكن مجسم ا ب ز ح الناقص، وقاعدته جـ ا د ب، وقطراه ا ب جـ د، ا ب الأطول وجـ د الأقصر. وقد قطع سطح ز ك ح ط المجسم، فصار قطرا ز ح ك ط في سطحي قطري ا ب جـ د ويكون ح ل مساويًا لـ ط ل.

أقول: إن سطح ز ط ح ل دائرة.

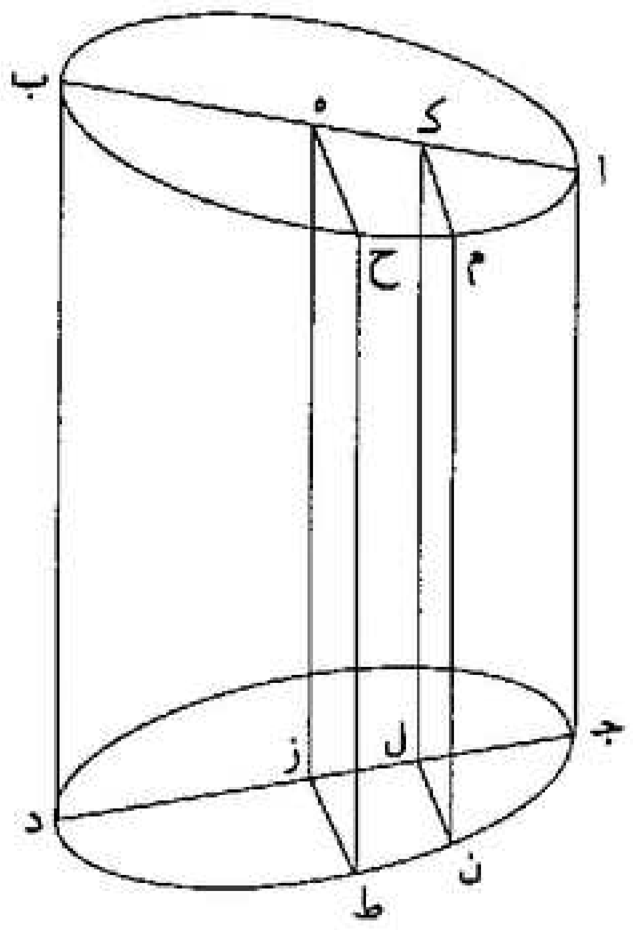


4 ح ط (الأولى): جـط – 5 فخطا: فخطي – 8 ح ه: جه / فقطرا: فقطري / ز ح ه: زحد – 11 مجسمًا ناقصًا: مجسم الناقص / قطراه: قطريه / سطحي: سطح – 12 فإنها: يعني أن القطع سيكون دائرة – 13 وقطرا: وقطريه – 14 قطرا: قطري – 15 سطحي: سطح / ح ل: ح.

برهان ذلك: أنا نفرض نقطة على قطر ا ب، وهي نقطة م. ونخرج م ن يوازي جـ د، وس ع يوازي كـ ل وعلى السطح الموازي لسطح جـ د كـ ط، فبما بينا في كتابنا في *القطع الناقص*، تكون نسبة جـ ه إلى م ن كنسبة كـ ل إلى ع س، ولمّا بينا أيضًا في ذلك الكتاب أنه إذا كان نسبة ب ه إلى ه م كنسبة ح ل في ل ز إلى ح س في س ز – لكن ح ل في ل ز مساوٍ لمربع كـ ل، وح س في س ز مساوٍ لمربع س ع – فخط ز ع كـ ح ط محيط الدائرة؛ وذلك ما أردناه.

‹ه› إذا قطع المجسمَ الناقص سطحٌ غير مارّ على محوره ولا موازٍ للمحور، فهو إما قطع ناقص وإما دائرة.

فليكن سطح جـ ط د قطع المجسم الناقص الذي عليه ا ب جـ د ولا هو مارّ على محور ه ز ولا موازٍ له.



أقول: إنه إما أن يكون دائرة أو قطعًا ناقصًا.

فلنخرج ا ب في قاعدة ا ح ب ونخرج ه ح كـ م خطين يقومان على ا ه، وه ز وكـ ل على كـ ب. ونخرج خطوط جـ د ز ط ل ن نظائرها. فبما سلكنا في براهين كتابنا في *القطع الناقص*، نسلك بعينه ذلك الطريق، تكون نسبة د ز إلى ز جـ كنسبة ب ه إلى ه ا. ونسبة ز ل إلى ل جـ كنسبة ه كـ إلى كـ ا، ونسبة ه ح إلى م كـ كنسبة ط ز إلى ن ل، فتكون نسبة د ز في ز جـ إلى د ل في ل جـ كنسبة مربع ز ط إلى مربع ل ن. فإن

5 ح ل: جل / وح س: فـ حس – 12 خطين: خطوط – 12-13 وه ز وكـ ل على: في ه ب وا ل في – 13 فبما: فيما – 14 في القطع الناقص: لقطع – 15 ه كـ: ىل / م كـ: ىل.

كان ز د في ز جـ مساويًا لمربع ز ط، فخط جـ ط د محيط دائرة، وإن لم يكن مساويًا / له، فهو قطع ناقص. ٦٥-و

فقد تبيّن إذًا أن السطوح القاطعة للمجسم الناقص لا تخلو من أن تكون إما سطحًا متوازي الأضلاع وإما قطعًا ناقصًا يشبهه ويساويه وإما قطعًا ناقصًا غير مساوٍ له ولا مشابه له وإما دائرة؛ وذلك ما أردناه.

وأما سائر الخواص التي في القطع الناقص، فالبرهان عليها من جهة المجسم الناقص سهل، لأنه بعينه مثل البرهان من خواص قطع الأسطوانة، فلذلك تركنا ذكرها.

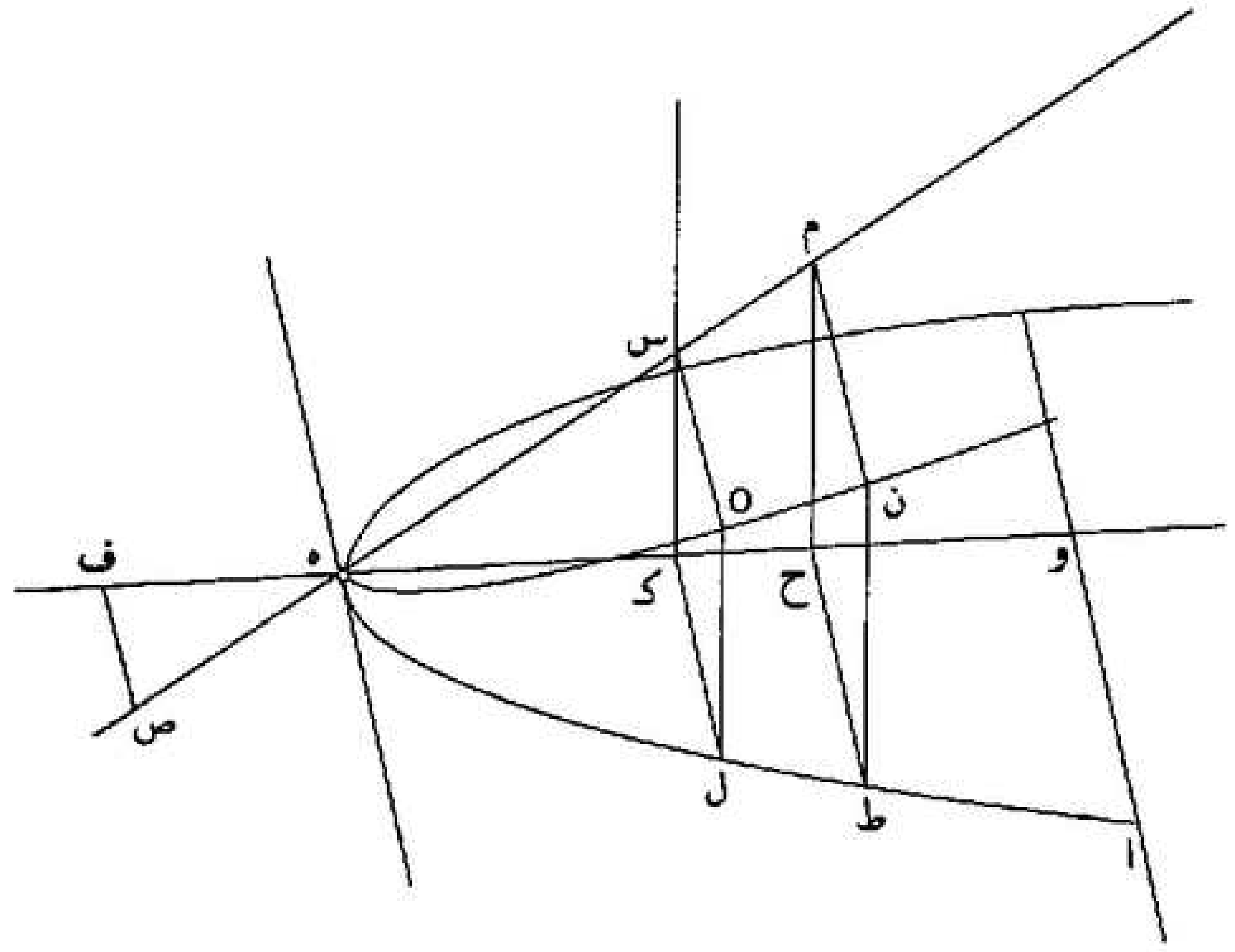
‹وَ› إذا قطع سطح مجسمًا زائدًا ‹مكافئًا› ‹و›مرّ على سهمه أو على موازاة سهمه أو على موازاة خطوط ترتيبه، فهو متوازي الأضلاع.

البرهان عليه مثل ما ذكرنا في المجسم الناقص سواء.

‹زَ› إذا قطع سطحٌ مجسمًا زائدًا (مكافئًا)، غير ‹مار على سهمه ولا› موازٍ لسهمه ولا لخطوط ترتيبه، فهو قطع زائد (مكافئ).

فليقطع سطح جـ ه د مجسم ا ب جـ د الزائد ‹المكافئ›، غير مارّ على سهمه ولا موازٍ له ولا لخطوط ترتيبه.

أقول: إنه قطع زائد ‹مكافئ›.

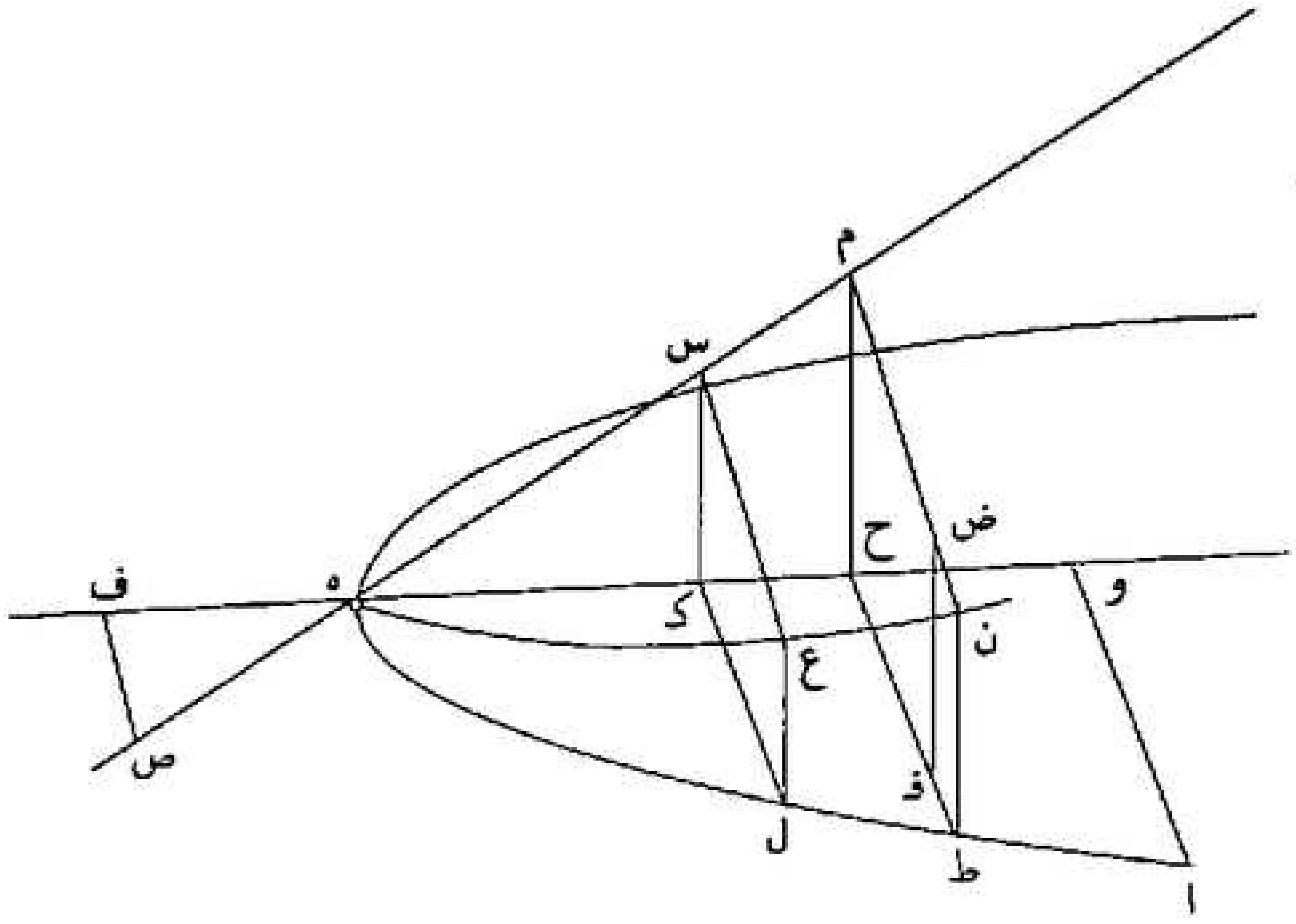


3 تخلو: يخلوا / سطحًا: سطح – 4 قطعًا ناقصًا (الأولى والثانية): قطع ناقص – 7 من: في – 8 مجسمًا زائدًا: مجسم زائد – 11 مجسمًا زائدًا (مكافئًا): مجسم زائد (مكافئ) / لسهمه: سهمه – 14 لخطوط: خطوط.

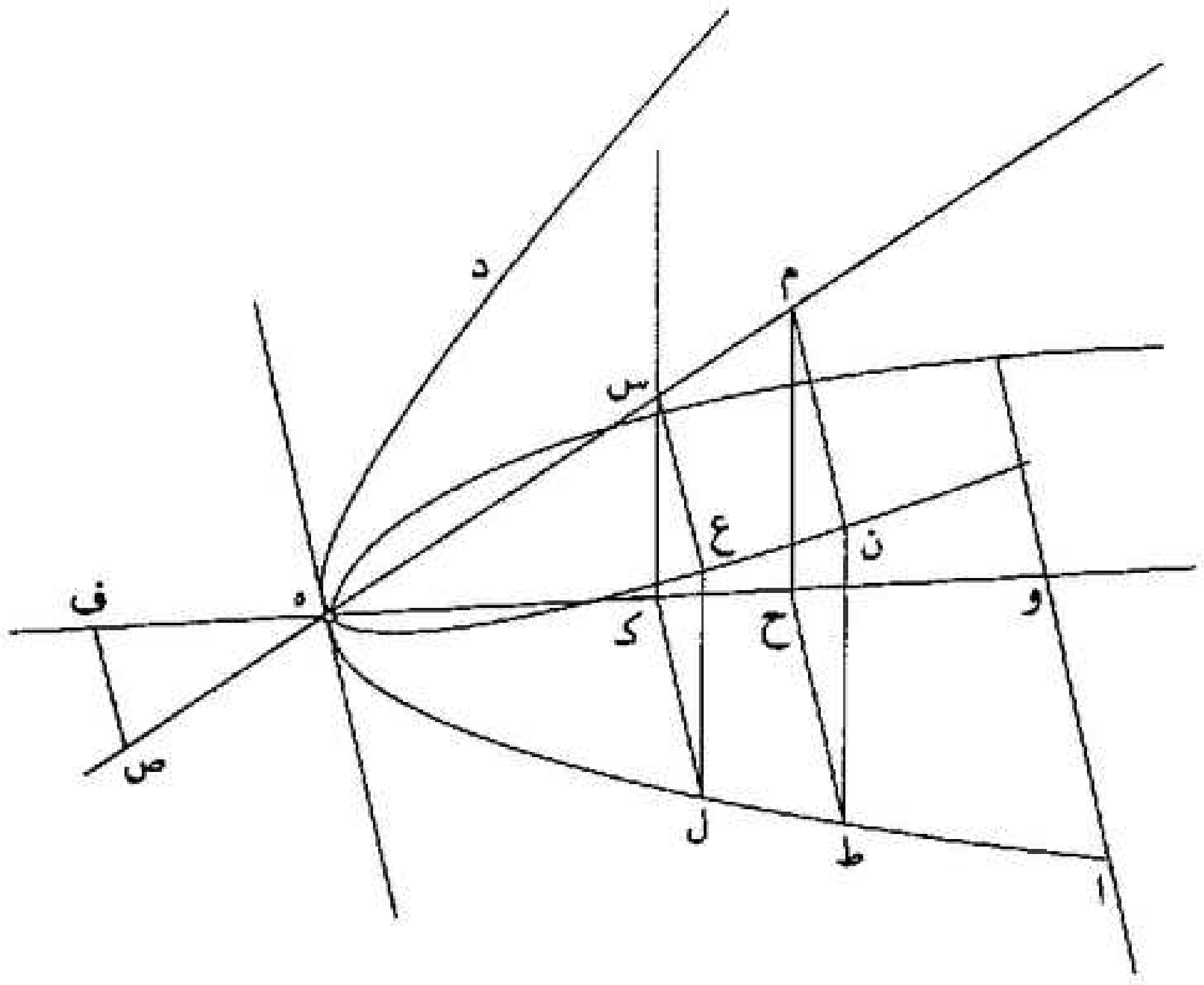
برهان ذلك: أنا نخرج سهم ه و، ونخرج سطحًا يجوز على سهم ه و ويوازي ضلعًا من أضلاع المجسم. فيكون الفصل المشترك بين السطح القاطع وبين السطح الجائز على سهم ه و خط ه م. ونفرض نقطتي ح ك على السهم، ونخرج خط كـ ل ‹وخط ح ط› من خطوط الترتيب، ونخرج خطين مستقيمين موازيين لضلع المجسم من نقطتي ح ك إلى السطح القاطع للمجسم، فتقع على الخط الذي هو الفصل المشترك، أعني ه م على نقطتي س م. ونخرج سطحين جائزين على خطي ح ط كـ ل موازيين لضلع المجسم. فيقع الفصل المشترك بينهما وبين السطح القاطع للمجسم ‹على› خطي ن م س ع؛ ولنصل ط ن ل ع. فبيّنٌ أنهما ضلعان للمجسم وموازيان لخطي ح م كـ س. فإن كان ح ط كـ ل موازيين لـ م ن س ع، فإن خطي ن م س ع مساويان لخطي ح ط كـ ل. فلنخرج في القطع الزائد ضلعه المائل عليه ه ف، ونجعل نسبة ح ه إلى ه ف كنسبة م ه إلى ه ص، فنسبة ص م إلى ف ح كنسبة م ه إلى ح ه وكنسبة س ه إلى كـ ه. ونسبة ص س إلى ف كـ كنسبة ه س إلى ه كـ. فبما بينا في كتابنا في *خواص القطع الناقص*، تكون نسبة ص م في م ه إلى ف ح في ه ح كنسبة ص س في س ه إلى ف كـ / في كـ ه؛ ٦٥-ظ وبالإبدال تكون نسبة ص م في م ه إلى ص س في س ه كنسبة ف ح في ه ح إلى ف كـ في كـ ه. لكن نسبة ف ح في ه ح إلى ف كـ في كـ ه كنسبة مربع ط ح إلى مربع كـ ل، فنسبة ص م في م ه إلى ص س في س ه كنسبة مربع ح ط – أعني ن م لأنه مساوٍ له – إلى مربع كـ ل – أعني س ع المساوي له. فخط ه ع ن محيط قطع زائد يكون سهمه ه م وضلعه المائل ه ص وخطوط ترتيبه ن م س ع على زوايا قائمة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

‹ح› وإن لم يكن ح ط كـ ل موازيين لـ م ن س ع، نجعل فـ ح مساويًا لـ كـ ل ونخرج فـ ض يوازي ضلع المجسم، فيكون م ض مساويًا لـ س ع وتكون نسبة ن م إلى ض م كنسبة ط ح إلى فـ ح، فتكون نسبة ن م إلى ع س كنسبة ط ح إلى كـ ل؛ وكذلك مربعاتها متناسبة، والبرهان كما قدمنا ذكره؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

1 ضلعًا: ضلع – 2 فيكون: فكون – 3 خط (الأولى): وخط – 8 ضلعان: ضلعين / وموازيان: وموازيين – 9 مساويان: مساويين – 12 ف كـ: فل / ه كـ: ه ل – 15 ف كـ (الأولى والثانية): فل – 19 أردنا: اردناه – 21 فـ ض: ف ص، وكذلك فيما يلي – 23 أردنا: اردناه.



‹ ط› ولنخرج في القطع المكافئ ضلعه المنتصب عليه ه ف. فبيّن أن نسبة م ه إلى س ه كنسبة ح ه إلى كـ ه ‹و›كنسبة مربع ط ح إلى مربع كـ ل. فنسبة م ه إلى س ه كنسبة مربع ط ح إلى مربع كـ ل. لكن ط ح مثل ن م، وكـ ل مثل س ع، فنسبة ه م إلى ه س كنسبة مربع ن م إلى مربع س ع. نجعل م ه في ه ض مثل مربع ن م، فيكون ن ه د قطعًا مكافئًا ‹سهمه خط ه م› وضلعه المنتصب خط ه ص.



وإن لم يكن ح ط كـ ل موازيين لـ ن م س ع، فلندبر كما دبرنا متقدمًا ونبرهن أن ‹خط› ن ه د قطع مكافئ وذلك ما أردنا.

1 ضلعه: ضلع بها المكافئ – 2 س ه: مه / كـ ه: فوق السطر – 4 ه ض: حـ ص – 5 قطعًا مكافئًا: قطع مكافئ.

فقد تبين إذًا أن قطوع المجسم الناقص لا تخلو من أن تكون إما سطوحًا متوازية الأضلاع وإما قطوعًا ناقصة وإما دوائر فقط، وأن قطوع المجسم الزائد تكون إما متوازية الأضلاع وإما قطوعًا زائدة فقط، وأن قطوع المجسم المكافئ إما متوازية الأضلاع وإما قطوعًا مكافئة فقط. وأما ‹قطوع هذه المجسمات فهي› قطع من هذه القطوع المذكورة.

تم كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل، بحمد الله تعالى.

1 تخلو: يخلوا / سطوحًا: سطوح – 2 قطوعًا: قطوع – 3 قطوعًا: قطوع – 4 قطوعًا: قطوع.

الهندسة وعلم المناظر
في
ضحى الإسلام

الفـــصل الخامس

نشوء تقليد بحثي جديد : الرسم المتصل للمنحنيات القطعية و البركار التام

رشدي راشد

مؤسســـة الملـــك عبـد العـــزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz
منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

الفصل الخامس

نشوء تقليد بحثي جديد: الرسم المتصل للمنحنيات القطعية والبركار التام

تمهيـــــــد

قام ثلاثة من أشهر رياضيي القرن العاشر بابتكار آلات للرسم المتصل للمنحنيات القطعية وأعدوا الوسائل النظرية اللازمة لشرح ومراقبة كيفية عملها. فقد كتب كل من ابن سهل والقوهي والسجزي عن آلة من آلات الرسم المتصل لهذه المنحنيات. هل كانوا الوحيدين؟ كلا فما من سبب يبرر هذا الظن. نعلم أن البيروني قد اهتم بهذا الموضوع[1]؛ ولدينا ما يكفي من الأسباب للاعتقاد بقيام ابن الهيثم بدراسة آلة لرسم هذه المنحنيات في رسالة ضاعت الآن[2]، وبقيام كل من هبة الله البغدادي (توفي 1140) ومحمد بن الحسين (أواخر القرن الثاني عشر) من بعده بكتابة رسالة في البركار التام متأثرين بعمل القوهي.

ولا يوجد في تاريخ الرياضيات قبل هذه الفترة ما يمكن مقارنته بظاهرة آخر القرن العاشر هذه. ما من شك أن بعض المهندسين قد أخـــذوا على عاتقهم قبل هذا العصر مسألة الرسم المتصل للمنحنيات القطعية بشكل أو بآخر، ولكنهم لم يحاولوا، على ما نعلم، بناء النظرية الرياضية ذات الصلة. لقد أشاروا في واقع الأمر إلى الإجراءات دون إنجاز البحث الهندسي اللازم لشرح كيفية بنائها أو استعمالها. وعلى أي حال فإن كل ما نعرفه حول هذا الموضوع قبل الرياضيات العربية يقتصر على حدث وحيد وعلى أثر واحد كلاهما من القـــرن السادس. نعلم أن آنثاميوس الترالي[3] قد رسم القطع الناقص "بطريقة البستاني" وتوحي لنا، من جهة أخرى، جملة مشكوك بصحتها ومنسوبة إلى أوطوقيوس، أن

---

[1] *كتاب في استيعاب الوجوه الممكنة في صناعة الأصطرلاب*، MS Leiden, Or. 591, especially fols. 148 ff.

[2] في بركار القطوع انظر:

R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 2: Ibn al-Haytham (London, 1993), pp. 514-515.

[3] انظر:

R. Rashed, *Œuvres philosophiques et scientifiques d'al-Kindī*, vol. 1 : *L'Optique et la Catoptrique d'al-Kindī* (Leiden, 1997), pp. 678-679; and *Les Catoptriciens grecs*. I : Les Miroirs ardents, textes établis, traduits et commentés par R. Rashed, Collection des Universités de France (Paris, 2000), pp. 250 and 292.

أسدروس من أهل ملط[4] قد ابتكر آلة لرسم القطع المكافئ[5]. تكمن أصالة الرسم المتصل ومعها أحد أهم جوانبه في تطلبه لأمرين في آن واحد: ابتكار آلة – أو جملة ميكانيكية كما هو الحال مع ابن سهل – تصلح لرسم هذه المنحنيات، وإعداد مفاهيم جديدة في نظرية القطوع قادرة على شرح استعمال الآلة وكيفية مراقبتها. وهكذا ترتبط التقنية Techna

[4] Paul Tannery, 'Eutocius et ses contemporains', Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, vol. 8 (1884), pp. 315-329; reprinted in *Mémoires scientifiques*, published by J. L. Heiberg and H. G. Zeuthen, vol. 2 : Sciences exactes dans l'antiquité (Toulouse / Paris, 1912), pp. 118-136.

[5] إن كلمة διαβήτης المستعملـــة لتسمية آلة خاصة كلمة غامضة. هذا حالها عند أفلاطون Philebus 56 b (see D. Frede, Platon : Philebos. *Übersetzung und Kommentar* [Göttingen, 1997], p. 73, n. 81 : 'Die genaue Natur mancher dieser Instrumente ist schwer zu ermitteln. Beim διαβήτης scheint es sich um einen biegsamen Bleistab zu handeln, mit dem sich Höhlungen abmessen lassen' وهكذا فهو أقرب إلى المطمار المرن منه إلى البركار)، وفي أرسطوفان *Birds*، v. 1003. إن المثال الوحيد الذي قد تشير فيه الكلمة إلى البركار هو في كتاب آخر لأرسطوفان، *Clouds*، v. 178، وهو مثال قد يعيننا على توضيح المقطع الذي سردناه. إلا أنه من الممكن تفسير هذين النصين بإعطاء الكلمة نفس المعنى الوارد عند أفلاطون. وأيا كانت حال الشاعر الساخر فإن الكلمة لا تشير على الإطلاق إلى البركار بالمعنى الذي أعطاه المؤلفون التقنيون في العهدين التقليديين اليوناني والروماني. إنه اسم كان يطلق على مسطرة مستقيمة حسبما جاء في التقريرين المعماريين اللذين حفظتهما النقوش : انظر J. Coupry, *Inscriptions de Délos. Période de l'amphictyonie attico-délienne. Actes administratifs* (N° 89 - 104-33) (Paris, 1972), inscr. 104-4, v. 7, pp. 49-55 (4th century B.C.); and G.R. Paton, *Inscriptiones Graecae Insularum Lesbi Nesi Tenedi* [= C.I.G. XII, 2] (Berlin, 1899), inscr. 11, vv. 19-21, pp. 8-9. كما نجد هذا المعنى في التعبير πρὸς διαβήτην. كثير الورود في الكواسر لهيرون Diopter, ed. H. Schöne (Leipzig, 1903), pp. 218, 21; 220, 12, 16, 17; 222, 17, 20, etc. والذي يعني "أفقيا". وللكلمة معنى آخر هو "ممص" نجده عند Columella, *De re rustica* III, 10, 2, and in Heron, Pneumatica I 3, I 14, I 29, etc. وتجدر الملاحظة أنه من الممكن أن تشير الكلمة إلى ممص مستقيم يضم فيه أنبوب أنبوباً آخر. ولهذا فمن المحتمل أن يكون اشتقاق الكلمة قد أتى من خاصة تحويل السوائل من وعاء إلى آخر (δια-βαίνειν) وليس من "ذي القائمتين"، الشكل الافتراضي للبركار.
ولنلاحظ أخيراً أن الفعل المركب من διαβήτης، διαβτίζομαι. لا يأخـــذ فكرة البركار وإنما فكرة المسطرة: "قوم بالمسطرة".
تبقى الفقرة المعروفة المستشهد بها في هايبرغ (p. 84, 8-11 Heiberg) *Commentary on Archimedes Sphere and Cylinder* by Eutocius. "يرسم القطع المكافئ بواسطة διαβήτης الذي ابتكره معلمنا أسدوروس المالطي، صاحب المجانيقي والذي يصفه في شرحه لعمل هيرون في الأفران (τῶν Ἥρωνος Καμαρικῶν). أما مغلر Mugler في : Archimède, vol. 4 : *Commentaires d'Eutocius et fragments* (Paris, 1972), p. 62. فيعبر بحذر عن διαβήτης "بآلة" بدون أي تخصيص.
وعلى نقيض ذلك يعبر عنه فير إيكه بالبركار بدون إعطاء أي تبرير لهذه الترجمة وذلك في *Les Œuvres complètes d'Archimède, suivies des commentaries d'Eutocius* d'Ascalon (Paris, 1960), vol. 2, p. 607. وكان هذان العالمان يعرفان أن هايبرغ قد اعتبر هذه الفقرة محرفة؛ وأوطوقيوس بالذات يؤكد على نحو ما عكس ما جاء في الفقرة المذكورة، فهو يقول في *Commentary on the Conics* الذي كتبه بعد ذلك: أما فيما يخص القضية I.20 فقد أعد طريقة لرسم القطع المكافئ بالنقاط، وذكر القارئ أن على المحترفين بالميكانيك استعماله لرسم القطع المكافئ "نظراً لنقص الآلات" (p. 232, 1 Heiberg) (διὰ τὴν ἀπορίαν τῶν ὀργάνων) وهكذا فما من شيء يثبت أن الفقرة، سواء كانت قد حرفت أم لا، تشير إلى البركـــار في الكلمة διαβήτης. إلا أن كلمـــة البركار ظهرت في الترجمة العربية حيث نقرأ: قال أوطوقيوس: البرابولي يرسم بالبركار الذي استخرجه السدروس (كذا) معلمنا صاحب المجانيقي الذي من أهل ملط (MS : عـــى)، وهو البركار (الكتاب في نص السجزي) الذي وضعه (وصفه في نص السجزي) في كتابه الذي فسر فيه كتاب إيرن في الخطوط المكافئة (الطاقية في نص السجزي).
(*تفسير المقالة الثانية من كتاب أرشميدس في الكرة والأسطوانة* MS Escorial 960, fols. 1-54v, at fol. 27v). نلاحظ الفروق الطفيفة بين النص الذي سرده السجزي وبين ترجمة أوطوقيوس *Commentary*. لكننا لن نتعرض لهذه الفروق هنا.
لقد أعاد السجزي، الرياضي المولع بالتنقيب والذي كان على علم بكتاب القوهي في البركار التام، انطلاقاً من هذه الفقرة، حبك قصة أسطورية لهذا الإجراء: فقد فسر الآلة التي أعطي لها بشكل مغلوط تاريخياً الاسم الفارسي البركار بالبركار التام وذلك بدون سند لغوي أو واقعي. إلا أنه لم يتبعه أي رياضي عربي في هذا الموضوع.

والنظرية Theôria ارتباطاً وثيقاً في هذا البحث. ومن هنا فهو يختلف اختلافاً كلياً عن مجالات البحث الأخرى ذات الأهداف التطبيقية البحتة: إيجاد آلة وحيدة لرسم الأشكال، كالتي نجدها عند أنتاميوس لرسم القطع الناقص أو عند إسدروس لرسم القطع المكافئ، أو التي وجدت سابقاً عند ديوقليس لرسم منحنيات أخرى. فقد تصور ديوقليس "مسطرة منحنية"[6] لوصل نقاط السيسويد ببعضها بدون أن يعير أدنى اهتمام لنظرية هذه المسطرة.

وهكذا يصبح سؤالنا أكثر تحديداً: لماذا طرحت مسألة رسم المنحنيات القطعية المتصل في النصف الثاني من القرن العاشر – وليس قبل ذلك على الإطلاق – بحيث اهتم رياضيون عديدون، والأعظم شأناً منهم، في حل هذه المسألة ؟ لقد عرضنا وجهة نظرنا بالتفصيل حول نشوء هذا الموضوع في مكان آخر[7] ولذا فلن نطيل هنا. دعنا نذكر باختصار بتأسيس فصل جديد في الهندسة مكرس بكامله للإنشاء الهندسي بواسطة القطوع. وهي الفترة التي قامت فيها أيضاً محاولات حل المسائل المكعبة، التي لا تبسط، بواسطة المنحنيات القطعية (أبو الجود، والقوهي بالذات وآخرون غيرهما). فكان لابد في هذين المجالين من إحداث المنحني بالحركة لضمان اتصاله، وهو مفهوم أصبح أساسياً لمناقشة تقاطع نقاط المنحنيات. أضف إلى هذا السبب الحيوي في الهندسة أسباباً أخرى اقتضتها الرياضيات التطبيقية: الدراسة المنتظمة للخواص الإنكسارية للقطوع، التي دفع إليها مجال البحث الجديد في المرايا المحرقة وفي العدسات المستوية-المحدبة أو مزدوجة التحدب، وكذلك الدراسة النظرية والعملية للأصطرلاب والمزولة. فليس من قبيل الصدفة أن يكون ابن سهل، وهو أول من أعد نظرية هندسية للعدسات وأول من عالج الإحراق بالانسكار، هو الذي تصور جملة ميكانيكية للرسم المتصل للقطوع. ولا غرابة كذلك أن يكون القوهي، وهو الذي كتب رسالة كاملة في هندسة الأصطرلاب وفي الاسقاطات، هو الذي كتب أول كتاب معروف في تصميم البركار، والذي سماه البركار التام – أي عن آلة للرسم المتصل للقطوع الثلاثة وللمستقيم وللدائرة. أما السجزي وقد كان من جهته على اتصال مباشر بابن سهل وعلى علم بأعماله وبأعمال القوهي، فقد نشط في الإنشاءات الهندسية بواسطة القطوع كما نشط في دراسة الأصطرلابات والمزاول[8]. كما كتب رسالة في البركار التام. وكنا سعداء الحظ باكتشاف نسخة من هذا النص الهام الذي كان يعتبر مفقوداً، ونقدم هنا طبعة نقدية لهذا المخطوط (الذي أقل ما يقال فيه أنه سيء النسخ) مع ترجمته.

وفي الواقع فكل شيء يدل على أن الرياضيين اليونان، بفرض تعرضهم لمسألة الرسم المتصل، لم ينصوا عليها ولم يدخلوها في عداد مواضيع بحثهم. وهذا هو وضع الرياضيين العرب حتى منتصف القرن العاشر. صحيح أن بعض العلماء، من أمثال ابن سنان[9]، قد شرعوا في البحث عن الإنشاء بالنقاط ولكن ليس بالرسم المتصل. لقد اقتضى الأمر مرور عدة عقود وللأسباب التي بيناها كي يصبح موضوع البحث هذا معروفاً بفضل الرياضيين الثلاثة المشار

---

[6] انظر Rashed, *Les Catoptriciens grecs*, p. 87 and p. 133.

[7] انظر:

Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3 : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique* (London, 2000).

[8] انظر R. Rashed and P. Crozet, *l'Œuvre mathématique d'al-Sijzī*, in press.

[9] R. Rashed and H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e siècle* (Leiden, 2000).

إليهم أعلاه. وفي الواقع، ففي حين تصور ابن سهل[10] الجهاز الميكانيكي المبني على خواص البؤرة والدليل لرسم القطوع الثلاثة وحدها، فقد اخترع القوهي البركار التام لرسمها ولرسم المستقيم والدائرة معها. وكان السجزي يريد تحسين البركار لرسم قطوع متشابهة أيضاً.

لم تخفى أهمية هذا الحدث عن أعين رياضيي ذلك الزمان. فقد كتب البيروني على سبيل المثال يقول:

"وقد خاض في رسم القطوع بعد ما ذكره أبلونيوس في كتاب *المخروطات* جماعة من فضلاء المحدثين كإبراهيم بن سنان وأبي جعفر الخازن وغيرهما؛ وكل حام حول اتخاذ النقط المتوالية على محيطاتها. ولأبي سهل ويجن رستم الكوهي كتاب تخطيطها بالبركار التام، وإنما سماه تاماً لإمكان عمل الخط المستقيم والمستدير وكل واحد من القطوع الثلاثة عملاً حقيقياً دون تكثير النقط على محيطها ووصلها أو تكثيفها"[11].

1. الرسم المتصل للقطوع: ابن سهل

كان ابن سهل من بين رياضيي مدرسة بغداد، وخاصة منهم المرتبطين ببلاط البويهيين، أكثرهم اهتماماً بخواص القطوع المناظرية. فلم يعد مفهوم بؤرة القطع عنده متصلاً بالانعكاس وحده كما كان الحال في علم الانعكاس الإغريقي والعربي. بل أصبح متصلاً بالانكسار أيضاً. وتجدر الإشارة إلى وقع دراسة الآلات المناظرية، المنسي غالباً، كالمرايا والعدسات، على اهتمام الرياضيين بإنشاء القطوع. وهكذا فقد ارتبط البحث عن الوسائل الميكانيكية لإنشاء القطوع المخروطية بالبحث المناظري في الوقت الذي استجاب فيه إنشاء البركار التام لمتطلبات البحث الفلكي، وعلى وجه الخصوص لمتطلبات صناعة الأصطرلابات والمزولات.

لنتفحص الآلات التي صممها ابن سهل لنجتلي من وراء تعقيدها الظاهري الفكرة التي ترتكز إليها. ثم نذكر باختصار بدراسة البركار كي نبرز صلات القربى القائمة بينه وبين آلات ابن سهل.

يتألف الجهاز المعد للرسم المتصل للقطوع الثلاثة من قبل ابن سهل من قسم صلب ومن قسم يتبدل مع الاحتفاظ بطول ثابت. ويتكون هذا الطول في الحالات الثلاث من سلك أو حزام يلتف حول دائرة متحركة تلعب دور البكرة، مهمتها منع انقطاع السلك وتسهيل حركة القسم المتحرك. وإذا ما زود مركز الدائرة بقلم، رسم قوس المنحنى موضوع الدراسة.

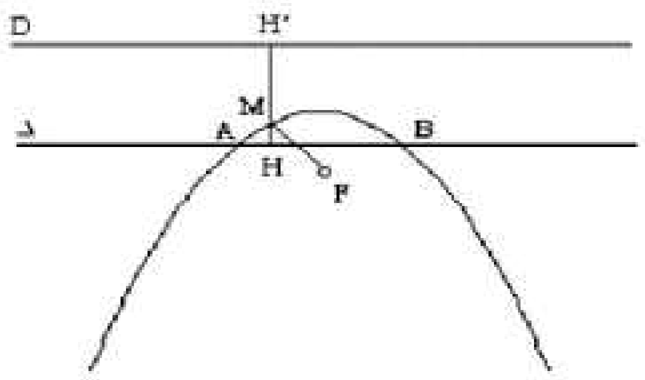
وتلعب في حال كل من القطوع المخروطية الثلاثة التي سننظر فيها تباعاً الصفة المتعلقة بالبؤر دوراً خاصاً.

1.1. القطع المكافئ

ليكن لدينا المكافئ ذو البــؤرة F وليكن Δ مستقيماً عمودياً على المحور يقطع المكافئ في النقطتين A وB. تصح من أجل كل نقطة M على القوس ذات المسقط H على Δ العلاقة

[10] Rashed, 'A Pioneer in Anaclastics : Ibn Sahl on Burning Mirros and Lenses', *Isis*, 81 (1990), pp. 464-91, and *Géométrie et Dioptrique au X^e siècle : Ibn Sahl – al-Qūhī et Ibn al-Haytham* (Paris, 1993).

[11] *Al-Istī'āb*, MS Leiden, Or. 591, fol. 148.



الشكل. 1

(1) $MF + MH = \ell$ حيث $AF = BF = \ell$ المسافة بين Δ والدليل D.

لدينا من ناحية أخرى

(2) $MF = MH'$

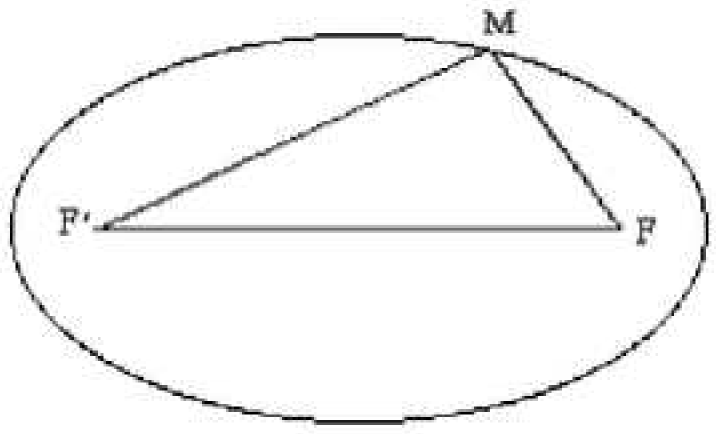
لا يسمي ابن سهل، على غرار أسلافه، الدليل ولكنه يحاكم مستنداً إلى المساواتين السابقتين وإلى الانتقال من واحدة إلى أخرى.

وإذا نظرنا إلى الجهاز المصمم للرسم المتصل للمكافئ، فإننا نرى أنه يعتمد على المساواة الأولى. وهو لا يختلف عن الجهاز الذي يستعمل السلك ذا الطول ℓ والمثبت في F وفي رأس الكوس القائم H إلا باستعمال البكرة. يرسم القلم، الذي يغير شكل السلك في M، قوس قطع مكافئ عندما ينزلق الكوس على المستقيم Δ. هذا هو الجهاز الذي اخترعه ابن سهل لرسم القطع المكافئ[12].

2.1. القطع الناقص

يستعمل ابن سهل الخاصة التي تتيح تعيين محل النقاط M، التي يساوي مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين F و 'F مقداراً ثابتاً، أي

$$MF + MF' = \ell$$



الشكل. 2

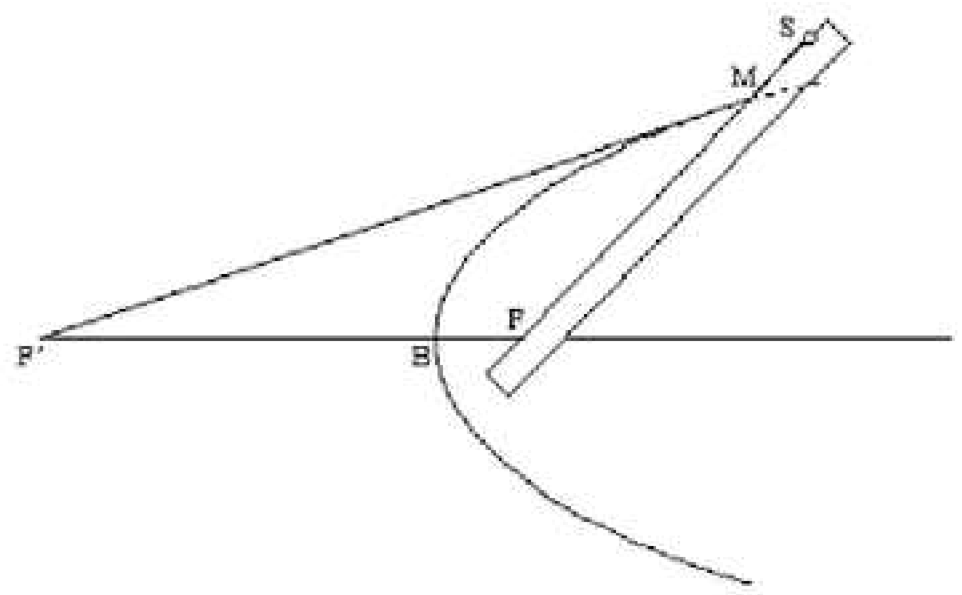
[12] انظر الفصل الثاني ص. 53-52.

حيث F و 'F بؤرتا القطع الناقص و ℓ طول المحور الكبير. لا يختلف جهاز ابن سهل المقترح عن طريقة البستاني الشهيرة إلا باستعمال البكرات، اثنتان منهما ثابتتان والثالثة متحركة[13].

3.1. القطع الزائد

ليكن لدينا قطع زائد بؤرتاه F و 'F وطول محوره العرضاني 2a. والعلاقة المميزة لكل نقطة من الفرع المحيط بالنقطة F هي

$$MF' - MF = 2a$$



الشكل. 3

ولتكن لدينا النقطة S على امتداد FM. لدينا من العلاقة السابقة.

$$(SM + MF') - SF = 2a$$

انطلاقاً من هاتين العلاقتين، يمكن تصور جهاز يرسم رسماً متصلاً قوساً زائدياً، مؤلف من مسطرة تدور حول البؤرة F ومن سلك ثبت أحد طرفيه في البؤرة 'F والطرف الآخر في النقطة S على المسطرة. وإذا كانت المسافة بين F و S هي $FS = \ell$ فإننا نأخذ سلكاً طوله $\ell' = \ell + 2a$. نبقي السلك مشدوداً بواسطة قلم يضغط على المسطرة في M. يرسم رأس القلم القوس MB عندما تدور المسطرة حول F.

إن هذه الفكرة هي أصل الجهاز الذي اخترعه ابن سهل لرسم القطع الزائد. فهو يستعمل بكرتين لهما نفس الشعاع، إحداهما ذات مركز ثابت وللثانية مركز متحرك، ويمتد على البكرتين سلك أو حزام ذو طول ثابت[14].

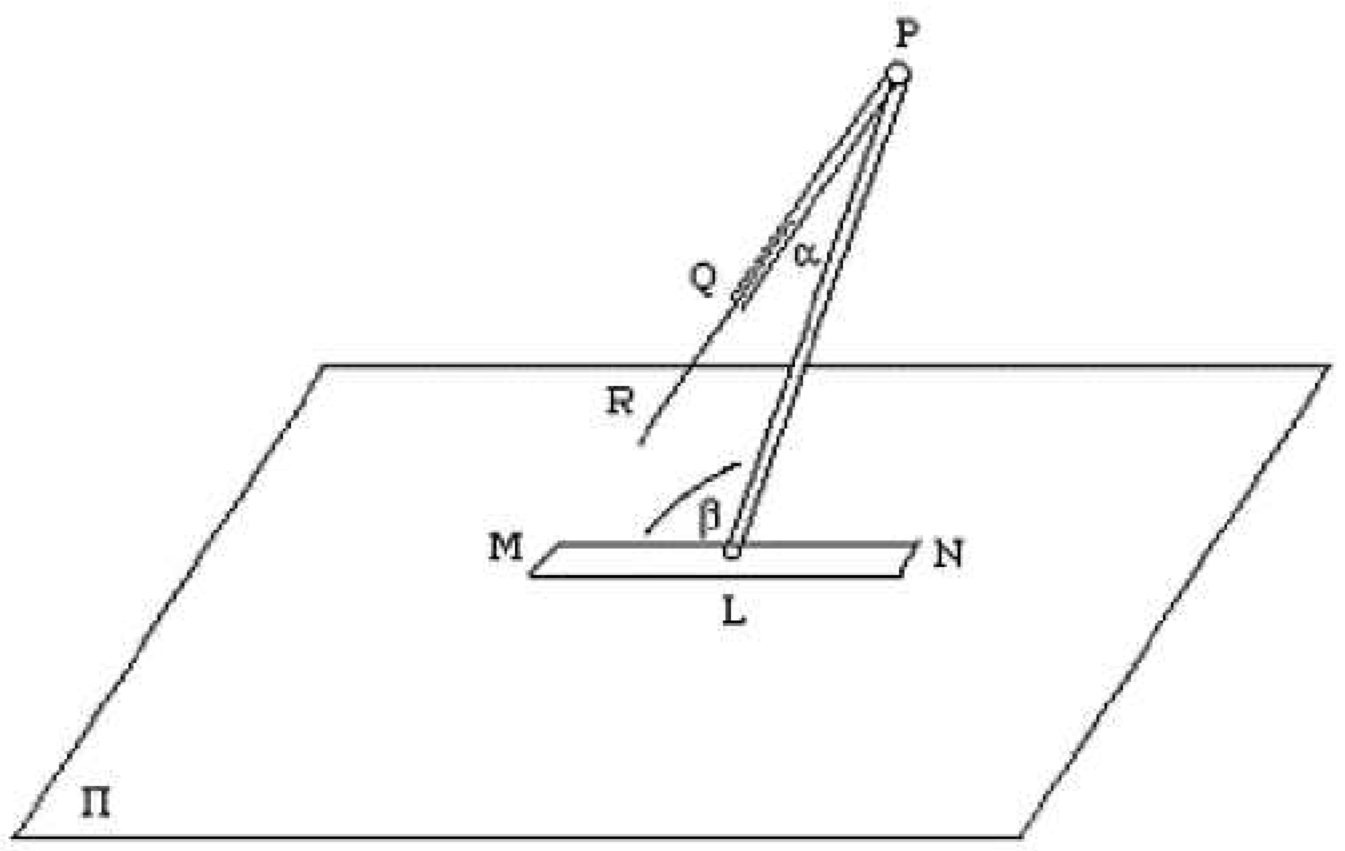
هذا ولم يكن ابن سهل ليجهل الأعمال المنجزة في عصره حول البركار التام. ولنذّكر هنا بتعليقه على رسالة في *صنعة الأصطرلاب* للقوهي[15]، صاحب رسالة أخرى في البركار التام. تتألف آلة القوهي من ثلاثة أجزاء مفصلية

[13] انظر الفصل الثاني ص. 56–54.

[14] انظر الفصل الثاني ص. 65–68.

[15] انظر الفصل السادس.

الارتباط. الجزء الأول، ولنشر إليه بـــ MN، يسمى قاعدة البركار ويقابل محور القطع V والجزء الثاني LP، المسمى محور البركار يقابل محور المخروط. أما الجزء RQP والمسمى مسطاراً فيمكنه الدوران حول PL ويسمح طوله المتغير بإبقاء رأسه R على المستوى Π طيلة دورانه فيرسم القطع المخروطي.



الشكل. 4

وهكذا فحالما عرفنا *الضلع القائم* وأحد الأقطار والزاوية بين هذا القطر والاتجاه المترافق رسم البركار القطع المخروطي المطلوب. غير أن هذا الرسم يتطلب إنشاءات تمهيدية لتعيين الزاويتين α و β للبركار (المتساويتين في حال القطع المكافئ).

ويمكننا التكهن على ضوء ما سبق أن ابن سهل طرح طريقته لتجنب هذه الإنشاءات التمهيدية التي غالباً ما تكون طويلة ومعقدة. إنه تكهن مقبول إلا أن ابن سهل لم يكشف لنا كعادته عن نواياه.

أما فيما يتعلق بما طرأ على طريقة ابن سهل في إنشاء القطوع بعد ذلك، فإننا نعرض فرضية تبدو لنا هي أيضاً محتملة. فلقد أشرنا إلى ذكر خليفته ابن الهيثم، في أعماله عن المرآة المكافئة، رسالة كتبها في إنشاء القطوع المخروطية "بطريق الآلة" قائلاً ما يلي "أما كيف يستخرج القطع المكافئ وغيره من القطوع بطريق الآلة فقد ذكره جماعة من المهندسين وإن كانوا لم يستخرجوه على حقيقته"[16] موحياً بذلك أنه قد أسهم بنفسه في تحسين الطريقة. ويبدو لنا من المستبعد جداً ألا يكون قد وضع ابن سهل في طليعة الـــ "جماعة من المهندسين" هذه.

---

[16] ابن الهيثم، *المرايا المحرقة بالقطوع في مجموع الرسائل*

Osmania Oriental Publications Bureau (Hyderabad-Deccan, India, 1357 A.H/1938-1939) ; see H. J. Winter and W. 'Arafat, 'Ibn al-Haitham on the Paraboloidal Focusing Mirror', *Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal*, 3rd ser. : Science, 15 (1949), pp. 25-40.

2. اختراع البركار التام: أبو سهل القوهي

تصور القوهي آلة يمكن بفضلها، كما يقول، "عمل الأصطرلابات على السطوح المستوية وذوات المحاور وعمل الرخائم على أي سطح كان وكذلك كل الآلات التي يكون عليها خطوط الفصل المشتركة وأي سطح كان"[17]. كرس القوهي رسالة هندسية كاملة بكتابين لهذا البركار. أعد في الكتاب الأول نظرية الآلة، قبل أن ينتقل إلى تطبيقاتها في الكتاب الثاني. ولنشر أنه على الرغم من تصريحاته التمهيدية عن صلاحية هذه الآلة للأصطرلابات والرخائم فإن كل التطبيقات المحتواة في الكتاب الثاني هندسية محضة.

1.2. كتاب القوهي الأول

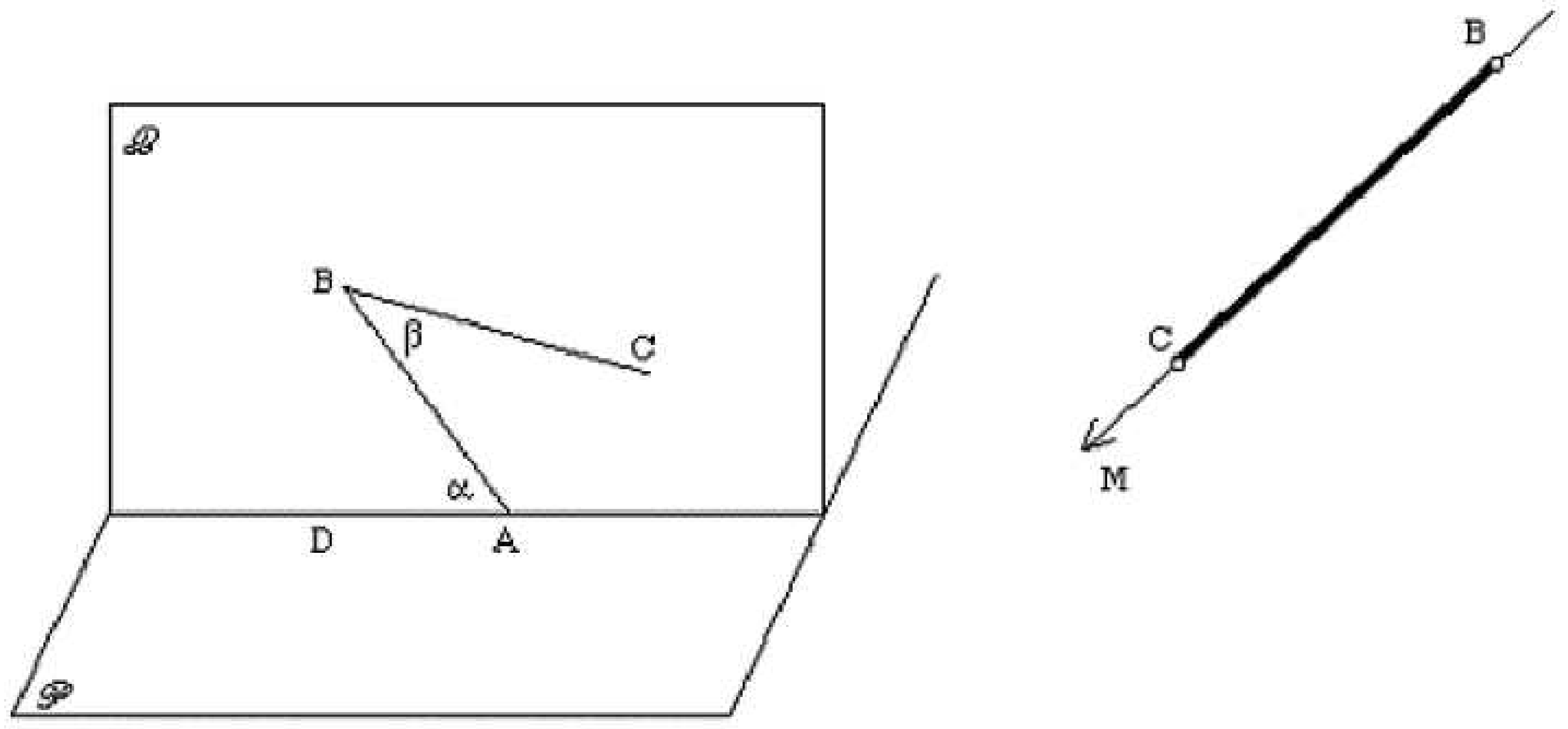
يبدأ الكتاب الأول من الرسالة بوصف البركار التام ثم يتابع شارحاً استعماله لرسم مختلف المنحنيات في المستوي : المستقيم والدائرة والقطع المكافئ والناقص والزائد (بفرع أو بفرعين).

يتألف البركار التام من أربعة أجزاء مفصلية الارتباط:

- جزء مستوٍ هو القاعدة ويحتوي على "خط المركز" AD.
- "محور البركار" AB الذي يستطيع الدوران حول النقطة A المسماة "المركز" على أن يبقى في المستوي $\mathfrak{Q}$ العمودي على المستوى $\mathcal{P}$ الحاوي على AD، خط تقاطع المستويين، ويتعين وضعه بالزاوية الحادة في رأس البركار $\alpha = D\hat{A}B$.
- "خط الرأس" BC الذي يستطيع الدوران حول النقطة B، المسماة "الرأس". نأخذ وضعه البدائي في المستوى $\mathfrak{Q}$ عندما نختار الزاوية $\beta = A\hat{B}C$. نجعله يدور حول المحور راسماً سطحاً مستوياً في حال كانت زاوية الرأس قائمة أو سطحاً مخروطياً دورانياً إن لم تكن كذلك.
- يحمل المستقيم BC قلم رسم (مخط) يستطيع الانزلاق عليه بحيث يأتي أحد طرفيه – ولنسمه M – ليرسم في المستوي $\mathcal{P}$ الشكل المطلوب.

يمثل DABC البركار و $\mathfrak{Q}$ مستواه.

[17] انظر أدناه ص. 797 سطر 2-4.

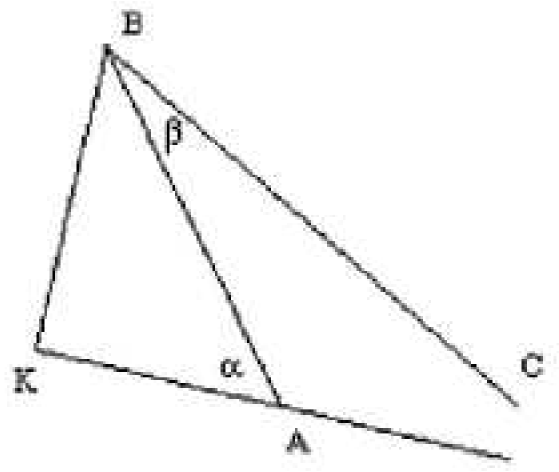


الشكل. 5

كل شيء يتوقف إذاً على الزاوية β التي يصنعها محور البركار مع الفرع BC منه وعلى الزاوية α بين المحور وقاعدة البركار. للقلم الراسم طول متغير يتيح لرأسه البقاء على تماس مع المستوي الذي نريد رسم القطوع المخروطية عليه. أما فيما يخص المحور فإنه يبقى ثابتاً.

لننظر إلى وضع الفرع BC بحيث تكون الزاويتان α و β متناوبتين. وليكن BK العمود الساقط من B على المستوى القاطع. وهو بالتالي عمودي على قاعدة البركار. تتوقف طبيعة المنحني المرسوم على الزاوية CBK. لدينا

$$C\hat{B}K = \frac{\pi}{2} + \beta - \alpha \qquad و \qquad A\hat{B}K = \frac{\pi}{2} - \alpha$$



الشكل. 6

فإذا كانت

$$C\hat{B}K < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta - \alpha < 0$$ فالقطع قطع ناقص

$$C\hat{B}K = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta - \alpha = 0$$ فالقطع قطع مكافئ

$$C\hat{B}K > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0$$ فالقطع قطع زائد

يرى القوهي أن طبيعة المنحني المراد رسمه في المستوي تتوقف على وضع المحور البدائي بالنسبة لهذا المستوى. وهو الوضع الذي يحدده طول محور البركار ℓ، والزاوية β بين المحور والفرع المتحرك، والزاوية α بين المحور وقاعدة البركار. فالهدف إذاً هو دراسة تقابل العناصر (ℓ, β, α)، من جهة، مع العناصر التي تميز القطع المخروطي من جهة أخرى: القطر و*الضلع القائم* في حالة القطع الناقص والزائد. و*الضلع القائم* في حالة القطع المكافئ.

ولذا فهو يعمل على إثبات القضايا التالية:

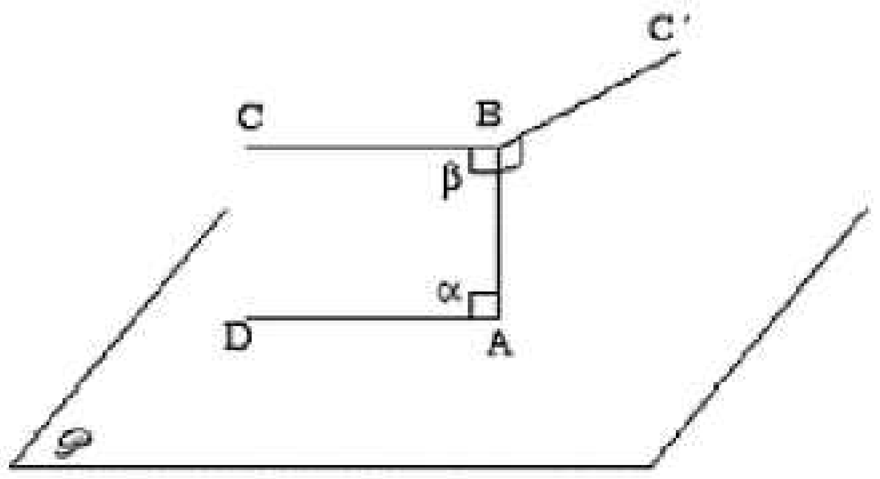
- إذا كانت $\alpha = \frac{\pi}{2}$ و $\beta = \frac{\pi}{2}$ فإن رأس المخط لا يلاقي المستوى $\mathscr{P}$ ولا يرسم شيئاً.
- إذا كانت $\alpha < \frac{\pi}{2}$ و $\beta = \frac{\pi}{2}$ فإن المستقيم BC يحدث مستوياً يقطع المستوي $\mathscr{P}$ حسب مستقيم يقوم رأس المخط برسمه.
- إذا كانت $\alpha = \frac{\pi}{2}$ و $\beta < \frac{\pi}{2}$ فالمنحني دائرة شعاعها $r = AB \text{ tg } \beta$.
- إذا كانت $\alpha = \beta < \frac{\pi}{2}$ فالمنحني المرسوم قطع مكافئ محوره AD ورأسه D.
- إذا كانت $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ يرسم طرف قلم الرسم الأول فرع قطع زائد رأسه D ويرسم الطرف الثاني الفرع الآخر الذي رأسه في E.
- إذا كانت $\beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ يرسم المخط قطعاً ناقصاً.

وسنعالج هنا لتوضيح طريقة القوهي هذه المسائل كما جاءت في النص.

القضية 1: $\alpha = \beta =$ زاوية قائمة.

يبقى المستقيم BC موازياً للمستوى $\mathscr{P}$، لا يلقى قلم الرسم هذا المستوى ولا يرسم بالتالي شيئاً.

لدينا $BC \perp AB$ و $AB \perp AD$. عندما يدور BC حول AB فإنه يبقى موازياً للمستوى $\mathscr{P}$ المار من النقطة A.



الشكل. 7

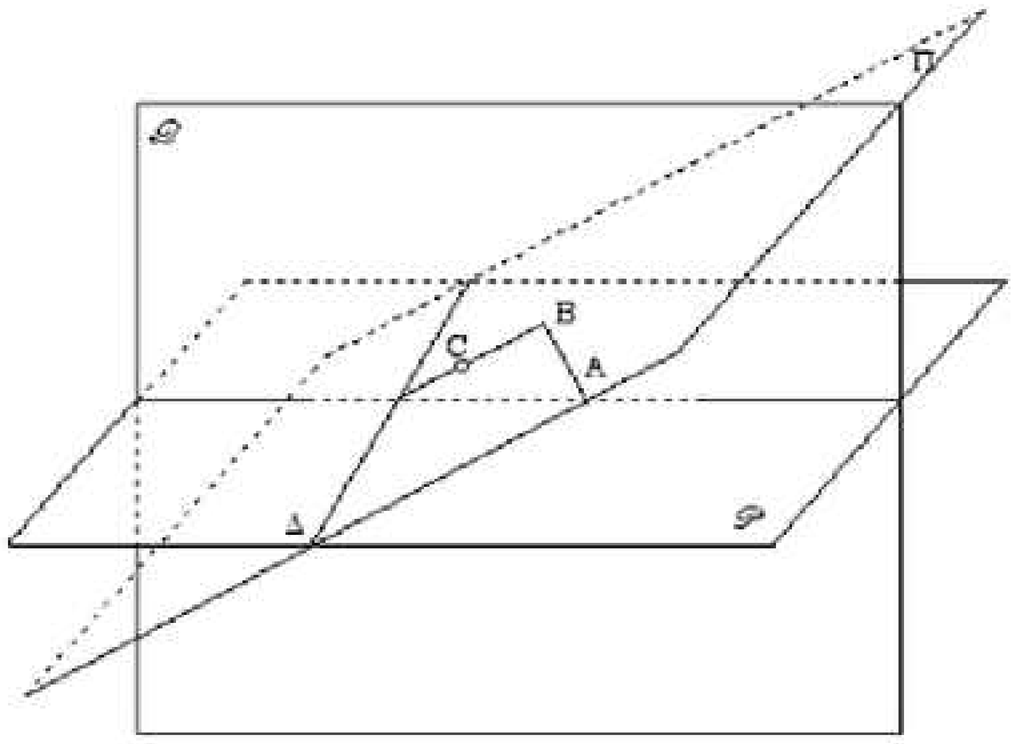
القضية 2 : α حادة و β قائمة

يحدث الخط BC مستوياً يتقاطع مع 𝒫 على مستقيم يرسمه رأس المخط.

يمكن للزاوية α أن تكون حادة أو منفرجة والمحور AB ليس عمودياً على المستوى 𝒫.

وبما أن $\beta = A\hat{B}C$ قائمة، فالمستقيم BC عمودي على المحور ويبقى عندما يدور حول AB في مستو Π عمودي على AB؛ AB ⊥ Π في النقطة B، وقلم الرسم في المستوى Π. نجعله ينزلق على طول BC إلى أن يلتقي طرفه بالمستوى 𝒫. يرسم هذا الطرف المستقيم Δ مقطع المستويين 𝒫 و Π.

وإذا كان طول محور البركار AB معطى، فيمكننا من أجل زاوية α إعطاء المستوى Π وبالتالي الخط Δ.

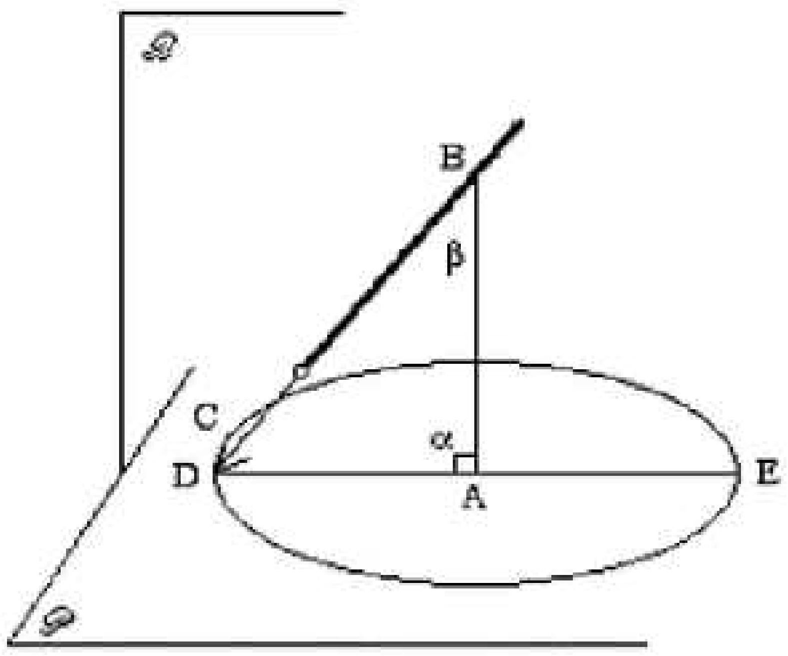


الشكل. 8

القضية 3: α زاوية قائمة و β حادة.

يحدث الخط BC مخروطاً دورانياً محوره AB عمودي على المستوى 𝒫. والمنحني المرسوم دائرة شعاعها $r = AB \text{ tg } \beta$.

إن المحور AB عمودي على المستوى المعطى، ولذا AD ⊥ AB . نجعل قلم الرسم ينزلق على طول BC في المستوى 𝒬 ⊥ 𝒫، AD الخط المشترك لهذين المستويين. يتلاقى رأس القلم مع "خط المركز" في النقطة D. يرسم BC عندما يدور حول AB مخروطاً دورانياً يتقاطع مع المستوى 𝒫 على دائرة شعاعها AD، يرسمها رأس القلم. ويتوقف شعاعها على طول المحور AB وعلى الزاوية β.

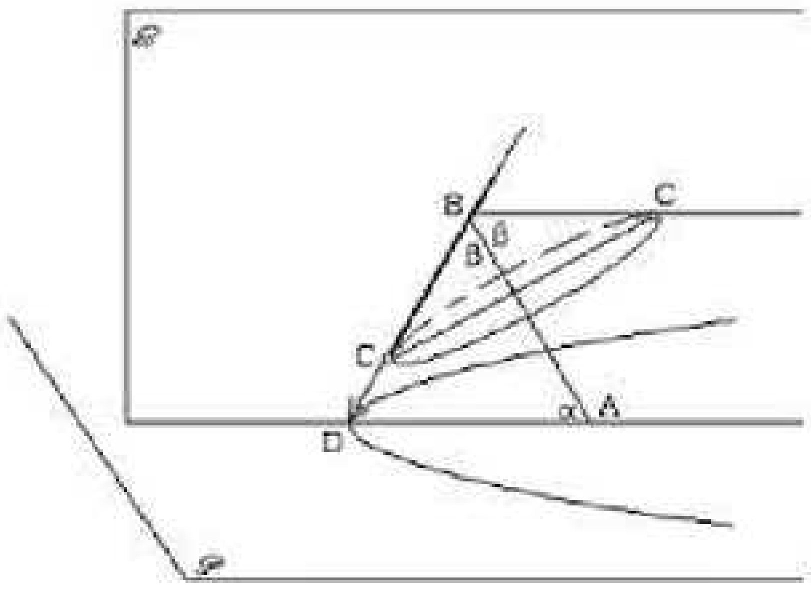


الشكل. 9

القضية 4: زاوية قائمة > $\alpha = \beta$

سيرسم BC من جديد مخروطاً دورانياً إلا أن إحدى مولدات هذا المخروط ستكون موازية لـ $\mathcal{P}$ والمنحني المرسوم عندئذ هو قطع مكافئ محوره AD ورأسه D، نقطة تقاطع BC مع "خط المركز" AD.

لا يتعامد المحور AB لا مع "خط الرأس" BC ولا مع "خط المركز" AD. يولد نصف المستقيم BC عندما يدور حول AB سطحاً مخروطياً دورانياً ويولد امتداده سطحاً مخروطياً مقابلاً. وبما أن الزاويتين $D\hat{A}B = \alpha = A\hat{B}C = \beta$ حادتان، فإذا كان BCD الوضع البدائي لـ BC ولرأس القلم الذي هو في المستوى $\perp \mathcal{P}$ $\mathcal{Q}$، فإن نصف المستقيم BC في دورانه حول AB سيعود إلى المستوى $\mathcal{Q}$ بحيث يكون موازياً لـ AD: إن المستوي $\mathcal{P}$ مواز لمولد من مولدات السطح المخروطي الذي يرسمه نصف المستقيم BC؛ يقطع هذا الأخير المستوى $\mathcal{P}$ مشكلاً قطعاً مكافئاً رأسه D وقطره AD. يتبع هذا القطع الطول AB والزاوية α.

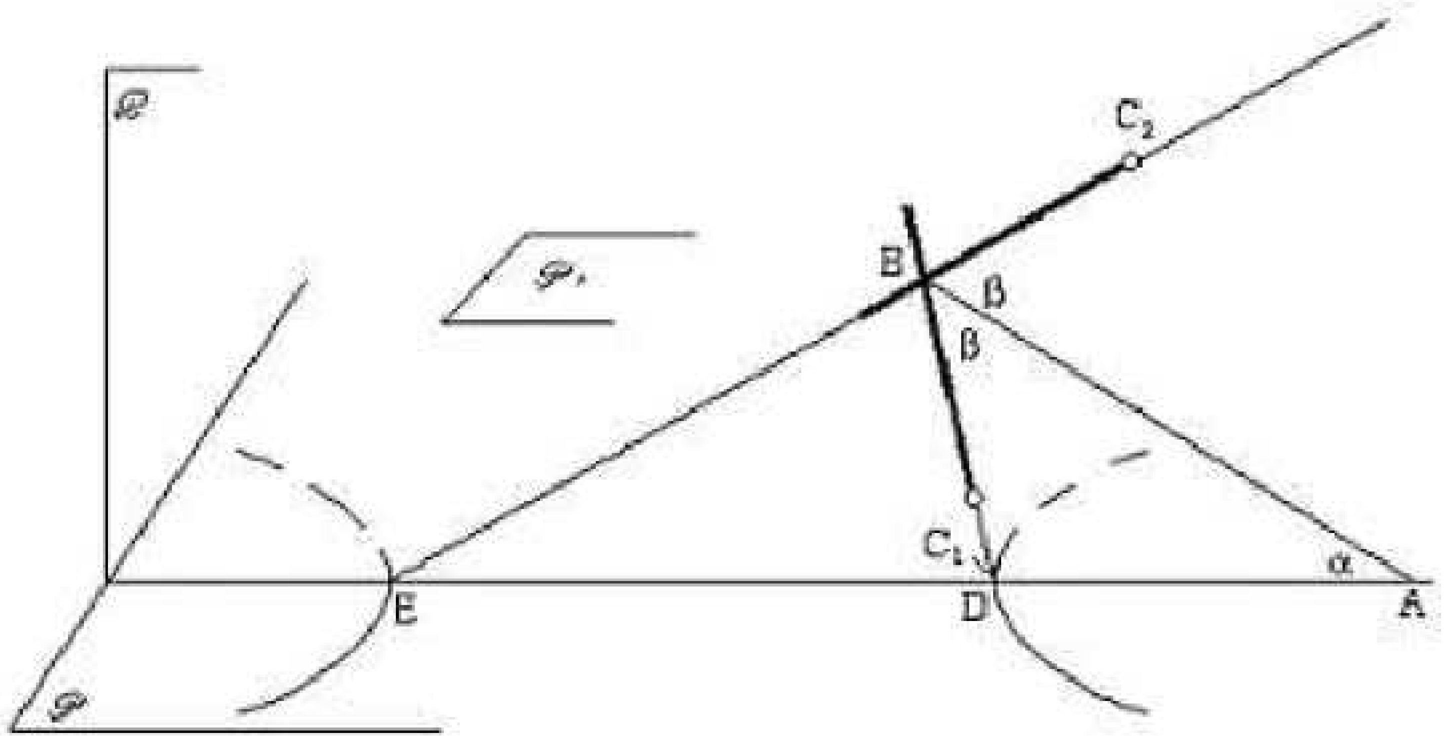


الشكل. 10

القضية 5: زاوية قائمة > β > α .

يمكن لـ α و β أن تكونا من جانب واحد لـ AB أو من جانبين مختلفين. ستكون C في الحالة الأولى في C_1 بينما تكون في C_2 في الحالة الثانية. إن أول نقطة من القلم الراسم تلتقي المستوى $\mathcal{P}$ في D في الحالة الأولى؛ وترتيب النقط على خط الرأس هو B، C_1، D. أما في الحالة الثانية فإن الطرف الثاني للقلم الراسم يلتقي بالمستوى $\mathcal{P}$ في النقطة E؛ وترتيب النقاط هو C_2، B، E.

عندما يدور المستقيم اللامنته BC حول AB فإنه يولد فرعي سطح مخروطي دوراني. يتقاطع المستوي $\mathcal{P}$ مع إحدى مولدات الفرع الثاني في النقطة E. فهو يتقاطع إذاً مع فرعي السطح المخروطي حسب فرعي قطع زائد محوره DE، النقطة D رأس الفرع الأول والنقطة E رأس الفرع الثاني.

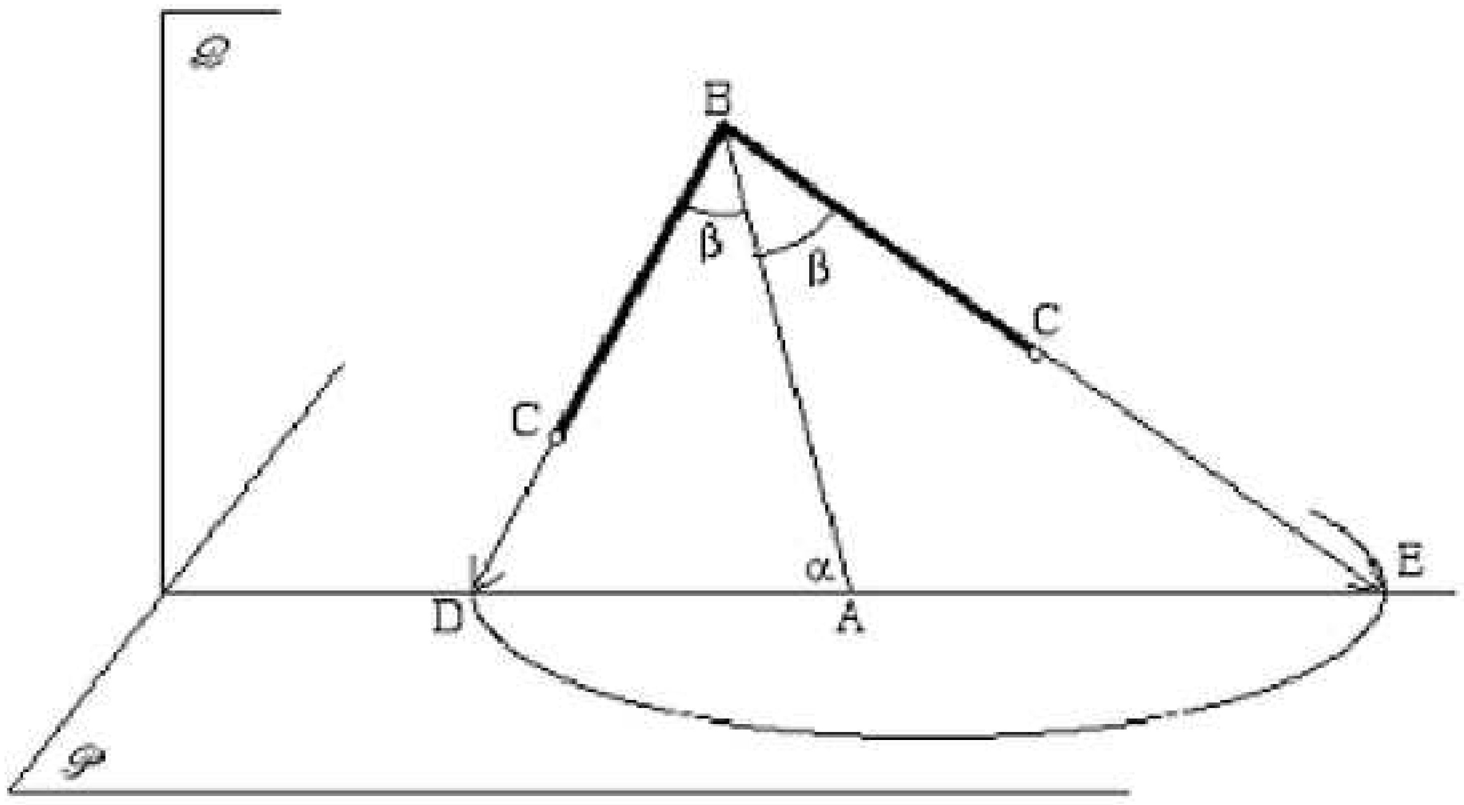


الشكل. 11

يرسم طرف القلم الراسم الأول الفرع ذا الرأس D أثناء دوران "خط الرأس" حول محور البركار AB، ويبقى BC_1 تحت المستوى $\mathcal{P}'$ الموازي للمستوى $\mathcal{P}$ والمار من B. أما عندما يقع "خط الرأس" فوق المستوى $\mathcal{P}'$، فإن طرف القلم الراسم الثاني يرسم فرع القطع الزائد ذي الرأس E.

القضية 6: زاوية قائمة > α > β

لتكن الزاويتان الحادتان $B\hat{A}D = \alpha$ و $A\hat{B}C = \beta$ و $\alpha > \beta$. لننظر إلى فرع السطح المخروطي ذي المحور BA وزاوية الرأس β الذي يولده نصف المستقيم BC. يتقاطع المستوى $\mathcal{P}$ مع كل مولدات هذا الفرع. والتقاطع قطع ناقص محوره DE. D هي طرف قلم الرسم عندما يكون في المستوى $\mathcal{Q}$ و α و β على جانب واحد من AB. وE هي طرف قلم الرسم عندما يكون في المستوى $\mathcal{Q}$ أيضاً ولكن α و β على جانبين مختلفين من AB. ويرسم القلم كل القطع الناقص أثناء دوران BC حول AB.



الشكل. 12

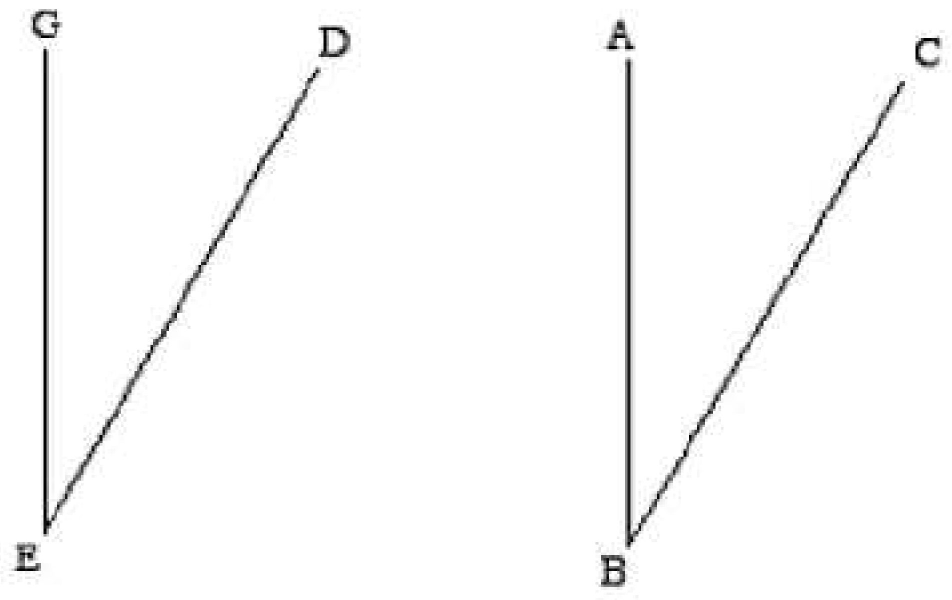
وهكذا يسمح البركار التام بالقيام بالرسم المتصل على مستو معين للخط المستقيم أو لأي قطع مخروطي – دائرة، قطع مكافئ، قطع زائد أو قطع ناقص – سواء ارتبطت بقطر أو بمحور. ولا تلعب البؤر أي دور سواء كان ذلك في المحاكمة أو في الإنشاء. فهما يعتمدان، بدلا عن ذلك، على خواص المقاطع المستوية لمخروط ذي قاعدة دائرية، وهي الخواص التي أثبتها أبلونيوس في الكتاب الأول من *المخروطات*. وهي خواص تتعلق بالقطر و*الضلع القائم* المرتبط به وبالزاوية التي يصنعها القطر مع اتجاه التراتيب.

2.2. مقالة القوهي الثانية

يناقش القوهي في المقالة الثانية من كتابه مسائل الرسم المتصل للمنحنيات. ويعتبر في كل حالة أن طبيعة ووضع المنحني المراد رسمه في المستوى $\mathscr{P}$ معلومان؛ ففي حالة المنحنيات المخروطية على سبيل المثال يعتبر القطر و*الضلع القائم* وزاوية الترتيب المرتبط بهذا القطر معلومة كلها. ثم يطرح على نفسه مسألة تعيين صورة البركار بتحديد أبعاد عناصره (أي قياس الزاويتين α و β بفرض طول المحور $\mathscr{A}$ معروفاً)، وكذا بتحديد وضع مستوى البركار $\mathscr{Q}$ بالنسبة إلى العناصر المعطاة في $\mathscr{P}$. يتحدد وضع المستوى $\mathscr{Q}$ بخط تقاطعه مع المستوى $\mathscr{P}$، أي بالمستقيم الذي يقع عليه "خط المركز". وهكذا وبعد أن أعد في المقالة الأولى نظرية البركار التام فقد كرس المقالة الثانية، إن صح التعبير، إلى تطبيقاته. وهكذا يمكننا أن نتفهم، بالنظر إلى قصده، أن تتتابع المسائل المعالجة في المقالة الثانية على النحو الذي جاءت فيه في المقالة الأولى. ولذا فإننا سنعرضها بنفس الطريقة ولن نتوقف إلا عند تلك التي تتطلب الشرح كي نعلق عليها.

المسألة 1: رسم زاوية مساوية لزاوية معلومة

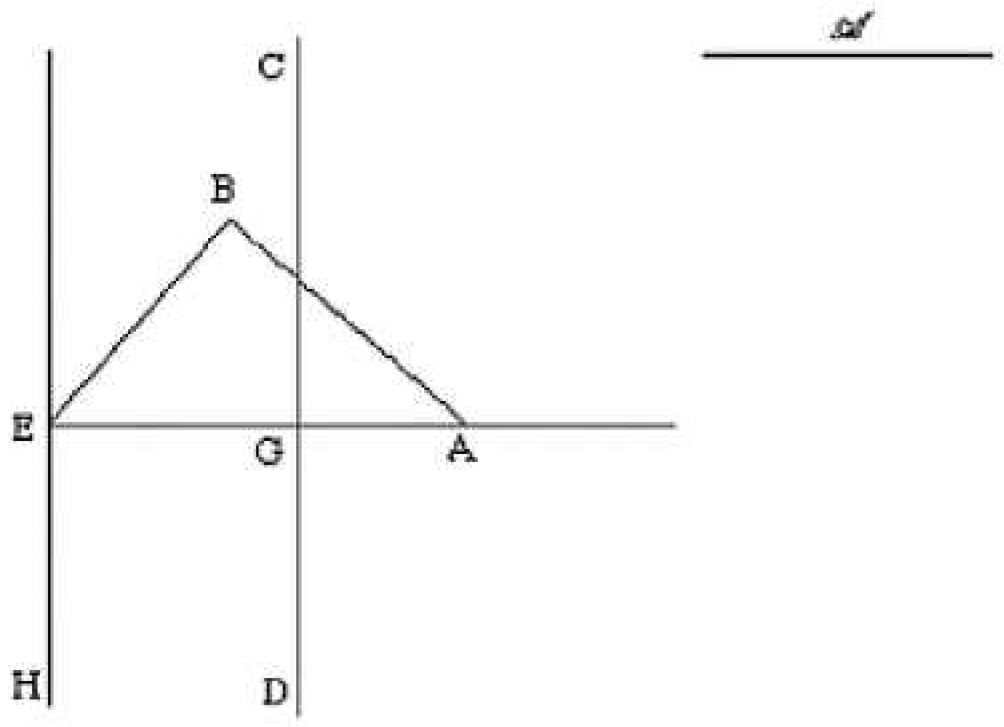
هذا الإجراء ضروري لإنجاز زوايا بالأبعاد المطلوبة في رأس وفي مركز الإنشاء المراد. إنها مرحلة تمهيدية نجدها في الكتاب الأول من *الأصول* لأقليدس.



الشكل. 13

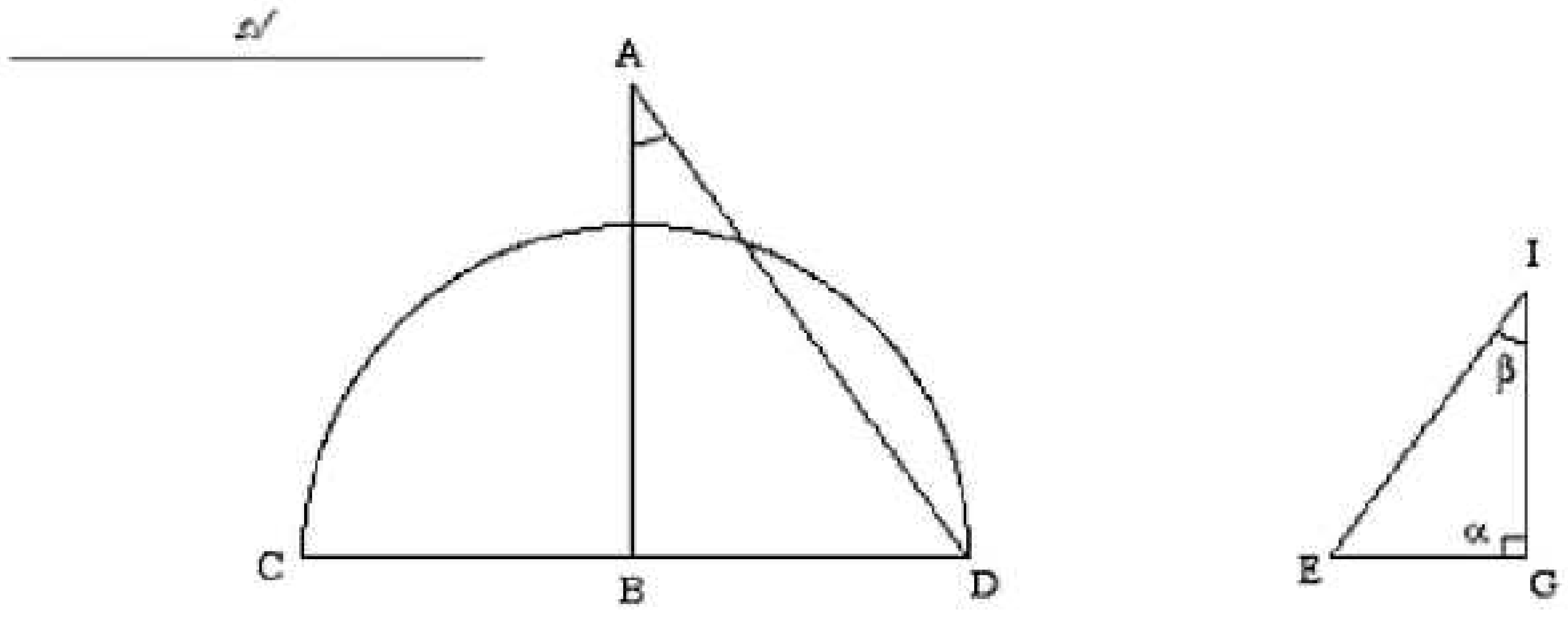
المسألة 2: رسم مستقيم مار من نقطة معلومة E ومواز لمستقيم معلوم CD.

نعلم من المقالة الأولى أن الزاوية β قائمة والزاوية α حادة والطول 𝒜 غير محدد. يأخذ البركار في هذه الحالة شكل مثلث قائم الزاوية وتره "خط المركز". ووضع هذا المستقيم هو AE ‏(CD ⊥ AE).



الشكل. 14

المسألة 3: رسم دائرة قطرها معلوم CD = 2r.



الشكل. 15

لتكن B نقطة الوسط على DC. نعلم من المقالة الأولى أن شكل البركار هو مثلث قائم الزاوية (زاوية قائمة = α) كالمثلث IEG. نعتبر طول المحور $\mathscr{A}$ معلوماً، فتتحدد β في رأس البركار بـــ $\mathrm{tg}\ \beta = r/\mathscr{A}$. نضع عندئذ "خط المركز" على BD، شعاع الدائرة.

المسألة 4: رسم قطع مكافئ رأسه B وقطره BC و*ضلعه القائم* D طول معلوم وزاوية ترتيبه المقابلة لـــ BC هي $\hat{E}$.

يميز القوهي بين حالتين حسبما تكون الزاوية $\hat{E}$ قائمة أم لا. وسنتفحص هاتين الحالتين.

a) الزاوية E قائمة. يصبح المستقيم BC محور القطع المكافئ. نعلم من المقالة الأولى أن $\alpha = \beta$ بالضرورة.

ومن الضروري إذاً – إذا كان $\mathscr{A}$ طول محور البركار معلوماً – أن يكون لدينا

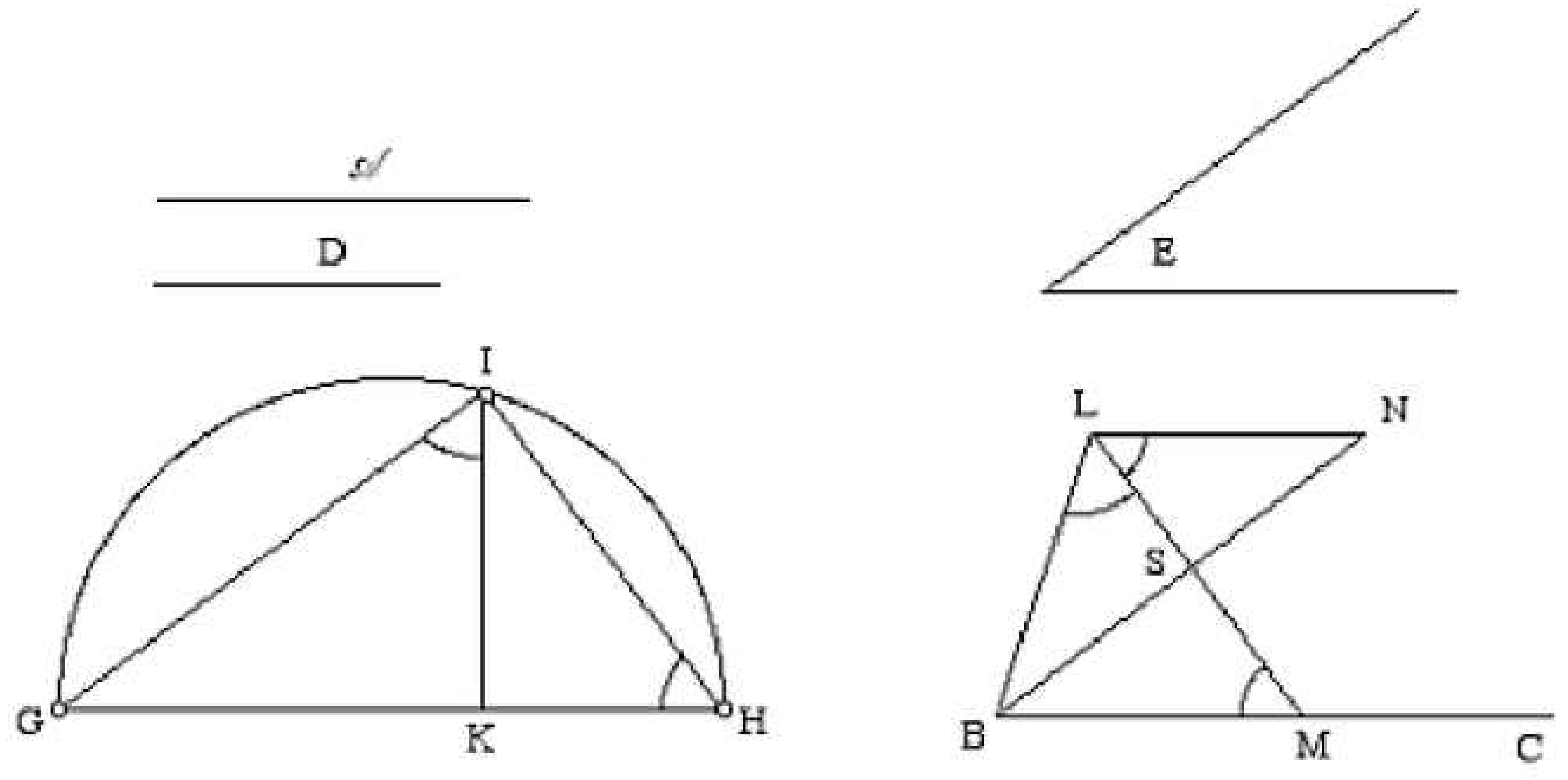
$$\cos\ \alpha = \cos\ \beta = \sqrt{\frac{D^2}{16\mathscr{A}^2} + 1}\ - \frac{D}{4\mathscr{A}} \qquad (1)$$

لنعد حتى نبين هذا الشرط إلى طريقة القوهي، فنرسم نصف دائرة قطرها GH ونأخذ عليه نقطة K محددة بـــ

$$\frac{GK^2}{GH \cdot HK} = \frac{D^2}{4\mathscr{A}^2} \qquad (2)$$

(يرجع القوهي إلى كتابه *في إحداث النقط* للقيام بهذا الحساب).

لدينا $KI \perp GH$ والزاوية $K\hat{H}I$ هي زاوية البركار المطلوبة α. نترك القلم الراسم ينزلق حتى يلقى طرفه "خط المركز" في النقطة B. يتمثل البركار حينئذ بالمثلث BLM حيث LM هو المحور ذو الطول $\mathscr{A}$، M المركز وخط الرأس هو LB إذا كانت زاوية الرأس وزاوية المركز على جانب واحد من المحور LM، وهو LN الموازي لـــ BM إذا كانت هاتان الزاويتان متبادلتين. نطبق "خط المركز" BM على المستقيم BC. فإذا أدرنا LB حول LM رسم رأس القلم B القطع المكافئ المطلوب في المستوى $\mathscr{P}$.



الشكل. 16

لنلاحظ أننا إذا سمينا الأطوال $\ell = GH$ و $x = GK$ $(x < \ell)$ و $k = \dfrac{D}{2\mathscr{A}}$ فإن العلاقة (2) تكتب

$$\frac{x^2}{\ell(\ell - x)} = k^2 \qquad (3)$$

أو

$$x^2 + k^2\ell x - k^2\ell^2 = 0$$

و

$$GK = x = k\ell\left(-\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + 1}\right)$$

وبما أننا فرضنا في البركار أن

$\alpha = \beta <$ زاوية قائمة و $\cos\alpha = \cos K\hat{H}I = \frac{HI}{GH}$

فإن

$$\cos^2\alpha = \frac{HI^2}{GH^2} = \frac{HG \cdot HK}{GH^2} = \frac{\ell(\ell - x)}{\ell^2}$$

ولدينا من (3)

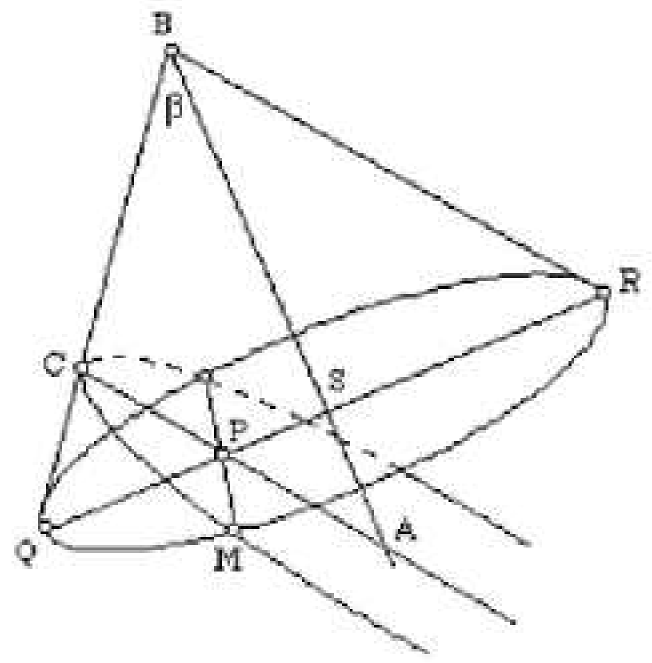
$$\ell(\ell - x) = \frac{x^2}{k^2}$$

ومنه

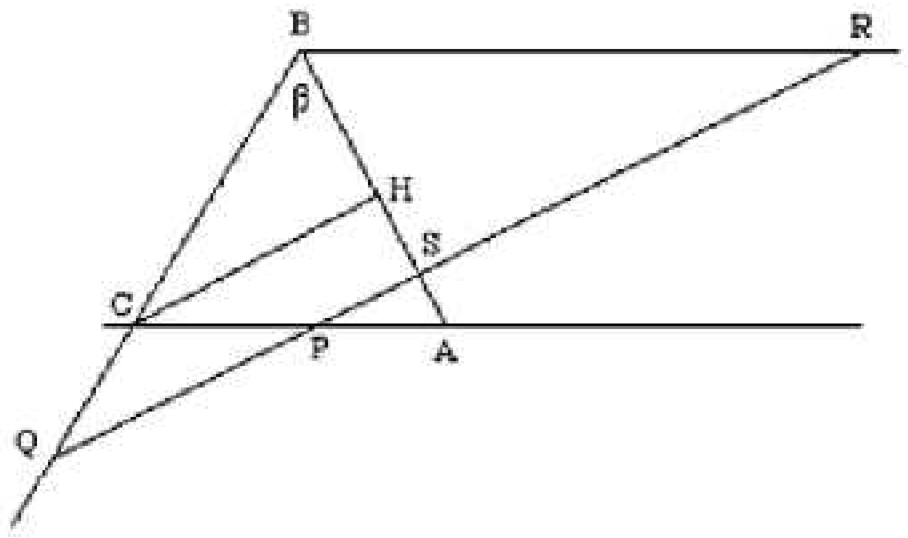
$\cos^2\alpha = \frac{x^2}{k^2\ell^2}$ و $\cos\alpha = \frac{x}{k\ell} = -\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + 1}$

وهي العلاقة (1)

لدينا في الدائرة QMR، قاعدة المخروط الذي تحدثه حركة BQ العلاقة التالية: $MP^2 = QP \cdot PR$. لتكن P نقطة التقاء الموازي لـ BR المحدث من C (رأس القلم الراسم) بالقطر QR.



الشكل. 17



الشكل. 18

لدينا

$$\frac{PR}{CB} = \frac{QR}{QB} \quad \text{و} \quad \frac{QP}{CP} = \frac{QR}{BR}$$

ومنه

$$\frac{QP \cdot PR}{CP \cdot CB} = \frac{QR^2}{BR \cdot QB}$$

وإذاً

$$MP^2 = \frac{QR^2}{BR \cdot QB} \cdot CB \cdot CP$$

وهكذا *فالضلع القائم* D للقطع المكافئ هو

$$\frac{QR^2}{BR \cdot QB} \cdot CB$$

وبما أن $QR^2 = 4QS^2 = 4QB^2 \sin^2 \beta$ و $BR = QB$.

فإن

$$D = 4CB\sin^2 \beta = \frac{4BH\sin^2 \beta}{\cos \beta} = 2\mathscr{A} \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}$$

نستخلص من هذه العلاقة

$$2\mathscr{A}(1 - \cos^2 \beta) = D \cos \beta \quad \text{أو} \quad \cos^2\beta + \frac{D}{2\mathscr{A}} \cos \beta - 1 = 0$$

ومنه

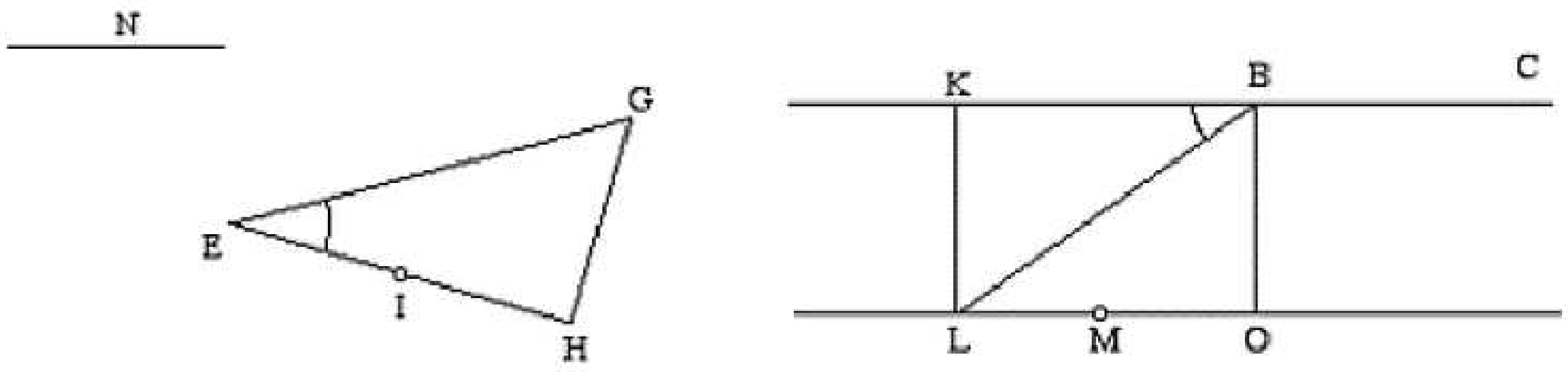
$$\cos \beta = \sqrt{\frac{D^2}{16\mathscr{A}^2} + 1} - \frac{D}{4\mathscr{A}}$$

b) تختلف الزاوية E عن الزاوية القائمة

إن BC في هذه الحالة هو أي قطر للقطع المكافئ المطلوب. تتلخص طريقة القوهي المطبقة هنا في تحديد محور القطع المكافئ ورأسه و*الضلع القائم* المقابل له حتى يعيد هذه الحالة إلى الحالة السابقة وإليكم الإجراءات التي يقوم بها.

نقيم من نقطة G على أحد ضلعي زاوية معلومة E المستقيم GH العمودي على الضلع الثاني في النقطة H. لتكن I وسط EH. نعرف الطول N بالعلاقة التالية

$$\frac{D}{N} = \frac{EG^2}{GH \cdot HI}$$



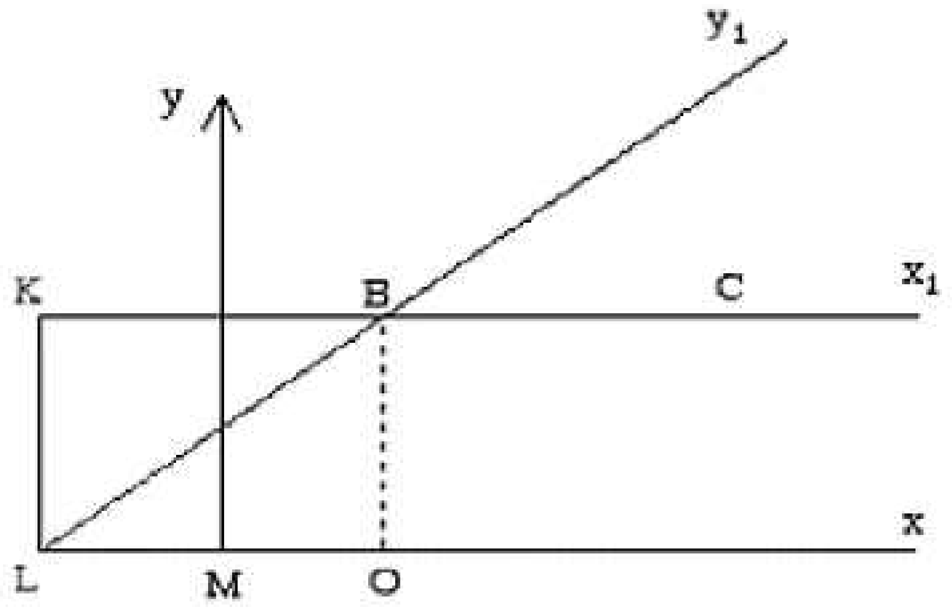
الشكل. 19

نأخذ الآن نقطة K على امتداد CB بحيث يكون $K\hat{B}L = G\hat{E}H$ و $KL \perp BC$ و $KL = N$ (المثلثان LKB و GHE متشابهان، والمثلث LKB معلوم تماماً لأن $KB = \frac{N}{tg\,\hat{E}}$ و $LK = N$).

لتكن O نقطة بحيث يكون $BC \parallel LO$ و $KL \parallel BO$ ولتكن M وسط LO. نعرف طولاً S بالعلاقة $\frac{OM}{OB} = \frac{OB}{S}$؛ فنعرف بالتالي كيف نرسم بواسطة البركار ذي طول المحور $\mathscr{A}$ قطعاً مكافئاً قطره MO، رأسه M و*ضلعه القائم* S، بحيث تكون زاوية القطر LO مع محور التراتيب قائمة؛ أي أن MO هو محوره كما أثبت القوهي في الحالة الأولى. يمر هذا القطع المكافئ في B لأن $OB^2 = S\ .\ OM$ (OM الفاصلة و OB الترتيب) ومن الواضح أن BC الموازي للمحور MO هو قطر.

يبقى علينا أن نبين أن *الضلع القائم* المرتبط بـــ BC هو D وأن زاوية الترتيب مع المحور هي E؛ أي أن نبين أن BL يمس القطع المكافئ في B.

نأخذ جملة الإحداثيات (My, Mx) فمعادلة القطع المكافئ ذي المحور Mx و*الضلع القائم* S هي $y^2 = Sx$.



الشكل. 20

إن رأس القطع المكافئ M هو وسط OL، ولذا فإن المستقيم BL مماس للقطع المكافئ في B (*المخروطات* I. 33).

لدينا في جملة الإحداثيات المائلة $(By_1,\ Bx_1)$، $y_1^2 = Tx_1$، حيث T هو *الضلع القائم*. لنبرهن أن D = T. إن إحداثيات M في هذه الجملة المائلة هي $x_1 = LM$ و $y_1 = LB$ وبالتالي فإن $LB^2 = T \cdot LM$. لما كان $KL = N$ فإن

$$LM = \frac{1}{2}\, LO = \frac{1}{2}\, \frac{N}{\mathrm{tg}\, \hat{E}} \qquad \text{و} \qquad LB = \frac{N}{\sin \hat{E}}$$

ولدينا $T = 2N\, \frac{\mathrm{tg}\, \hat{E}}{\sin^2 \hat{E}} = N\, \frac{GE^2}{GH \cdot HI} = D$، حسب تعريف الطول N.

المسألة 5: رسم قطع زائد قطره المعترض (المجانب) BC معلوم وكذا *الضلع القائم* D المرتبط به والزاوية E التي يصنعها BC مع محور التراتيب؛ لنفرض كذلك أن الطول $\mathscr{A}$ هو طول محور البركار.

يميز القوهي في هذه المسألة، كما في سابقتها، بين حالتين حسبما تكون الزاوية E قائمة أم لا.

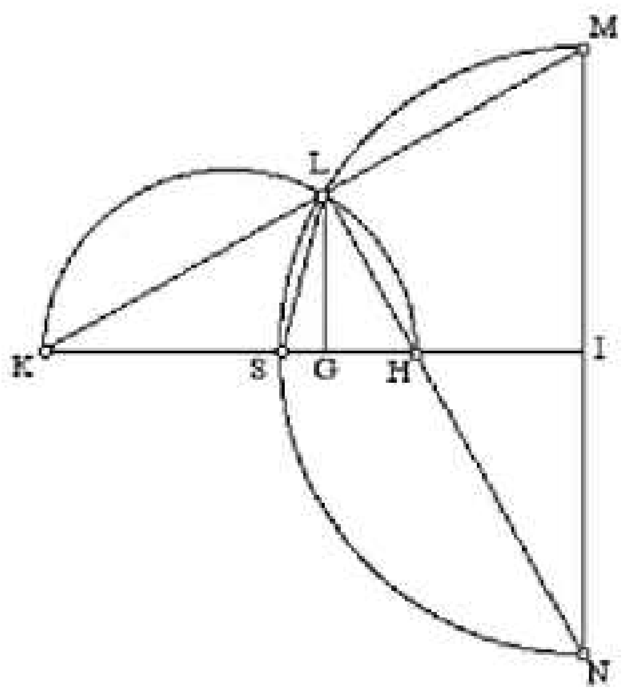
a) الزاوية E قائمة

نأخذ ثلاث نقاط I، H، G على استقامة واحدة تحقق $\frac{GH}{HI} = \frac{D}{BC}$، ونقطة رابعة K على امتداد IG تحقق

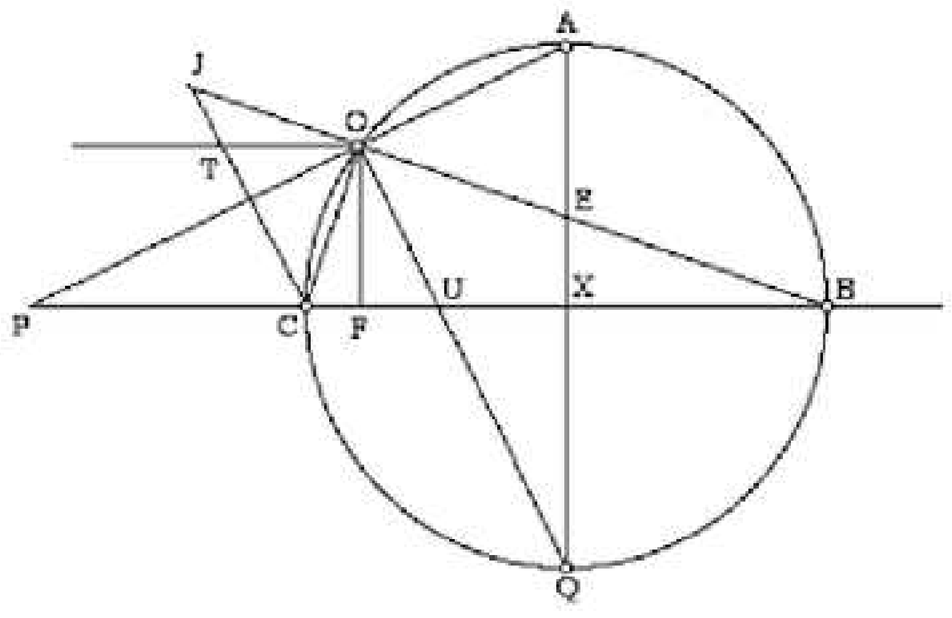
$$\frac{KH \cdot KG}{KI \cdot HI} = \frac{4\mathscr{A}^2}{BC^2} \qquad (1)$$

(يرجع القوهي إلى كتابه *في إحداث النقط* للقيام بهذا الحساب).

نرسم نصف الدائرة KLH ذات القطر KH ونسقط من النقطة L العمود LG على KH. نرسم العمود على KI في النقطة I، فيلقى KL في M و LH في N. تمر الدائرة ذات القطر MN من النقطة L وتلقى GK في نقطة S. نأخذ الزاوية O في رأس البركار مساوية للزاوية KLS والزاوية في المركز، ولنسمه P على بعد $\mathscr{A}$ من O، مساوية للزاوية LKS. نكون بذلك قد حددنا محور البركار وخط مركزه.



الشكل. 21



الشكل. 22

نعدل طول القلم الراسم إلى أن يلقى رأسه خط المركز في النقطة C. نمدد هذا الخط إلى النقطة B للحصول على الطول BC المعلوم. يتعامد مستوى البركار OCP مع مستوى القطع على الخط BC. يقع خط الرأس OC في الوضع OJ أثناء دورانه حول OP. يرسم القلم الراسم المحمول على خط الرأس الفرعين المتقابلين للقطع الزائد أثناء دورانه حول OP. وهذا ما يبرهنه القوهي بكل دقة (انظر النص). يبقى علينا أن نلاحظ فقط أن القوهي استند في برهانه على تشابه الشكلين 21 و 22. فكل نقط الشكل 22 تستخلص تدريجياً من نقط الشكل 21 كتحولات بالتشابه؛ فالمثلثان LKS و OPC متشابهان بالإنشاء $K\hat{L}S = \hat{O}$ و $L\hat{K}S = \hat{P}$. لنسم النسبة $k = \frac{OP}{LK}$. لدينا في الشكل 21 $LH \perp LK$ و $LG \perp KS$، تقع G و H على امتداد KS. وفي الشكل 22 $OU \perp OP$ و $OF \perp PC$، حيث F و U على امتداد PC. نقرن بالنقطة I من الشكل 21 النقطة X في الشكل 22 المعرفة بـ $\frac{LK}{HI} = \frac{OP}{UX}$ أو $k = \frac{OP}{LK} = \frac{UX}{HI}$.

يحدد العمودي في I على KH النقطتين M و N، ويحدد العمودي في X على PU النقطتين A و Q. وهكذا فللنقـــاط N، M، I، H، G، S، K، L مثيلاتها بالترتيب Q، A، X، U، F، C، P، O بتشابه نسبته k. وسنحصل عندئذ على $k = \frac{PO}{LK} = \frac{CU}{HS}$. وهذا ما يقابل جملة القوهي[18]: "نسبة جــص إلى ف ع كنسبة ح س إلى ل ك من جهة تشابه المثلثين". فتساوي النسبتين صحيح لكن التشابه هو بين الشكلين 21 و22 وليس بين مثلثين. ويمكن إبداء نفس الملاحظة فيما يخص الشكلين 25 و26 للمسألة 6 المتعلقة بالقطع الناقص. أضف إلى ذلك أنها ليست المرة الوحيدة التي يستعين القوهي فيها بالتحولات الهندسية في كتاباته[19].

تخص الملاحظة الثانية التي نريد إبداءها الشرط (1)

$$\frac{KH \cdot KG}{KI \cdot IH} = \frac{4\mathscr{A}^2}{BC^2}$$

الذي أعطاه القوهي لتعيين النقطة K على امتداد IG. يجب لتعيين وضع النقطة K وكذلك زاويتي البركار α و β تعيين الطول غير المعروف KG.

ليكن طول المحور المجانب 2a *والضلع القائم* له D = 2p. نعطي النقاط G، H، I على استقامة واحدة حيث تقع H بين G و I محققة العلاقة $\frac{GH}{HI} = \frac{D}{2a} = \frac{p}{a}$.

---

[18] انظر ص. 773 سطر 11.

[19] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 4 : *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques* (London, 2001).

فإذا كان طول GH هو ℓ فإن $HI = \frac{a\ell}{p}$، وتفتش عن النقطة K التي تحقق الشرط (1) لنفرض $KG = x$، يكتب الشرط (1) على الشكل

$$\frac{x(\ell + x)}{\left(\ell + x + \frac{a\ell}{p}\right)\frac{a\ell}{p}} = \frac{\mathscr{A}^2}{a^2}$$

ونحسب
$$x = \frac{\ell}{2ap}\left[\mathscr{A}^2 - ap + \sqrt{(ap + \mathscr{A}^2)^2 + 4a^2\mathscr{A}^2}\right]$$

وهو طول يمكن إنشاؤه بسهولة بالمسطرة والبركار.

زوايا البركار هي:

زاوية الرأس $\beta = P\hat{O}C = K\hat{L}S$

زاوية المركز $\alpha = O\hat{P}C = L\hat{K}S$

لدينا
$$\sin^2\alpha = \frac{LG^2}{LK^2} = \frac{GK \cdot GH}{GK \cdot KH} = \frac{GH}{KH} = \frac{\ell}{\ell + x}$$

و

$$\sin^2\beta = \sin^2 K\hat{L}S = \cos^2 S\hat{L}N = \cos^2 S\hat{M}N = \frac{IM^2}{MS^2} = \frac{IM^2}{MI \cdot MN} = \frac{IM}{MN}$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{ax}{p(x + \ell) + a\ell}}$$

وهكذا فالزاويتان α و β معروفتان وأصبح البركار معيناً لأن

$$\frac{IN}{LG} = \frac{HI}{GH} \quad \text{و} \quad \frac{IM}{LG} = \frac{KI}{KG}$$ (تشابه مثلثات)

ولذا

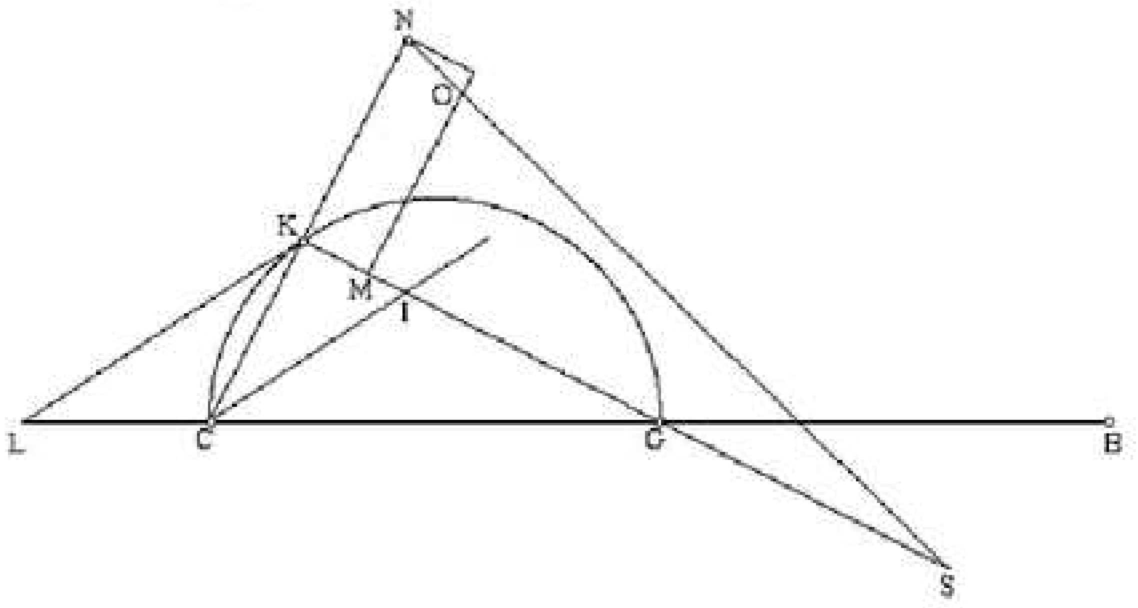
$$\frac{IM}{IN} = \frac{KI \cdot GH}{KG \cdot HI} = \frac{KH \cdot GH}{KG \cdot HI} + \frac{GH}{KG} = \frac{p}{a} \cdot \frac{\ell + x}{x} + \frac{\ell}{x} = \frac{p(\ell + x) + a\ell}{ax}$$

b) الزاوية E ليست قائمة

لتكن G في المستوى المعلوم وسط BC. نفرض أن $G\hat{C}I = \hat{E}$ ونرسم نصف الدائرة ذات القطر GC، لتكن K نقطة من نصف الدائرة و L نقطة من BC بحيث يكون

$$\frac{D}{BC} = \frac{KL^2}{GL \cdot LC} \qquad (1)$$ و $CI \parallel KL$[20]

نعين نقطة M على GH بحيث يكون $\frac{GM}{GK} = \frac{GI}{GM}$، ونأخذ المستطيل (MN) بحيث يكون $KM . KN = CK^2$. نمدد KG بطول GS = GM. يقطع المستقيم SN ضلع المستطيل (MN) في O (ولدينا $MO \parallel KN$). (وهذا هو إنشاء أبلونيوس في *المخروطات* I. 55). وحسبما جاء في المقالة الأولى فإننا نعرف كيف نرسم قطعاً زائداً محوره المجانب SM *وضلعه القائم* MO. وعلينا عندئذ أن نبين أن هذا القطع هو القطع ذو القطر BC *والضلع القائم* D والمركز G وسط SM ووسط BC كذلك؛ يقوم القوهي بتحقيق ذلك بمنتهى الدقة.



الشكل. 23

لنشرح طريقة القوهي.

نبرهن أن القطع الزائد يمر بالنقطة C. إن معادلة القطع ذي القطر SM *والضلع القائم* OM في جملة الإحداثيات (Mx, My) المعرفة بـــ MS و MO هي

$$y^2 = \frac{OM}{MS}\,(SM + x)x \qquad (2)$$

وإحداثيا C في هذه الجملة هما x = MK و y = CK، إلا أننا أنشأنا المستطيل (MN) ليحقق

$$CK^2 = KM \,.\, KN \qquad (3)$$

أضف إلى ذلك أن تشابه المثلثين SMO و SKN يعطينا

$$\frac{MO}{KN} = \frac{SM}{SK}$$

---

[20] يشير أبلونيوس في *المخروطات* I. 55 و I. 58 إلى إنشاء النقاط K و L حيث L خارج المقطع BC في حال القطع الزائد وبين B و C في حال القطع الناقص (انظر ص. 655) ولكنه لا يدرسها.

يلاحظ P. Ver Ecke في (Coniques, p. 104, note 1) أنه من المحتمل أن يكون أبلونيوس قد عالج هذا الإنشاء في كتابه *On Inclinations*. ويعطي ملخصاً لهذا الإنشاء المقترح من قبل أوطوقيوس في الصفحة 104 من أجل القطع الزائد وفي الصفحة 111 من أجل القطع الناقص.

أي

$$KN = \frac{OM \cdot SK}{MS} \qquad (4)$$

(3) و (4) تعطيان

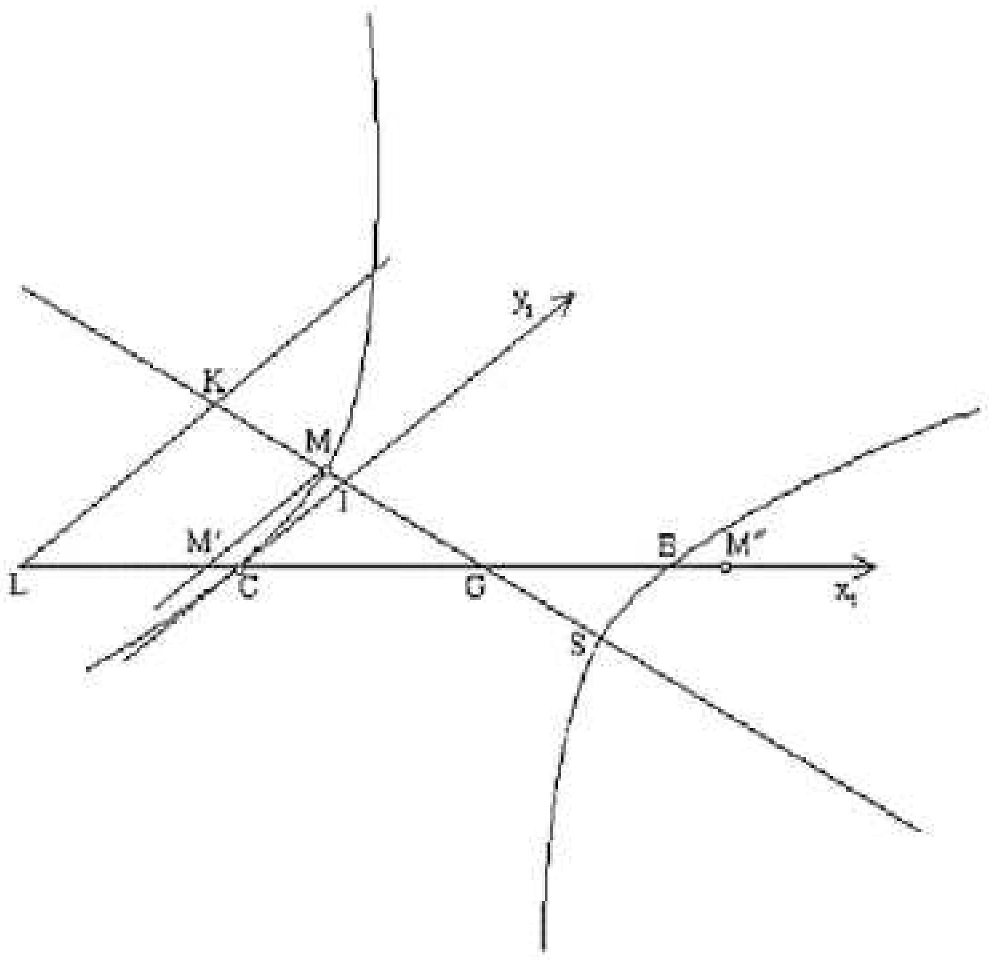
$$CK^2 = \frac{OM}{MS} \cdot MK(SM + MK)$$

و C تحقق معادلة القطع (2).

للنقطتين M و C نظيرتان بالنسبة إلى مركز التناظر G، هما بالترتيب S و B، وبالتالي فإن للقطع الزائد ذي القطر SM والمار بالنقطة C القطر BC. ثم إن العلاقة

$$GM^2 = GI \,.\, GK \qquad (5)$$

تعني أن CI مماس للقطع في C (*المخروطات* I. 37)؛ ولذا فإن الزاوية التي يصنعها القطر BC مع محور التراتيب Cy_1 هي الزاوية المعطاة $I\hat{C}G = \hat{E}$.



الشكل. 24

يبقى علينا أن نبرهن أن *الضلع القائم* يساوي D المعلوم.

نرمز، في جملة الإحداثيات (Cx_1, Cy_1) المعرفة بالقطر CB والمماس CI، بـــ X *للضلع القائم* المرتبط بـــ CB. تكتب معادلة القطع في هذه الجملة

$$y_1^2 = \frac{X}{BC} \cdot x_1(x_1 + BC)$$

إن إحداثيي النقطة M في هذه الجملة هما $x_1 = CM'$ و $y_1 = MM'$ حيث $CI \parallel MM'$. لدينا

$$\frac{MM'}{CI} = \frac{GM}{GI} \quad \text{و} \quad \frac{MM'}{KL} = \frac{GM}{GK}$$

ومنه

$$\frac{MM'^2}{CI \cdot KL} = \frac{GM^2}{GI \cdot GK}$$

وانطلاقاً من العلاقة (5)

$$MM'^2 = y_1^2 = CI \cdot KL$$

نحصل على نفس النحو على $GM'^2 = GC . GL$. لتكن "M نقطة على CB بحيث تقـع G وسط M'M". تميز العلاقة السابقة عندئذ القسمة التوافقية (C, L, M', M") ونحصل على LC . GC = M'C . CM" (مساواة معطاة في *المخروطات* I. 37).

لدينا

$$CM'' = CB + BM'' = CB + CM' = BC + x_1$$

ولذا

$$LC \cdot GC = x_1(x_1 + BC)$$

ولما كان

$$\frac{X}{BC} = \frac{y_1^2}{x_1(x_1 + BC)} = \frac{CI \cdot KL}{LC \cdot GC} = \frac{KL^2}{LC \cdot GL} \quad \text{لأن} \quad \frac{CI}{GC} = \frac{KL}{GL}$$

ومنه $\frac{D}{BC} = \frac{X}{BC}$ نظراً للعلاقة (1) و X = D.

المسألة 6: رسم قطع ناقص في مستو معلوم $\mathcal{P}$، أحد أقطاره و*ضلعه القائم* وكذا الزاوية التي يصنعها القطر مع محور ترتيبه مقادير معلومة.

تعترضنا حالتان حسبما تكون هذه الزاوية قائمة أم لا.

a) الزاوية المعلومة E قائمة.

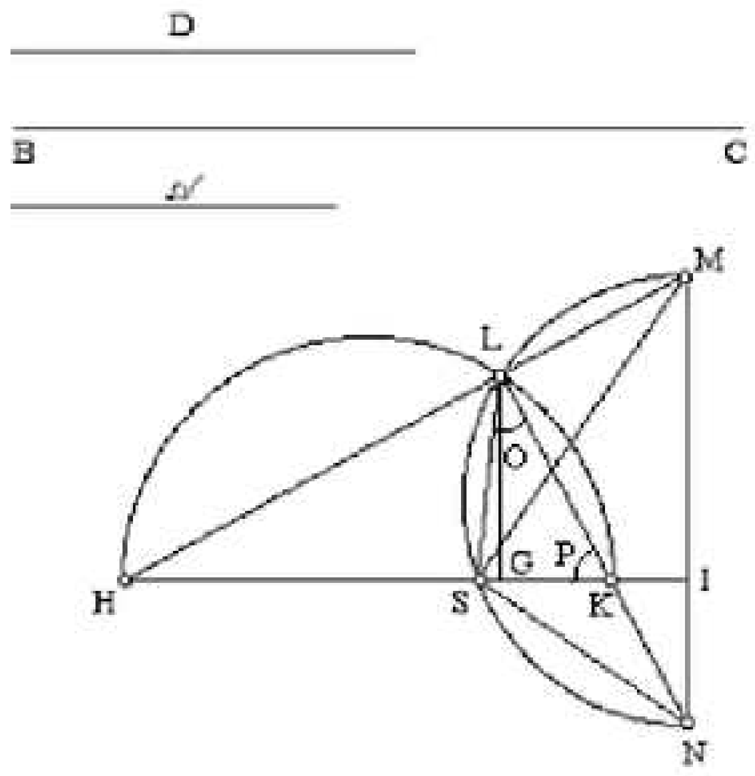
ليكن BC القطر المعلوم و D *الضلع القائم* بحيث يكون BC > D. نأخذ على مستقيم ما ثلاث نقاط I، H، G تحقق العلاقة $\frac{D}{BC} = \frac{GH}{HI}$؛ النقطتان H و I على طرفي G. نأخذ على المجال [GI] النقطة K المعرفة بالعلاقة

$$\frac{KH \cdot KG}{IK \cdot IH} = \frac{4\mathcal{A}^2}{BC^2} \qquad (1)$$

حيث $\mathcal{A}$ طول محور البركار.

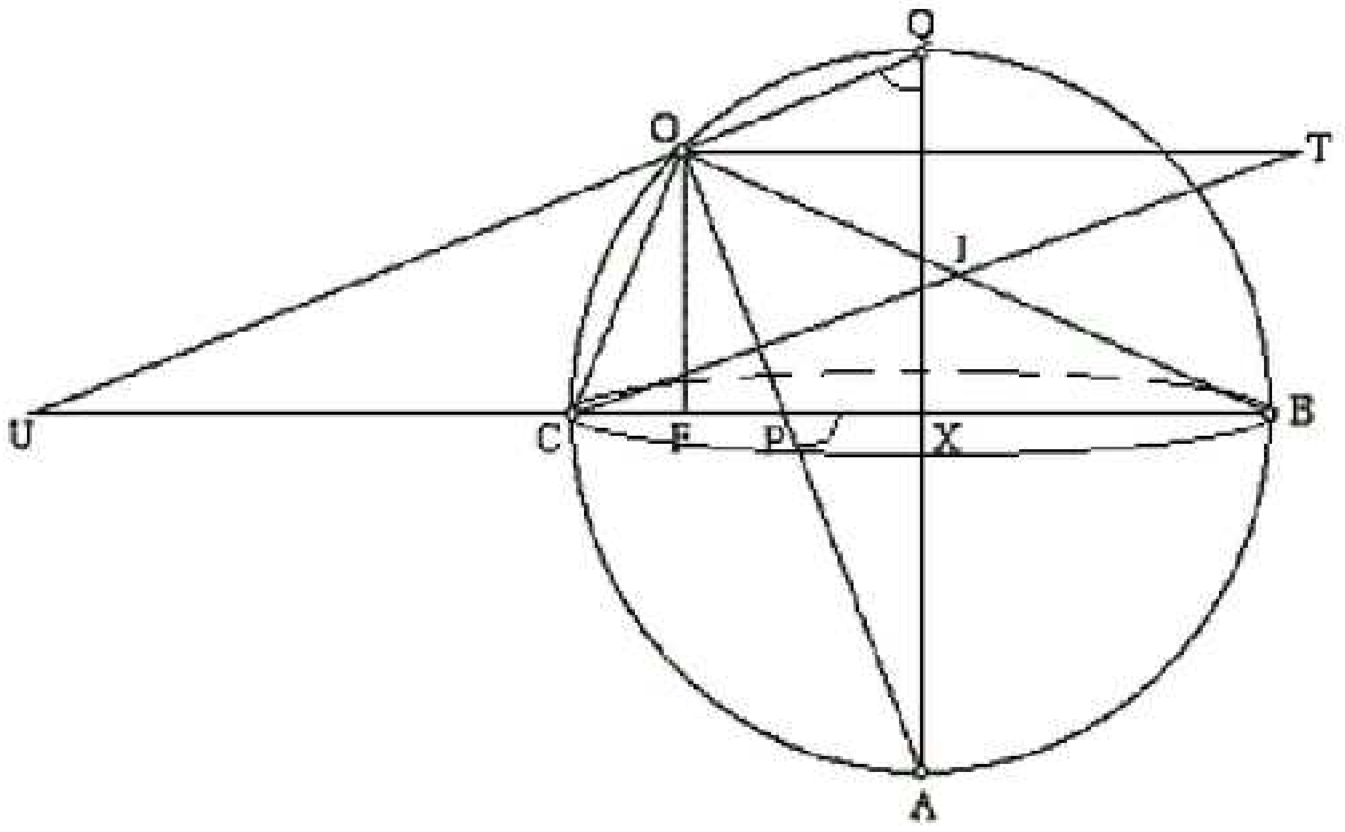
(يرجع القوهي لإنجاز هذا الحساب إلى كتابه *إحداث النقط*).

نرسم نصف دائرة قطرها KH ونقيم من G العمود GL على KH. يلقى العمود المقام في I على HI المستقيم HL في M و KL في N. تمر الدائرة ذات القطر MN في L وتقطع GH في S.



الشكل. 25

ونضبط زوايا البركار كما يلي: $\hat{O} = K\hat{L}S$ زاوية الرأس و $\hat{P} = L\hat{K}S$ زاوية المركز ومحور البركار هو $OP = \mathscr{A}$. نحرك رأس القلم الراسم حتى يلقى خط المركز في نقطة نطبقها على النقطة C من المستقيم BC المعلوم في المستوى $\mathscr{P}$، ونطبق خط المركز CP على BC. يقع البركار OCP في مستوى عمودي على $\mathscr{P}$ ويقطعه على طول CB. يدور خط الرأس حول المحور OP ليصل إلى الوضع OJ عندما تكون زاويتا الرأس والمركز متبادلتين. يرسم القلم الراسم المحمول على OC القطع الناقص المطلوب في المستوى $\mathscr{P}$.



الشكل. 26

نرسم $OU \perp OP$ ونفرض أن $\frac{LK}{IH} = \frac{OP}{UX}$، حيث تقع X على CB. (نقيم من X العمود على CB فيلقى UO وPO في Q و A على الترتيب). تقع O على الدائرة ذات القطر QA. يمر العمود المقام من C على OP في النقطة J ويقطع الموازي لــ BC المرسوم من النقطة O في T. نكتب العلاقة (1) على الشكل

$$\frac{KL^2}{IK \cdot IH} = \frac{4OP^2}{BC^2} \qquad (2)$$

ونحصل من تشابه المثلثات OPU وLKH، XPA و IKN على $\frac{LK}{IK} = \frac{OP}{XP}$، ومن العلاقة التي تعرف X على

$$\frac{OP^2}{PX \cdot UX} = \frac{LK^2}{IK \cdot IH} \qquad (3)$$

ومن العلاقتين (2) و(3) على

$$PX \cdot UX = \frac{1}{4} BC^2$$

ولدينا من جهة أخرى $A\hat{P}X = A\hat{Q}O$، المساويتين لـ $\frac{\pi}{2} - \hat{A}$. ولذا فالمثلثان القائمان QXU و PXA متشابهان و

$$\frac{QX}{XU} = \frac{PX}{XA}$$

ومنه

$$QX \cdot XA = \frac{1}{4} BC^2$$

يعطينا تشابه الشكلين العلاقة $\frac{HS}{LK} = \frac{CU}{PO}$ و $\frac{LK}{HI} = \frac{PO}{XU}$ التي أنشأناها، ولذا

$$\frac{CU}{XU} = \frac{HS}{IH}$$

وبنفس الشكل لدينا $\frac{SI}{IM} = \frac{CX}{XQ}$ و $\frac{SI}{IN} = \frac{CX}{XA}$ ومنه

$$\frac{CX^2}{XQ \cdot XA} = \frac{SI^2}{IM \cdot IN}$$

ولكن $SI^2 = IN \,.\, IM$، فلذا

$$CX^2 = XQ \cdot XA = \frac{1}{4} BC^2$$

أي أن X تقع في وسط BC.

إذاً تمر الدائرة ذات القطر AQ المارة من O من النقطتين B و C.

عندما يصل خط الرأس إلى الوضع OJ تصبح $P\hat{O}C = P\hat{O}J$ و $\widehat{AB} = \widehat{AC}$، وبالتالي يمر المستقيم OJ بالنقطة B. يرسم رأس القلم الراسم عند دوران خط الرأس حول المحور قطعاً ناقصاً هو تقاطع المستوى المعلوم $\mathcal{P}$ مع السطح المخروطي ذي المحور OP. قطر هذا القطع هو BC. نقيم $CU \perp OF$، فلدينا من تشابه الشكلين

$$\frac{FU}{OP} = \frac{GH}{LK}$$

وبالتالي

$$\frac{D}{BC} = \frac{GH}{IH} = \frac{FU}{UX} \quad \text{لأن} \quad \frac{LK}{IH} = \frac{OP}{UX} \text{ فرضاً}$$

نبرهن بعدئذ، كما في حال القطع الزائد أن

$$\frac{D}{BC} = \frac{JT \cdot CT}{OT^2}$$

ثم إن O هي رأس السطح المخروطي و $BC \parallel OT$؛ ولذا، استناداً إلى *المخروطات* I.13، فإن D هي *الضلع القائم* للقطر BC. إن تقاطع المستوى $\mathscr{P}$ مع قاعدة المخروط عمودي على المستوى JOC وعمودي بالتالي على المستقيم BC؛ وهكذا فالزاوية E التي يصنعها BC مع خط الترتيب قائمة. ولذا فإن BC هو المحور الكبير للقطع الناقص لأننا فرضنا أن $BC > D$.

لنعد هذا البرهان بعبارات مختلفة:

ليكن 2a طول المحور الكبير و $D = 2p$ *ضلعه القائم*؛ لدينا إذاً $a > p$. نأخذ على خط مستقيم النقاط I، G، H، بحيث تقع G بين H و I وتحقق العلاقة $\frac{GH}{IH} = \frac{p}{a}$. لنرمز للطول GH بــ ℓ ولدينا $HI = \frac{\ell \cdot a}{p}$.

نبحث عن نقطة K بين G و H تحقق العلاقة

$$\frac{KH \cdot KG}{IK \cdot IH} = \frac{\mathscr{A}^2}{a^2} \qquad (4)$$

حيث $\mathscr{A}$ طول محور البركار. نرمز بــ x لــ KG ونكتب (4) على الشكل

$$\frac{x(x+\ell)}{\ell(a\ell - px - p\ell)} = \frac{\mathscr{A}^2}{ap^2}$$

أو

$$x^2 + \frac{\ell}{ap}x(ap + \mathscr{A}^2) - \frac{\mathscr{A}^2\ell^2}{ap^2}(a-p) = 0$$

ومنه

$$x = \frac{\ell}{2ap}\left[\sqrt{(ap - \mathscr{A}^2)^2 + 4\mathscr{A}^2a^2} - (\mathscr{A}^2 + ap)\right]$$

إن زوايا البركار هي

زاوية الرأس $\beta = P\hat{O}C = K\hat{L}S$

زاوية المركز $\alpha = O\hat{P}C = L\hat{K}G$

لدينا

$$\sin^2\alpha = \frac{GL^2}{KL^2} = \frac{GK \cdot GH}{GK \cdot KH} = \frac{\ell}{\ell + x}$$

و

$$\sin^2 \beta = \sin^2 K\hat{L}S = \sin^2 S\hat{M}N = \frac{SI^2}{SM^2} = \frac{IN \cdot IM}{IM \cdot NM} = \frac{IN}{NI + IM}$$

ومنه

$$= \frac{1}{1 + \frac{IM}{IN}}$$

ولدينا هنا كما في حالة القطع الزائد

$$\frac{IM}{LG} = \frac{HI}{GH} \quad \text{و} \quad \frac{IN}{GL} = \frac{IK}{GK}$$

ومنه

$$\frac{IM}{IN} = \frac{GK \cdot IH}{GH \cdot IK} = \frac{ax}{a\ell - p(x + \ell)}$$

وأخيراً

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{1 + \frac{ax}{a\ell - p(x + \ell)}}$$

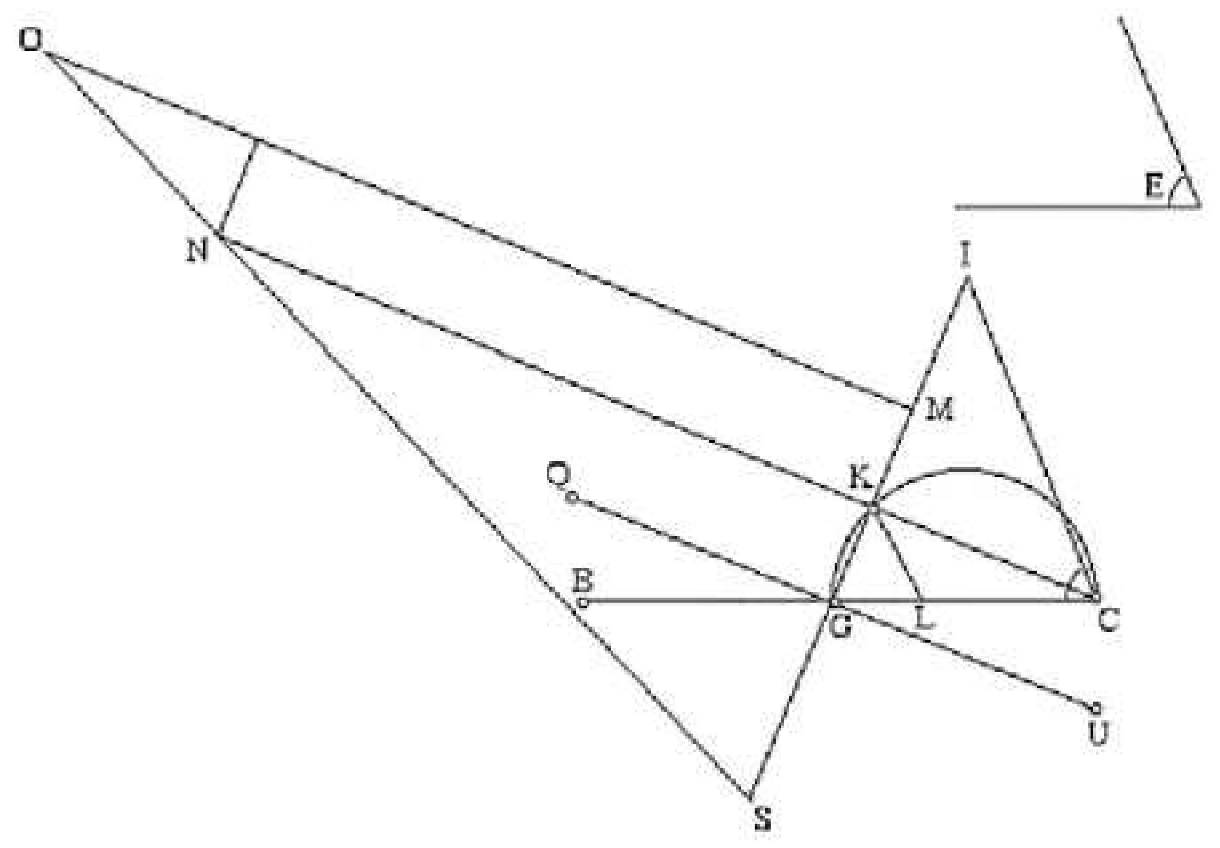
وهكذا فالزاويتان α و β معروفتان والبركار التام معين كلياً.

b) الزاوية E ليست قائمة

يقوم القوهي في هذه الحالة بالإنشاء على نحو مماثل لما قام به في حالة القطع الزائد. ليكن لدينا في المستوى $\mathcal{P}$ المعلوم مستقيم معلوم BC ولتكن G وسطه. نرسم على نفس الجانب من BC الزاوية $G\hat{C}I = \hat{E}$ ونصف الدائرة ذات القطر CG. نعين النقطة K على نصف الدائرة والنقطة L على GC بالعلاقة

$$LK \parallel CI \quad \text{و} \quad \frac{KL^2}{GL \cdot LC} = \frac{D}{BC} \qquad (1)$$

نعين النقطة M على GK محققة $GM^2 = GK \,.\, GI$ ونأخذ المستطيل (MN) بحيث يكون $CK^2 = KM \,.\, KN$. نمدد المستقيم KG بطول $GS = GM$. يقطع المستقيم SN ضلع المستطيل (MN) في نقطة O. وهذا هو إنشاء أبلونيوس في *المخروطات* I.58.



الشكل. 27

إن المستقيم MS هو أحد محوري القطع الناقص المطلوب و OM *الضلع القائم* للمحور. فإذا كان MS هو المحور الكبير (يسميه القوهي القطر المجانب) – أي إذا كان MS > OM – فالإجراءات هي نفس ما قمنا به في الحالة الأولى.

أما إذا كان MS هو المحور الصغير (يسميه القوهي القطر القائم)، فإننا نبدأ بإنشاء المحور الكبير المقابل. وطول هذا المحور حسبما جاء في تعريفات أبلونيوس الثانية في *المخروطات*[21] هو $d^2 = MS\ .\ OM$.

لذا ننشئ QU ⊥ MS بحيث تكون G وسطه و $QU^2 = OM\ .\ MS$؛ QU هو المحور الكبير و*ضلعه القائم* P، تعرفه العلاقة $\frac{QU}{P} = \frac{OM}{MS}$ (التعاريف الثانية).

يبقى علينا أن نبرهن أن القطع الناقص (MQSU) هو القطع ذو القطر BC و*الضلع القائم* D، وأن الزاوية بين BC وخط ترتيبه هي الزاوية E. يبرهن القوهي على هذا كله بكل دقة. وسنعطي هنا بعض الشروح لطريقته.

إن معادلة القطع الناقص في جملة الإحداثيات (MS, MQ) هي

$$y^2 = \frac{OM}{MS}\,(MS - x)x \qquad (2)$$

إن إحداثيات C في هذه الجملة هي $x = MK$ و $y = KC$. ولقد أنشأنا المستطيل (MN) لتحقيق العلاقة

$$CK^2 = KM\ .\ KN \qquad (3)$$

نحصل من جهة أخرى، نظراً لتشابه المثلثين SMO و SKN، على $\frac{SM}{SK} = \frac{MO}{KN}$ ومنه

---

[21] حسبما جاء في التعريف الثالث من التعريفات الثانية، إذا كان d و 'd هما القطرين المقترنين لقطع ناقص وكان c و 'c *الضلعين القائمين* لهما فإن

$$d^2 = d'c'\ ،\ d'^2 = dc \quad \text{و} \quad dd' = cc'$$

ولذا فإذا كان d > d' فإن c < d' و c' > d : المحور الكبير أكبر من *ضلعه القائم* c.

$$KN = \frac{SK \cdot MO}{SM} \qquad (4)$$

بحيث تصبح (3) على الشكل

$$CK^2 = \frac{OM}{SM} \cdot SK \cdot KM$$

وأيضاً

$$CK^2 = \frac{OM}{SM} \cdot KM(SM - MK)$$

أي أن $x = MK$ و $y = KC$ تحققان المعادلة (2) و C واقعة على القطع الناقص، تقع النقطة B كذلك على القطع الناقص لأن مركزه G هو وسط BC؛ و BC هو إذاً أحد أقطاره. لدينا إضافة إلى هذا $GM^2 = GK \cdot GI$ ووفق *المخروطات* I.37 فإن المستقيم CI مماس للقطع الناقص في C، وبالتالي فإن زاوية القطر BC مع خط ترتيبه هي $E = G\hat{C}I$ المعلومة.

يجب أن يبرهن أيضاً أن *الضلع القائم* لـــ BC يساوي الطول المعلوم D. لنأخذ الآن جملة إحداثيات (x_1, y_1) محوراها هما (CB, CI)؛ تصبح معادلة القطع الناقص الذي قطره BC و *ضلعه القائم* X في هذه الجملة

$$y_1^2 = \frac{X}{BC}(BC - x_1)x_1$$

إن إحداثيات النقطة M التي تقع على القطع الناقص في هذه الإحداثيات هي $x_1 = CM'$ و $y_1 = MM'$ حيث $MM' \parallel CI$. لدينا

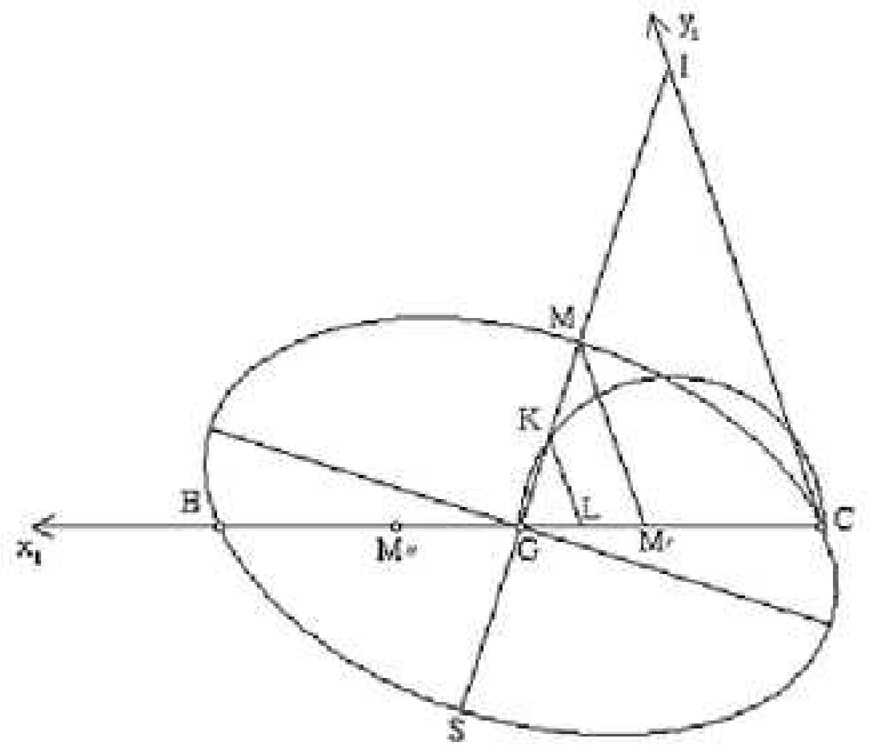
$$\frac{MM'}{KL} = \frac{GM}{GK} \qquad \text{و} \qquad \frac{MM'}{CI} = \frac{GM}{GI}$$

ومنه

$$GM^2 = GI \cdot GK \qquad \text{لأن} \qquad \frac{MM'^2}{CI \cdot KL} = \frac{GM^2}{GI \cdot GK} = 1$$

ولذا فإن

$$MM'^2 = y_1^2 = CI \cdot KL$$



الشكل. 28

ونحصل بسهولة بالاستعانة بهذه العلاقة على $GM'^2 = GL \cdot GC$. فإذا كانت M'' على GB بحيث تكون G وسط M'M'' فإن لدينا قسمة توافقية (C، L، M''، M')، ويمكننا أن نكتب استناداً إلى *المخروطات* I.37 أن:

$$CL \cdot CG = CM' \cdot CM'' = x_1 (BC - x_1)$$

وبالتالي

$$\frac{X}{BC} = \frac{y_1^2}{x_1(BC - x_1)} = \frac{CI \cdot KL}{CL \cdot CG}$$

لكن

$$\frac{CI}{CG} = \frac{KL}{GL}$$

وهكذا فإن

$$\frac{X}{BC} = \frac{KL^2}{CL \cdot GL}$$

ووفقاً لـــ (1) فإن $X = D$.

3.2. المقابلة بين القضايا 4، 5، 6 عند القوهي والقضايا I.52-59 عند أبلونيوس في المخروطات

يبين القوهي في القضايا 4، 5، 6 من المقالة الثانية كيفية رسم قطع مخروطي عُرف أحد أقطاره و*الضلع القائم* لهذا القطر والزاوية بين القطر وبين خط ترتيبه، وذلك بالاستعانة بالبركار التام. وتتألف كل قضية من قسمين a) القطر المعلوم هو محور؛ b) القطر المعلوم هو أحد الأقطار لا على التعيين.

إن القضية الرابعة مخصصة للقطع المكافئ وتقابل فيما يتعلق بالقسم a) القضية I.52 من *المخروطات* وفيما يتعلق بالقسم b) القضية I.53 من هذا المؤلف. إن المخروط الدوراني الذي يحدده أبلونيوس في I.52 انطلاقاً من المعلومات يقابل المخروط الذي يولده دوران خط الرأس في البركار الكامل حول محوره في القسم a) من القضية 4.

أما في I.53 من *المخروطات* فإن المعلوم هو، كما في القسم b) من القضية 4، قطر ما ورأسه و*ضلعه القائم* والزاوية E. والمطلوب هنا هو تعيين محور القطع المكافئ كي نعود إلى المسألة السابقة. تعالج القضايا المتعلقة بالقطع الزائد – أي قضايا القوهي 5a و 5b – موضوع الرسم بواسطة البركار التام للقطع الزائد، الموصف في *المخروطات* I.54 – I.55 من أجل فرع واحد من القطع، والذي تكمله القضية I.59 من أجل الفرعين.

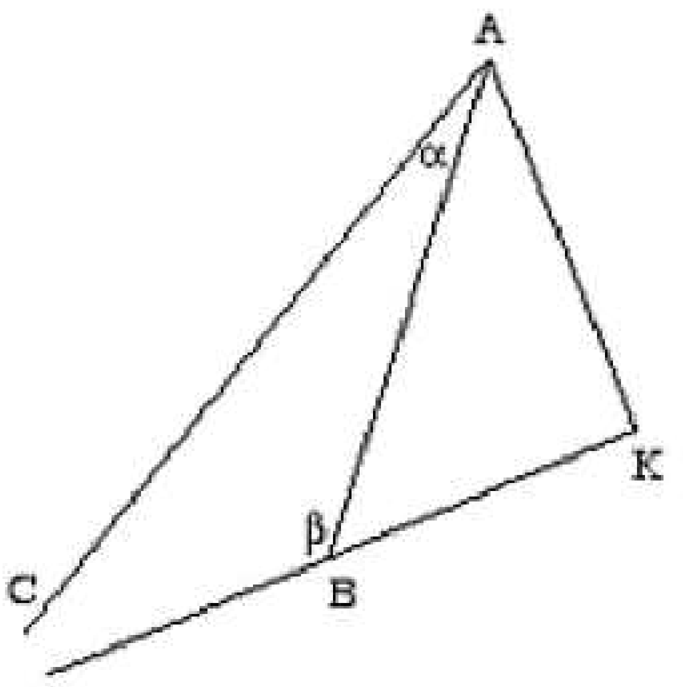
يميز أبلونيوس، فيما يخص القطع الناقص عندما يكون القطر المعلوم محوراً، بين حالتين: I.56 حيث طول القطر أكبر من *ضلعه القائم* (والمحور عندئذ هو المحور الكبير) و I.57 حيث القطر المعلوم هو المحور الصغير. ثم يعالج في I.58 حالة قطر لا على التعيين ويبين أننا نعرف كيف نعين المحور لنعود إلى إحدى الحالتين السابقتين.

يفترض القوهي في 6a أن القطر المعلوم هو المحور الكبير، ويبين كيفية الرسم المتصل للقطع الناقص بالاستعانة بالبركار التام. ويأخذ في 6b أحد الأقطار لا على التعيين كقطر معلوم وكذا *ضلعه القائم* ويبين كيفية تعيين محور للقطع الناقص مع ضلعه القائم، ثم يبين كيفية القيام برسم الشكل. فإذا كان المحور الذي جرى تعيينه على هذا النحو هو المحور الكبير عدنا إلى الحالة 6a. أما إذا كان المحور الصغير فيبين لنا القوهي كيفية تعيين المحور الكبير و*ضلعه القائم* ليرجعنا من جديد إلى الحالة 6a.

وهكذا فإن كل شيء يدل على أن القوهي اعتبر القطوع المخروطية الثلاث التي تفحص أبلونيوس إنشاءها في آخر الكتاب الأول من *المخروطات* كتمرين يبين فيه كيفية رسمها بالاستعانة بالبركار التام.

3. السجزي والرسم المتصل للقطوع المتشابهة بواسطة البركار التام

لم ينطلق السجزي، كما فعل ابن سهل، من خواص البؤرة والدليل وإنما من تعريف القطوع المخروطية كقطوع مستوية، على غرار القوهي. وهكذا يبتدأ بـــ *مخروطات* أبلونيوس لتصور آلة ترسم القطوع المخروطية ومعها الدوائر والخطوط المستقيمة. هذه الآلة هي البركار التام الذي ابتكره القوهي ويتألف من ثلاثـــة أجــزاء 1) المحور AB؛ 2) الفرع المستقيم AC الذي يستطيع الدوران مرتكزاً على النقطة A ليغير الزاوية BAC كما يستطيع الدوران حول AB؛ 3) قاعدة منبسطة مفصلية الارتباط مع AB في النقطة B توضع على المستوي الذي نريد الرسم عليه. الأمر يتوقف إذاً على الزاوية $BAC = \alpha$ بين المحور والفرع AC من البركار وعلى الزاوية β بين المحور وقاعدة البركار.

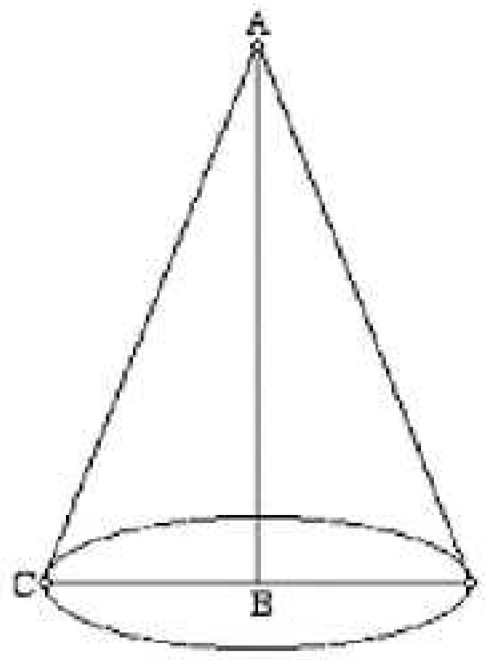


الشكل. 29

لنفترض الزاوية β منفرجة؛ وليكن AK العمود النازل من A على المستوى القاطع، فهو إذاً عمودي على قاعدة البركار. تتوقف طبيعة المنحنى المرسوم على الزاوية $CAK = \frac{\pi}{2} - \beta + \alpha$.

يبدأ السجزي بالتذكير، مستنداً إلى كتاب أبلونيوس، بطبيعة القطوع المستوية لسطح مخروطي حسب وضع المستوى القاطع بالنسبة إلى السطح المخروطي ومن ثم يركب البركار التام ويشرح أخيراً كيفية إحداث القطوع الثلاثة والدائرة بالاستعانة به.

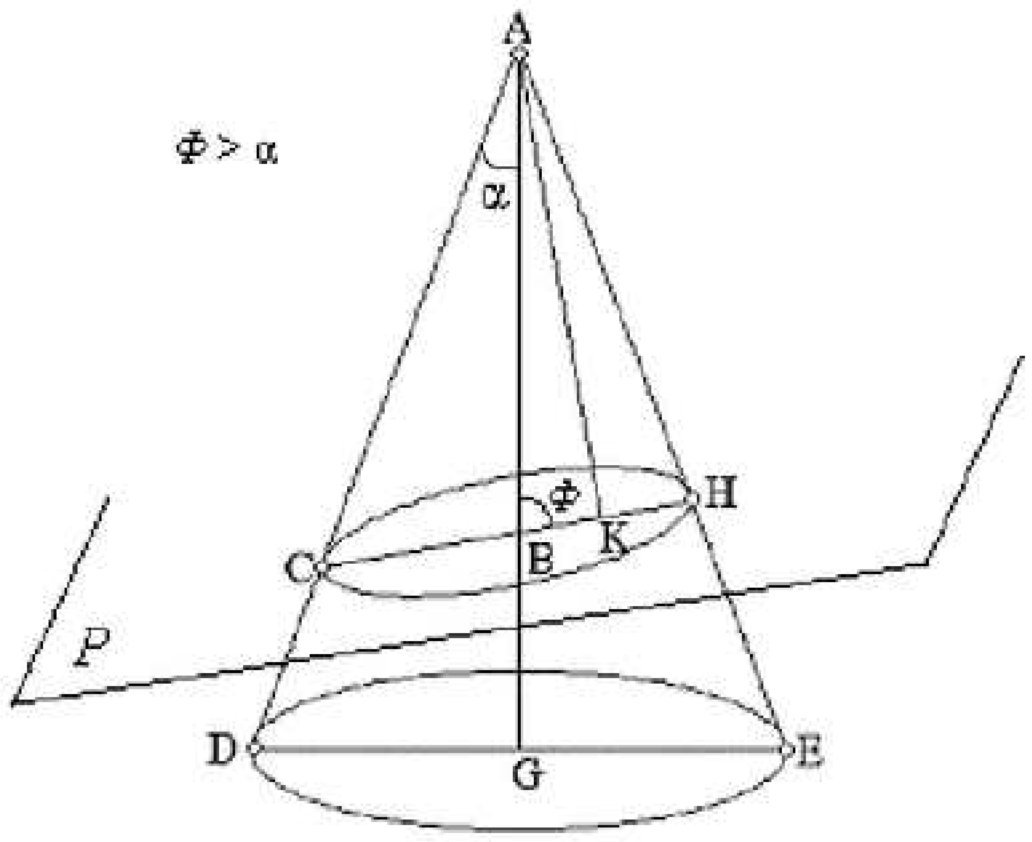
وهكذا فإذا ثبت محور البركار AB وبقيت الزاوية α دون تغيير في قيمتها فإن AC يولد بدورانه حول AB سطحاً مخروطياً دورانياً. فإذا كان AB إضافة إلى ذلك عمودياً على BC فالسطح الذي يحدثه المثلث قائم الزاوية ABC هو مخروط دوراني قاعدته دائرة.



الشكل. 30

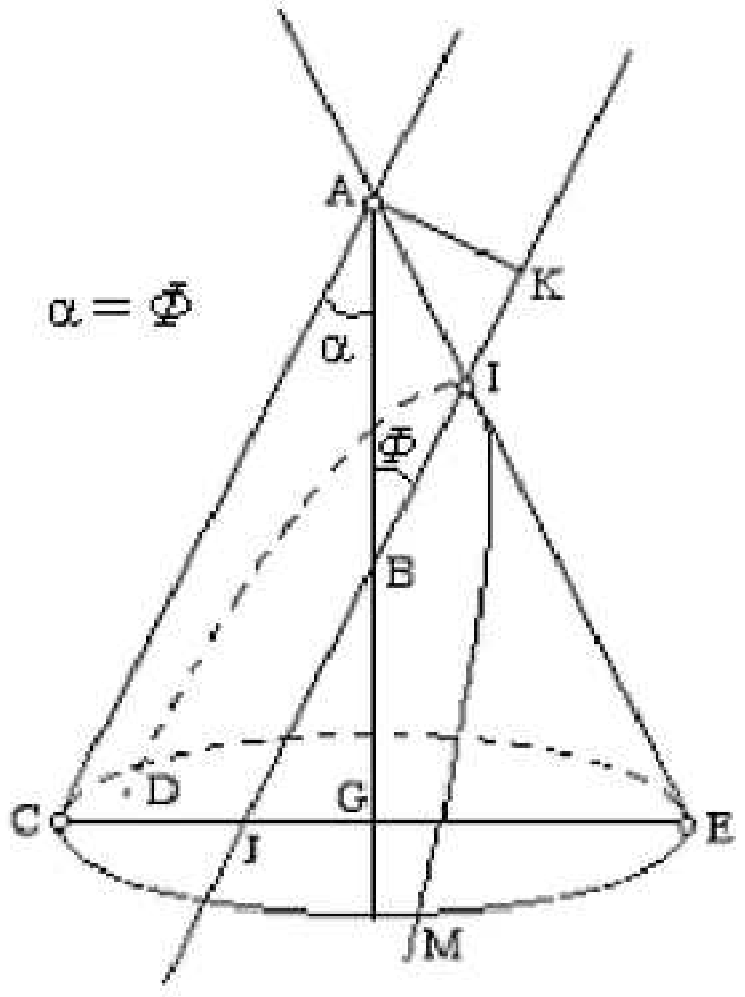
لتكن DE دائرة معلومة مركزها G و P مستوياً مائلاً بالنسبة لمستوى الدائرة ولتكن النقطة A رأس البركار؛ نفترض أن AB مثبت فوق محور الدائرة DE وأن قاعدة البركار في المستوى P وفرعه AC يدور حول هذا المحور

بحيث يلقى امتداده الدائرة E. فإذا استطعنا تعديل طول AC بحيث يبقى طرفه C في المستوى P فإن هذا الطرف سيرسم قطعاً مخروطياً في P.

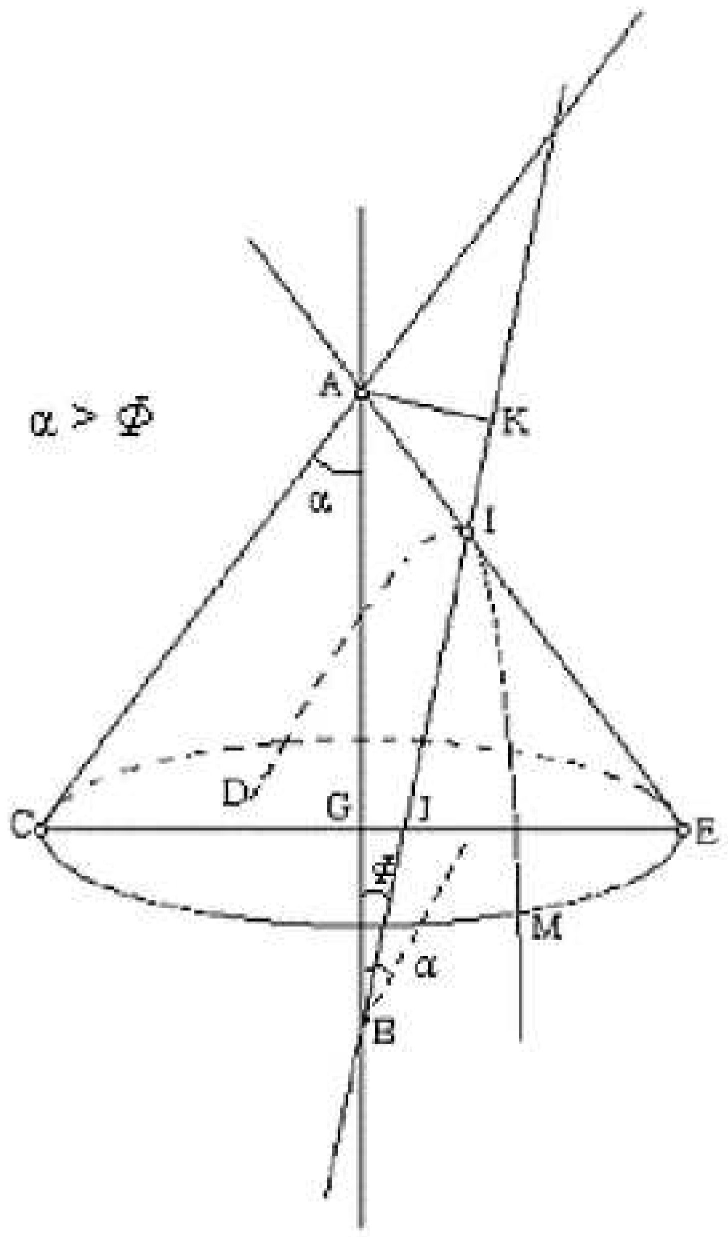


الشكل. 31

من المفترض إذاً ألا يكون المستوى P عمودياً على المستوى AGE، ويتعين وضعه بتقاطعه مع هذا المستوى. فإذا كان التقاطع هو على شكل المستقيم CH فسترسم النقطة C قطعاً ناقصاً محوره CH (شكل. 31). وإذا كان التقاطع الخط IJ الموازي للوضع البدائي لـــ AC في المستوى AGE فسترسم النقطة C قطعاً مكافئاً محوره IJ (شكل. 32). وأخيراً إذا لم يكن التقاطع IJ موازياً للوضع البدائي AC ولكنه يلقاه فالقطع المرسوم قطع زائد (شكل. 33).



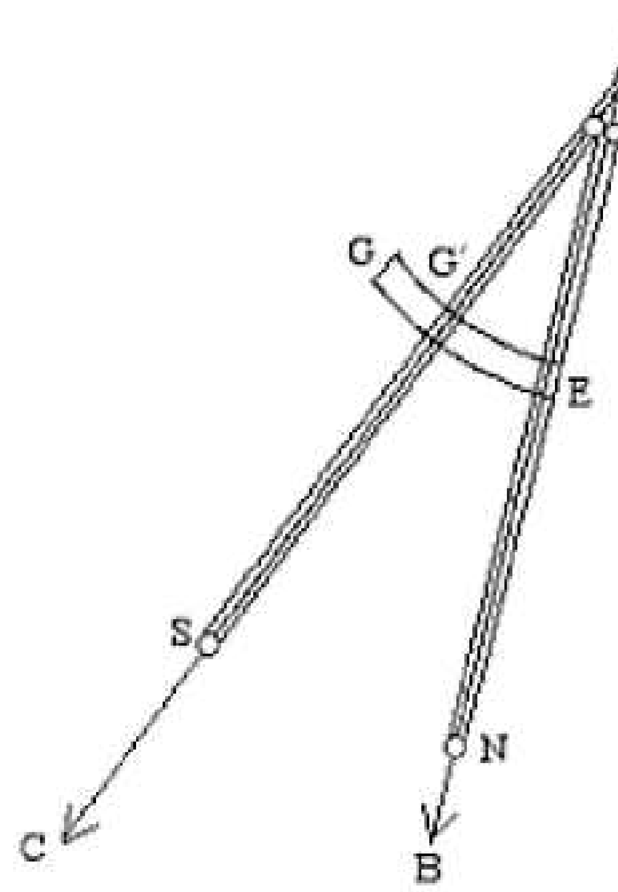
الشكل. 32



الشكل. 33

ينتقل السجزي بعد ذلك إلى شرح تركيب البركار. وتقوم الأفكار الرئيسية في ذلك حول مفصلة النصابين (المحور وفرع البركار) وحول آلية ضبط الزاوية بينهما، ثم حول وسائل تغيير طول المحور والفرع الذي يحمل القلم الراسم.

ويعرض السجزي ثلاث تركيبات. يأخذ في الأولى أنبوبين AN و AS مفصلهما A رأس البركار، ويضع في الأنبوب الأول AN نصاباً AB سيشكل محور البركار وفي الأنبوب الثاني AS نصاباً AC سيحمل القلم الراسم. يجب أن يكون قطر الأنبوبين صغيراً إلى حد يتيح لنا اعتبار وقوع تقاطع الأنبوبين في نقطة واحدة A. يجب أن يتيح تمفصل الأنبوبين في A دوران AS حول A واختيار الزاوية المناسبة BAC وأن يتيح دوران AS حول الأنبوبة AN عند الدوران حول المحور AB.



الشكل. 34

يأخذ السجزي بعد ذلك قوساً GE من الدائرة ذات المركز A ويكتب:

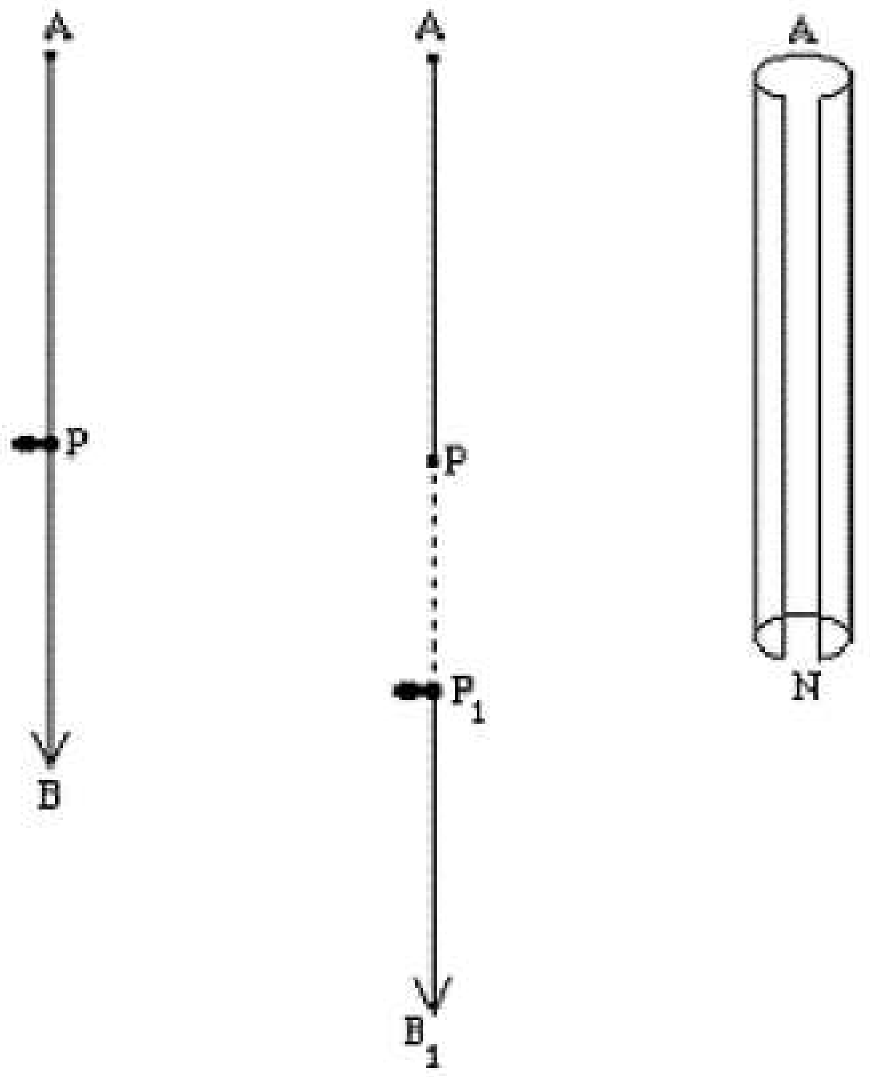
" ثم نعمل قوساً مثل ز ه (GE) على عمود ا ب (AB) منه نقطة هي على مركز به ترتفع وتنخفض جهتا ز ه نحو الرأس والقاعدة وعملها سهل إما بلولب وإما بجري مسطرة في خرق أو بأي عمل أردنا سهل"[22].

هذا الوصف غامض إلى حد ما، إلا أننا نستطيع تخيل قوس مار من حزين E و 'G على جداري الأنبوبين AN و AS على الترتيب، ينزلق عبر شقين في هذين الجدارين. إلا أنه لا بد من جهاز يتيح الانزلاق والانفراج المطلوب للأنبوبين ويُقفل حسب الطلب قبل أن يشرع الأنبوب AS الحاوي على قلم الرسم في الدوران بزاوية BAC محددة القيمة. يمكن قياس الزاوية BAC، في حال تدريج القوس 'EG، بنسبة القوس 'EG على الطول AE. يكفي في حقيقة الأمر تثبيت EG في حز E معمول في الأنبوب AN وجعله ينزلق في حز 'G معمول في الأنبوب AS ووضع آلية فوق الحز 'G لقفل الفتح. وعلى أي حال فإنه يصعب علينا تكوين فكرة نهائية عن وضع القوس نظراً لعدم وضوح النص ولعدم احتوائه على الأشكال.

يشير السجزي إلى طريقة أولى لضبط طول النصاب AB، محور البركار. نفرض قطع النصاب في نقطة P أي أنه فصل إلى قسمين القسم AP يبقى ثابتاً والقسم PB الذي يستطيع التحرك في الأنبوبة AN بواسطة وتد أو رافعة وضعا في النقطة P. يمكن والحالة هذه الانتقال من الوضع PB إلى الوضع P_1B_1 بفرض وجود أخدود مستقيم في جدار الأنبوب AN، ينزلق فيه الوتدP. يصبح طول محور البركار عندئذ AB_1، أي الطول المطلوب للمجيء بالنقطة B_1 إلى المستوي الذي نريد رسم القطع المخروطي عليه.

---

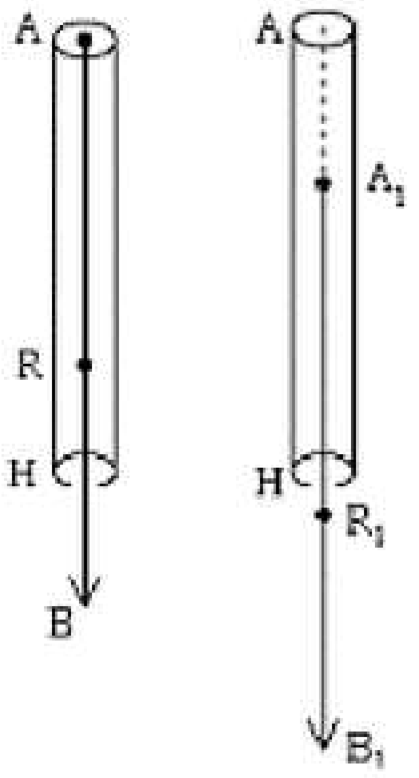
[22] انظر ص. 805.



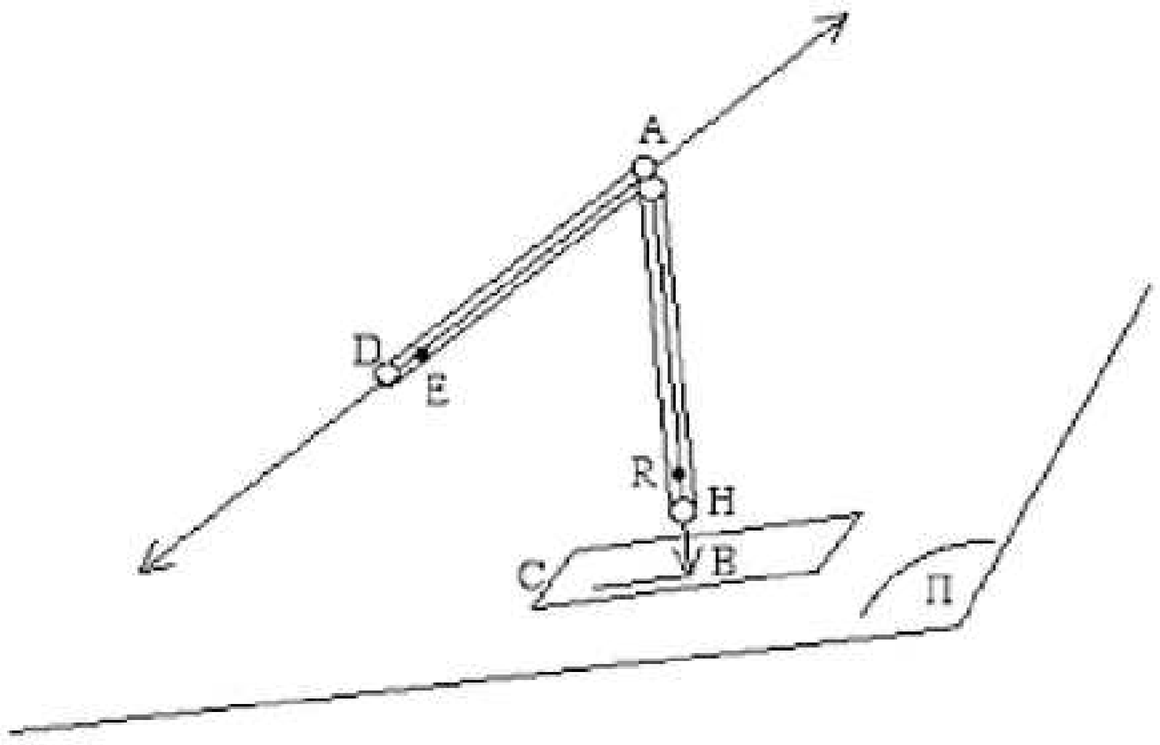
الشكل. 35

والمشكلة الباقية هي أن السجزي لا يدلنا على كيفية انزلاق النصاب AC الحامل للقلم الراسم.

ويدل في طريقة ثانية على كيفية انزلاق غمد القلم الراسم ويبين كيفية ضبط طول محور البركار. وتتغير الرموز في هذا المثال. يحتوي البركار على أنبوب AH فيه نصاب AB، يكونان محور البركار، وعلى أنبوب آخر AD ينزلق فيه نصاب E يحمل قلماً في كل من طرفيه. لتكن E نقطة من هذا النصاب مختلفة عن طرفيه وتقابل وضع الوتد في الأخدود المستقيم المعمول على جدار الأنبوب الذي يسمح للقلم الراسم بالانزلاق في اتجاه أو آخر. ونستطيع عندئذ إذا أردنا رسم قطع مخروطي في مستوى Π وضع رأس القلم الراسم في تماس هذا المستوى.



الشكل. 37

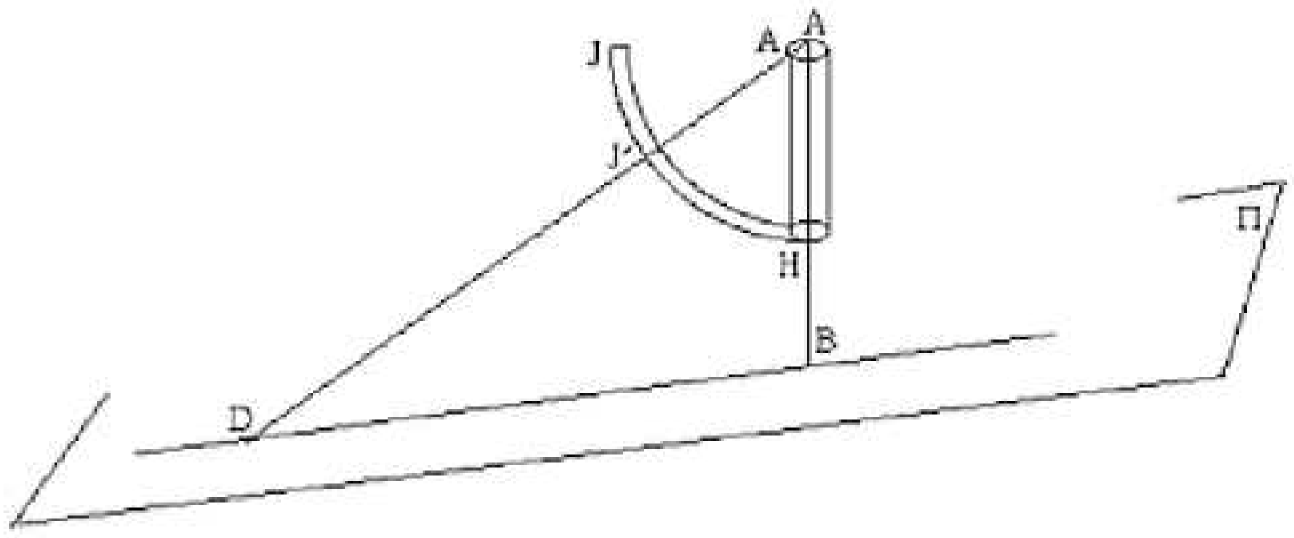


الشكل. 36

لتكن النقطة A رأس البركار وB النقطة على المحور. نختار الطول حسب وضع المستوى Π وحسب القطع الذي نريد رسمه في هذا المستوى. نأخذ على النصاب AB نقطة R ترتبط بقاعدة البركار BC بمعنى أن الطول RB ثابت. ويجب أن يتمكن محور البركار من الانزلاق داخل الأنبوب AH لتغيير الطول AB، وسيكون بوسعه عندئذ الانتقال من الوضع البدائي ARB – حيث A هي في آن واحد رأس الأنبوب وطرف محوره – إلى الوضع $A_1R_1B_1$، وA_1 هنا تختلف عن A رأس الأنبوب.

نفترض الآن أن الوتد الذي يتيح انزلاق النصاب مثبت في النقطة R. ننتقل من الطول AB لمحور البركار إلى الطول AB_1 ($AB_1 > AB$)؛ فإذا لم تقع النقطة B في المستوى Π، فيمكننا تطويل النصاب حتى النقطة B_1 ليلقى المستوى Π.

وأخيراً، وفي وجه ثالث، من عمل البركار، يأخذ السجزي نصابين AB وAD وأنبوباً AH. يندمج النصاب AB في الأنبوب، أما النصاب AD فمشدود إلى الأنبوب AH في A بنوع من المفصلات يتيح للنصاب بالتحرك على شكلين: دوران حول النقطة A لاختيار الزاوية BAD ودوران حول المحور AB، نحصل عليه بتدوير الأنبوب AH حول المحور.



الشكل. 38[23]

نثبت على الأنبوب في النقطة H قوس دائرة HJ مركزها A، يلقاه النصاب AD في النقطة 'J التي يتوقف وضعها على اختيار الزاوية BAD.

عندما نجعل الأنبوب AH يدور حول المحور AB، فإنه يجر معه القوس HJ والنصاب AD. وتكون النقاط J، B، H، A شكلاً لا يتغير نتيجة الحركة. لكنه يجب تغيير الطول AD لكي تبقى النقطة D في المستوى Π، بفرض وجودها فيه في وضعها البدائي، ولكي نستطيع بالتالي رسم القطع. وقد بينا كيف يغير هذا الطول في المثال الثاني. أما طول المحور AB فالمفروض أنه ثابت دوماً، وهو ما يشترطه السجزي عندما يكتب "ونعمل بالبركار الذي يكون عموده غير مقسوم بقسمين".

---

[23] لنلاحظ أن الحرف A في هذا الشكل يشير في آن واحد إلى تقاطع النصابين وإلى نقطة ارتكاز AD على الأنبوب.

لم يتحدث السجزي حتى الآن عن الزاوية التي يصنعها محور البركار AB مع المستقيم BD، تقاطع المستوى Π مع المستوى ABD الذي يحدده الوضع البدائي للبركار؛ وهي الزاوية التي تتوقف عليها طبيعة القطع، كما شرح ذلك في مطلع الرسالة. يشير السجزي هنا إلى هذه الزاوية بسطرين عندما يقول "ونرفع السطح الذي نحتاج إلى أن نرسم القطع عليه على ذلك السطح <المستوى ABD> بزاوية أي قطع شئنا من هذه القطوع"[24].

وهكذا فالزاوية هي ABD. إلا أن السجزي لا يعرض أي طريقة لتعيينها أو لتغييرها وفق اختيار القطع.

يثير السجزي، في نهاية هذه الرسالة المقتضبة، مسألة الرسم المتصل للقطوع الشبيهة بقطع ما ببضع كلمات حين يكتب "ولما لم يكن غرضنا وفحصنا على القطع الشبيهة بقطع ما عدا <ما> يحتاج إلى هذه القطوع المكافئة"[25]؛ ثم يبين كيفية رسم قطع مكافئ بالاستعانة بهذا البركار الأخير BAD مذكراً أنه إذا رمزنا لتقاطع المستوى Π مع المستوى DAB (الوضع البدائي للبركار) بـــ BX فيجب أن نحصل على $AD \parallel BX$.

وحتى نتفهم مناقشة السجزي المختصرة سنعود قبل كل شيء إلى *مخروطات* أبلونيوس. يبرهن أبلونيوس في القضية VI. 11 أن كل القطوع المكافئة شبيهة. وأن نسبة الشبه بين قطعين مخروطين *ضلعيهما قائمين* c و'c هي c'/c. ويبين في القضية VI.12 أن الشرط اللازم والكافي لتشابه قطعين ناقصين (أو قطعين زائدين) قطراهما d و'd و*ضلعاهما القائمان* c و'c هو أن يكون $\left(\frac{c}{c'}\right) = \left(\frac{d}{d'}\right)$، أو بشكل آخر $\left(\frac{c'}{d'}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)$.

لنأخذ أولاً حالة رسم القطع المكافئ. نفترض المستوى ABC المطابق للوضع البدائي للبركار معلوماً، كما نفترض أن محور البركار في هذا المستوى معلوم الوضع والطول.

إن المستوى Π الذي يمكن للبركار رسم قطع مخروطي عليه عمودي على هذا المستوى على طول المستقيم XBY الذي سيقع عليه محور القطع. لنفرض أن $AB = \ell$، $A\hat{B}Y = \beta$ و $B\hat{A}C = \alpha$. والسؤال إذاً هو التالي: هل يمكننا بهذه الفرضيات الحصول على قطعين شبيهين؟

حسب أبلونيوس، كما رأينا، كل القطوع المكافئة شبيهة. لنأت الآن إلى المستوى المعلوم والبركار، فمادام Π معلوماً فإن β معلومة وبالتالي α لأن $\alpha + \beta = \pi$. لنحدد *الضلع القائم* c لهذا القطع المكافئ ذي الرأس I: لتكن M نقطة من القطع بحيث يكون $MB \perp IY$ (MB عمودية طبعاً على AB الواقع في المستوى العمودي) و $B\hat{A}M = B\hat{A}C = \alpha$. لدينا إذاً

$$MB^2 = \ell^2 \cdot tg^2\,\alpha \qquad \text{و} \qquad MB^2 = c \cdot BI$$

ومن جهة أخرى فإن $BI = \frac{\ell}{2}\cos\alpha$ (المثلث متساوي الساقين IAB)، لذا فإن

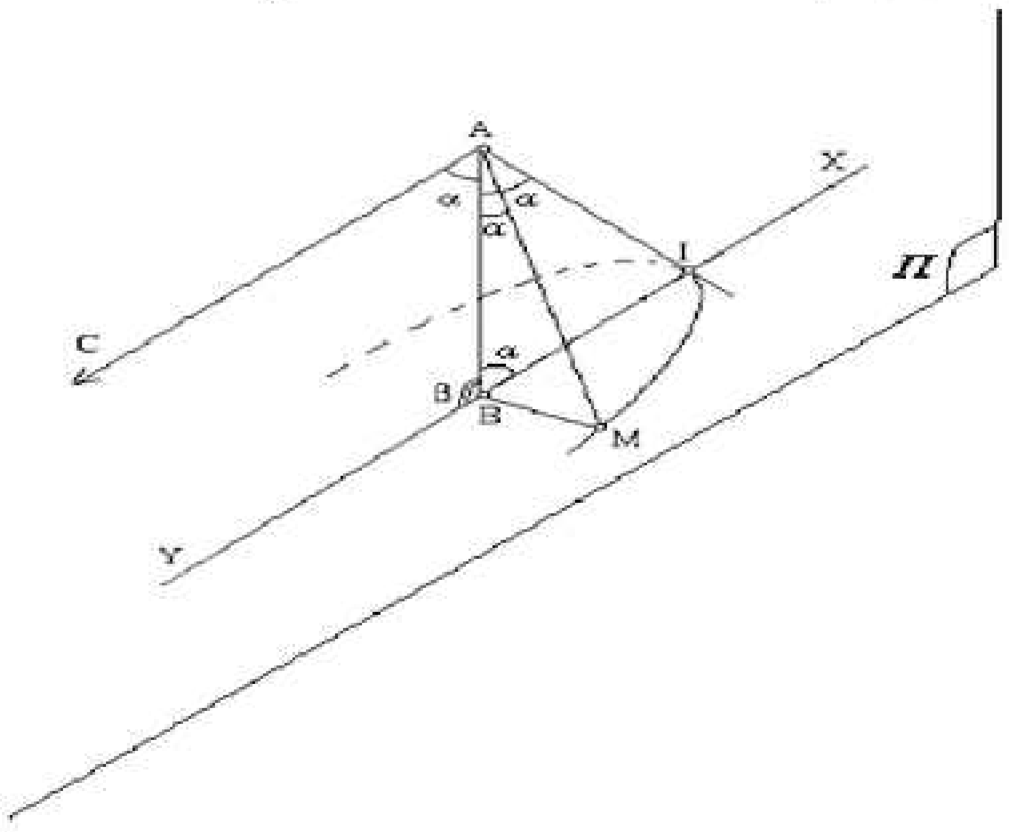
$$c = 2\ell\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos\,\alpha} \qquad (*)$$

[24] انظر أدناه ص. 807 السطر 13–14.

[25] انظر أدناه ص. 807 السطر 16–17.

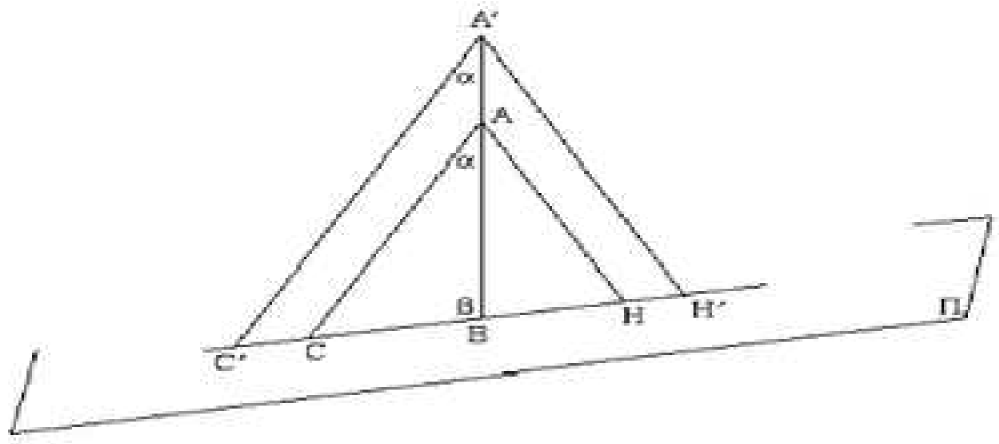
لنأخذ على محور البركار AB طولاً ℓ' يختلف عن ℓ $(\ell' \neq \ell)$ أو يساويه، ونعين مستوى Π' بالزاوية $A\hat{B}Y' = \beta'$ فتتعين $\alpha' = \pi - \beta$ ونرسم في Π' قطعاً مكافئاً *ضلعه القائم* $c' = 2\ell' \dfrac{\sin^2 \alpha'}{\cos \alpha'}$ ونسبة الشبه c'/c.

وهكذا نكون قد استطعنا بواسطة البركار رسم قطعين مكافئين شبيهين في نفس المستوى Π.



الشكل. 39

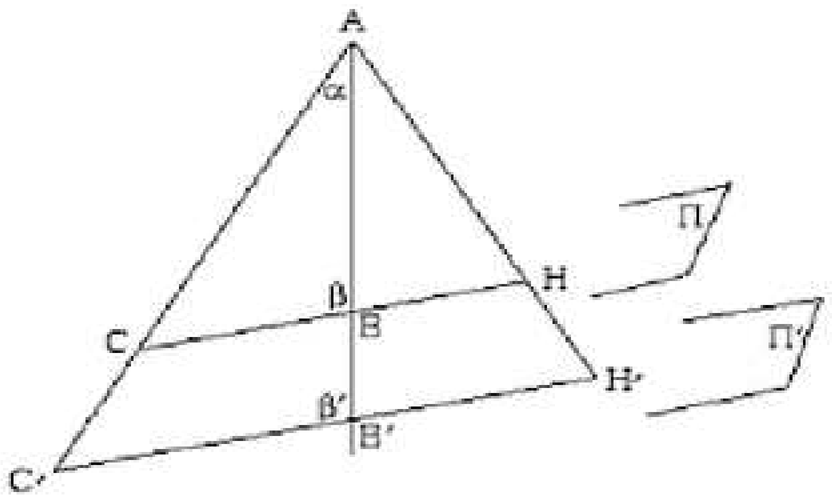
يمكننا إثبات نفس الخاصة من أجل كل القطوع المخروطية. لنأخذ القطع الناقص على سبيل المثال. ليكن BAC وضع البركار البدائي ($BAC \perp \Pi$)، ولتكن $B\hat{A}C = \alpha$ و $A\hat{B}C = \beta$ بحيث يكون $\alpha + \beta < \pi$ وليكن أخيراً طول المحور $AB = \ell$. نرسم القطع الناقص $\mathcal{E}$ ذا المحور HC. نغير طول المحور بحيث يقع رأسه في A' و $A'B = \ell'$. ونحتفظ بنفس الزاوية بين الفرعين $B\hat{A}'C' = B\hat{A}C = \alpha$، فنحصل على قطع ناقص $\mathcal{E}$ محوره H'C'. يبقى المستوى Π منحفظاً في التحاكي ذي المركز B والنسبة $(\ell'/\ell) = k$، أما السطح المخروطي ذو الرأس A فصورته سطح مخروطي رأسه A'. وهكذا فالقطعان الناقصان متحاكيان بالتحاكي $(B \text{،} \dfrac{\ell'}{\ell})$.



الشكل. 40

تنطبق هذه المحاكمة على سائر القطوع المخروطية.

وإذا ما أردنا الحصول على قطوع مخروطية شبيهة في مستويين متوازيين Π و Π' أبقينا رأس البركار A وزاوية α على حالهما وعدلنا في طول AB حتى يصل إلى B' في المستوى Π'.

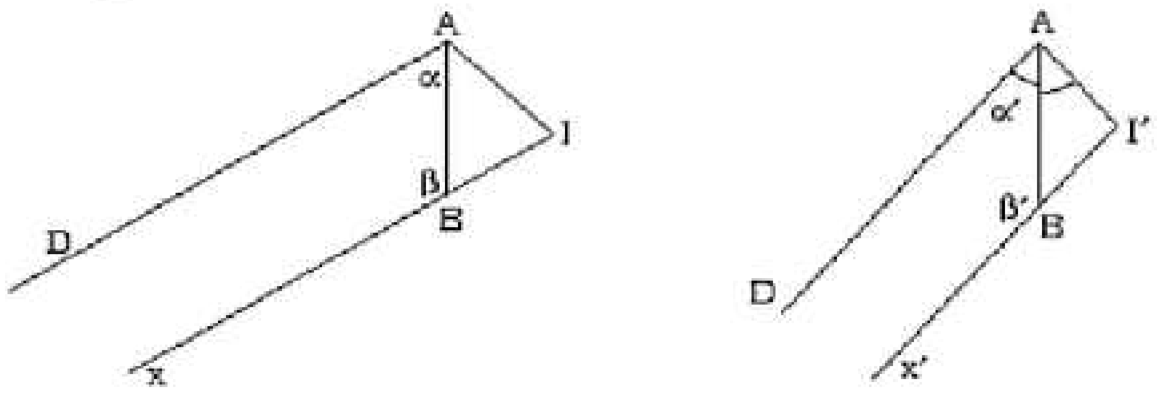


الشكل. 41

والقطوع الناتجة متحاكية في التحاكي ($\frac{\ell'}{\ell}$، A).

أما إذا ثبتنا طول محور البركار ℓ فيمكننا أن نبين كيفية رسم قطعين شبيهين في مستويين Π و'Π يمران بموطئ البركار B:

1) الأمر واضح فيما يخص القطع المكافئ. لدينا من أجل المستويين Π و 'Π المعينين بالزاويتين β و'β على الترتيب $\alpha = \pi - \beta$ و $\alpha' = \pi - \beta'$؛ وقد حصلنا من حساب *ضلعيهما القائمين* على العلاقة (*).



الشكل. 42

2) لا نستطيع فيما يخص القطع الناقص (أو الزائد) أخذ 'β و 'α لا على التعيين من أجل المستوى 'Π إذا كانت الزاويتان β و α معينتين في Π. لأنه من الضروري أن تحقق الزاويتان 'α و 'β العلاقة:

$$\frac{\cos^2 \beta'}{\cos^2 \alpha'} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \qquad (**)$$

إضافة إلى الشرط

$\cos^2 \beta < \cos^2 \alpha < 1$ ؛ $\cos^2 \beta' < \cos^2 \alpha' < 1$ من أجل القطع الناقص

و

$\cos^2 \alpha < \cos^2 \beta < 1$ ؛ $\cos^2 \alpha' < \cos^2 \beta' < 1$ من أجل القطع الزائد

لنلاحظ أن العلاقة (**) ليست سوى تساوي التباعد المركزي (غير المعرف بعد) للقطعين المخروطين.

يمكننا عندما يتغير الطول ℓ أن نقرن بكل قطع مرسوم في المستوى Π قطعاً آخر بالتحاكي في كل مستوٍ 'Π موازٍ لـ Π. أي أن الطول المتغير لمحور البركار يتيح لنا اختيار هذا الطول كتابع لأبعاد القطع الذي نريد رسمه. ففي القطع الناقص، على سبيل المثال، تحدد العلاقة التالية القطر d:

$$(\alpha + \beta < \pi) \qquad d = \ell \, \frac{\sin 2\alpha \cdot \sin \beta}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}$$

وفي القطع الزائد

$$d = \ell \, \frac{\sin 2\alpha \cdot \sin \beta}{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}$$

والخلاصة أن السجزي قد أثبت بصورة عامة، متبعا القوهي، توقف طبيعة القطع المخروطي المراد رسمه في مستو Π على الوضع البدائي للبركار بالنسبة لهذا المستوى. ولقد رأينا أن ما يميز هذا الوضع البدائي في مستو عمودي على Π هو طول محور البركار ℓ، الزاوية α بين هذا المحور وبين فرع البركار المتحرك، والزاوية β بين المحور وقاعدة البركار الموجودة في المستوى المعلوم Π. إلا أن القوهي كان قد درس التقابل بين العناصر β، α، ℓ من جهة، والعناصر التي تميز القطع المخروطي: القطر والضلع القائم للقطعين الناقص والزائد والضلع القائم للقطع المكافئ. ويبدو أن السجزي لم يقم بهذه الدراسة في رسالته المقتضبة لأن القوهي كان قد فعل. ولكنه، من جهة أخرى، أثار مسألة الرسم المتصل للقطوع الشبيهة، وإن باختصار، التي لم يعالجها القوهي. أضف إلى ذلك أنه كان يريد استغلال كل إمكانات البركار التام الذي اخترعه سلفه. وهكذا نراه يقدم ثلاث طرق – وإن لم تكن مستقلة عن بعضها – للرسم المتصل.

- فهو يعرض طريقة أولى لتغيير طول محور البركار بدون الإشارة إلى طول الفرع الآخر الحامل للقلم الراسم. ولكن ضرورة بقاء رأس القلم على تماس مع المستوى الذي نريد رسم القطع عليه متضمنة فيما يعرض.
- ثم يبين الإجراءات اللازمة لجعل النصاب الحامل للقلم الراسم ينزلق في الأنبوب المكون لفرع البركار الثاني، ويعطي طريقة ثانية لتغيير طول المحور.
- يبقى طول المحور ثابتا في الطريقة الثالثة، بينما يفترض تحرك نصاب القلم الراسم. ويرينا في الحالتين الأولى والثالثة كيفية استعمال قوس دائرة مندمج مع الأنبوب الحامل لمحور البركار لقياس الزاوية بين الفرعين. ولكنه على ما يبدو لم يعط طريقة تتيح تعيين زاوية البركار مع المستوى الذي يرسم القطع فيه.

وتتلخص فكرة السجزي في هذا العمل بالقول: أياً كان النموذج المنتقى فإن البركار التام يتيح الرسم المتصل للقطوع المخروطية الثلاث وللقطوع الشبيهة وكذلك للدائرة والخط المستقيم.

4. الرسم المتصل وتصنيف المنحنيات

لقد جرى البحث في الرسم المتصل، كما رأينا، استجابة لمتطلبات عديدة إحداها حاجة رياضيي العصر للتأكد من اتصالية المنحنيات. وكانت الوسيلة الوحيدة المتاحة لهم لتحقيق ذلك هي إدخال الحركة في الهندسة. ولم يمض وقت طويل حتى اتجه هذا البحث نحو المسألة الكبرى في تصنيف المنحنيات بدليل أنواع وعدد الحركات المستخدمة في رسمها. لقد كان هذا البحث خصباً كما أن الأهمية الفائقة التي اكتسبها فيما بعد تسترعي الانتباه.

يميز القوهي المنحنيات التي يرسمها البركار التام – الخط المستقيم والدائرة والقطوع المخروطية – بتعبير شامل "الخطوط القياسية" وقد جاء في مطلع كتابه:

> "هذا كتاب في الآلة التي سميت البركار التام وهو مقالتان. المقالة الأولى في البرهان على أنه يمكن بهذا البركار رسم الخطوط القياسية أعني المستقيمة أو محيطات الدوائر أو محيطات قطوع المخروط وهي المكافئة والزائدة والمتقابلة الوضع"[26].

لقد استُعمل هذا التعبير "الخطوط القياسية" على امتداد تقليد طويل: نجده عند السجزي والبيروني وهبة الله البغدادي وابن الحسين... إلا أن ف. فوبك نقل هذا التعبير في ترجمته الفرنسية إلى الخطوط المنتظمة وأخفى بذلك هذه المسألة الهامة[27].

فالقياسية مشتقة من قاس يقيس أو قاس يقوس بمعنى قدره على مثله، وللقياسي بالمفرد معنى مجازي: خير نسائكم التي تدخل قيساً وتخرج ميساً بمعنى المشي الوسط المعتدل. وهذا هو المعنى الذي اختاره ف. فوبك عندما تحدث عن "الخطوط المنتظمة". وهي ترجمة غير مقبولة لا لأنه فضل المعنى المجازي بدون أن تستدعي الحاجة ذلك وحسب، وإنما بسبب الإبهام وعدم الدقة. فإذا أردنا أن نتحدث عن المنحنيات المنتظمة بالمعنى الذي أعطاه القرن التاسع عشر لها فعلينا استثناء الخط المستقيم الذي هو تحديدا أحد الخطوط القياسية عند القوهي.

ولكن ماذا يعني القوهي بالخطوط القياسية؟ توجد حسب الاصطلاح الهندسي في ذلك العصر خطوط (أي مقادير) تخضع لنظرية التناسب. وهذا هو على وجه الدقة المعنى الذي فهمه القوهي: فهناك خطوط تحدثها حركة متصلة واحدة – حركة فرع البركار – يمكن تطبيق نظرية التناسب عليها. وهذه هي حال المستقيم والدائرة ولكنها حال القطوع المخروطية الثلاثة أيضاً التي تحددها ميزاتها الخاصة Symptomata أو خواص البؤرة والدليل.

وهكذا وضع القوهي تصنيفا للمنحنيات: القياسية والأخرى غير القياسية. إلا أنه ذهب أبعد من التمييز المترسخ في التقليد القديم بين المستقيم من جهة والمنحنيات (بما في ذلك الدائرة) من جهة أخرى.

أما السجزي فلم يكتف بالاستحواذ على التقدم الذي أحرزه القوهي ولكنه أراد تثبيته. وهكذا نراه يقوم في كتابه *المدخل إلى علم الهندسة* بتصنيفات متعددة. فهو يميز بين ثلاثة أنواع من الخطوط: الخطوط القياسية (المستقيم والدائرة والقطوع المخروطية) والخطوط غير القياسية التي فيها نظام وترتيب، وأخيراً الخطوط غير القياسية التي ليس فيها أي انتظام. يتولد النوع الأول، حسب السجزي، من حركة متصلة وحيدة وهو النوع الهندسي، ويحدث النوع الثاني حركتان متصلتان وهو نوع غير "هندسي" ولكنه "ميكانيكي". أما النوع الثالث والذي تحدثه حركتان متصلتان أيضاً فهو ليس

---

[26] ص. 727 سطر 3-6.

[27] F. Woepcke, 'Trois traités arabes sur le compas parfait', *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale et autre bibliothèques*, tome XXII, Ire partie (1874), pp. 1-175, p. 68; reprod. *In Etudes sur les mathématiques arabo-islamiques*, 2 vols. (Frankfurt am Main, 1986), vol. 2, pp. 560-734.

ميكانيكاً. ويعطي كمثال على النوع الميكانيكي الخط اللولبي (اللولب الأسطواني) وهو منحنى مائل تحدثه حركة دورانية منتظمة حول محور ما وحركة مستقيمة منتظمة موازية للمحور ويكتب ما يلي:

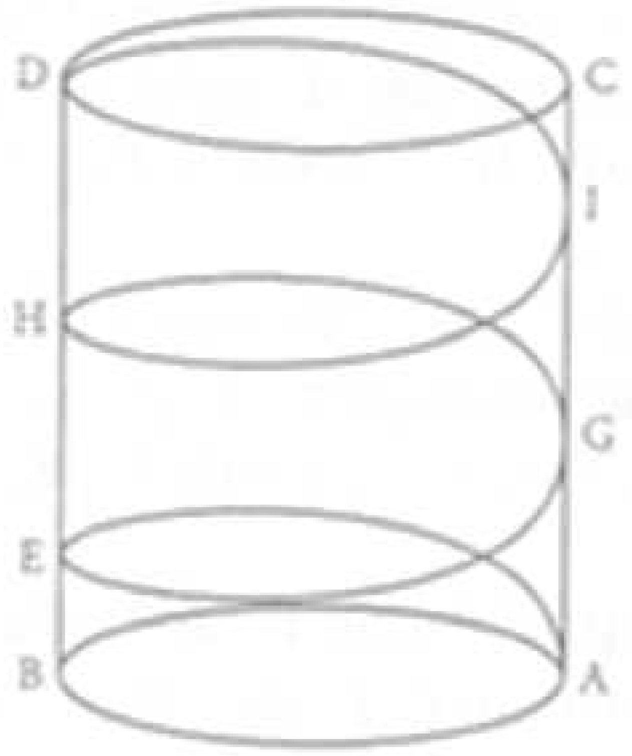
"وأما الخط اللولبي وهو المستعمل في الحيل لا في الهندسة لأنه غير قياسي لكن له نظام وترتيب فهو يحدث من حركة النقطة على الخط المستقيم وعلى الدائرة باشتراك الأسطوانة"[28].

ثم يضيف:

وهذه صورة أسطوانة $\overline{\text{ا ب جـ د}}$ ، وقاعدتيها دائرتي $\overline{\text{ا ب}}$ $\overline{\text{جـ د}}$. فإذا توهمنا كأن نقطة $\overline{\text{ا}}$ تتحرك حركات متساوية على خط $\overline{\text{ا جـ}}$ والأسطوانة تدور على مركزي قاعدتيها حركات متساوية تحدث منه خط $\overline{\text{ا ه ز ح ط د}}$ اللولبي. وأما الخط الذي ليس له نظام فليس له حد ولا نهاية وغير مستعمل في شيء من الصناعات، فلذلك ليس هو موصوف ولا محدود[29].

يرسم السجزي الخط اللولبي ولكنه لا يعطي أي مثال عن المنحنيات غير القياسية والتي ليس فيها نظام أو ترتيب. لعله كان يفكر بمنحنيات على شاكلة المنحنيات المُرَبِعة أو الحلزونية.

وفي الواقع فإن اللولب الأسطواني هو المنحني "الميكانيكي" الوحيد المتجانس أي أنه من الممكن توضيع كل قوس منه على قوس آخر من المنحني أيا كانت نقطة المبدأ، أو أنه يوجد، حسب التعابير الحديثة، زمرة متعدية للانتقالات من المنحني على نفسه.



الشكل. 43

ما من شك إذاً في معنى التمييز بين المنحنيات القياسية وغير القياسية. ويمكننا، إن اقتضى الأمر، أن نجد برهاناً إضافياً على معنى هذه التعابير في استعمال السجزي لها في تعريفه للزوايا: فالزوايا غير القياسية هي الزوايا المقوسة والزوايا الجائزة* بينما الزوايا القياسية هي التي يمكن دراستها بالاستعانة بنظرية التناسب[30].

---

[28] السجزي، *كتاب المدخل في علم الهندسة*، MS Dublin, Chester Beatty 3652, fols. 2^v-8^r, fol. 4^r. انظر التحقيق النقدي لكل هذا النص في R. Rashed and P. Crozet, *L'Œuvre mathématique d'al-Sijzī*، قيد الطباعة.

[29] ن. م، الحد بمعنى التعريف أيضاً.

* (م) الزاوية الجائزة: الزاوية بين مماسي منحن ما في نقطتين متجاورتين.

إن لهذا البحث الخصب في تصنيف المنحنيات، بالاستعانة بمفهوم الحركة وبعدد الحركات وفي الفصل بين المنحنيات الهندسية والميكانيكية حسب إمكانية تطبيق نظرية التناسب عليها، أهمية قصوى في تاريخ الهندسة وعلى وجه الخصوص الهندسة الجبرية التي أتت بعد ذلك بكثير. يبقى أن نتساءل عما آل إليه هذا الفصل في المسالك الجديدة في الرياضيات والذي استعرضناه هنا، بعد القرنين العاشر والحادي عشر.

5. جيمينوس والسجزي: في تصنيف المنحنيات

إن ما يقع على عاتقنا الآن هو وضع هذه الفكرة الخصبة التي بني عليها التصنيف الجديد للمنحنيات في إطار تاريخ الهندسة. إنها مهمة صعبة. لأن معرفتنا بالهندسة العربية مازالت محدودة. فالنصوص المتاحة بشكل موثوق قليلة العدد والنصوص التي فقدت عديدة. ويمكننا أن نضيف أن السجزي بالذات مقتضب الكلام وشحيح في المراجع. ولذا فعلينا أن نكتفي في الوقت الحاضر بتفحص اختيار المنحنيات والعبارات المستعملة لتمييزها وبالقيام بعطفة قصيرة يقتضيها أخذ بعض الوقائع التي نعلمها بعين الاعتبار، والتي كان السجزي يجهلها دون ريب، المتعلقة بتاريخ تصنيف المنحنيات (وليس بتاريخ المسائل).

فقد أشار أفلاطون إلى ثلاثة أشكال ممكنة تتصل بالواحد: الخط المستقيم والدائرة ومزيج من الخط المستقيم والدائرة (*Parmenides* 145b). هذا هو أول تصنيف للمنحنيات تبناه أرسطو ولكنه، من جهة، ربط الشكلين الأولين بنوعين من الحركة كما اعتبرهما، من جهة ثانية، المنحنيات البسيطة الوحيدة. فقد نص على ذلك بوضوح حين كتب:

> "إن كل حركة بالنسبة للمكان والتي نسميها انسحاب هي حركة مستقيمة أو دائرية أو مزيج من هذين النوعين. وهذان النوعان هما النوعان البسيطان الوحيدان. وسبب ذلك أن هذين المقدارين هما مقداران بسيطان. أعني الخط المستقيم ومحيط الدائرة"[31].

يأخذ برقلس هذه الملاحظات في *شرحه للكتاب الأول من الأصول* لأقليدس ويلخص عرض أرسطو كما يلي:

> "إن رأي أرسطو على رأي أفلاطون: فهو يقول إن كل خط هو مستقيم أو دائري أو مزيج منهما. ولهذا السبب توجد ثلاثة أنواع من الحركات – الحركة على خط مستقيم والحركة الدائرية والحركات المزيجة"[32].

يمكننا أن نفهم من هذا التعليق ومن السرد عن أرسطو أن أشكال الخطوط تسبق، منطقياً على الأقل، أشكال الحركة بالنسبة للمكان. إلا أن ما يجب ملاحظته في كل الأحوال هو التمييز الحاصل بين الحركتين الأوليتين وبين الحركة الناتجة عن الجمع بينهما. فهي حركة مشتقة من السابقتين ولا يمكن وصفها "بالبسيطة". وهذا ما يكتبه أرسطو في *الفيزياء* VIII 8، 31–261b28:

---

[30] السجزي، كتاب *المدخل إلى علم الهندسة*، MS Diblin, Chester Beatty 3652, fol. 8ʳ.

[31] *De Caelo* I 2, 268 b 17-20.

[32] Proclus, In Eucl., p. 104, 22-25 Friedlein ; *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Translated , with Introduction and Notes by Glenn R. Morrow (Princeton, 1970), p. 85.

"وفي الواقع فإن كل ما له حركة في المكان يتحرك بحركة إما دائرية وإما مستقيمة وإما مزيجة (πᾶν μὲν γὰρ κινεῖται τὸ φερόμενον ἢ κύκλῳ ἢ εὐθεῖαν ἢ μικτήν)؛ وهكذا فإن لم تكن ولو واحدة من هاتين الحركتين الأوليتين متصلة فسيستحيل أن تكون الحركة المركبة منهما متصلة".

فما من حاجة للتردد إذاً: إننا لن نغير تعاليم أرسطو إذا قلنا إنه لم يكتف بقبول رأي أفلاطون، بل ارتأى الربط بين تصنيف المنحنيات وتصنيف الحركة المكانية، والفصل في تصنيفه للمنحنيات، وكذا للحركات بين الكائنات البسيطة وبين الأخرى غير البسيطة. وبحسبه يوجد نوعان فقط من المنحنيات البسيطة – الخط المستقيم والدائرة – وكل ما عداهما تركيب من هذين المنحنين الأوليين وبالتالي لا يمكن أن تكون بسيطة. إلا أن هذا التعليم، والذي هيمن لمدة طويلة، لم يلق قبولاً لدى الجميع إذا ما صدقنا ما يقوله برقلس: يعترض البعض على هذا التصنيف ويرفضون وجود خطين وحيدين بسيطين، قائلين بوجود ثالث وهو الخط اللولبي الذي ترسمه نقطة تتحرك حركة منتظمة على خط مستقيم يتحرك حول سطح أسطوانة. تولد هذه النقطة المتحركة لولباً ينطبق أي قسم منه بشكل متجانس على أي قسم آخر كما بين أبلونيوس في كتابه *Cocholias*. وهي خاصة لا يتمتع بها إلا اللولب[33].

لم ير برقلس على ما يبدو ضرورة لذكر أسماء هؤلاء المخالفين في الرأي أو لعرض حججهم. إلا أنه مهما يكن من أمر فالنتيجة أن هذا التصنيف كان موضوع نقاش حاد لا بين الرياضيين – الفلاسفة وحدهم وإنما بين رجال الدين – الفلاسفة كذلك[34]. يعود هذا الجدل إلى القرن الأول قبل المسيح على الأقل لأن جيمينوس شارك فيه على قول برقلس. ثم إننا نعلم نقلاً عن سنبلقيوس أن كزيناركوس رفض التصنيف الأرسطوطاليسي ولكنه نقد بدوره وبعد قرنين من قبل الإسكندر الأفروديسي. إذ يكتب سنبلقيوس ما يلي:

> إلا أن كزيناركوس في إجابته على عدة أشياء جاءت في كتاباته ضد الجوهر الخامس[35] أجاب أيضاً على الحجة "وسبب ذلك أن هذين المقدارين هما وحدهما وعلى حد سواء بسيطان" أي الخط المستقيم والدائرة[36].

يعارض كزيناركوس هذا الطرح الأرسطوطاليسي بالعبارات التالية:

> لأن اللولب على الأسطوانة هو أيضاً خط بسيط لأن كل قسم من السابق يتوضع على كل قسم مساو من اللاحق. إلا أنه إذا وجد مقدار بسيط إضافة إلى المقدارين الأولين فستوجد حركة بسيطة تضاف إلى الحركتين السابقتين كما سيوجد جسم بسيط آخر يضاف إلى الخمسة الأخرى، يتحرك بهذه الحركة[37].

---

[33] Ibid., pp. 104, 26-105, 7 Friedlein [= p. 85 Morrow].

[34] M. Rashed, 'La classification des lignes simples selon Proclus et sa transmission au monde islamique', in Cristina d'Ancona and Giuseppe Serra (eds.), *Aristotele e Alessandro di Afrodisia* (Padova, il Poligrafo, 2002), pp. 257-269.

[35] Aristotle, *De caelo*, 268b19-20.

[36] Simplicius, In *Aristotelis de caelo commentaria* (C.A.G. 7), ed. J. Heiberg (Berlin, 1894), p. 13, 22-25.

[37] Ibid., p. 13, 25-28.

إن القول إن اللولب بسيط يطعن في الصميم نقاط عدة في التعاليم الأرسطوطاليسية: عدد الخطوط البسيطة وعدد الحركات البسيطة وعدد الأجسام البسيطة. لذا وجب على الشارح العظيم لأرسطو، الإسكندر الأفروديسي أن يقوم بنفسه بالرد على كزيناركوس. فيوجه نقدين له، لا يعنينا إلا الأول منهما: يقول كما روى سنبلقيوس إن:

> اللولب على الأسطوانة ليس بالبسيط مع أن المنحني متولد في الحقيقة من حركتين مختلفتين إحداهما دائرية والأخرى خطية (ἐκ δύο κινήσεων ἀνομοίων ... κυκλικῆς τε καὶ ἐπ᾽ εὐθείας). وفي الواقع عندما يلف خط مستقيم دائرياً حول سطح الأسطوانة وتحرك أي نقطة منه بشكل منتظم (ὁμαλῶς) على هذا الخط المستقيم يحدث اللولب الحلزوني (ἡ κυλινδρικὴ ἕλιξ)، كما يقر بذلك كزيناركوس نفسه حين يكتب ما يلي: لندر مربعاً بحيث يبقى أحد أضلاعه ثابتاً ليصبح محور الأسطوانة. ولنرسم على الضلع الدائر الموازي له نقطة يقتضي انتقالها على طول الخط الزمن الذي يقتضيه رجوع متوازي الأضلاع إلى وضعه البدائي. وهكذا يحدث متوازي الأضلاع أسطوانة بينما تحدث النقطة المرسومة على الخط لولباً بسيطاً (ἁπλῆν) – على ما يقول – لأنه متشابه الأجزاء (διότι ὁμοιομερής)'. إلا أنه ولو كان كذلك فليس بسيطاً. لأن الخط البسيط متشابه الأجزاء لزوماً ولكن خطاً متشابه الأجزاء ليس بسيطاً بالضرورة إلا إذا كان متجانساً (μονοειδής) أيضاً، وإذا نتج <خط بسيط> عن حركة فالحركة بسيطة أيضاً وهي إضافة لذلك وحيدة[38].

وهكذا فالخلاصة أن اللولب الأسطواني هو كالمستقيم والدائرة متشابه؛ ولكنه خلافاً لهما ليس بسيطاً لأنه يتولد من حركتين غير متشابهتين. ثم إن جيمينوس، بحسب برقلس، كان قد رد مسبقاً، إن صح التعبير، قبل الإسكندر بزمن طويل على كزيناركوس. فقد كان جيمينوس كما يكتب برقلس أول من لاحظ ذلك:

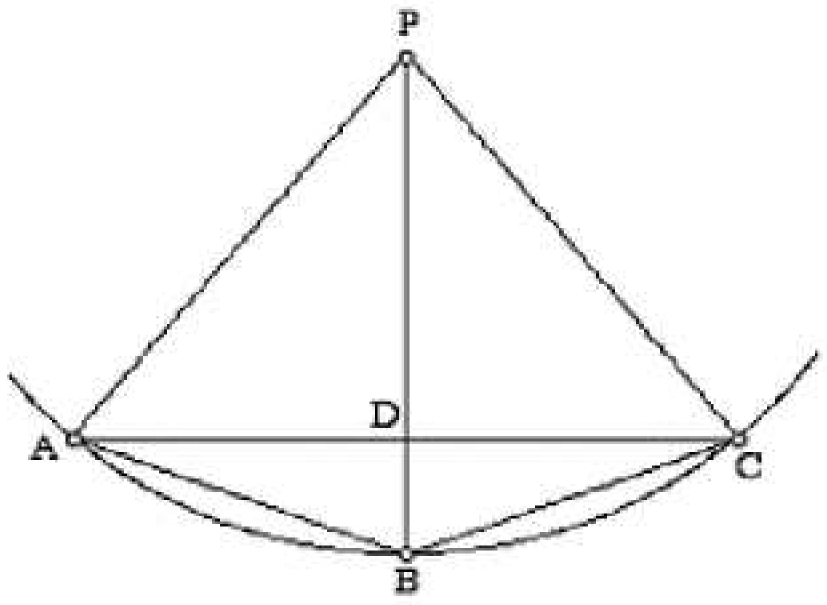
> [...] يمكن أن يستخلص أن الخطوط الثلاثة الوحيدة المتشابهة الأجزاء هي الخط المستقيم والدائرة واللولب الأسطواني. يقع اثنان منها في مستوى وهما بسيطان؛ وواحد مزيج ويقع حول مجسم. لقد بين جيمينوس ذلك بوضوح بعد أن برهن أن الخطين الممتدين من نقطة إلى خط متشابه الأجزاء محدثين معه زاويتين متساويتين متساويان هما أيضاً[39].

إنها زوايا مزيجة محصورة بين خط مستقيم وآخر منحن؛ ولذا يصعب علينا أن نرى كيف عالجها جيمينوس وكيف أتم برهانه فيها إذا لم تكن لديه، على الأقل، فكرة استبدال المنحني بالمماس عليه في النقطة التي تعنينا. وإلى جانب ذلك فهي صعوبة ليس من السهل تجنبها لسبب بسيط هو أن جيمينوس يريد على ما يبدو هنا إعطاء معنى هندسي لمفهوم تشابه الأجزاء على الرغم من عدم دقته. لقد كان من الضروري القول، للتملص من هذه الصعوبة، بوجود نقاط في كل منحن متشابه الأجزاء يمكن أن نمدد منها خطوطاً مستقيمة متساوية ومتساوية الزوايا في آن. ولذا فلقد كان من الممكن لجيمينوس أن يقول: ليكن لدينا منحن متشابه الأجزاء ABC ولتكن النقطة B وسط القوس AC. ولنطابق هذا القوس على نفسه A في C وC في A؛ وهكذا فلن تتحرك B، وكذلك D وسط الوتر AC المتميزة بصورة عامة عن B. وأيا كانت النقطة P على المستقيم BD فإن للمقطعين PA وPC نفس الخاصة – خاصة التساوي – ليس من أجل

[38] Ibid., pp. 13, 22-14, 29.

[39] Proclus, *In Eucl.*, pp. 112, 19-113, 3 Friedlein [= pp. 91-92 Morrow].

النقطتين A وC وحسب، وإنما من أجل أي زوج من النقاط على المنحني الذي وسطه B. وAC، إضافة إلى ذلك، عمودي على BP في D. وهكذا فكل الأوتار عمودية على BP في نقاط وسطها. يمكن أن نضم لأي نقطة B من منحن متشابه الأجزاء (ماعدا الخط المستقيم) خطا مثل BP وخطاً واحداً فقط. وهذا الخط هو في حال اللولب مولد السطح الحلزوني الأيمن الذي يأخذ قسطاً هاماً في المقاطع التي كرسها بابوس لهذا المنحني.



الشكل. 44

لعل هذا التفسير يتيح لنا عرض الطبيعة "الهندسية" لمفهوم تشابه الأجزاء ولكن بدون أن ننسى الحركة. وفي الواقع، وبحسب برقلس كذلك، فإن جيمينوس أيضاً "[...] قد صرح بحق وكما أنه من الممكن إنتاج خط بسيط بمجموعة من الحركات فليس كل خط من هذه الخطوط مزيجاً، وإنما الخط الواحد المزيج هو الخط الناتج عن حركات غير متشابهة"[40]. وهكذا إذا كان اللولب غير بسيط فسبب ذلك نوع الحركات التي تولده؛ بينما يتأتى تشابه أجزاءه، عند جيمينوس على الأقل، من الهندسة. وهكذا يبدو رفع الغموض عن مفهوم تشابه الأجزاء فيما يخص اللولب الأسطواني مستحيلاً، بينما الأمر ليس كذلك بالنسبة للدائرة متشابهة الأجزاء والبسيطة في آن – أي في الحالة التي تعمل فيها الهندسة بتناغم مع الحركة. لاشك أن الخطوة التي اتخذها جيمينوس هامة إذ سيتوقف تصنيف المنحنيات من الآن فصاعداً على نوع الحركات ذات العلاقة وعلى طريقة تراكب هذه الحركات كما سيتوقف على ميزة المنحني الهندسية التي يجب تعيينها.

وهكذا، وحسب الدليل الذي أعطاه برقلس والذي أوردناه أعلاه، فإن أبلونيوس في كتابه *On the Cochlias* قد عرض اللولب الأسطواني كمنحن شاذ نظراً لأنه الوحيد الذي يمكن لكل أجزائه أن تتطابق. لكن هذا الكتاب لم يصلنا باليونانية. ليس هذا وحسب، ولكنه لم يبق أي أثر له، مباشر أو غير مباشر، عند خلفاء الرياضيين اليونان. وهكذا فمن المستحيل أن يكون لرياضيي القرن العاشر علم به. ترى هل وصلتهم بعض أصدائه، ولو بشكل غير مباشر، عن طريق *شروح* برقلس؟ وإذا كان هذا السؤال لا يزال مطروحاً فإنه من الواضح أنهم تعرفوا على المنحني بالذات، إما بواسطة *شرح* الإسكندر للكتاب الأول من *De Caelo* الذي حصل سنبلقيوس منه على معلوماته عن كزيناركوس وإما من دراسات هيرون الاسكندراني وبابوس. فلقد ترجم *شرح* الإسكندر للكتاب الأول، وهو الذي يعنينا هنا، إلى العربية؛

[40] Ibid., pp. 105, 26-106, 3 Friedlein [= p. 86 Morrow].

وأكثر من ذلك، فقد كان موضوع شرح قام به رياضي القرن العاشر الخازن[41]. ترجم إلى العربية كذلك كتاب هيرون *ميكانيكا* وكتاب بابوس الثامن *Mathematical Collection*. وما هو ذو مغزى أكبر أن السجزي قام بنفسه بنسخ الكتاب الثامن من نسخة أعدت في القرن التاسع للرياضيين المشهورين بني موسى[42].

يعطي هيرون في الكتاب الثاني من *الميكانيكا* تعريف اللولب الأسطواني ويشرح كيفية رسمه – وسيلتقط بابوس تماماً بنفس العبارات عرض هيرون. لنستمع لما يقوله هيرون:

> نقول إن طبيعة الخط المرسوم عليه (اللولب) هي هذه: إذا فرض ضلع من أضلاع شكل أسطواني متحرك على بسيط الأسطوانة، وفرضت نقطة ما في نهاية ذلك الضلع تتحرك على الضلع، وينفذ عليه كله في الزمان الذي يدور ذلك الضلع بسيط الشكل الأسطواني كله دورة واحدة ويرجع إلى الموضع الذي منه ابتدأ يتحرك، فإن الخط الذي ترسمه تلك النقطة على بسيط الشكل الأسطواني يكون دائرة لولبية، وهي التي تسمى اللولب. فإذا أردنا أن نرسم هذا الخط على بسيط الأسطوانة، فإنا نستعمل هذا العمل: أنا إذا فرضنا على سطح ما خطين أحدهما قائماً على الآخر على زاوية قائمة، كان أحد الخطين مساوياً لضلع الأسطوانة والآخر مساوياً لدائرة الأسطوانة – أعني دائرة قاعدتها – ووصلنا طرفي الخطين بالزاوية القائمة بخط يوتر الزاوية القائمة، ثم ركبنا الخط المساوي لضلع الأسطوانة على ضلع الأسطوانة والخط المساوي لدائرة قاعدة الأسطوانة على دائرة قاعدة الأسطوانة، فإن الخط الموتّر الزاوية القائمة يلتف على بسيط الأسطوانة فيكون عليه دائرة لولبية[43].

لقد عرف الرياضيون العرب هذا النص منذ عصر بني موسى، في نسخة هيرون الأصلية وفي الشكل الذي تبناه بابوس. وبما أن هذه المعرفة قد حصلت في سياق مختلف ووجهت نحو غايات مختلفة فبإمكاننا التحقق أن مسافة شاسعة قد قطعت منذ هيرون وبابوس.

وفي الواقع فبينما كان قراء هذين الأخيرين يلقون المنحني عند دراستهم أجهزة رفع الأجسام الثقيلة أو عند دراستهم للبرغي على وجه الخصوص[44] فإننا، على نقيض ذلك، نُعنى عند السجزي بالهندسة البحتة وبتصنيف المنحنيات.

يمكننا رسم الخطوط الكبرى للمشهد الهندسي الجديد على الصورة التالية: نجح سابقو السجزي ومعاصروه بتمييز صف أول من المنحنيات، وهي المنحنيات التي يمكن الحصول عليها هندسياً كقطوع مستوية للمخروط أو الأسطوانة والتي يمكن رسمها بحركة واحدة متصلة. تنجز هذه الحركة – وقد تصوروها هندسياً وليس حركياً – بواسطة آلات أعدت لهذا الغرض، على رأسها "البركار التام". فهي إذاً، وبعبارة أخرى، منحنيات من الدرجة الأولى والثانية. يفقد هذا التمييز وبشكل طبيعي التصنيف السابق صلته بالموضوع: لم تعد الدائرة سوى حالة خاصة من القطع

---

[41] انظر النديم، *الفهرست*، ص. 311.

[42] مخطوطات استانبول، أحمد 3457 الورقات $1^r - 34^r$.

[43] حقق وترجم النص العربي لقسطا بن لوقا B. Carra de Vaux (Paris, reprint Les Belles Lettres 1988) ص. 47.

[44] Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, Œuvre traduite pour le première fois du grec en français avec une introduction et des notes par P. Ver Eecke, Nouveau tirage (Paris, 1982), vol. 2, pp. 877-878.

الناقص وأصبح من الممكن رسم الخط المستقيم بنفس الآلة المستعملة لرسم القطوع. وهكذا فإذا عُرّفت المنحنيات البسيطة بأنها تلك التي يمكن رسمها بحركة وحيدة متصلة وبأنها بالتالي غير مركبة، فإن صف هذه المنحنيات قد اتسع ولم يعد مقتصراً على الخط المستقيم والدائرة.

لكن معيار التصنيف قد تغير بتمييز هذا الصف من المنحنيات من الدرجة الأولى والثانية: إن الخط الفاصل الآن هو بين المنحنيات "القياسية" و"غير القياسية" بمعنى خضوعها أو عدمه لنظرية التناسب، واقتضى الأمر انتظار تطور الهندسة الجبرية ليعطي ديكارت لهذه الأصناف من المنحنيات اسمها الحقيقي: "الهندسية" أي الجبرية، والميكانيكية أي المتعالية..

بقيت المنحنيات غير القياسية أي الميكانيكية، ومثلها الوحيد هو الخط اللولبي المتميز بتاريخه. لقد كان من الضروري على ما يبدو، لتفسير هذه الوحدانية، تقسيم المنحنيات غير القياسية إلى صفين جزئيين. وهنا يدخل السجزي مفهومين جديدين: الترتيب والنظام، ولكنه لم يشرح المعنى المقصود لهذين التعبيرين. وهما كلمتان عاديتان لا ينفع معهما أي بحث معجمي. ومع ذلك يمكننا أن نلاحظ أنه تكلم في رسالته في رسم القطوع عن "الإدارة المنتظمة" للبركار التام لرسم الدائرة – وقد ترجمنا نظام بـــ Regularity – أما الترتيب فقد استعمله في بحثه في نظرية الأعداد بمعنى Order. ومهما يكن الأمر فإننا مضطرون للجوء إلى التخمين.

نعلم أن هذه المنحنيات الميكانيكية تولدها حركتان منفصلتان وغير شبيهتين ببعضهما. واللولب الأسطواني لا يشذ عن هذه القاعدة؛ إلا أنه خلافاً للمنحنيات الميكانيكية الأخرى مرتب ومنتظم. وحين نقرأ صياغة السجزي بإمعان نرى أن هذين المفهومين مطبقان على المنحني وليس على الحركتين. وفوق هذا وذاك فإن نفس هذه الحركات المنتظمة تحدث منحنيات أخرى لا يمكن توصيفها بنفس الطريقة. لقد كان أبلونيوس قد أثبت وحدانية اللولب عندما نص على تطابق أجزاء اللولب متساوية الطول بشكل يحقق تشابه الأجزاء.

وبالمناسبة، فإننا نعلم أن اللولب المرسوم على أسطوانة دورانية هو المنحني المائل الوحيد ذو شعاع الانحناء الثابت وشعاع الفتل الثابت. وهكذا فالسؤال هو عما إذا كانت صياغة أبلونيوس ومفاهيم السجزي وسائل للتعبير عن تفهم كيفي لهذه الخواص التي رآها المؤلفان بدون استيعابها[45]. لقد كان السجزي وهو الشاب المعاصر لابن سهل والقوهي في وضع يتيح له معرفة خاصة مميزة للمنحني: تصنع مماساته زاوية ثابتة مع مولدات الأسطوانة. وهذه بطبيعة الحال خاصة أخرى للترتيب والنظام.

---

[45] In this connection, see the issues raised by Galileo and his predecessors; see Andrea Falcon, *Corpi e movimenti. Il De caelo di Aristotele e la sua fortuna nel mondo antico*, Elenchos XXXIII (Napoli, Bibliopolis, 2001), particularly pp. 158-161.

ومهما يكن من أمر فإن السجزي ينظر في تصنيف المنحنيات الميكانيكية إلى شيئين: عدد وطبيعة الحركات المساهمة في إحداث المنحني؛ وخواص الترتيب والنظام الهندسية التي يبت وجودها أو عدمه في طبيعة المنحني[46].

يجب علينا أخيراً، أن نتذكر أن التصنيف المقترح لا يمكن إلا أن يكون أحد الأصداء التي تعكس ما آلت إليه رياضيات هذا الزمان والحدود التي توقفت عندها. فقد أخذت في الواقع بعض صفاتها المميزة من قيدين ثقافيين. فلم يغب عن الملاحظة أن السجزي لم يشر إلى أي منحن ميكانيكي ماعدا اللولب الأسطواني؛ وهو في هذا ليس استثناءً بأي حال من الأحوال. ويمكننا التأكيد، إلى أن يثبت اكتشاف ما مفاجئ خطأنا، أن رياضيي القرن العاشر ومعهم خلفاءهم لم يبدوا اهتماماً يذكر بالمنحنيات الميكانيكية. وهو أمر لا يمكن تفسيره انطلاقاً من تاريخ نقل مدونات الهندسة الإغريقية وحده. صحيح أن كتاب أرشميدس عن *الحلزونيات* على سبيل المثال لم يترجم إلى العربية، مما يعني بالتالي نقص المعرفة بهذا المنحني عند الرياضيين العرب؛ لكن كتابه الآخر *On Conoids and Spheroids* لم يترجم كذلك، إلا أن هذا لم يمنع الرياضيين من إعادة اكتشاف محتوياته والتقدم فيها. لذا وجب علينا البحث عن تفسير آخر، سيتبدى أمامنا، إن صح، كمظهر آخر لواقع إيجابي بحد ذاته.

لقد بينا أن المتطلبات الجديدة في القرن العاشر وما بعده، في أعمال الرياضيين من أمثال القوهي وغيره، أصبحت هي الضوابط: يجب إعطاء البرهان على الوجود كلما اقتضى الأمر، ويجب أن ترتكز طرق الإنشاء على أساس هندسي متين. وهكذا فإن الجمل الميكانيكية عند ابن سهل أو البركار التام عند القوهي والمعدة لإنشاء القطوع ليست مجرد آلات ولكنها تدين بشكلها إلى نظرية القطوع، إنها التعبير المادي لهذه النظرية. وهكذا فقد قصر الرياضيون اعتباراتهم على المنحنيات التي يملكون من أجلها الوسائل اللازمة لإثبات وجودها وإثبات إجراءات إنشاء مشروعة لها في آن واحد. لنقل ببساطة أنه بفضل هذه المتطلبات استطاع الرياضيون تمييز صف المنحنيات المستوية من الدرجة الأولى والثانية نائين بأنفسهم عن البحث النشيط في المنحنيات الميكانيكية.

أما القيد الثاني للعلم الرياضي في ذلك الزمان فهو مرتبط بهذا الصف من المنحنيات المستوية. لماذا توقف الرياضيون، بعد أن عرّفوا صف "المنحنيات القياسية"، عند الدرجة الأولى والثانية رغم أنهم عالجوا المسائل المجسمة أو التي يمكن ردها إلى هذا النوع من المسائل؟ إنه سؤال مشروع لأن القوهي عمم نظرية تطبيق السطوح على الحجوم. ويمكننا كذلك القول، وإن بشيء من الحذر، إن ما من أحد حاول رسم منحن تكعيبي أو ضعف تربيعي[47]. لقد

---

[46] تعبر الرياضيات الحديثة عن طبيعة اللولب الأسطواني الوحيدة من بين المنحنيات الميكانيكية بالقول أنه المنحني المتعالي الوحيد الذي نستطيع أن ننشأ له زمرة متعدية للانتقالات عليه. إن الخط المستقيم والدائرة من وجهة النظر هذه حالتان مترديتان عن اللولب الأسطواني بميل لامتناه أو يساوي الصفر على الترتيب.

[47] أما فيما يخص المنحنيات التي عرفوها، مثل conchoïd (شبه مخروط) نيقوميديس أو سيسويد ديوقليس (المسمى أيضاً المنحني المتسلق) وأشباه المخروطات الدائرية لبني موسى (حلزون باسكال)، فلم يكن في مقدورهم إنشاؤها إلا بواسطة الإمالات، االمباشرة (في حالة السيسويد) أو المعكوسة.

كان هذا يقتضي تعريف المنحني بمعادلة، أو بتعبير آخر عرض فصل جديد تدرس فيه المنحنيات بواسطة معادلاتها. وهذا الفصل لم يصبح واقعا في أحسن الأحوال إلا في أواخر القرن السابع عشر.

6. ابن عراق والبيروني في البركار التام

غالباً ما استعار القوهي قضايا من كتابه *إحداث النقط على لخطوط على نسب السطوح*[48] لاستعمالها كمقدمات في نظريات أخرى. وهذه هي الحال في كتابه الشهير *صنعة الأصطرلاب بالبرهان* كما في كتابه في *البركار التام*. لكن كتاب الإحداث هذا، الذي كان في صلب مشروع القوهي، قد ضاع الآن. والأخطر أنه قد فقد على ما يبدو بعد بضع عقود على وفاة القوهي: يعترف خليفته البيروني في مراسلته مع معلمه أبي نصر بن عراق أنه لم يتمكن من الحصول على نسخة من هذا الكتاب. ويسأله إضافة إلى ذلك عن حل مسائل ثلاث من كتاب القوهي في البركار التام، تعتمد برمتها على مقدمات مبرهنة في إحداث النقط. وقد أرسل ابن عراق الحلول إلى البيروني وهي الحلول التي ننشرها هنا.

يبين التراسل بين البيروني (362/973–442/1050) ومعلمه ابن عراق اهتمام خلفاء القوهي بالبركار التام وبالرسم المتصل للمنحنيات. ولقد عاد البيروني إلى هذا الموضوع في كتابه *الأصطرلاب*[49]، الذي أصبح مرجعاً واعتمد نظرية القوهي وبكلماته. إن عرضه في هذا الكتاب عسير الفهم، إلا لمن كان على علم بهذا التراسل فهو يبدو له في غاية الوضوح.

لقد شعرنا أنه من الأهمية بمكان ضم هذه المراسلة ودراسة البيروني في الأصطرلاب إلى هذا الفصل، إضافة لعمل السجزي، حتى نتمكن من إعادة بناء بدايات البحث في البركار التام.

1.6. ابن عراق: في مقدمات القوهي

لنذكر أن القوهي فتش في المسألة المتعلقة بالقطع المكافئ عن نقطة K على مقطع معلوم HG تحقق العلاقة

$$\frac{GK^2}{GH \cdot HK} = \frac{D^2}{4\mathscr{A}^2} \qquad (*)$$

حيث D طول *الضلع القائم* المعلوم و$\mathscr{A}$ طول محور البركار المعلوم أيضاً.

ويفتش ابن عراق عن نقطة C على المقطع AB بحيث تكون

$$\frac{AC^2}{AB \cdot BC} = k \qquad \text{نسبة معلومة.}$$

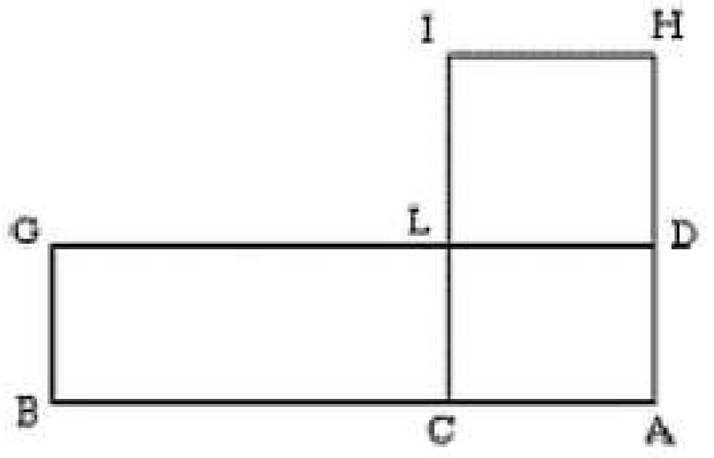
تقابل النقاط H، K، G عند القوهي على الترتيب النقاط B، C، A.

---

[48] هذه الخطوط ليست سوى القطوع المخروطية.

[49] مخطوطات ليدن Or. 591 *كتاب استعياب الوجوه الممكنة في صنعة الأصطرلاب*.

يأخذ ابن عراق نقطة D على العمود المقام من A على AB ($DA \perp AB$) تحقق النسبة $\frac{DA}{AB} = k$ [شكل. 45]. نمدد AD إلى النقطة H لإنشاء مستطيل طوله AH وسطحه مساو لسطح المستطيل ADGB، بحيث يكون الجزء المنشأ على DH مربعاً DHIL. يقطع ضلع المستطيل الموازي لـــ AH المستقيم AB في النقطة C وهي النقطة المطلوبة.



الشكل. 45

لدينا من المساواة

سطح (HC) = سطح (ADGB)

سطح (LB) = سطح (HL) = AC^2

لكن $$\frac{\text{سطح }(LB)}{AB \cdot BC} = \frac{LC}{AB} \cdot \frac{LG}{BC} = \frac{AD}{AB} = k$$

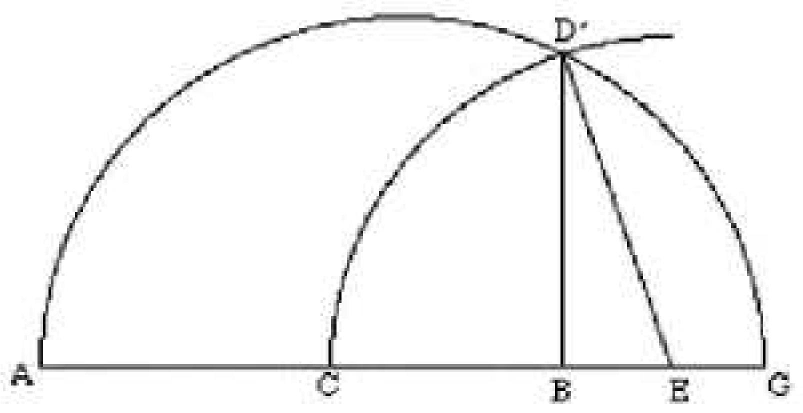
وأخيراً $$\frac{AC^2}{AB \cdot BC} = k$$

وهي النقطة المطلوبة.

ثم يقوم ابن عراق بإنشاء النقطة C بواسطة المسطرة والبركار (شكل. 46). نأخذ على المستقيم AB نقطة G خلف B بحيث يكون $\frac{BG}{BA} = k$. لتكن E وسط BG. نأخذ على العمود المقام على AB في النقطة B نقطة 'D بحيث يكون $D'B^2 = AB \cdot BG$ ونأخذ النقطة C بحيث يكون $EC = ED'$.

يسهل التحقق أن C هي النقطة المطلوبة. لنلاحظ فقط أن ترتيب الحروف قد تبدل في الشكل الثاني وحلت A محل B لتصبح العلاقة

$$\frac{CB^2}{AB \cdot AC} = k$$



الشكل. 46

إذا سمينا الأطوال $AB = b$ و $x = BC$، فإن إنشاء C يبين لنا أن x تحقق المعادلة التالية $x^2 + kbx - kb^2 = 0$ وهي نفس المعادلة أعلاه. لنلاحظ أيضاً أن $EC = ED' = \frac{b}{2}\sqrt{k(k+4)}$.

تعالج المسألة الثانية القطع الزائد. يأخذ القوهي مستقيماً معلوماً GH ونقطة عليه I خلف H تحقق العلاقة $\frac{c}{d} = \frac{D}{BC} = \frac{GH}{HI}$، حيث c *الضلع القائم* و d القطر، ويبحث عن النقطة K بحيث يكون

$$\frac{KH \cdot KG}{KI \cdot IH} = \frac{4\mathscr{A}^2}{BC^2}$$

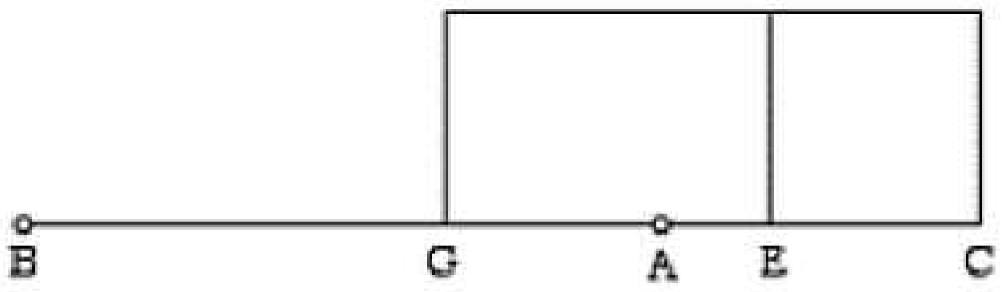
إن العناصر المعلومة عند ابن عراق هي المقطع AB ونقطة G عليه، وضعها غير محدد، ويبحث عن نقطة C عليه بحيث تكون

$$\frac{CG \cdot CA}{CB \cdot BG} = k \qquad \text{نسبة معلومة}$$

تقابل النقاط (I، H، G، K) عند القوهي النقاط (B، G، A، C) على الترتيب عند ابن عراق.

يأخذ ابن عراق نقطة E خلف A تحقق $\frac{AE}{BG} = k$ (الشكل. 47). وينشئ على GE مستطيلاً يمدد ضلعه GE إلى C لإنشاء مربع ضلعه EC، وبحيث يحقق السطح GC . CE العلاقة

$$\frac{GC \cdot CE}{BG^2} = k$$



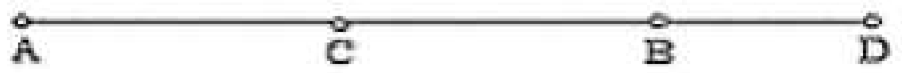
الشكل. 47

إن C هي النقطة المطلوبة، ذلك أن لدينا

من جهة، $\frac{AE}{BG} = \frac{CG \cdot AE}{CG \cdot BG} = k$ ، ومن جهة أخرى، $\frac{CG \cdot CE}{BG^2} = k$

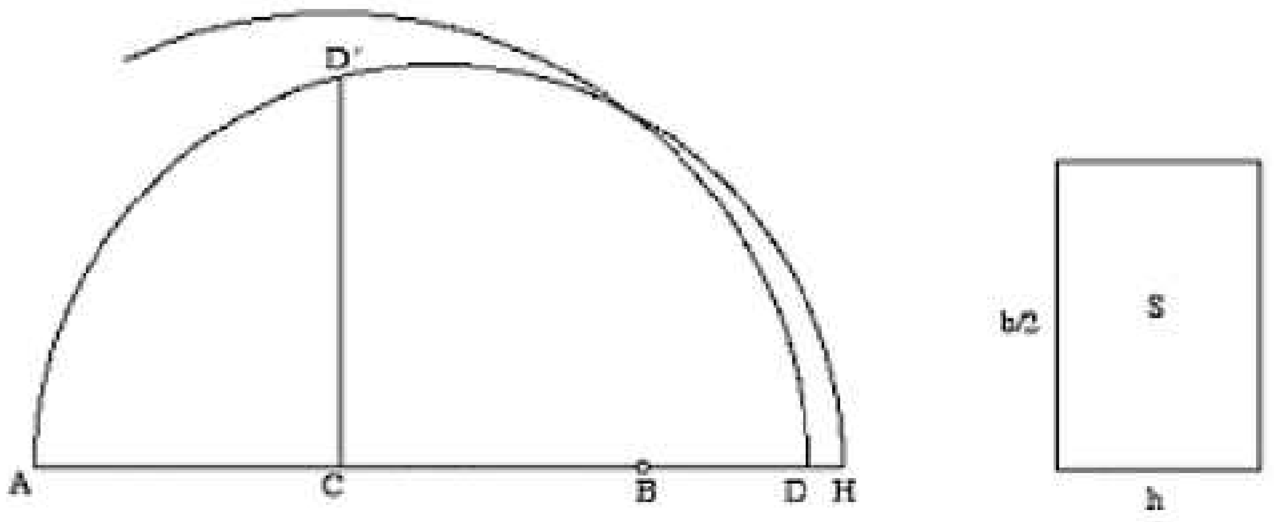
وبالجمع نحصل على $CG(AE + EC) = k\, BG(BG + GC)$ وهي العلاقة المطلوبة.

ويقوم ابن عراق بإنشاء النقطة C، وكما في الحالة السابقة يغير الرموز. الهدف هو إنشاء مستطيل على AB ذي الطول b والممدد إلى D بالطول x يكون سطحه S معلوماً ويزيد على القسم المنشئ على AB بمربع. أي أننا نريد أن يكون $(b + x)x = S$ و $BD = x$. إن النقطة D الواقعة على مسافة y من C وسط AB والمحققة للعلاقة $CD^2 = y^2 = \frac{1}{4}b^2 + S$ هي النقطة المطلوبة لأن $y = \frac{b}{2} + x$ و $y^2 = \frac{1}{4}b^2 + S$.



الشكل. 48.1

لإنشاء هذا الطول CD ننشئ أولاً 'CD الذي هو متوسط التناسب بين CA و CH، حيث CH ارتفاع المستطيل الذي قاعدته CA وسطحه مساو لـ S.



الشكل. 48.2

ونأخذ طولاً مساوياً لـ 'AD على CB فنحصل على النقطة D المطلوبة:

$$AD'^2 = \frac{b^2}{4} + CD'^2 = \frac{b^2}{4} + CH \cdot CA = \frac{b^2}{4} + S$$

الحالة الثالثة والأخيرة هي حالة القطع الناقص. يأخذ القوهي مقطعاً معلوماً HG عليه نقطة I تحقق $\frac{GH}{HI} = \frac{D}{BC} = \frac{c}{d}$ حيث c *الضلع القائم* و d القطر. ويبحث على المقطع GI عن نقطة K بحيث يكون

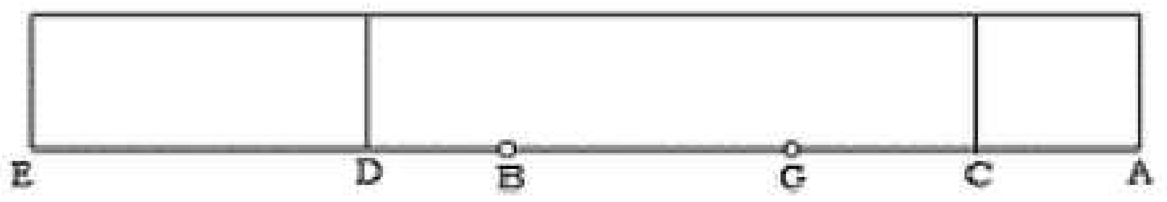
$$\frac{KH \cdot KG}{KI \cdot IH} = \frac{4\mathscr{A}^2}{BC^2}$$

إن العناصر المعلومة عند ابن عراق هي المقطع AB ونقطة معلومة عليه G بدون أن يحدد موضعها؛ ويبحث عن نقطة C على AB تحقق

$$\frac{CB \cdot CG}{AC \cdot AB} = k \qquad \text{نسبة معلومة}$$

فإذا فرضنا أن النقطة G على AB تحقق $\frac{BG}{BA} = \frac{c}{d}$ فإن نقط القوهي (K، I، G، H) تقابل بالترتيب النقط (C، A، G، B) عند ابن عراق.

يحدد ابن عراق نقطة D على AB على امتداد B تحقق $\frac{DB}{BA} = k$، ونقطة E خلف D تحقق DE = AG (الشكل. 49). نأخذ على EA سطحاً مستطيلاً بحيث يساوي السطح الحاصل منقوصاً من مربع الجداء AG . AB. ليكن هذا السطح المنقوص EC . CA. إن النقطة C هي النقطة المطلوبة.



الشكل. 49

لدينا إذاً

$$EC . CA = AG . AB$$

و

$$EC . CA - DE . AC = AG . AB - AG . AC$$

ومنه

$$AC . CD = AG . BC$$

وبطرح $AC . BC$ من طرفي المساواة

$$AC . BD = CG . BC$$

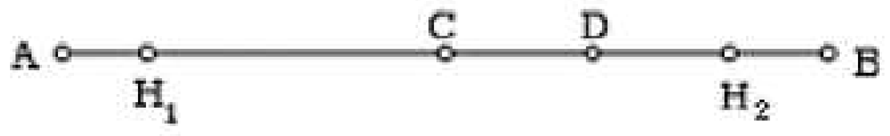
ولما كان $DB = k . BA$ فإن C هي النقطة المطلوبة.

يقوم ابن عراق بعد ذلك بإنشاء C مبتدئاً بإنشاء مستطيل على AB الذي طوله b بحيث يساوي سطحه منقوصاً من مربع x^2 قيمة معطاة S. فالمطلوب إذاً إيجاد نقطة H على AB تحقق $AH . HB = S$ حيث $AH = x$. لدينا إذاً $x(b - x) = S$. لتكن C وسط AB، نأخذ على AB نقطة D تحقق $CD^2 = S$، لدينا $BD = CB - CD = \frac{b}{2} - \sqrt{S}$. نعرف DG بالعلاقة

$$DG^2 = BD . AD = \left(\frac{b}{2} - \sqrt{S}\right)\left(\frac{b}{2} + \sqrt{S}\right) = \frac{b^2}{4} - S$$

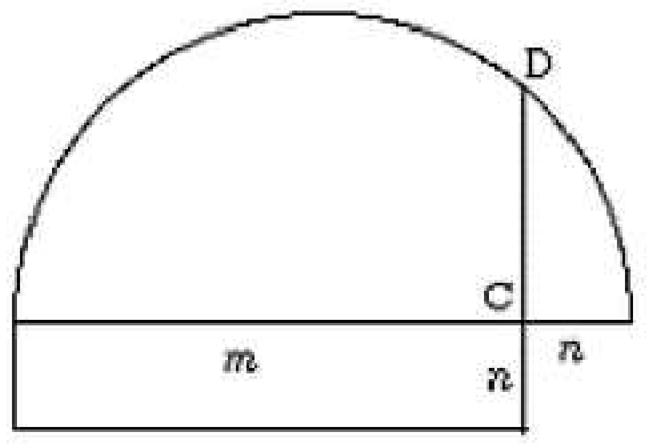
إذا أخذنا على يسار ويمين C نقطتين H_1 و H_2 بحيث يكون $CH_1 = CH_2 = DG$، فإن هاتين النقطتين تحققان الشرط $x(b - x) = S$ لأن حل هذه المعادلة هو

$$AH_{1,2} = AC \quad CH_{1,2} = \frac{b}{2} \quad \sqrt{\frac{b^2}{4} - S} \quad \text{لأن} \quad x = \frac{b}{2} \quad \sqrt{\frac{b^2}{4} - S}$$

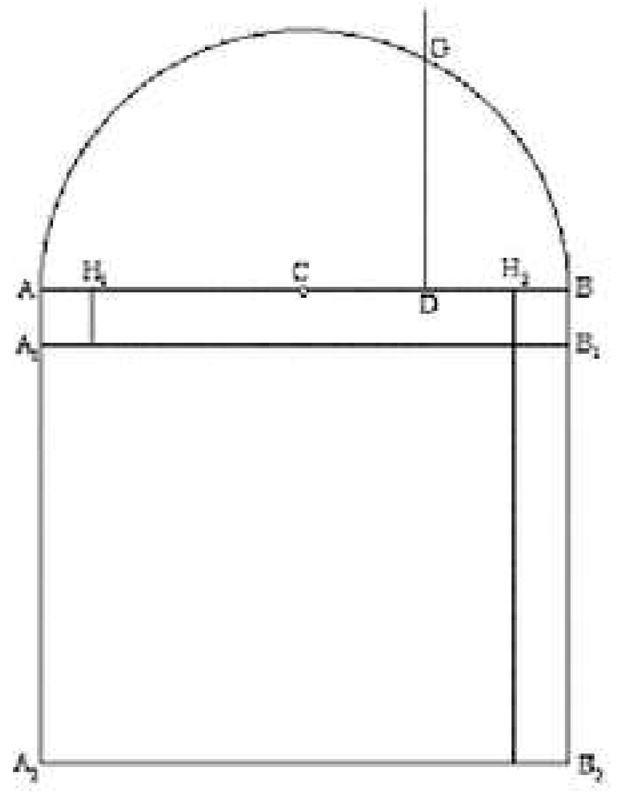


الشكل. 50

وللمسألة حل إذاً إذا كان $S < \frac{b^2}{4}$. أما إذا كان $S = \frac{b^2}{4}$ فالحل وحيد وتنطبق H على C.



الشكل. 51



الشكل. 52

يجب علينا إذاً إنشاء الطولين CD و DG بالمسطرة والبركار. إذا كان ضلعا المستطيل هما m و n ($S = m \cdot n$) فإن CD هي متوسط التناسب بينهما. نأخذ على AB الطول CD. نرسم للحصول على النقطة G المحققة للعلاقة $DG^2 = DB \cdot AD$ دائرة قطرها AB، ثم نحدد عليه النقطتين H_1 و H_2 بحيث يكون $CH_1 = CH_2 = DG$، ونحصل إذاً على حلين: المستطيل ABB_1A_1 منقوصاً منه المربع A_1H_1 وسطح المستطيل الحاصل (H_1B_1) هو S؛ أو المستطيل ABB_2A_2 منقوصاً منه المربع A_2H_2 وسطح المستطيل الحاصل (H_2B_2) هو S.

2.6. *البيروني: نظرية القوهي في البركار التام*

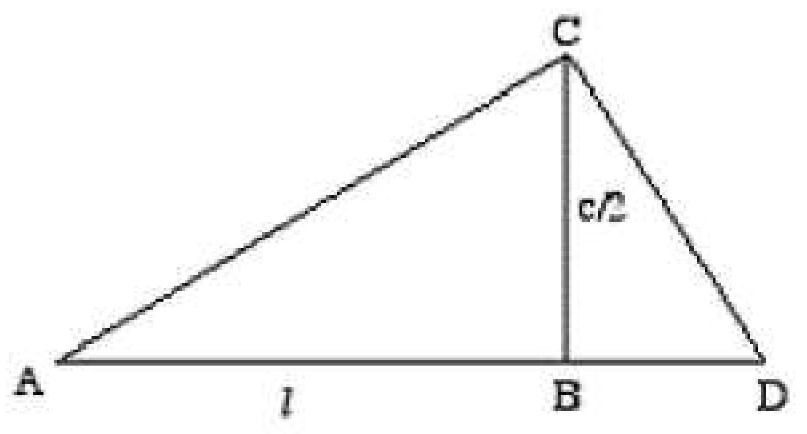
أثارت بعض عناصر إسهامات القوهي اهتمام البيروني في كتابه *الأصطرلاب* وذلك تحت عنوان ذي مغزى "حكاية البركار التام وصفة حركاته": وصف الآلة ومركباتها وشرح كيفية عملها وأخيراً كيفية القيام برسم القطوع المخروطية الثلاثة وإثبات خواصها بدقة تامة. إن هذا الجزء الأخير هو الذي يهمنا هنا ولذا سنقوم بفحص كل قطع من هذه القطوع.

1.2.6. *القطع المكافئ*

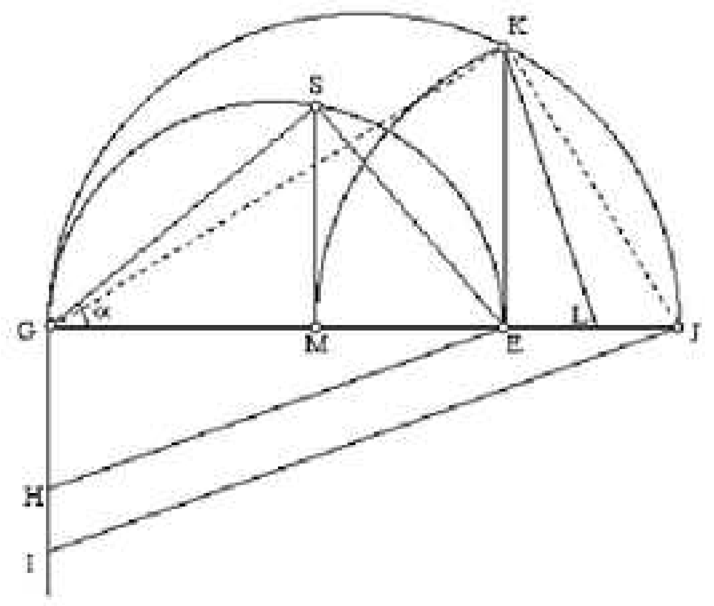
ليكن معلوماً ℓ، طول محور البركار، و c، *الضلع القائم* للقطع الذي نريد رسمه.

يبدأ البيروني بإنشاء مساعد لمثلث قائم الزاوية ACD ارتفاعه CB، B معينة بالطول $AB = \ell$ و C بالطول $CB = c/2$. و CD عمودي على CA.

لدينا $$BD \cdot BA = \frac{c^2}{4}$$ و $$\frac{BD}{BA} = \frac{c^2}{4\ell^2}$$



الشكل. 54



الشكل. 53

ثم نخط المستقيم GE بطول لا على التعيين، ونأخذ على مستقيم آخر مار بـــ G – على أي زاوية اتفقت – النقطتين H و I مع $GH = \ell$ و $HI = \dfrac{c^2}{4\ell}$. نخط HE ونرسم من I موازياً له $IJ \parallel EH$. لدينا

$$\frac{EJ}{EG} = \frac{HI}{HG} = \frac{c^2}{4\ell^2} = \frac{BD}{BA}$$

نرسم نصف دائــرة على GJ ونقيم من E عموداً على القطر يقطع الدائرة في K. فالمثلثان قائما الزاوية GKJ (شكل. 54) و ACD (شكل. 53) متشابهان. لتكن k نسبة التشابه. لدينا

$$EJ = k \,.\, BD = k \cdot \frac{c^2}{4\ell} \qquad \text{و} \qquad GE = k \,.\, AB = k \,.\, \ell$$

لتكن L وسط EJ؛ لدينا

$$LK^2 = EK^2 + EL^2 = k^2 \,.\, \frac{c^2}{4}\left(1 + \frac{c^2}{16\ell^2}\right)$$

لتكن M نقطة على GJ تحقق

$$EM = k \,.\, \frac{c}{2}\left(\sqrt{\frac{c^2}{16\ell^2} + 1} - \frac{c}{4\ell}\right) \qquad \text{و} \qquad LM = k \,.\, \frac{c}{2}\sqrt{\frac{c^2}{16\ell^2} + 1}$$

نرسم نصف دائرة قطرها GE، ولتكن S نقطة لقاء العمود المقام من M مع محيط الدائرة ولتكن الزاوية $S\hat{G}M = \alpha$. لدينا

$$\sin^2\alpha = \frac{ES^2}{EG^2} = \frac{EM \,.\, EG}{EG^2} = \frac{EM}{EG}$$

ومنه

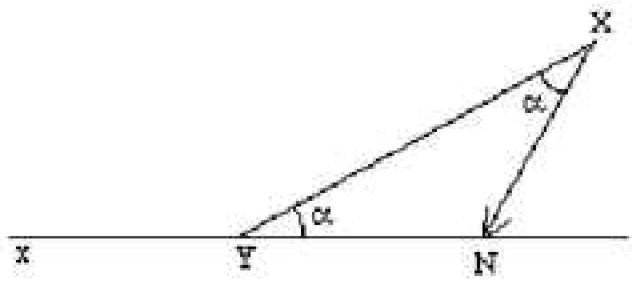
$$\sin^2\alpha = \frac{c}{2\ell}\left(\sqrt{\frac{c^2}{16\ell^2} + 1} - \frac{c}{4\ell}\right) \qquad (1)$$

ويمكننا الحصول على هذه النتيجة مباشرة من العلاقة التي برهنها القوهي والتي يمكن كتابتها على الشكل

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{c^2}{16\ell^2} + 1} - \frac{c}{4\ell} \qquad (2)$$

يعطينا حساب $\sin^2\alpha$ انطلاقاً من (2) العلاقة (1).

نرسم القطع المكافئ ذا المحور Nx والضلع القائم c، نأخذ محور البركار $XY = \ell$ ليصنع زاوية حادة في الرأس والمركز هي $S\hat{G}M = \alpha$. ونضع رأس القلم الراسم في N، رأس القطع المكافئ، و Nx قاعدة البركار. يرسم رأس القلم الراسم في دورانه حول المحور القطع المكافئ المطلوب.



الشكل. 55

لم يشرح البيروني كيف توصل إلى المساواة (1). لذا وجب علينا معرفة الطريقة التي اتبعها. إنها مقدمة القوهي التي برهنها في كتابه المفقود *إحداث النقط* والتي أعاد ابن عراق برهانها بناء على طلب البيروني. المطلوب، في الرموز التي استعملها ابن عراق، تعيين نقطة C على مقطع معلوم AB تحقق العلاقة

$$\frac{AC^2}{AB \cdot BC} = k = \frac{c^2}{4\ell^2}$$

رأينا أن ابن عراق يأخذ على AB نقطة G خلف B تحقق $k = \frac{BG}{BA}$، ونقطة E وسط BG ويستخلص إنشاء L.

أما في إنشاء البيروني فنبدأ بالمقطع EG وعليه J التي تحقق $k = \frac{EJ}{GE}$، ثم نأخذ وسط JE ونستخلص إنشاء النقطة M؛ ولدينا في تعبير ابن عراق

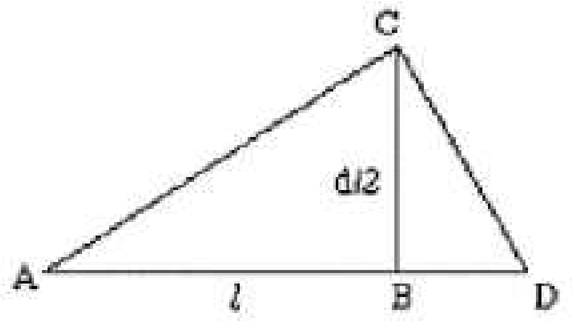
$$\frac{GM^2}{EG \cdot EM} = k = \frac{c^2}{4\ell^2}$$

تقابل النقطة M التي أنشأناها على EG النقطة K في عبارة القوهي (*). لم يتعرض البيروني لخاصة النقطة M ولكنه استعملها في إنشائه لزاوية رأس البركار α. لنذكر مع ذلك أن البيروني يرجع إلى كتاب القوهي ومنذ البداية.

2.2.6. *القطع الزائد*

ليكن ℓ طول محور البركار، d طول القطر المجانب للقطع الزائد المراد رسمه، $d = 2a$ و c *ضلعه القائم*؛ وكلها معلومة. يبدأ البيروني كما في الحالة السابقة بإنشاء مثلث مساعد قائم الزاوية ACD، ارتفاعه $a = BC$ و $AB = \ell$. لدينا إذاً $BC^2 = AB \cdot BD$ و

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\ell^2}{a^2} \quad \text{و} \quad BD = \frac{a^2}{\ell}$$



الشكل. 56

لنلاحظ أن *الضلع القائم* c لا يلعب أي دور في الإنشاء المساعد ولكنه ضروري في المرحلة القادمة لتعيين الزاويتين α و β.

نضع على خط مستقيم ما النقاط A، B، C، D بحيث يكون $AB = d = 2a$ و $BC = AD = c = 2p$؛ لدينا $DC = AB = 2a$. نأخذ على مستقيم كيفما اتفق مار من D النقطتين E و G بحيث $DE = \frac{a^2}{\ell}$ و $EG = \ell$، وبالتالي $\frac{GE}{DE} = \frac{\ell^2}{a^2}$.

نرسم بعد ذلك $EC \parallel GI$ ومنه $\frac{GE}{DE} = \frac{IC}{CD}$، ومنه $IC = \frac{2\ell^2}{a}$. نرسم دائرة قطرها DI ونرسم $DI \perp CH$؛ لدينا

$$CH^2 = CD \,.\, CI = 4\ell^2$$

ولدينا أيضاً

$$BJ = \frac{1}{2}\, BI = p + \frac{\ell^2}{a} \quad \text{و} \quad BI = BC + CI = 2p + \frac{2\ell^2}{a}$$

ومنه

$$CJ = \frac{\ell^2}{a} - p$$

ثم إن

$$JH^2 = CJ^2 + CH^2 = \frac{(\ell^2 - ap)^2 + 4a^2\ell^2}{a^2}$$

نأخذ على AB نقطة K تحقق $JK = JH$؛ لذا

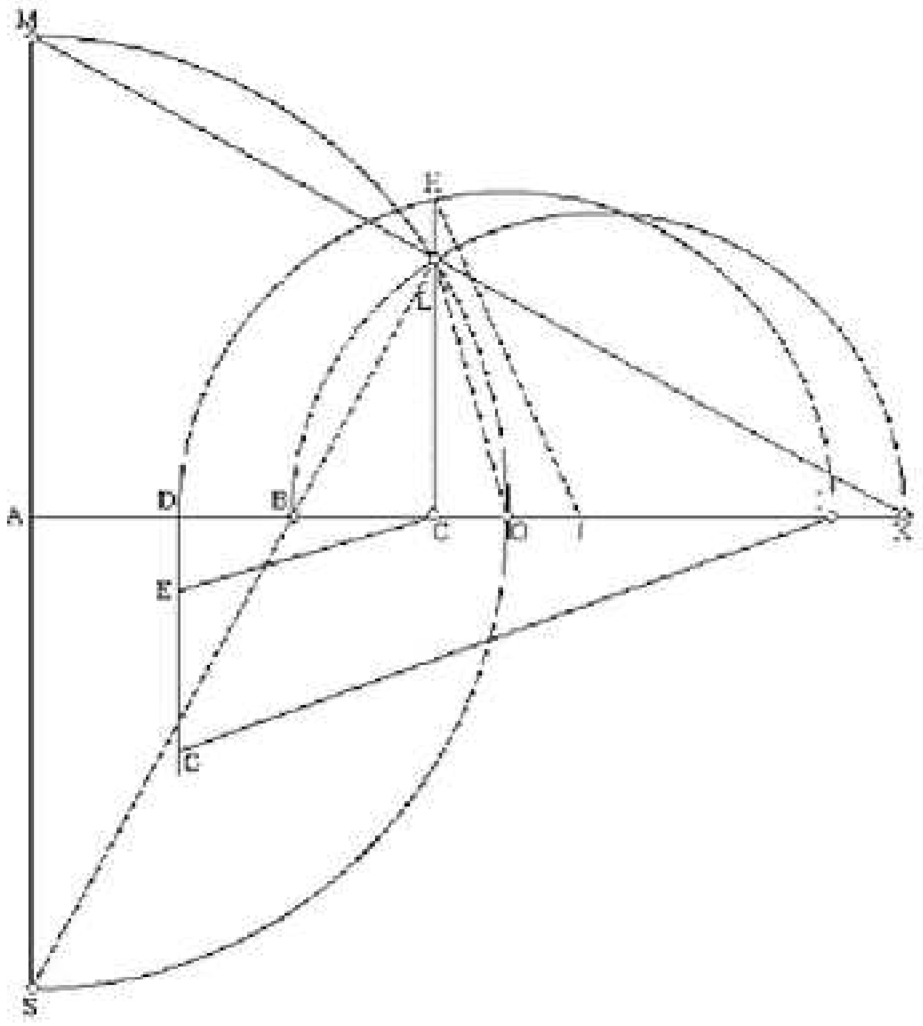
$$CK = CJ + JK = \frac{\ell^2 - ap}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{\left(\ell^2 - ap\right)^2 + 4a^2\ell^2}$$

لنرمز x للطول CK

$$x = CK = \frac{1}{a}\left[\ell^2 - ap + \sqrt{\left(\ell^2 - ap\right)^2 + 4a^2\ell^2}\right]$$

لتكن L نقطة تقاطع CH مع الدائرة ذات القطر BK. لدينا

$$CL^2 = CB \cdot CK = 2px$$



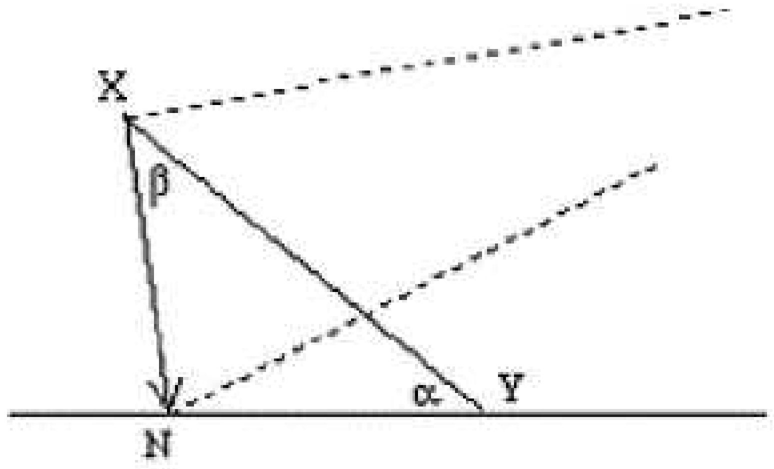
الشكل. 57

يلقي العمود المقام على AB في A المستقيم KL في M، كما يلقي المستقيم LB في S. تمر الدائرة التي قطرها MS بالنقطة L وتلقى المستقيم AB في O. وهكذا نحصل على زوايتي البركار: زاوية الرأس $\beta = O\hat{L}K$ وزاوية المركز $\alpha = L\hat{K}O$. لدينا

$$\sin^2\beta = \frac{OK^2}{OL^2} \quad \sin^2\alpha \text{ و } \sin^2\alpha = \frac{CL^2}{LK^2} = \frac{CB \cdot CK}{KC \cdot KB} = \frac{CB}{KB} = \frac{2p}{2p+x} \qquad (3)$$

لنلاحظ أن إنشاء النقطة K هو الأساس. إذ إننا انطلاقاً من هذه النقطة نحصل على O ومن ثم على المثلث KLO الذي يحدد عناصر البركار.

لرسم القطع الزائد الذي رأسه N وقطره $d = 2a$ و*ضلعه القائم* $c = 2p$، نأخذ محور البركار $XY = \ell$ وزاوية الرأس β في X و α في Y. ونضع قاعدة البركار على المحور Nx للقطع الزائد المطلوب ورأس قلم الرسم في N. يتولد القطع بدوران القلم الراسم حول المحور XY.

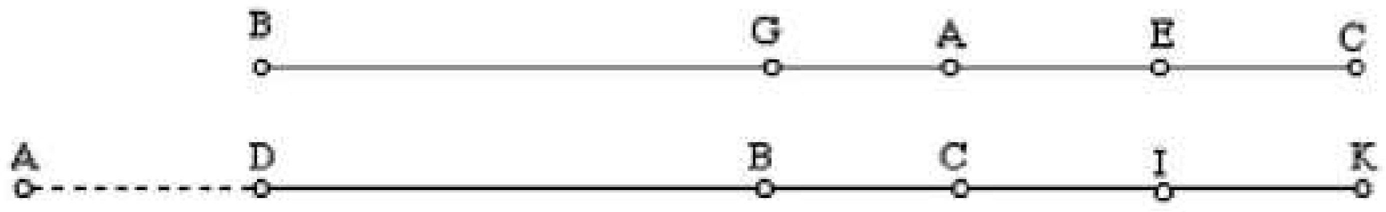


الشكل. 58

لم يشرح البيروني هنا، على غرار حالة القطع المكافئ، كيف تمكن من الوصول إلى العلاقة (3)؛ كما أنه استعمل هنا أيضاً مقدمة القوهي التي أعاد برهانها ابن عراق. يأخذ هذا الأخير كما رأينا نقطة G على المقطع AB ويفتش عن نقطة C خلف A تحقق $\frac{CG \cdot CA}{BC \cdot BG} = k$؛ فيأخذ النقطة E خلف A بحيث $\frac{AE}{BG} = k$ ويبرهن أن $\frac{CG \cdot CE}{BG^2} = k$

يأخذ البيروني حل ابن عراق ويقابل قسمة نقاطه (B، G، A، E، C) بالقسمة (D، B، C، I، K) ويجعل A خلف D. يجب، لتحقيق المقابلة بين هاتين القسمتين، أن نأخذ في حالة البيروني النسبة

$$\frac{CI}{DC} = \frac{\ell^2}{a^2}$$



الشكل. 59

إن $$\frac{CI}{DB} = \frac{CI}{CD} \cdot \frac{CD}{DB} = \frac{\ell^2}{a(a-p)}$$

ستناظر النقطة K النقطة C إذا حققت

$$\frac{KB \cdot KI}{DB^2} = \frac{\ell^2}{a(a-p)} \qquad (4)$$

لكن $$KB \cdot KI = (KC + CB)(KC - CI) = (x + 2p)\left(x - \frac{2\ell^2}{a}\right) = 4\ell^2 \frac{a - p}{a}$$

وهذا يعطي: $$\frac{KB \cdot KI}{DB^2} = \frac{\ell^2}{a(a-p)}$$

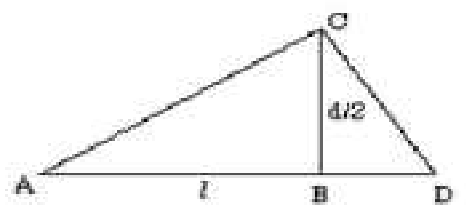
وهكذا يتحقق التناظر.

3.2.6. القطع الناقص

ليكن معلوماً طول محور البركار ℓ وطول القطر المجانب للقطع الناقص $d = 2a$ وكذا *الضلع القائم* 2p. والمطلوب رسم هذا القطع.

يبدأ البيروني، كما في الحالتين السابقتين، بإنشاء مثلث مساعد قائم الزاوية ACD (الشكل. 60) ارتفاعه CB = a و $AB = \ell$. لدينا $BC^2 = AB . BD$، وبالتالي

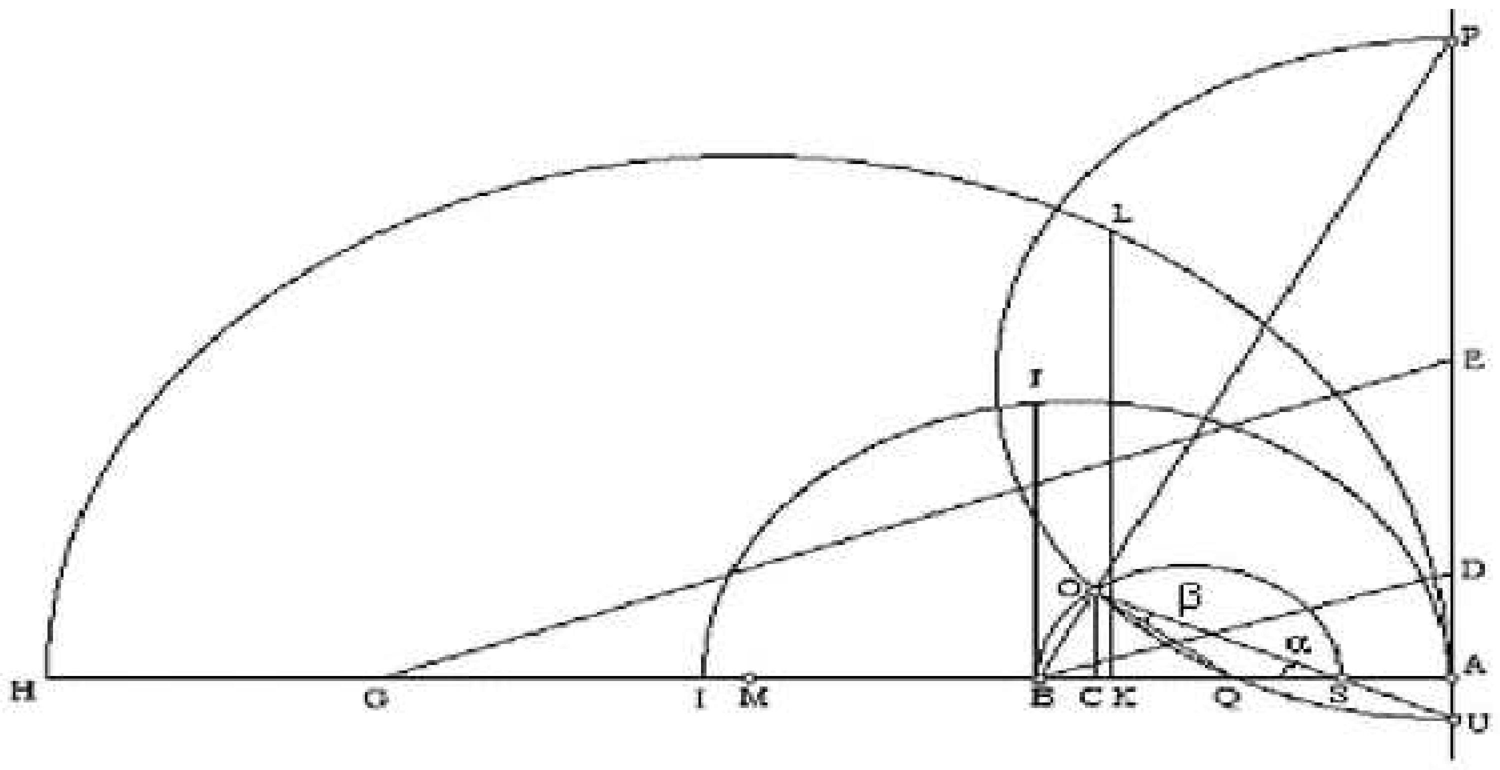
$$\frac{AB}{BD} = \frac{\ell^2}{a^2} \qquad \text{و} \qquad BD = \frac{a^2}{\ell}$$



الشكل. 60

يشرع البيروني بعد ذلك بإنشاء يقوده لتحديد الزاويتين α و β اللازمتين لتعيين وضع البركار الراسم للقطع المطلوب.

يأخذ على مستقيم ما النقط A، B، C، I بحيث $AB = 2a$، $BC = 2p$ و $AC = 2(a - p) = BI$ (الشكل. 61). نأخذ على مستقيم آخر عمودي في A على AB النقطتين D و E بحيث يكون $AD = \frac{a^2}{\ell}$ و $DE = \ell$.



الشكل. 61

لدينا

$$\frac{AD}{DE} = \frac{a^2}{\ell^2}$$

ثم نرسم $EG \parallel DE$ فنحصل على

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BG} = \frac{a^2}{\ell^2}$$

ومنه

$$BG = \frac{2\ell^2}{a}$$

نأخذ على يسار G نقطة H بحيث يكون $GH = AC = 2(a - p)$

لدينا
$$AH = AB + BG + GH$$

و
$$AH = 2a + \frac{2\ell^2}{a} + 2(a - p)$$

لتكن M وسط AH؛ لدينا

$$AM = 2a + \frac{\ell^2}{a} - p$$

ثم نرسم نصف الدائرة ذات القطر AI ونقيم من B العمود على AB الذي يلقي الدائرة في J؛ لدينا

$$BJ^2 = BI \,.\, BA = 4a(a - p)$$

لتكن K نقطة على AH تحددها العلاقة $MK = BJ$

إذاً
$$MK = 2\sqrt{a(a - p)}$$

نرسم نصف الدائرة ذات القطر AH و $KL \perp AH$ ؛ لدينا

$$KL^2 = AK \cdot KH = MA^2 - MK^2 = \left(2a + \frac{\ell^2}{a} - p\right)^2 - 4a(a - p)$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\left(\ell^2 - ap\right)^2 + 4a^2\ell^2\right]$$

نعرف النقطة S بالعلاقة $MS = KL$، فنحصل على

$$CS = MS - MC = KL - (MA - AC)$$

ومنه
$$CS = \frac{1}{a}\sqrt{\left(\ell^2 - ap\right)^2 + 4a^2\ell^2} - \left(\frac{\ell^2}{a} + p\right)$$

لنرمز للطول CS بـــ x، ولنرسم الدائرة ذات القطر BS وعلى محيطها النقطة O التي يعينها $AB \perp CO$. نرسم الخط BO، والخط OS اللذين يقطعا الخط العمودي في A على AB في النقطتين P و U على

الترتيب. الزاوية POU قائمة (لأن BOS قائمة). وتمر الدائرة التي قطرها PU في النقطة O وتقطع AB في Q.

إن الزاوية $S\hat{O}B = \beta$ هي الزاوية في الرأس والزاوية $Q\hat{S}O = \alpha$ زاوية المركز. لدينا

$$\sin^2\alpha = \frac{OC^2}{OS^2} = \frac{CB\,.\,CS}{SB\,.\,CS} = \frac{CB}{BC + CS} = \frac{2p}{2p + x} \qquad (1)$$

و

$$\sin^2\beta = \frac{SQ^2}{OQ^2}\sin^2\alpha \qquad (2)$$

علينا هنا أيضاً، كما في الحالتين السابقتين، الرجوع إلى مقدمة القوهي المعاد برهانها من قبل ابن عراق لفهم ما فعله البيروني للوصول إلى العلاقتين (1) و(2).

إن العناصر المعلومة في مقابلة ابن عراق هي المقطع [AB] ونقطة G عليه. ونريد إيجاد C على AB تحقق العلاقة

$$\frac{BC\,.\,CG}{AC\,.\,AB} = k \qquad \text{نسبة معلومة}$$

نأخذ على AB النقطتين D و E خلف B، بحيث يتحقق $\frac{DB}{BA} = k$ و $DE = AG$.

يستبدل البيروني في نصه القسمة (E، D، B، G، A) بـ (H، G، B، C، A) والمقابلة نقطة بنقطة. إلا أن ابن عراق يغير الرموز عندما ينتقل إلى الإنشاء الهندسي، فـ A تصبح B وE تصبح A ويرمز بـ C إلى وسط EA؛ والنقطة C التي نريد إيجادها سميت H وهكذا تعطينا الأشكال:

ابن عراق	البيروني
BA ووسطه C	AH ووسطه M
دائرة قطرها AB	دائرة قطرها AH
D بحيث $S = CD^2$ سطح معلوم	K بحيث $d(d - c) = MK^2$
$AB \perp DG$	$AH \perp KL$
$DG = CH$ تعطينا النقطة H	$LK = MS$ تعطينا النقطة S

إن النقطة التي نبحث عنها هي H عند ابن عراق، و S عند البيروني هي النقطة التي تتيح لنا إنشاء النقطتين O وQ، وفي نهاية المطاف، تحديد زاويتي البركار α و β. والنقطتان H وS المنشأتان على هذا النحو متناظرتان في قسمة ابن عراق (B، H، D، C، A) وقسمة البيروني (A، S، K، M، H).

وهكذا أنشأ البيروني انطلاقاً من براهين ابن عراق لمقدمات القوهي، مستعيناً بالمسطرة والبركار أشكال البركار التام بالزاويتين α و β.

7. كمال الدين بن يونس وتلامذته: في البركار التام

1.7. مدخـــــل

فتحت أعمال ابن سهل والقوهي في الرسم المتصل وفي الآلات اللازمة له آفاقاً جديدة في هندسة القطوع المخروطية. فدخلت فيها دراسة الخواص الانعكاسية لكل القطوع المخروطية، والإنشاء الفعلي لحلول مسائل هندسية تستعمل القطوع المخروطية وإنشاء القطوع بالذات. كما دخل نوع جديد من المسائل: إنشاء الزاويتين α و β – حيث α نصف زاوية رأس المخروط و β زاوية محور المخروط مع المستوي القاطع – عندما يكون معلوم لدينا المحور العرضاني و*الضلع القائم* وطول محور البركار. فلا غرابة والحال هذه أن ينخرط رياضيون عديدون في العمل في هذا المجال الجديد، من أمثال السجزي معاصرهما، أو من خلفائهما كالبيروني وابن الهيثم، ولاشك آخرون أيضاً. وعلى كل حال فإننا نشهد في أعمال هؤلاء الرياضيين نشوء تقليد جديد في البحث وبناء جزء هام من مجال جديد في الهندسة. ولكن إلى متى استمر مجال البحث هذا وإلى أين امتدت تشعباته؟ وكيف كانت خصوبته أو بتعبير آخر قوة الإبداع فيه؟ علينا قبل الإجابة عن هذه الأسئلة أن نبدأ بدراسة هذا التقليد الناشئ لمعرفة ما إذا كان قد استمر بعد هذين الجيلين الأولين من القرن العاشر ومنتصف القرن الحادي عشر أم أن البحث في هذا المجال على عكس ذلك، قد اُستنفد. هذا هو السؤال الذي يعنينا هنا.

لقد أجاب ف. فوبك جزئياً عن التساؤلات التي طرحناها دون أن يعيها تماماً إن صح القول. ففي دراسة غير مكتملة نشرت بعد وفاته، قام مؤرخ القرن التاسع عشر هذا بنشر وترجمة رسالة للمدعو محمد بن الحسين في البركار التام. إن ما نعرفه عن هذا المؤلف هـــو بالأساس ما يعلمنا به هو نفسه في مقدمة عمله: كان أحد تلاميذ كمال الدين بن يونس (551/1156–639/1242) في الموصل، انضم إلى بلاط صلاح الدين ورسالته في البركار التام مهداة إليه. كان ابن الحسين يريد تحسين الطريقة غير الملائمة لرسم القطوع المخروطية بالنقط ولذا أخذ على عاتقه في كتابه دراسة نظرية البركار التام وكيفية استعماله. وإليكم ما يقوله بهذا الخصوص:

> وكانت الطرق الموضوعة لتحصيل هذه القطوع الثلاثة في البسيط لا تخرج عن اتخاذ نقط متقاربة على محيطاتها يوصل فيما بينها بالحذق الذي يجعل الوصولات على وضع واحد متشابه يسلم معه محيطات هذه القطوع عن التضريس والتفاوت المحسوسين، ولعمري وإن وجد لصانع ما من الملكة ما يقوم بهذا المطلوب، فإن التفاوت الواقع فيه لا يكاد يضمنه الحس ولا يدركه الحذق ولا يعصم في إثباته عن الزلل، على أن هذه الأمور في حيز المعقولات بالقوة يبعد تحصيلها بالفعل على ما هي به في الذهن. لكن كلما قرب ما بالفعل مما بالقوة كان أولى بالسلوك لا سيما هذه الأمور اليقينية، فإن رسم دائرة بالبركار أقرب إلى الدائرة الحقيقية من بغيره[50].

تكفي هذه الرسالة وحدها لإثبات بقاء التقليد الجديد الذي بدأه ابن سهل والقوهي حياً قوياً في القرن الثاني عشر. إلا أن ابن الحسين يعطينا معلومات إضافية عن عصره؛ فهو يشير أنه اطلع على كتابات أخرى في البركار التام

[50] *رسالة البركار التام وكيفية التخطيط به*. MS Algiers, n° 1446, fols. 95^r-106^v.

ولكنه يود تمييز رسالته عنها[51]. يمكننا أن نستخلص بيقين من هذه المعلومة أن مؤلفين عديدين كتبوا في البركار التام في الفترة الممتدة من منتصف القرن الحادي عشر، ومن البيروني بشكل خاص – الذي يشير ابن الحسين، فيما يشير، إليه وإلى كتابه *الاستيعاب* – إلى نهاية القرن الثاني عشر. إلا أننا لسنا الآن في وضع يسمح لنا تكوين فكرة عن الأبحاث التي جرت في هذا المجال أثناء تلك الفترة من الزمن، فقد فقدت هذه الأعمال – ضياع قد يكون نهائياً أو مؤقتاً – ومع ذلك فإن بين أيدينا نص على الأقل وقعنا عليه، لحسن حظنا، عرضاً: رسالة لـــ هبة الله الأصطرلابي البغدادي (متوفى 1140) في البركار التام[52].

ينتمي هبة الله إلى الفئة المعروفة باسم الأصطرلابيين، أي الحرفيين المختصين بصنع الآلات العلمية. ولذا يتوقع المرء منه أن ينصب اهتمامه على النواحي التقنية للآلة. وبالفعل تبدأ مقالته بعرض مفصل لكيفية صنع مختلف أجزاء البركار؛ ولكنه ينتقل بسرعة إلى إعطاء تعاريف المخروط والقطوع المخروطية ليشرح بعد ذلك كيفية رسمها ورسم المستقيم والدائرة بواسطة البركار التام. يرجع هبة الله، فيما يخص الرسم المتصل لهذه المنحنيات بواسطة هذه الآلة، سواء في الحالة العامة أو في وضع معين، إلى كتاب القوهي. وينهي مقالته بالقول: "وقد سهل علينا رسم جميع الخطوط القياسية وهي المستوي ومحيط الدائرة ومحيط القطوع الثلاثة المخروطية[53]. وهكذا نرى الحرفي المثقف يتفهم تماماً الغرض من هذه الآلة، وفي الوقت الذي يركز فيه اهتمامه على تركيب الآلة واستعمالها أكثر من اهتمامه بالهندسة فإنه يحيل قارئه إلى كتاب القوهي الذي بقي النص المعتمد رغم مرور حوالي قرنين عليه.

تؤكد مقالة هبة الله إذاً ما ذكره ابن الحسين عن استمرار البحث في الفترة الممتدة من أيام البيروني إلى أيامه.

ثم إن ابن الحسين زودنا بمعلومات أخرى لا تقل أهمية عن المعلومات السابقة، وهي في الوقت نفسه أكثر دقة. فقد شرح في المقدمة التي أتينا على ذكرها كيف استعان بأستاذه كمال الدين ابن يونس للتغلب على بعض الصعوبات، حل بعض المسائل العسيرة وإلقاء الضوء على الأمور الغامضة التي صادفها أثناء كتابة رسالته. ونراه يعترف بدون تردد بالقول إن النتائج التي وصل إليها كانت "ثمرة معاونته"[54]. وهي تعابير توضح بجلاء أن الأستاذ عاون في كتابة الكتاب. ويمكن الإشارة هنا أنها ليست المرة الوحيدة التي استعان فيها ابن الحسين بأستاذه ابن يونس. فقد طلب منه العون أيضاً في إنشاء المسبع المنتظم[55]. وهذا دليل جديد، وإن كنا لسنا بحاجة له، على اهتمام التلميذ والمعلم كليهما في المسائل التي تدخل فيها القطوع المخروطية.

هذا الاعتراف بالدين والضوء الذي يلقيه على الدور الذي لعبه ابن يونس يجلب بالضرورة انتباهنا إلى البحث في هذا المجال الذي جرى في الموصل في نهاية القرن الثاني عشر وخلال النصف الأول من القرن التالي. وهنا أيضاً

---

[51] نفس المصدر.

[52] *مقالة البركار الكامل التام* MS Istanbul, University n° 314, fols. 119^v-122^v.

[53] نفس المصدر fol. 122^v.

[54] *رسالة البركار التام وكيفية التخطيط به*، MS Algiers, n° 1446, fol. 96^v.

[55] *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3, p. 884.

يسعفنا الحظ من جديد فقد وصلت إلينا رسالة بخط التلميذ الشهير لابن يونس، أثير الدين الأبهري (المتوفى حوالي 663 /1265)، تضيف الكثير إلى ما نعلمه عن إسهام ابن يونس ومن حوله في هذا المجال من البحث. فقد كتب الأبهري، الرياضي الفلكي والفيلسوف، دراسة في البركار التام عندما كان يدرس رسالة في هذا الموضوع تحت إشراف ابن يونس. هل كانت رسالة لابن يونس بالذات أو لمؤلف آخر؟ لا نعلم. إلا أن كل شيء يشير، والنص نفسه يؤكد، إلى أن الأبهري كان يعمل في مقالته انطلاقاً من آمالي أخذها من دروس ابن يونس: فالبراهين معطاة بخطوطها الكبرى أحياناً، كما يوحي الأسلوب أنها أمالي كتبت عن عرض شفهي.

وعلى كل حال فإن كل ما تعلمناه من ابن الحسن والأبهري ومن كتاباتهما التي وصلت إلينا يقودنا إلى نفس النتيجة: لقد استمر البحث في الرسم المتصل للقطوع وفي البركار التام بدون انقطاع خلال القرنين الحادي عشر والثاني عشر؛ كما أن ابن يونس وأتباعه كونوا زمرة كرست قسماً من جهودها لهذا المجال من البحث. يبقى علينا أن نعرف، أو على الأقل أن نخمن، الدوافع التي جعلت ابن يونس يتابع هذا البحث.

للإجابة عن هذا السؤال لدينا، من بين الدوافع الممكنة، نوعان من الأسباب التي تعرض نفسها للطرح وهما متكاملان إلى حد ما. لقد أشرنا أعلاه إلى اهتمام ابن يونس بالقطوع المخروطية وبحل مسائل الإنشاء الهندسي – إنشاء المسبع المنتظم – باستعمال تقاطع القطوع. كما أننا ألححنا في القول على ضرورة استعمال طرق تنتج خطوطاً متصلة في الإنشاء العملي. ثم إن ابن يونس استعمل تقاطع القطوع في أعماله الجبرية. فقد ترك لنا دراسة عن المعادلات التكعيبية، كان الخيام قد درسها، وحلها باستعمال تقاطع قطعين مخروطيين[56]. ولنذكر بهذه المناسبة، أن ابن يونس تلميذ مباشر للجبري شرف الدين الطوسي؛ ونعلم أن هذا الأخير لم يستعمل تقاطع القطوع لحل المعادلات التكعيبية فحسب بل تطلب إضافة إلى ذلك البرهان على وجود نقاط التقاطع. وهكذا فمن الواضح أن الباحثين كانوا بحاجة للمنحنيات المتصلة أي بحاجة إلى الرسم المتصل. وكان أثير الدين الأبهري، تلميذ ابن يونس، وصاحب الأعمال الرياضية الأكثر شهرة من أعمال ابن الحسين، هو أيضاً على إطلاع على أعمال شرف الدين الطوسي وكتب هو نفسه رسالة في الجبر.

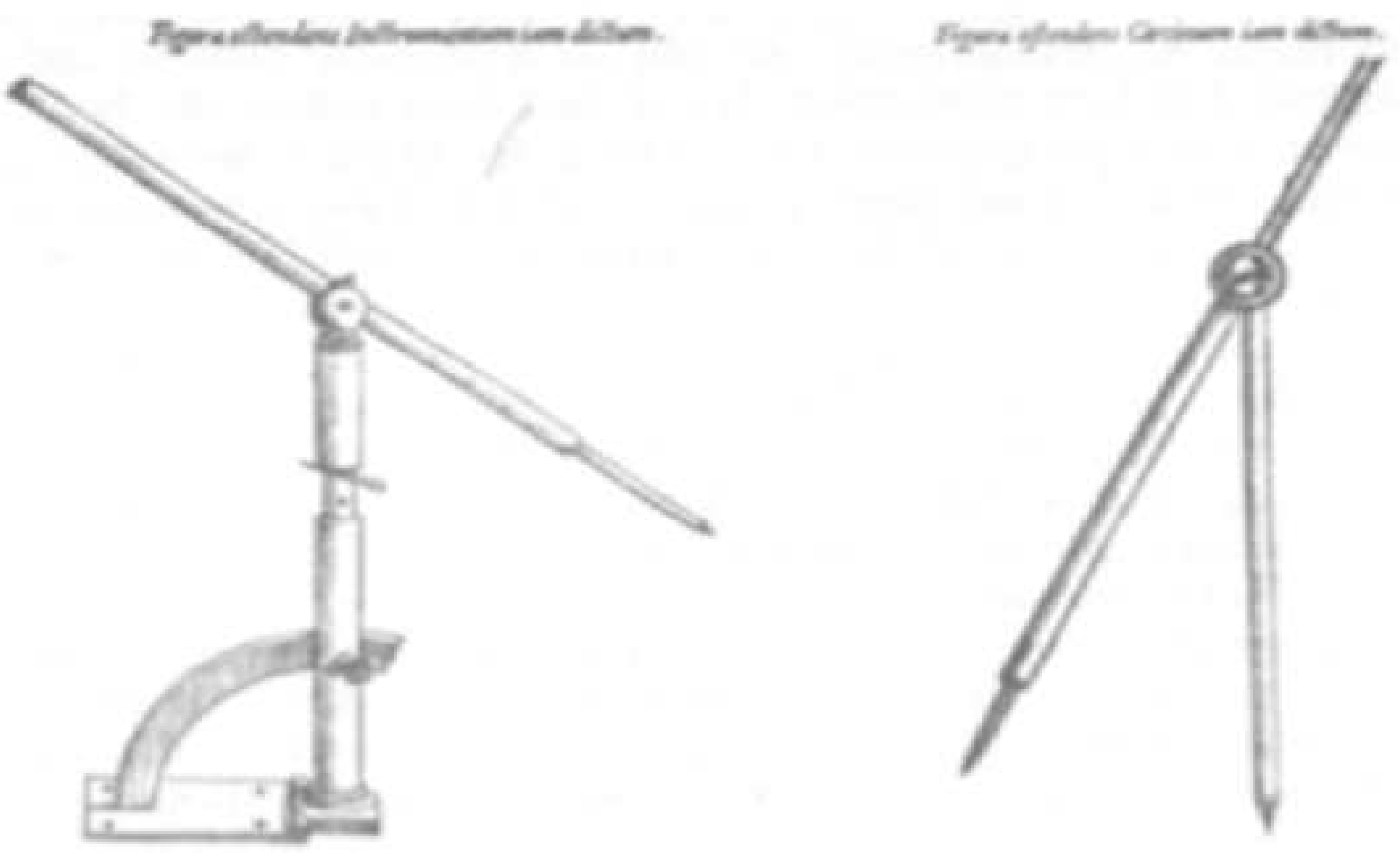
هذا يعني القول إن هؤلاء المهندسين، ابن يونس وتلامذته، قد اشتغلوا بالجبر وأنهم، إضافة إلى ذلك، تتلمذوا على شرف الدين الطوسي. ونستطيع أن نتفهم تماماً اهتمامهم بهذا المجال من الهندسة عندما نأخذ بعين الاعتبار دراساتهم الفلكية، ومنها على وجه الخصوص تلك المتعلقة بالآلات الفلكية. ولكن هل كانت زمرة الموصل الوحيدة التي تابعت هذا النوع من البحث؟ ما من سبب يدعو إلى القول بذلك. لا شك أن المدارس الأخرى التي نشطت في القرن الثاني عشر بل وما بعده قد وجهت اهتمامها نحو هذا النوع الهندسي. قد تتيح متابعة البحث الإجابة يوما ما عن هذا السؤال، إلا إذا كان عدد المخطوطات المفقودة قد وصل إلى حد يجعل الجواب مستحيلا. وفي كل الأحوال، نعلم أن المؤلفين اللاتنيين في القرن السادس عشر كانوا مهتمين بالبركار التام.

---

[56] انظر دراستنا المقبلة عن أعمال ابن يونس الجبرية.

وإليكم ترجمة ما يقول باروتزي:

ومن المستحسن أن نشير هنا إلى آلة اخترعناها منذ حين، تحدث وبشكل مرض سطحاً مخروطياً، والمخروطات نفسها المستقيمة أو المائلة بزوايا قائمة ومنفرجة وحادة <في رأسها>؛ وهي إضافة إلى ذلك ترسم رسماً ممتازاً القطوع المخروطية الثلاثة، أي القطع المكافئ، القطع الزائد والقطع الناقص. ويمكن على غرار آلتنا إنشاء زوج بسيط بركار برجلين (وقد نبهني حديثاً صاحب الشهرة الكبيرة والعالم الكبير جاكوبو كونتاريني، أرشميدس زماننا، إلى أن بركاراً من هذا النوع اخترعه وعرضه أمامه صاحب الشهرة الكبيرة الكونت جيليو تينه وهو رجل مرموق ضليع في كل العلوم وفي الفنون العسكرية) يمكن بواسطته كذلك رسم القطوع المخروطية الثلاثة التي أشرنا إليها. يجب أن تكون رجــل البركــار الثانية، التي تــدور على دائرة مجوفة وتحتوي في جــوفها على قلم مسنن متحرك (Stylum dentatum mobilem) يمكن تمديده وتقليصه بواسطة دولاب مسنن وبشريط يمسك به بواسطة مسمار، والقلم يتحرك صعوداً وهبوطاً. لأنه إذا وضع المستوى الذي سيجري رسم القطوع المخروطية عليه موازيا لمحور الآلة، ونعني موازياً للرجل الثابتة في البركار المشار إليه، فسيرسم بدون أدنى شك قطعاً مكافئاً. أما إذا لم يكن المستوى موازيا للمحور، ونعني للرجل المشار إليها وإنما مائلاً في اتجاه قمة الآلة (أو قمة البركار)، فسيرسم قطعاً زائداً؛ أخيراً إذا لم يكن المستوى موازياً للمحور، ونعني للرجل ولكنه موضوع عوضاً عن ذلك بحيث يميل نحو الجزء المقابل ونعني نحو الجزء الأسفل للآلة (أو للبركار)، فسيرسم قطعاً ناقصاً. والواقع فإن الآلة أي البركار بادية بشكل واضح في الأشكال التالية[57].



2.7. الأبهري والبركار التام

إن رسالتي ابن الحسين والأبهري في البركار التام هما، كما يخبرنا بذلك المؤلفان، نتاج نفس المدرسة، مدرسة ابن يونس. وهكذا، وبعد حوالي ثلاثة قرون على فتح باب البحث في هذا المجال وابتكار المفردات التي تطلبها من قبل

[57] Francesco Barozzi, *Admirandum illud geometricum problema tredecim modis demonstratum*, Venetiis, 1586, edited by Luigi Maierù (Bologna, 1993), p. 29, figures pp. 30-31.

القوهي، نرى أن العلماء لم يتخلوا عن العمل في نظرية البركار التام. إنه لدليل قوي على استمرار هذا التقليد الذي ابتدأ في القرن العاشر، إلا أننا بحاجة، لتبرير استعمال كلمة مدرسة، إلى الكشف عن وجود نموذج متبع في التعلم وإلى تحديد علاقات المديونية. هنا، وفي هذا المثال فقد قام المؤلفان بالمهمة الأولى عوضاً عنا، إذ يعترف كل منهما باتباع طريقة معلمهما ابن يونس. يُفهم من كلام ابن الحسين أن النص قد كتب على نحو ما بالشراكة مع معلمه بينما يعلن الأبهري في عنوان رسالة أنه كتب النص حين قرأ على ابن يونس.

يبقى علينا النظر في مسألة المديونية. سنرى من خلال تحليلنا لرسالة الأبهري وشرحنا لها كل ما هو مشترك بينها وبين رسالة ابن الحسين لا من حيث الإجراءات والطرائق فحسب وإنما في فقرات كاملة من المحاكمة. إن وجود هذا الكم الكبير من العناصر المشتركة يضعنا أمام خيارين: إما أن يكون أحد هذين التلميذين لابن يونس قد استعار هذه العناصر من الآخر أو أن كليهما يعيد في رسالته ما تعلمه من أستاذه. هذا ما يقوله الأبهري صراحة في عنوانه. لم لا نصدقه؟ يمكننا، إن فعلنا، النظر إلى الرسالتين كمصدر يعطينا لمحة عن أسلوب ابن يونس ويفسر لنا إرثهما المشترك.

لنعد إلى هاتين الرسالتين. توجد مخطوطة ابن الحسين على نسختين لم يعرف فوبك إلا واحدة منهما. دوّن النص وترجمه وشرحه.إلا أن الوقت لم يتح له مع الأسف لمراجعة تدوينه وإضافة تعليقات تحقيق النص ومراجعة ترجمته الحرة نوعاً ما. وقد توفي قبل نشر الكتاب الذي أخرجه، بطبعة بعد الوفاة، جول مول[58]. أما شرح فوبك فهو عالي الجودة كالمعتاد وبوسع القارئ الرجوع إليه بكل دقة. وفي كل الأحوال فرسالة ابن الحسين بين أيدينا ومن الممكن إعطاء المراجع منها.

يختلف الأمر كلياً بالنسبة لرسالة الأبهري التي لم تكن موضوع دراسة على الإطلاق حتى الآن. فنحن نقدم هنا إذاً طبعتها الأولى وترجمتها وشرحها. وصلتنا هذه الرسالة على نسخة واحدة "استنسخت من نسخة سقيمة من غير تأمل وإصلاح فساد المواضع" كما يشير إلى ذلك الناقل في ذيل الرسالة وهو ما يفسر عدد الأخطاء والإسقاطات الكبير.

إن بنية رسالة الأبهري بسيطة للغاية فهي مؤلفة من ثلاثة أجزاء متميزة بعناوينها. يصف المؤلف في الجزء الأول القصير نسبياً البركار التام؛ ويبرهن في الجزء الثاني خمس مقدمات ويأخذ في الجزء الثالث على عاتقه رسم القطوع المخروطية الثلاثة: القطع المكافئ والقطع الزائد والقطع الناقص على الترتيب.

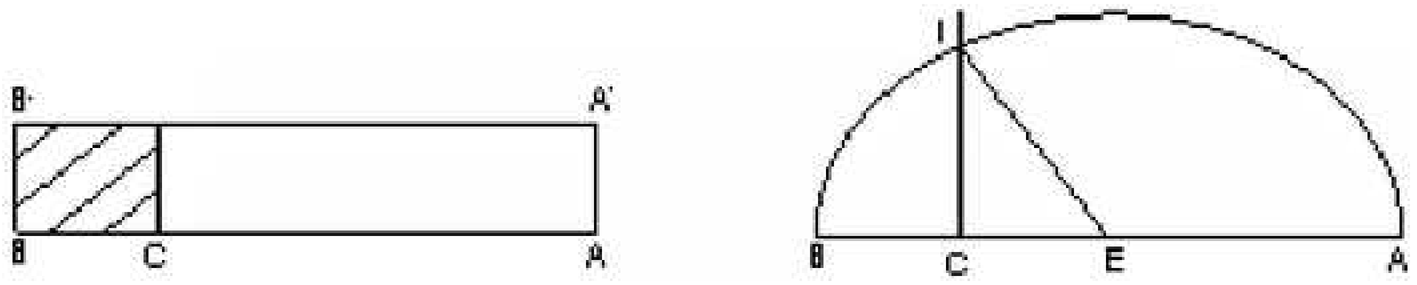
لنعد الآن إلى وصف وشرح الرسالة. الجزء الأول منها مكرس للبحث في صنعة البركار. يتبع الأبهري هذا المدخل المختصر بالبرهان على خمس مقدمات ستستعمل كلها عندما يدرس الرسم المتصل للقطوع المخروطية الثلاثة.

المقدمة 1: نريد إنشاء مستطيل على مقطع AB يزيد على سطح معلوم D^2 بمربع.

ليكن AB المقطع المعلوم و E وسطه. نرسم دائرة مركزها E وقطرها AB ونأخذ عليها نقطة I بحيث يكون طول العمود $IC \perp AB$ مساوياً لــ D (تحدد النقطة I بتقاطع الدائرة مع الموازي لــ AB الذي يبعد عنه المسافة D). لدينا

[58] Woepecke, 'Trois traités arabes sur le compas parfait'.

$$CI^2 = CA \cdot CB = D^2$$



الشكل. 62

الشرح: إذا أنشأنا على AB المستطيل 'ABB'A مع BB' = BC فنحصل

سطح $ABB'A' = CA \cdot CB + CB^2 = D^2 + CB^2$

يزيد سطح المستطيل على السطح D^2 بمربع.

لم يعلل الأبهري إنشاء المقطع CI. ويفرض بعد ذلك أن الدائرة التي شعاعها EI تمر في النقطتين A و B. نعلم أن IC = D، لذا رسمنا الدائرة التي قطرها AB والموازي لـــ AB الذي يبعد عنه المسافة D. يجب أن يكون $D < \frac{AB}{2}$ لكي يقطع هذا الموازي الدائرة معطياً I. نرسم بعد ذلك $IC \perp AB$.

محاكمة الأبهري

لدينا

$$CA \cdot CB + EC^2 = EB^2 = EI^2 = EC^2 + CI^2 \qquad (1)$$

لأن

$$CA \cdot CB = CI^2 = D^2$$

ومنه

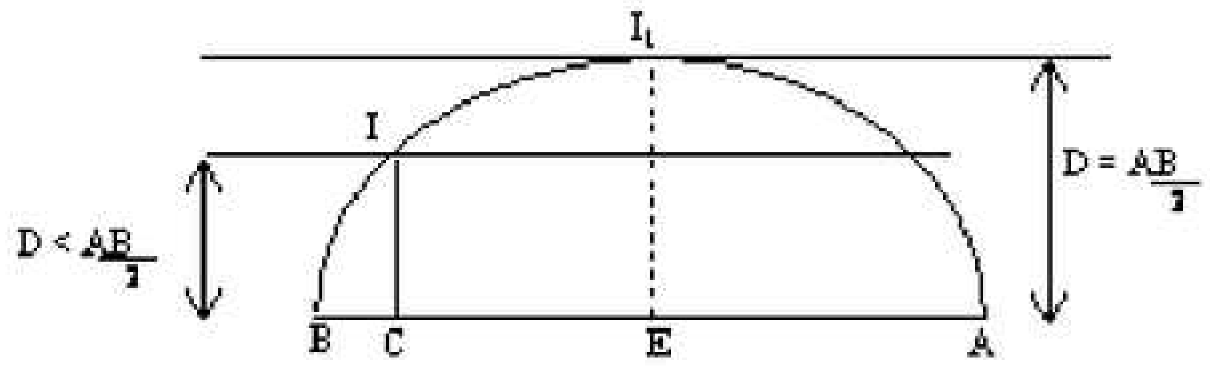
$$AB \cdot CB = D^2 + CB^2 \qquad (2)$$

وهكذا يزيد السطح على AB على المربع D^2 بمربع CD.

ملاحظات:

1) إذا كانت $D = \frac{AB}{2}$ فتقع I في I_1 و C في E

$$EA \cdot EB = EI^2 = D^2$$



الشكل. 63

2) نلاحظ أن هذه المقدمة وبرهانها يشبهان إلى حد بعيد المقدمة 1 في رسالة ابن الحسين.

هذا هو نص المقدمة بكلمات هذا الأخير: "تريد أن نضيف إلى ا ب سطحا كمربع د يزيد على تمامه مربعا"[59]. فـ AC هو المعلوم إذاً ونريد إيجاد النقطة B بأخذ E في وسط AC. والنصان متطابقان ماعدا كون AB هو المعلوم في نص الأبهري ونريد إيجاد النقطة C بأخذ E في وسط AB.

ولذا فمن الواضح أننا إذا بادلنا في النص B بـ C فإننا نجد نص ابن الحسين. يقوم برهان هذا الأخير على إنشاء $AC \perp CI$ حيث $CI = D$؛ وتحدد لنا الدائرة (E ،EI) النقطة المطلوبة B ولدينا إذاً

$$BC \cdot BA = D^2$$

أو

$$BC(BC + CA) = D^2$$

وإذا سمينا $BC = x$ فستعود المسألة إلى حال المعادلة $x(x + CA) = D^2$.

لنلاحظ أن النقطة C غير معلومة عند الأبهري، لذا وجب تبيان كيفية إنشاء IC كما رأينا. بعد هذا الإنشاء وبأخذ الشكل الوحيد في النص بعين الاعتبار، نحصل على المساواتين (1) و(2) ويبقى حل المعادلة $x(AB - x) = D^2$.

فالنصان متطابقان إذاً حالما نقوم بالمبادلة التي افترضناها. ولا حاجة عندئذ لتبيان كيفية إنشاء IC. أي أن نص الأبهري يستطيع القيام بذاته. ترى هل يمكن وضع مسؤولية هذا التعديل على عاتق الناسخ؟ أم على ملاحظة أضافها الأبهري بسرعة على أحد دروس ابن يونس؟ يكاد يستحيل البت في هذا الموضوع.

المقدمة 2: النقاط الثلاث C ،B ،A معلومة و $B \in [AC]$. ونريد أن نجد نقطة D على AB تحقق

$$\frac{DC}{DB} = \frac{DB}{DA}$$

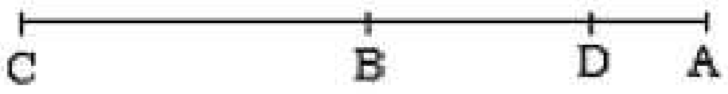
أي $DB^2 = DC \cdot DA$.

يميز الأبهري بين ثلاث حالات:

α) نفرض أن $BC = BA$ ونأخذ D بحيث

[59] انظر مخطوطات الجزائر، 1446 الورقة 97ظ وأدناه ص. 831.

$$BD^2 = \frac{1}{2}\ AB^2$$



الشكل. 64

إن

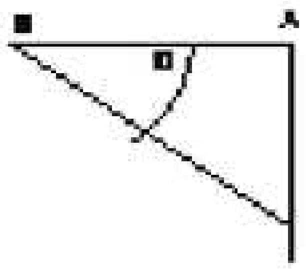
$$DA\ \cdot\ DC + DB^2 = AB^2$$

أيا كان وضع D في [AB]، ولذا إذ أخذنا $AB^2 = 2BD^2$ ، يكون

$$DA\ .\ DC = DB^2\ \Rightarrow\ \frac{DC}{DB} = \frac{DB}{DA}$$

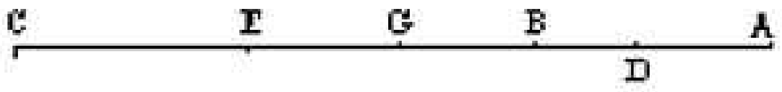
ملاحظة: إنشاء النقطة D

طول AB معلوم وطول BD هو نصف قطر المربع ذي الضلع AB.



الشكل. 65

β) إذا كان BC > AB، نأخذ النقطة E بحيث يكون CE = AB والنقطة G وسط BE. G هي أيضاً وسط AC



الشكل. 66

ثم يضع الأبهري $AB\cdot\ BC = \frac{1}{2}\ DG\ .\ DB$، فيحصل على

$$AB\ \cdot\ BC + BG^2 = 2DG\ \cdot\ DB + BG^2$$

ولما كنا نريد أن تكون D على BA وبالتالي $DB + BG = DG$ فإن

$$BG^2 = DG^2 + DB^2 - 2DG\ .\ DB\ \Rightarrow\ 2DG\ .\ DB + BG^2 = DG^2 + DB^2$$

ومنه

$$AB\ \cdot\ BC + BG^2 = DG^2 + DB^2 \qquad (1)$$

ومن جهة أخرى

$$AB\ \cdot\ BC = (AG - BG)\ (AG + GB) = AG^2 - GB^2$$

أو

$$AB\ \cdot\ BC + BG^2 = AG^2$$

وكذلك

$$AD \cdot DC = (AG - DG)\,(AG + DG) = AG^2 - DG^2$$

ومنه

$$AD \cdot DC + DG^2 = AG^2$$

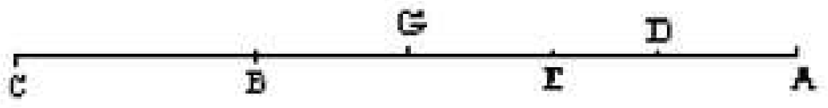
والنتيجة أن

$$AB \cdot BC + BG^2 = AD \cdot DC + DG^2 \qquad (2)$$

(1) و $(2) \Leftarrow AD \cdot DC + DG^2 = DG^2 + DB^2$

أي $$AD \cdot DC = DB^2 \;\Rightarrow\; \frac{DC}{DB} = \frac{DB}{DA}$$

γ) إذا كان $BC > AB$، نأخذ من جديد نقطة E بحيث يكون $CE = AB$ ونقطة G وسط EB ووسط AC.



الشكل. 67

ومن جديد يضع الأبهري $AB \cdot BC \;=\; \frac{1}{2}\; DB \cdot DG$، لنحصل كما في السابق على

$$AB \cdot BC + BG^2 = 2DB \cdot DG + BG^2$$

فإذا كان $BG = DB - DG$، أي إذا لم تكن D واقعة بين النقطتين B و G، فلدينا كما في الحالة السابقة

$$AB \cdot BC + BG^2 = 2DE \cdot DG + BG^2 = DB^2 + DG^2$$

وتنتهي المحاكمة كما في الحالة β.

تعليق: لدينا في الحالتين β) و γ) $AB \neq BC$، وبين الأبهري أن العلاقة $DG \cdot DB = \frac{1}{2}\, AB \cdot BC$ تتضمن $\frac{DC}{DB} = \frac{DB}{DA}$؛

إلا أنه لم يعط إنشاء هندسياً للنقطة D ولم يشر إلى أن الحجة في الحالة الثالثة تفترض أن D لا تقع بين B و G.

لدينا في الحالة β)، $AB < BC$ و

$$GB = DG - DB \;\Rightarrow\; GB \cdot DB = DG \cdot DB - DB^2$$

وفي الحالة γ)، $AB > BC$ و

$$GB = DB - DG \;\Rightarrow\; GB \cdot DG = DG \cdot DB - DG^2$$

وفي كلتا الحالتين يزيد السطح DG . DB على السطح المنشئ على GB بمربع. يختلف هذا المربع من حالة إلى أخرى. والحجة صحيحة في الحالتين.

يمكننا التساؤل عن التحليل الذي قاد الأبهري إلى وضع $DB^2 = \frac{1}{2}AB^2$، في الحالة الأولى، ووضع $DG \cdot DB = \frac{1}{2}AB \cdot BC$، في الحالتين التاليتين. يقود الإنشاء الهندسي بمنتهى البساطة في الحالة الأولى إلى المساواة $DB^2 = \frac{1}{2}AB^2$. أما في الحالتين الثانية والثالثة فيمكننا إعادة بناء التحليل كما يلي:

لدينا $AD \cdot DC + DG^2 = AG^2$، من أقليدس، *الأصول* II.5. وإذا كان $AD \cdot DC = DB^2$ فإن $DB^2 + DG^2 = AG^2$؛ ثم إن BG هي الفرق بين DG و DB بحيث

$$BG^2 = DB^2 + DG^2 - 2DB . DG = AG^2 - 2DB . DG$$

ولدينا من جديد من نفس قضية إقليدس

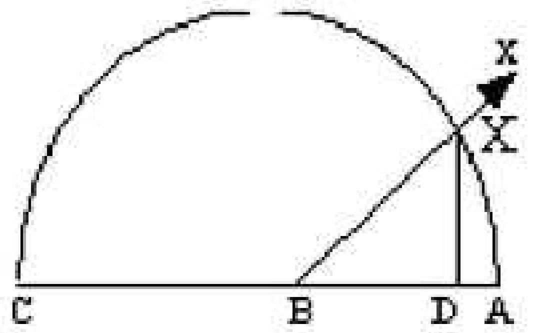
$$AB \cdot BC + BG^2 = AG^2$$

وبتركيب النسبتين

$$AB \cdot BC = 2DB . DG$$

الإنشاء الهندسي للنقطة D:

النقاط A، B، C معلومة و B بين A و C. نريد أن نجد $D \in [AB]$ بحيث يكون $DB^2 = DA . DC$.



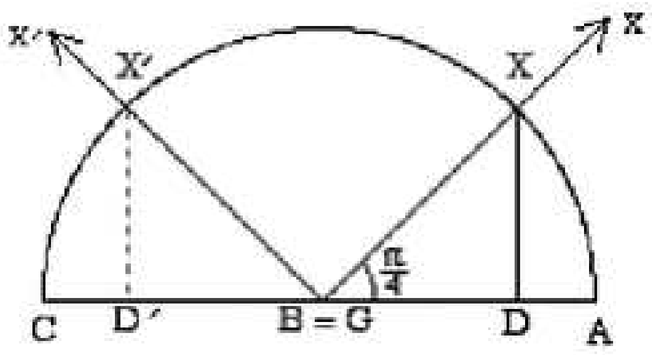
الشكل. 68

لنأخذ الدائرة التي قطرها AC. فإذا كانت D حلاً للمسألة وكان $DX \perp AC$ فإن $DX^2 = DA \cdot DC$ و $DB^2 = DX^2$.

يجب إذاً أن يكون المثلث قائم الزاوية BDX متساوي الساقين والزاوية $A\hat{B}X = \frac{\pi}{4}$.

وبالتالي، علينا لإيجاد X ومن ثم D إنشاء زاوية $A\hat{B}x = \frac{\pi}{4}$ يقطع ضلعها Bx الدائرة ذات القطر AC في X.

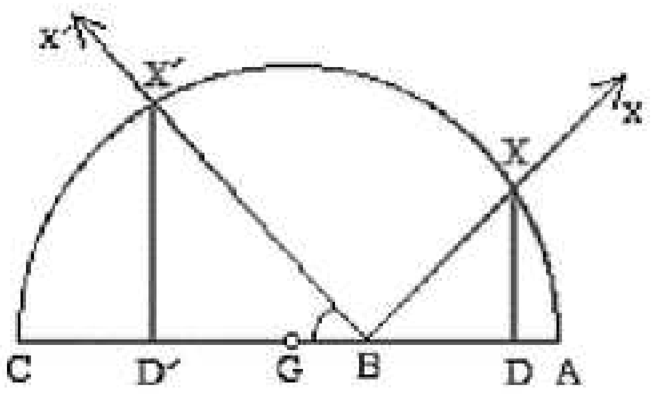
α) $AB = BC$



الشكل.69

لدينا $BX = BA$ و $BD^2 = \frac{1}{2} BA^2$ $BD = AB \frac{\sqrt{2}}{2}$

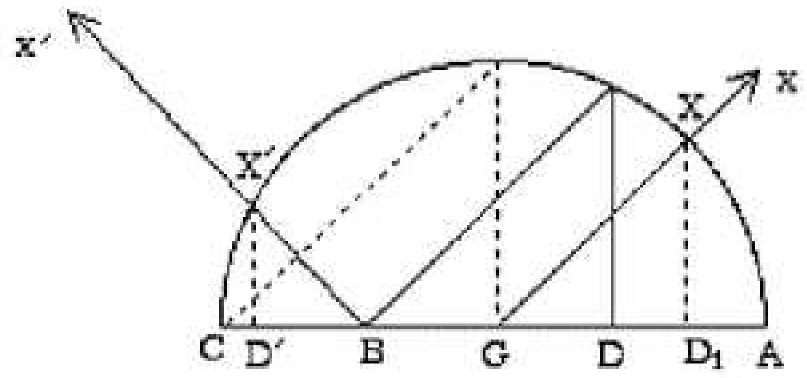
β) $AB < BC$



الشكل. 70

تقع B في هذه الحالة بين G مركز الدائرة وA، والنقطة D التي نحصل عليها تحقق $D \in [BA]$ و $DB^2 = DX^2 = DC \cdot DA$.

γ) $AB > BC$



الشكل. 71

تقع B بين G و C والنقطة D بالتالي بين G و A؛ إلا أنه يستحيل أن تقع بين B وG، لأنه إذا رسمت B المستقيم GC من G إلى C فإن D ترسم D_1G من D_1 إلى G.

ملاحظة: يمكن في كل حالة من الحالات الثلاث أخذ نقطة 'D تقع على [BC] وتحقق الشرط $D'B^2 = D'A \cdot D'C$. نحتاج لإنشاء 'Bx بحيث تكون $C\hat{B}x' = \frac{\pi}{4}$. ونحصل على 'X التي تعطينا 'D على [BC]. اكتفينا بالحل الأول لأننا نريد $D \in [AB]$.

طريقة أخرى: لنأخذ AC كمحور فواصل Ax ونأخذ عليه الأطوال $\overline{AB} = b$، $\overline{AC} = c$ ($b < c$) و $\overline{AD} = x$ حيث $0 < x < b$؛ لدينا $\overline{AG} = \frac{c}{2}$. نريد إيجاد النقطة D التي تحقق $DB^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DC}$، أي نريد

$$f(x) = 2x^2 - x(2b + c) + b^2 = 0 \Leftrightarrow (b - x)^2 = x(c - x) \qquad (*)$$

الشكل. 72

لدينا $f(0) = b^2 > 0$ و $f(b) = b^2 - bc < 0$ و $f(c) = c^2 - 2bc + b^2 = (c - b)^2 > 0$

إذاً فللمعادلة (*) جذران x_1 و x_2 يحققان

$0 < x_1 < b < x_2 < c$

وللمسألة حل x_1 من أجل أي نقطة B تحقق الشرط $0 < b < c$.

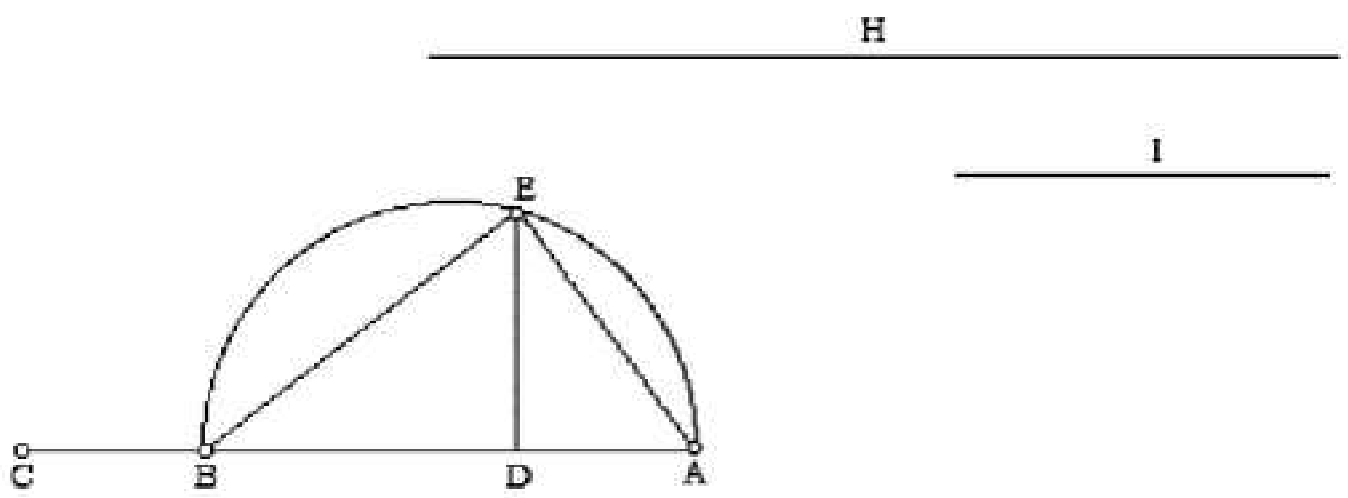
$$0 < x_1 < b \Rightarrow D \in [AB]$$

إن
$$f\left(\frac{c}{2}\right) = -bc + b^2 = b(b - c) < 0$$

لدينا في الحالة الثالثة $\frac{c}{2} < b < c$ والحل $0 < x_1 < \frac{c}{2} < b$، وهكذا فــ $D \in [GA]$؛ وهو ما يقابل الحالة الثالثة في الإنشاء الهندسي.

وفي كلتا الحالتين يقابل الجذر الثاني x_2، $b < x_2 < c$، النقطة 'D في الإنشاء الهندسي $D' \in [BC]$.

المقدمة 3: الخطوط المستقيمة AB، H، I معلومة مع $AB = \frac{H}{2}$. نأخذ على AB النقطة C بحيث يكون $AB \cdot BC = I^2$ والنقطة D بحيث يكون $\frac{DB}{DA} = \frac{DC}{DB}$. نقيم من D عموداً على AB يلقى نصف الدائرة ذات القطر AB في E. لدينا



الشكل. 73

$$BA \cdot BD = BE^2$$

و
$$\frac{I^2}{BE^2} = \frac{AB \cdot BC}{AB \cdot BD} = \frac{BC}{BD}$$

ومنه
$$\frac{I^2 + BE^2}{BE^2} = \frac{DC}{DB} = \frac{DB}{DA}$$

ولدينا في المثلث قائم الزاوية AEB أيضاً $EA^2 = DA \cdot AB$

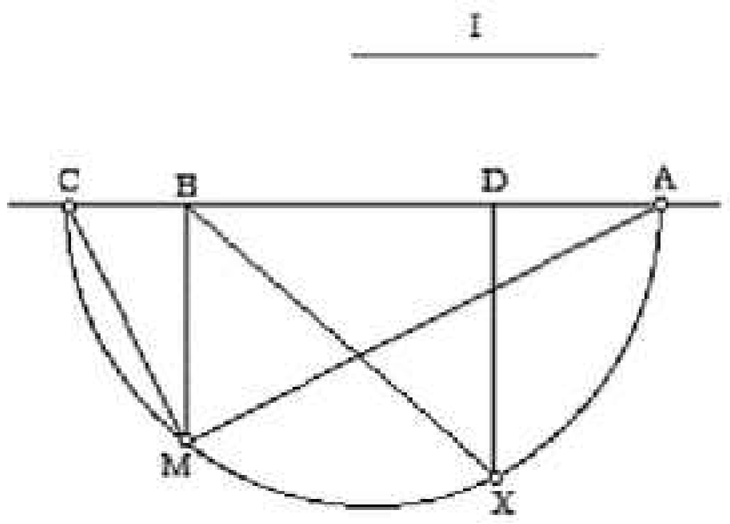
$$\frac{BE^2}{EA^2} = \frac{DB}{DA}$$

والنتيجة
$$\frac{I^2 + BE^2}{BE^2} = \frac{EB^2}{EA^2}$$

ملاحظات: لم يعط الأبهري إنشاءً للنقطتين C و D انطلاقاً مما هو معلوم. لا يلعب الطول H أي دور. ولا معنى للقول أن "AB نصف H" في المقدمة 3.

الإنشاء الهندسي: المستقيمان AB و I معلومان. نريد أن نجد النقطة C على AB الممدد تحقق

$$I^2 = AB \,.\, BC$$

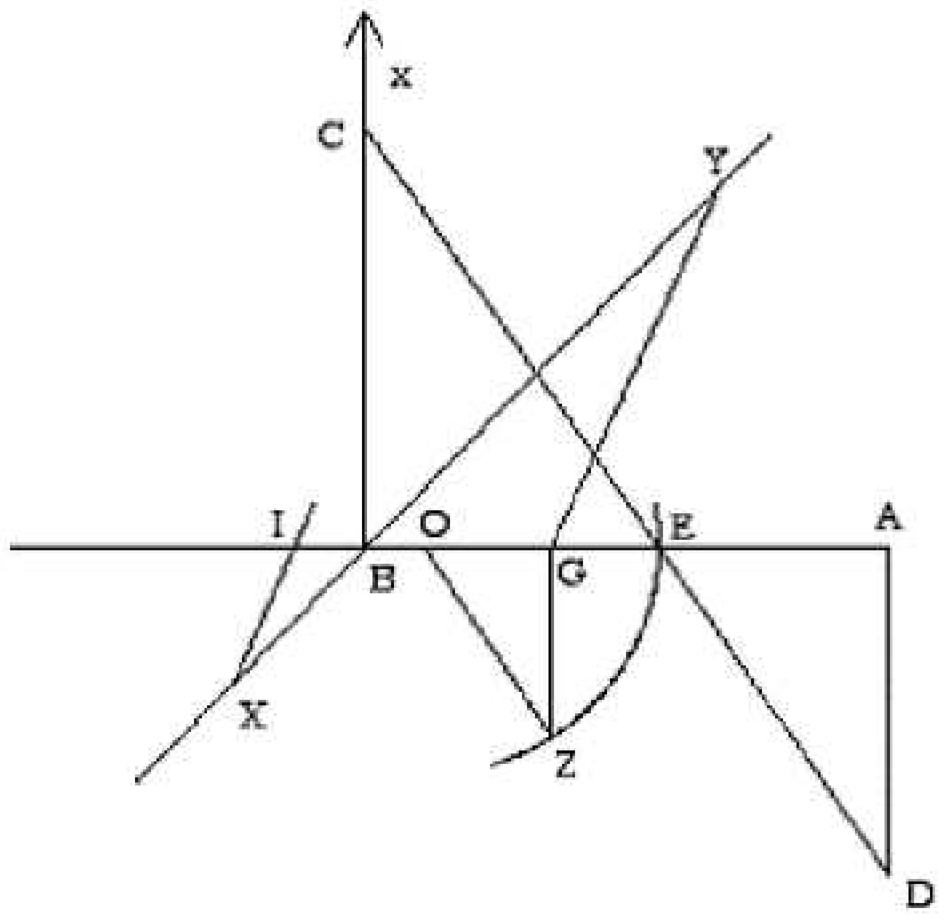


الشكل. 74

نرسم العمود $BM \perp AB$ بطول $BM = I$ ونرسم بعد ذلك العمود على AM في M، فيلقى AB في C.
لدينا في المثلث قائم الزاوية في M، AMC، $BM^2 = I^2 = BA \,.\, BC$ و C حل المسألة.
نريد بعد ذلك إنشاء D على [AB] بحيث يكون $\frac{DB}{DA} = \frac{DC}{DB}$.
إنشاء D هو كما في المقدمة 2. نرسم الدائرة ذات القطر AC المارة بالنقطة M ونرسم من B الخط BX بحيث تكون الزاوية $A\hat{B}X = \frac{\pi}{4}$، حيث X على الدائرة. ونحصل أخيراً على E كما جاء في النص.

المقدمة 4: AB مستقيم معطى و G نقطة معلومة عليه. نعرف النقطة D بـــ $AD \perp AB$ و$AD = AG$. نريد رسم مستقيم من النقطة D يلقى المستقيم AB في E والعمود على B في C وبحيث يكون

$$\frac{BG}{GE} = \frac{BC}{BG}$$



الشكل. 75

نأخذ على امتداد AB النقطة I المعرفة بـــ $AG \cdot BI = BG^2$ والنقطة E المعرفة بـــ

$$GE \cdot GI + GE^2 = AG . BI$$

أي بـــ
$$GE\,(GI + GE) = AG . BI$$

ومنه
$$EI . EG = AG . BI$$

حيث تقع النقطة G بين E و I أي أن $EI > EG$.

نمدد DE للحصول على C، وهكذا

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{BC} = \frac{AG}{BC}$$

أثبتنا أن

$$\frac{AG}{EG} = \frac{EI}{BI}$$

ومن هاتين العلاقتين

$$\frac{AE}{EG} = \frac{EB}{BI} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{EG}{BI}$$

وبالنتيجة

$$\frac{AG}{BC} = \frac{EG}{BI} \Rightarrow AG . BI = EG . BC \Rightarrow BG^2 = EG . BC$$

ولذا لدينا

$$\frac{BC}{BG} = \frac{BG}{GE}$$

الشروح والإنشاء: المقطع [AB] والنقطة $G \in AB$ مفروضان. نرسم $AD \perp AB$، حيث $AD = AG$ فالنقطة D معلومة. نريد إنشاء المستقيم الذي يقطع [AB] في E و Bx العمودي على BA في B وبحيث يتحقق

$$BG^2 = BC . GE$$

يكفي للحصول على المستقيم تعيين إحدى النقطتين E على [AB] أو C على [Bx).

يبين الأبهري أننا إذا عرفنا النقطة I على امتداد AB بالعلاقة $AG . BI = BG^2$ وإذا وجدنا انطلاقاً من I النقطة E على [AG] بحيث يكون $EI . EG = AG . BI = BG^2$، فإن النقطة الحاصلة هي حل المسألة. لكنه لم يعط كيفية إنشاء I و E المعرفتين على هذا النحو.

إنشاء النقطة I: الطولان BG و AG معروفان. ويفترض الشكل في النص أن $AG > BG$. نرسم من B مستقيماً لا على التعيين ونحدد عليه وعلى طرفي B النقطتين X، بحيث يكون $BX = BG$، و Y، بحيث يكون $BY = AG$، $BY > BX$. نرسم من X الخط الموازي لـــ GY الذي يقطع AB في النقطة I الواقعة خلف B وحيث $BI < BG$. لدينا

$$\frac{BI}{BG} = \frac{BX}{BY} = \frac{BG}{AG}$$

أي

$$BI \cdot AG = BG^2$$

و I هي النقطة المطلوبة.

إنشاء النقطة E على [AG]. النقطة I معلومة ولذا فإن

$$EI \cdot EG = AG . BI \Leftrightarrow EI . EG = BG^2$$

لتكن O وسط IG، تقع O بين B و G لأن $BI < BG$.

لدينا

$$BG^2 = EI . EG = EO^2 - OG^2$$

ومنه

$$EO^2 = BG^2 + OG^2$$

نرسم GZ عمودياً على BG بطول $GZ = BG$، فنحصل على

$$OZ^2 = OG^2 + GZ^2 = OG^2 + BG^2$$

تقطع الدائرة، ذات المركز O والشعاع OZ، GA في النقطة E التي تقع خلف G لأن $OE = OZ$ و $OZ > OG$. والنقطة E هي النقطة المطلوبة.

يحدد المستقيم DE النقطة C على (Bx].

ملاحظات: أنجزت هذه الإنشاءات آخذة بعين الاعتبار الشكل في النص الذي يجعل $BG < GA$ ويضع I على امتداد AB. وهكذا فإن إنشاء I يعطي $BI < BG$ بحيث تقع النقطة O، وسط الخط IG، بين B و G. يقول الأبهري لإنشاء النقطة E "لأن ا ز في ب ط كـ ه ط في ه ز فـ..."[60]؛ يمكننا الحصول على المساواة السابقة $EI . EG = AG . BI$ انطلاقا من فرضيتين مختلفتين:

- ليكن $GI \cdot GE + EG^2 = AG . BI$ (كما جاء في ملخص المقدمة). فلدينا

$$GE\ (IG + GE) = AG \cdot BI$$

وإذا وقعت E خلف G فتصبح العلاقة

$$GE \cdot IE = AG \cdot BI = BG^2$$

ومنه الإنشاء الذي أعطيناه لإيجاد E.

- ليكن $GI \cdot GE - EG^2 = AG \cdot BI$ ومنه

$$GE\ (GI - EG) = AG \cdot BI$$

لكن $GI - EG = EI$، إذا وقعت E بين G و I، وسنحصل في هذه الحالة على

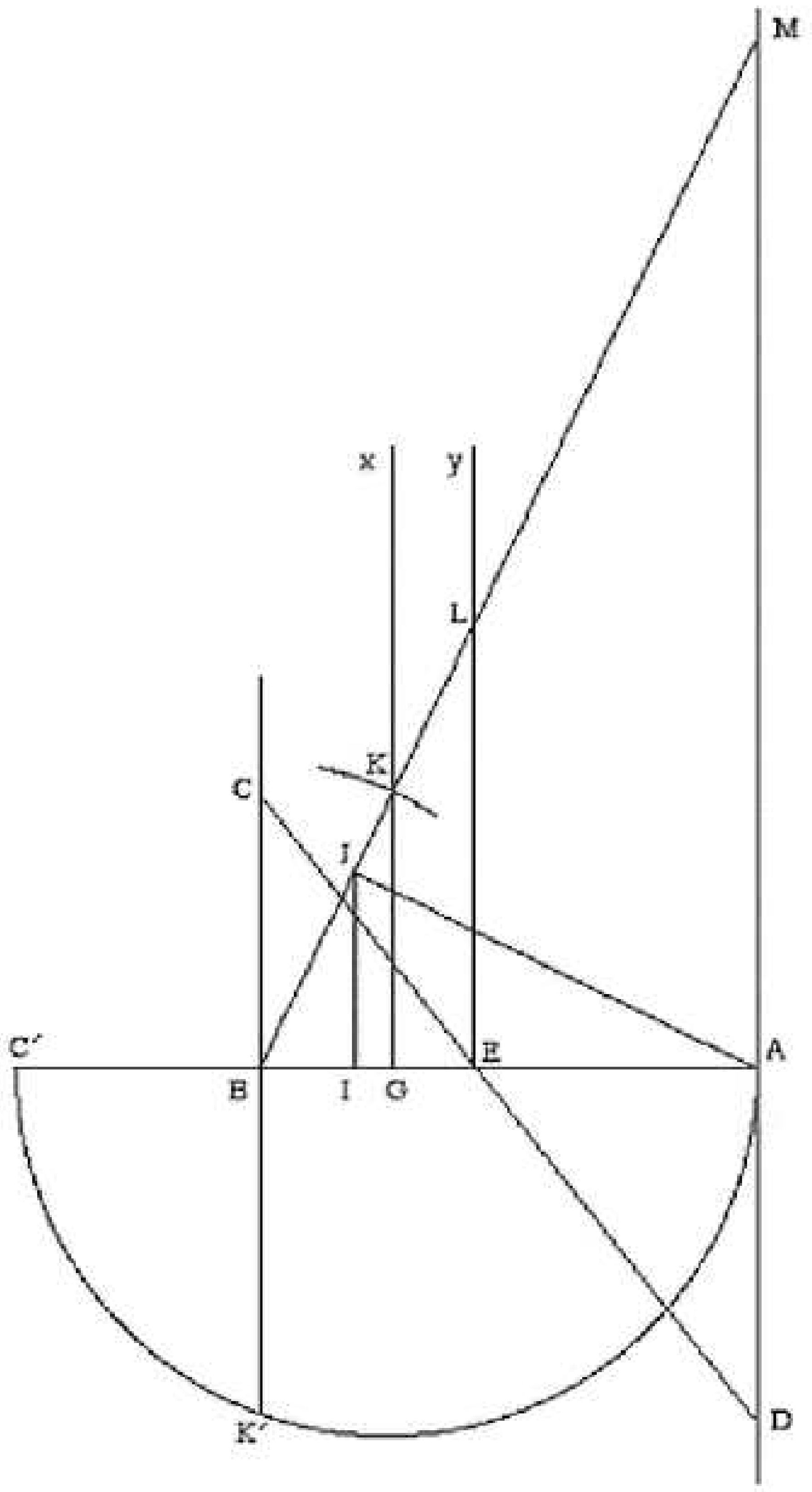
$$EI . EG = OG^2 - OE^2 = BG^2$$

وهو مستحيل لأن O تقع بين B و G، ولذا $OG < BG$.

[60] ص. 835، سطر 3.

المقدمة 5: النقاط A، B، G، D معلومة كما في المقدمة 4 و$G \in [AB]$ و $BG < GA$، $AD \perp AB$ و$AD = AG$، ومن D مستقيم مرسوم، يلقـــى AB في E والعمود في B المقام على AB في C، يحقق $BG^2 = BC \cdot GE$ حيث $BC > BG > GE$. نرسم نصفي العمود $(Gx] \perp (AB)$ و $(Ey] \perp (AB)$.

يعرف الأبهري الطول S بالعلاقة $\frac{AD}{AB} = \frac{S^2}{AB^2}$؛ والمطلوب هو رسم مستقيم من النقطة B يقطع $(Gx]$ في K و$(Ey]$ في L وامتداد AD في M، بحيث يكون $\frac{ML}{MB} = \frac{S^2}{BK^2}$ و $BA^2 = BM . KL$.



الشكل. 76.1

البرهان: يعرف الأبهري قبل كل شيء النقطة K كنقطة تقاطع $(Gx]$ مع الدائرة التي مركزها B وشعاعها O، تعرفه العلاقة $O^2 = BA . BC$، ويبين بعد ذلك أن المستقيم BK هو المستقيم المطلوب (ولا يعطي الأبهري

الإنشاء الهندسي لـــ K)[61]. تقطع الدائرة التي قطرها AM المستقيم BK في J؛ ولدينا إذاً $BM \perp AJ$، نرسم $JI \perp BA$ ونحصل على $BJ^2 = BI . BA$. ولدينا فرضاً

$$\frac{S^2}{AB^2} = \frac{AD}{AB} \Leftrightarrow S^2 = AD . AB$$

والنقطة K المحققة لـــ

$$BK^2 = BA . BC$$

ولذا

$$\frac{S^2}{BK^2} = \frac{AD}{BC} = \frac{AE}{EB} = \frac{ML}{LB} \Rightarrow \frac{S^2}{BK^2} = \frac{ML}{LB}$$ (وهي النتيجة الأولى المطلوبة)

ينتج عن المساواتين $BJ^2 = BI . BA$ و $BK^2 = BA . BC$ أن

$$\frac{BJ^2}{BK^2} = \frac{BI}{BC}$$

لكن

$$\frac{BJ^2}{BK^2} = \frac{BI^2}{BG^2}$$

ومنه

$$\frac{BI^2}{BG^2} = \frac{BI}{BC} \Rightarrow \frac{BG}{BC} = \frac{BI}{BG}$$

إلا أن لدينا فرضاً

$$\frac{BG}{BC} = \frac{GE}{BG}$$

لذا فإن $BI = GE$ وبالتالي $BJ = KL$.

إن قوة B بالنسبة للدائرة AJM معطاة بـــ $BA^2 = BM . BJ$، وبالتالي

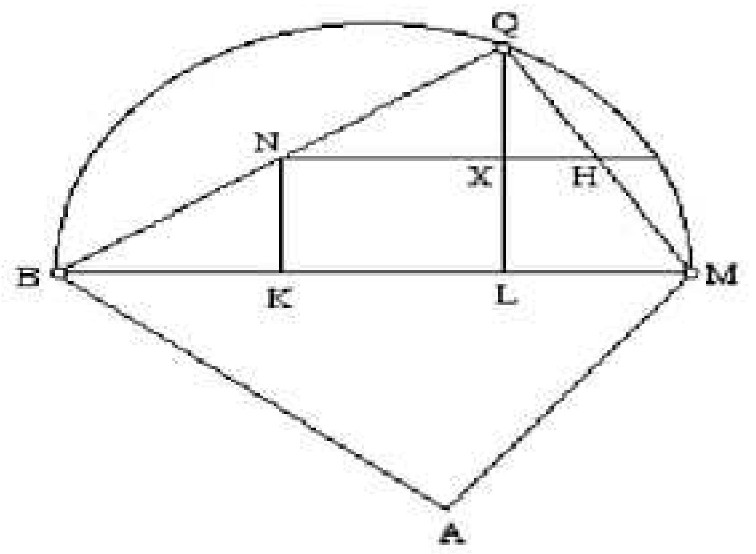
$$BA^2 = BM . KL$$ (وهي النتيجة الثانية المطلوبة)

نعود الآن إلى المستقيم BM وإلى القسمة (M، L، K، B)؛ يقطع العمود على BM في النقطة L الدائرة ذات القطر BM في Q.

نرسم $BM \perp KN$ حيث N على BQ ونرسم $BM \parallel NXH$. نريد أن نبرهن أن $QB > AB$؛ نحصل من تشابه المثلثين KNB و QMB على

[61] إنشاء K: لتكن C' نقطة على امتداد AB و $BC' = BC$؛ تقطع الدائرة التي قطرها AC' المستقيم CB في K'؛ لدينا $BK'^2 = BC' . BA = BC . BA = O^2$. تقطع الدائرة BO (Gx] في النقطة K.

$$\frac{MQ^2}{QB^2} = \frac{KN^2}{KB^2}$$



الشكل. 76.2

إن

$$\frac{MQ^2}{QB^2} = \frac{ML}{LB} = \frac{S^2}{KB^2}$$

و $S^2 = KN^2$.

ثم إن

$$XN^2 + XQ^2 = NQ^2$$

و

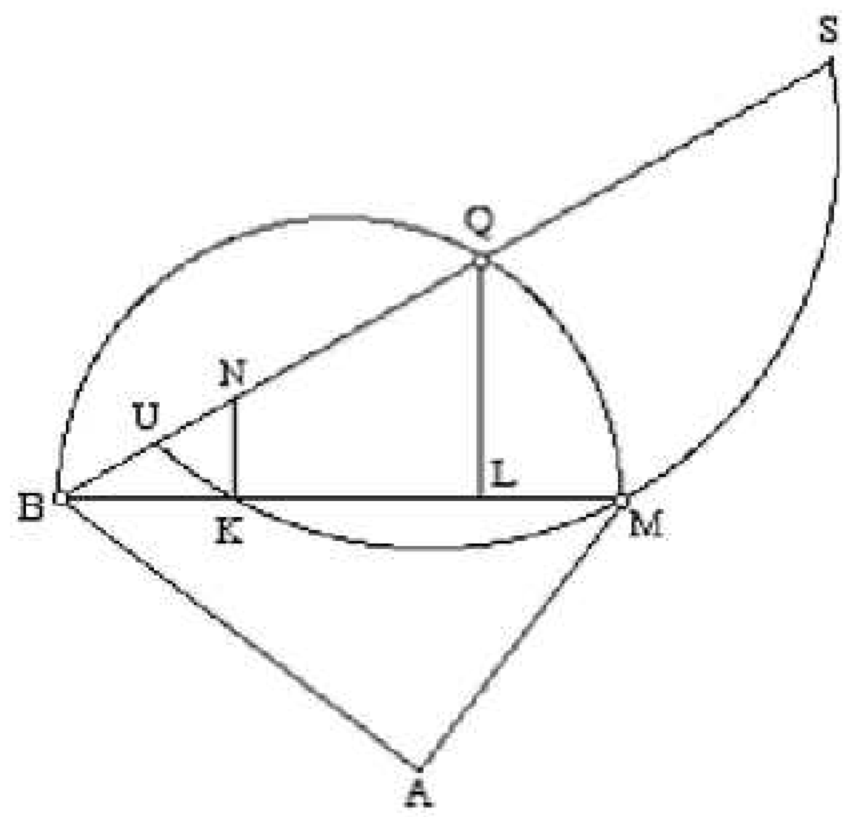
$$MB \,.\, XN = MB \,.\, KL = AB^2$$
$$MB > HN \qquad HN \,.\, XN = QN^2$$

وهكذا فإن $AB > QN$.

لدينا $BL \,.\, BM = QB^2$ وكذلك $BL > KL$، وهكذا فإن $QB > AB$.

نأخذ النقطة U على QB بحيث يكون $QU = AB$ ونمدد BQ إلى S بحيث يكون $QS = QU = AB$.

ونرسم الدائرة (SKM). إنها تمر في النقطة U:



الشكل 76.3

لدينا من المتطابقة

$$SB \cdot BU + QU^2 = QB^2$$

ومن النتائج السابقة

$$= BL \cdot BM = LK \cdot MB + KB \cdot MB$$

$$= QU^2 + KB \cdot MB \qquad \text{لأن } QU^2 = AB^2 = BM \cdot KL$$

ومنه

$$BS \cdot BU = BM \cdot BK \qquad (\text{قوة } B)$$

وبالتالي تمر الدائرة (SMK) بالنقطة U.

ملاحظات:

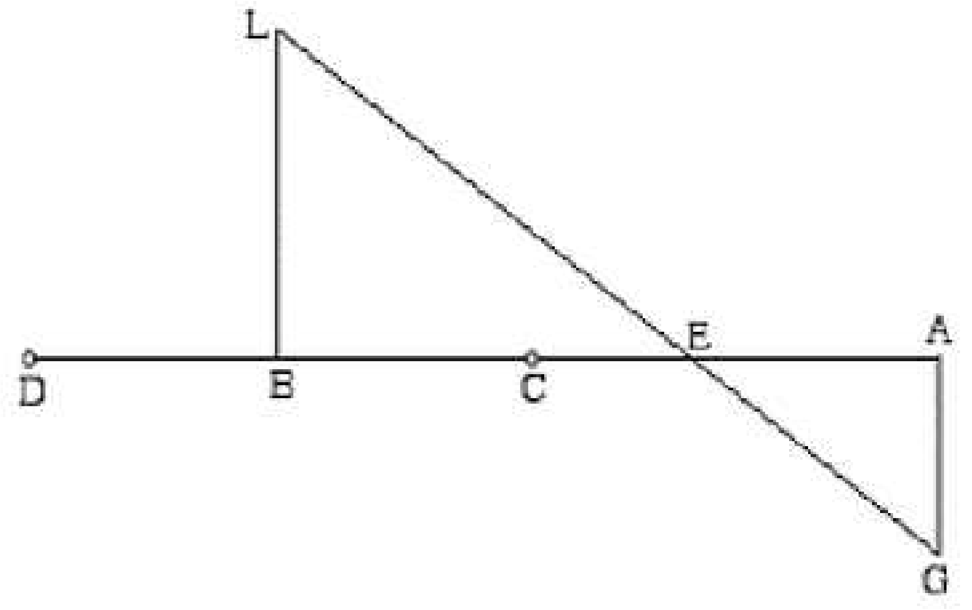
1) في المخطوطة شكلان في المقدمة 5. ولا يبين أي من الشكلين أن BJ = KL.

2) يعيد النص إلى المقدمة 4 فيما يخص النقط B، G، A والمستقيم DEC كمعطيات، ثم يعرف الطولين S وO للحصول على المستقيم BM وعلى النقاط J، K، L عليه، بالعلاقتين $\frac{AD}{AB} = \frac{S^2}{AB^2}$ و $O^2 = BA \cdot BC$، وهما تعريفان لا يدخل فيهما إلا النقط المعروفة في المقدمة 4. ولكن الطولين S وO يسمحان بإنشاء K وبعدها BM والنقطتين J وI باستعمال المسطرة والبركار. ونجد الترتيب BJKLM كما هو عليه في الشكل الأول في النص. (لا يلعب الطولان S و O أي دور في النتائج).

3) يبدأ الأبهري في هذه المقدمة من القسمة (B، G، E، A) للمقطع AB التي حصل عليها في المقدمة 4. ونصادف حالة مماثلة في رسالة ابن الحسين الذي يبرهن قضيتين قبل العمل على رسم القطع الناقص. وليست هاتان القضيتان منفصلتين عن مقدمات الأبهري. ومن وجهة النظر هذه، فإن مقارنة الرسالتين قد تنيرنا في شأن غرابة وقعت في المقدمة الخامسة.

لدى ابن الحسين في القضية 1[62] مقطع AB ونقطة C تقع عليه، يقيم عموداً Bx على AB وعموداً آخر AG على AB. ويريد رسم مستقيم من G يقطع AB في E و Bx في L بحيث يتحقق $BC^2 = BL \, . \, CE$.

إذا كانت D على امتداد AB وتحقق $CB^2 = AG \, . \, BD$، فإن النقطة E المعرفة بالعلاقة $(DC + CE)\, CE = AC \, . \, BD$ هي النقطة المطلوبة. هذه هي طريقة ابن الحسين.



الشكل. 77

تبين المقارنة بين هذا النص ونص الأبهري أن المسألة المطروحة واحدة ماعدا وضع الأبهري AD = AG (الشكل. 75) [هنا AG = AC]. وهذه الفرضية لم تدخل في البرهان. أما هنا فـــ AG غير مقيدة، ويذكرنا المؤلف أن إنشاء النقطة D يقابل الإنشاء المعطى سابقاً أثناء دراسة القطع المكافئ. والخلاصة أن لدينا القسمتين التاليتين:

المقدمة 4 (الأبهري) A E G B I حيث $BA \perp BC$ و $BG^2 = BC \, . \, GE$

القضية 1 (ابن الحسين) A E C B D حيث $BA \perp BL$ و $BC^2 = BL \, . \, CE$

أي أن لدينا في واقع الأمر نفس القضية.

لننظر الآن إلى المقدمة 5. تنتهي هذه المقدمة، في رسالة الأبهري، بفقرتين لا نرى فيهما أي صلة بموضوع رسم القطوع المخروطية القادم. ونريد فهم هذه الغرابة.

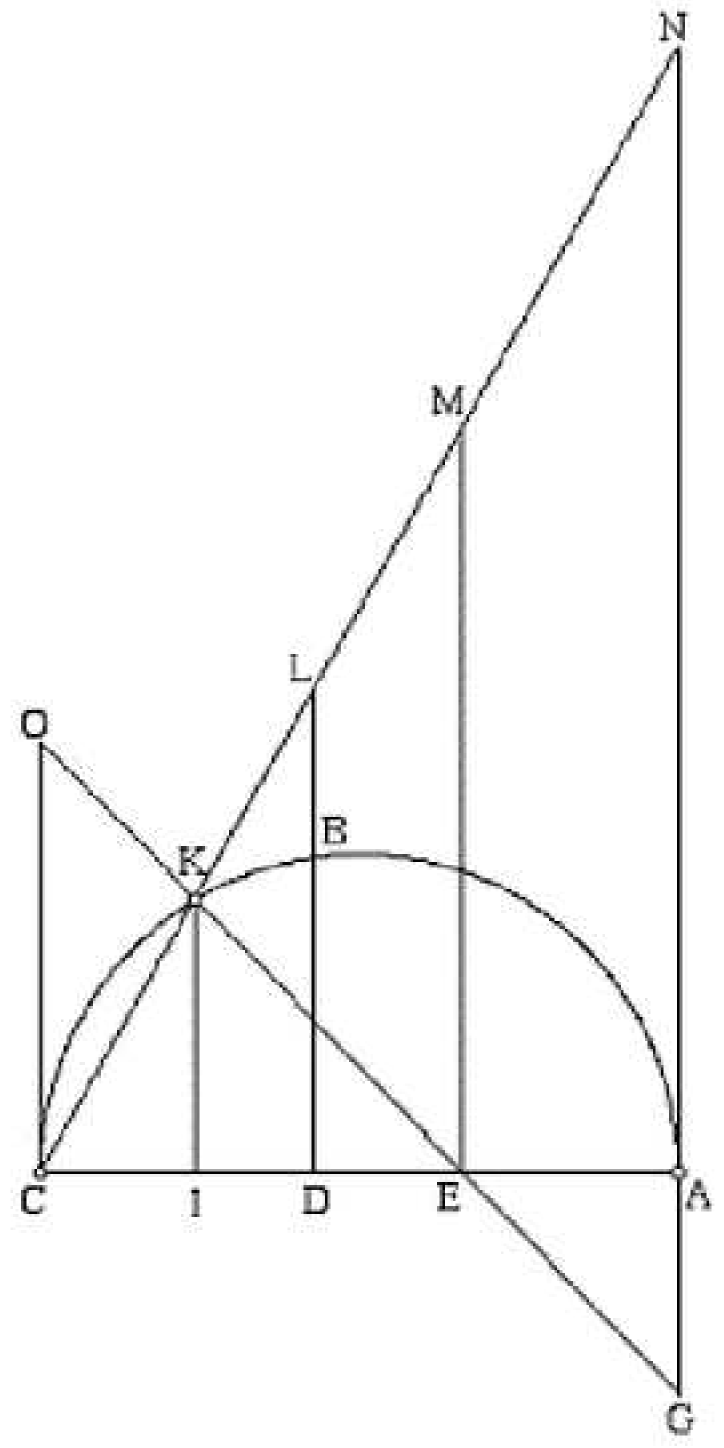
لقد رأينا الأبهري يبدأ فعلاً بالتقسيم المثبت في المقدمة 4، وتحديداً (G، B، E، A) [الشكل. 75] كي يبرهن على الجزء الأول من المقدمة 5. ويبدأ ابن الحسين بطريقة مماثلة بالتقسيم (B، C، E، A) المثبت في القضية الأولى (المقدمة الأولى في القطع الناقص) مغيراً الحروف لـــ (C، D، E، A). ثم يقيم الأعمدة على AC من النقط D، E، A. يريد بعد ذلك رسم مستقيم من النقطة C يقطع الأعمدة في النقاط L، M، N على الترتيب ويقطع الدائرة، التي قطرها AC، في النقطة K بحيث يكون

---

62 Woepcke, 'Trois traités arabes sur le compas parfait', pp. 52-54.

$$\frac{CM}{MN} = \frac{CL^2}{H}$$

حيث H طول معلوم و CK = LM.



الشكل. 78

سيتحدد المستقيم المطلوب بالنقطة K على الدائرة التي تحقق $CK^2 = CA . DE$.

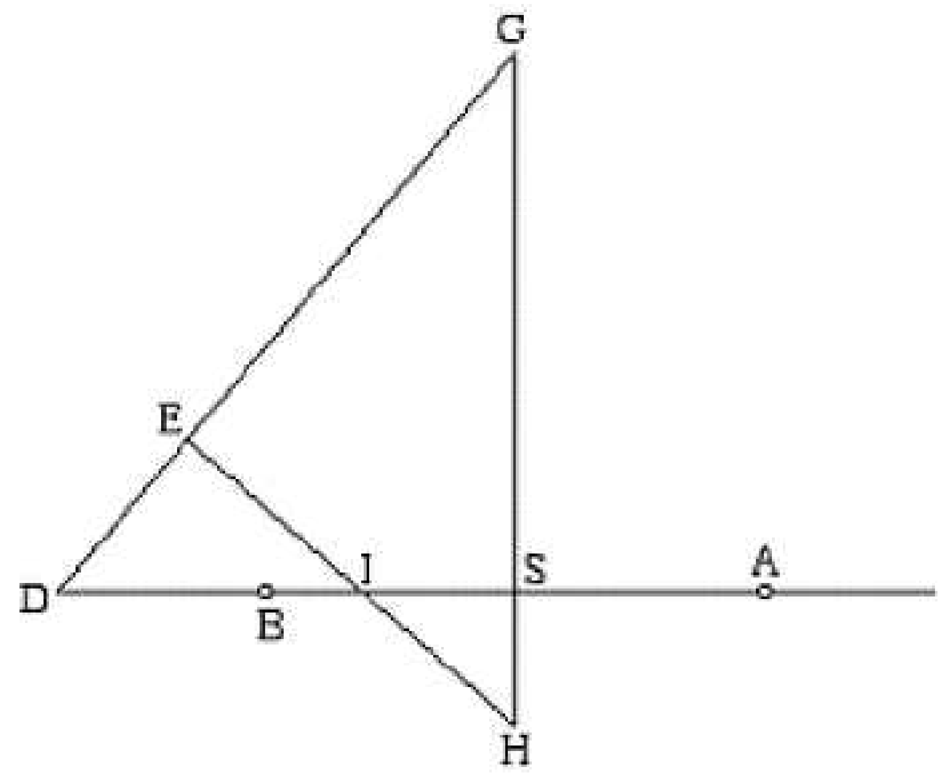
ومن الواضح أن التقسيمين، على المستقيم BM (الأبهري)، وعلى المستقيم CN (ابن الحسين)، متطابقان.

والنتيجة أن الجزء الأول من المقدمة 5 في رسالة الأبهري والقضية 2 في رسالة ابن الحسين يتعلقان بنفس المسألة ويصلان إلى تقسيم متطابق للمستقيم.

إلا أننا لاحظنا أن المقدمة 5 تنتهي بفقرتين لا يبدو أنهما ستستعملان في رسم القطع الناقص، كما أنهما لا تشبهان قضية ابن الحسين الثالثة التي تزودنا بآخر المقدمات التي نحتاجها لرسم القطع الناقص. ومع ذلك فقد يكون بإمكان هذه القضية 3 مساعدتنا في إلقاء الضوء على ما حدث.

المعلوم في هذه القضية هو المقطع AB ومنصفه العمودي عليه في النقطة C. والمطلوب هو إيجاد مستقيم يقطع امتداد AB في I والمنصف العمودي في Q وإيجاد نقطة S على المقطع IQ تتميز بثلاث خواص. سيستعمل كل من ابن الحسين والأبهري في نصيهما مستقيماً من هذا النوع لرسم القطع الناقص. ويشرح ابن الحسين هذا كله على

وجه التمام فيما يخص التقسيم G، E، D. لكن الأبهري، عندما يعمل على رسم القطع الناقص في رسالته، يعطي النقطة D على AB والنقطة G على المنصف العمودي بدون أدنى تبرير.



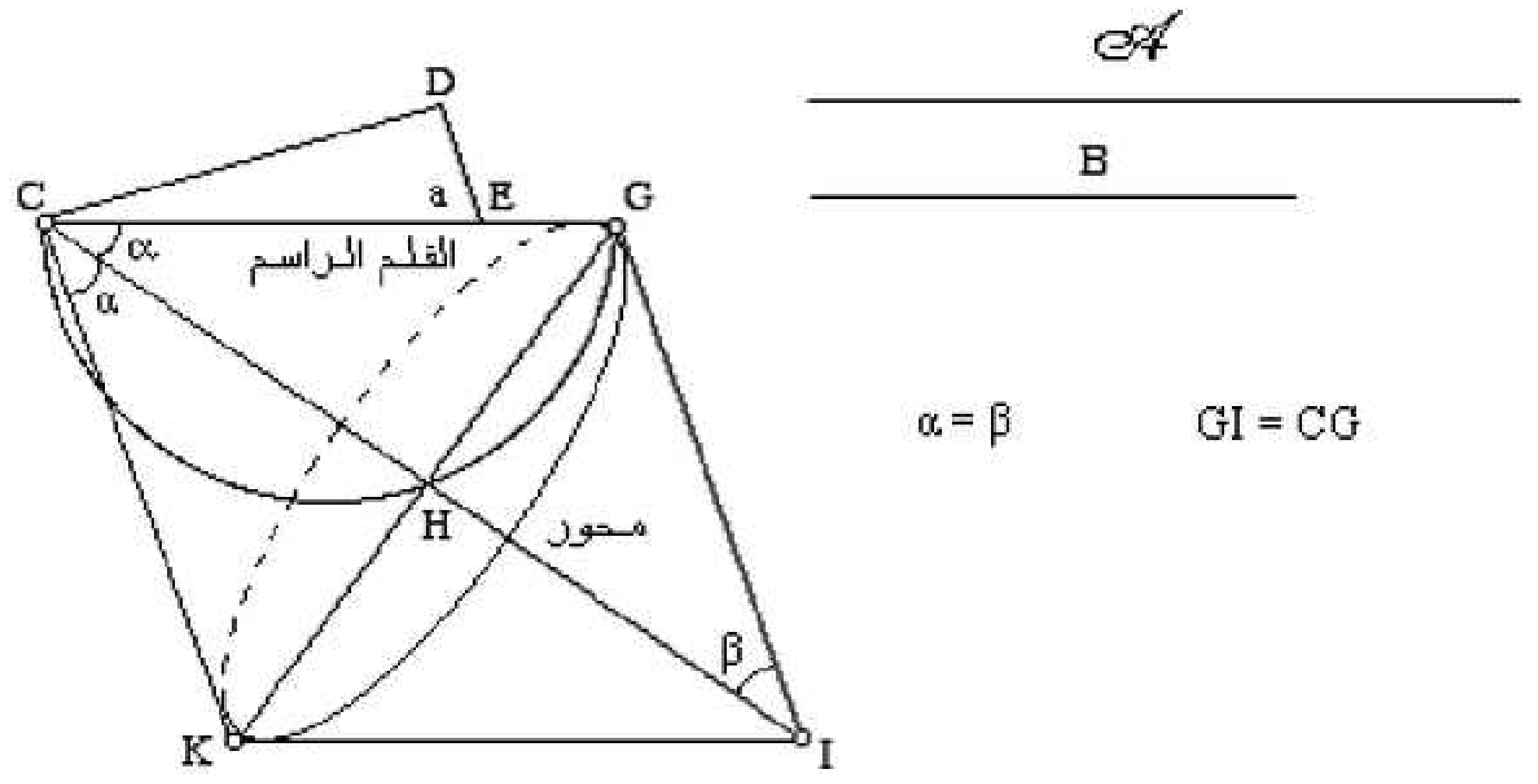
الشكل. 79

يأخذ بعد ذلك النقطة D على امتداد AB ويحددها على النحو التالي:

"ونجعل د ز إلى هـ د كـ ا ب إلى م و د ز في هـ د كـ ا د في ب د بحيث إذا أخرجنا من هـ عموداً يلقى ب س على ط يكون ط هـ كـ جـ <طول معلوم لمحور البركار> لما تقدم"[63]. إن كل المسألة هي في فهم المقصود من هذا التعبير الأخير. أحد أمرين: إما أن تكون هناك مقدمة ناقصة، حذفت أثناء النسخ أو أثناء كتابة دروس الأستاذ؛ وإما أن الأبهري يتحدث عن الإنشاء المستخدم لرسم القطع الزائد. ونحن نميل إلى التفسير الأول لأنه ينيرنا في الإجابة على السؤال التالي لماذا توجد إضافات للمقدمة الخامسة؟

رسم القطع المكافئ: طول محور البركار $\mathscr{A}$. ليكن $CD = \frac{\mathscr{A}}{2}$ و $DE = \frac{B}{8}$ حيث $CD \perp DE$ و B *الضلع القائم* للقطع المكافئ. ثم لتكن G نقطة على CE تحقق EG = ED. نأخذ على الدائرة التي قطرها CG نقطة H بحيث يكون CH = CD، كما نأخذ النقطتين K و I بحيث يكون CI = 2CH ($CI = \mathscr{A}$) وGK = 2GH. نأخذ البركار الذي محوره CI وزاوية الرأس فيه $H\hat{C}G = \alpha$ وزاوية المركز $C\hat{I}G = \beta$؛ لدينا $H\hat{C}G = C\hat{I}G$. عندما يدور حامل القلم الراسم CG حول CI فإن المستقيم CG يحدث مخروطاً ويصل إلى الوضع CK و CK مواز لـ GI.

[63] انظر أدناه ص. 845، السطر 3–5.



الشكل. 80

إن القطع الذي يرسمه رأس القلم الراسم في المستوى المار بـــ GI والعمودي على المستوى ICG هو قطع مكافئ محوره IG ورأسه G و*ضلعه القائم* B لدينا

$$GC^2 + GE^2 = (CE + EG)^2 + GE^2 = CE^2 + 2EG^2 + 2EG \,.\, CE$$
$$= CE^2 + 2EG \,.\, CG$$

لكن

$$DE = GE \quad \text{و} \quad CE^2 = CD^2 + DE^2$$

والحاصل أن

$$GC^2 + GE^2 = CD^2 + GE^2 + 2EG \,.\, CG$$

ومنه

$$CG^2 = CD^2 + 2EG \,.\, CG$$

ومن جهة أخرى

$$GC^2 = CH^2 + HG^2$$

وبأخذ بعين الاعتبار أن CH = CD فإن

$$KG^2 = 8 \,.\, EG \,.\, CG = B \,.\, CG \quad \text{و} \quad HG^2 = 2EG \,.\, CG$$

وهكذا فإن

$$\frac{B}{KG} = \frac{KG}{GI}$$

لأن CG = GI (CGIK معين)؛ ينتج عن ذلك أن للقطع المكافئ المرسوم *الضلع القائم* B حسب القضية 11 من الكتاب الأول *للمخروطات* لأبلونيوس.

لنكتب معادلة القطع المكافئ في الإحداثيات (Gx ،Gy) حيث Gx عمودي على المستوى $\mathscr{P}$ وGy منطبق على GI ونضيف المحور GZ العمودي على المستوى $\mathscr{Q}$، الذي هو مستوى القطع.

لتكن إحداثيات النقطة I ‏(0، a، 0) وإحداثيات C ‏(c، b، 0)؛ لدينا $b^2 + c^2 = a^2$ لأن GC = GI.

لتكن M نقطة ما على القطع إحداثياتها (O، y، x). تحقق معادلة القطع المكافئ تساوي الزاويتين MCI وGCI وبأخذ جيبي التمام:

$$\frac{(b - a)(b - y) + c^2}{\sqrt{x^2 + (b - y)^2 + c^2}\sqrt{(b - a)^2 + c^2}} = \frac{b(b - a) + c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}\sqrt{(b - a)^2 + c^2}}$$

وبالاختصار، آخذين بعين الاعتبار أن $b^2 + c^2 = a^2$ نجد:

$$x^2 = 2(a + b)y$$

حيث نرى أن *الضلع القائم* للقطع المكافئ $2(a + b) = D$ هو الذي سميناه B أعلاه.

نجد في المثلث CGI بإسقاط عمود للارتفاع من C،

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \mathrm{tg}\ C\hat{I}G = \frac{c}{a - b}$$

ونحصل منه

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\ \alpha} = \frac{a - b}{2a}$$

وأخيراً

$$\cos\ \alpha = \sqrt{\frac{a - b}{2a}}$$

إن محور البركار $\mathscr{A}$ هو $\sqrt{2a(a - b)} = \sqrt{(a - b)^2 + c^2}$. ولذا فإن

$$D \cos\alpha = 2(a + b)\sqrt{\frac{a - b}{2a}} = 2\mathscr{A}\ \sin^2\alpha = 2\sqrt{2a(a - b)}\frac{a + b}{2a}$$

لأن $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{a - b}{2a} = \frac{a + b}{2a}$.

ونستخلص من ذلك.

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{D^2}{16\mathscr{A}^2} + 1} - \frac{D}{4\mathscr{A}}$$

لنحسب المقادير a، b، c؛ لدينا

$$a + b = \frac{D}{2} \quad ، \quad a - b = \frac{c}{\mathrm{tg}\ \alpha}$$

ومنه

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{2} + \frac{c}{\mathrm{tg}\ \alpha}\right) \quad ، \quad b = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{2} - \frac{c}{\mathrm{tg}\ \alpha}\right)$$

لكن

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{2}\frac{Dc}{\text{tg}\,\alpha}$$

ومنه

$$c = \frac{D}{2\text{tg}\,\alpha}$$

إذاً

$$a = \frac{D}{4\sin^2\alpha} \quad ، \quad b = \frac{D}{4}\left(1 - \frac{1}{\text{tg}^2\alpha}\right)$$

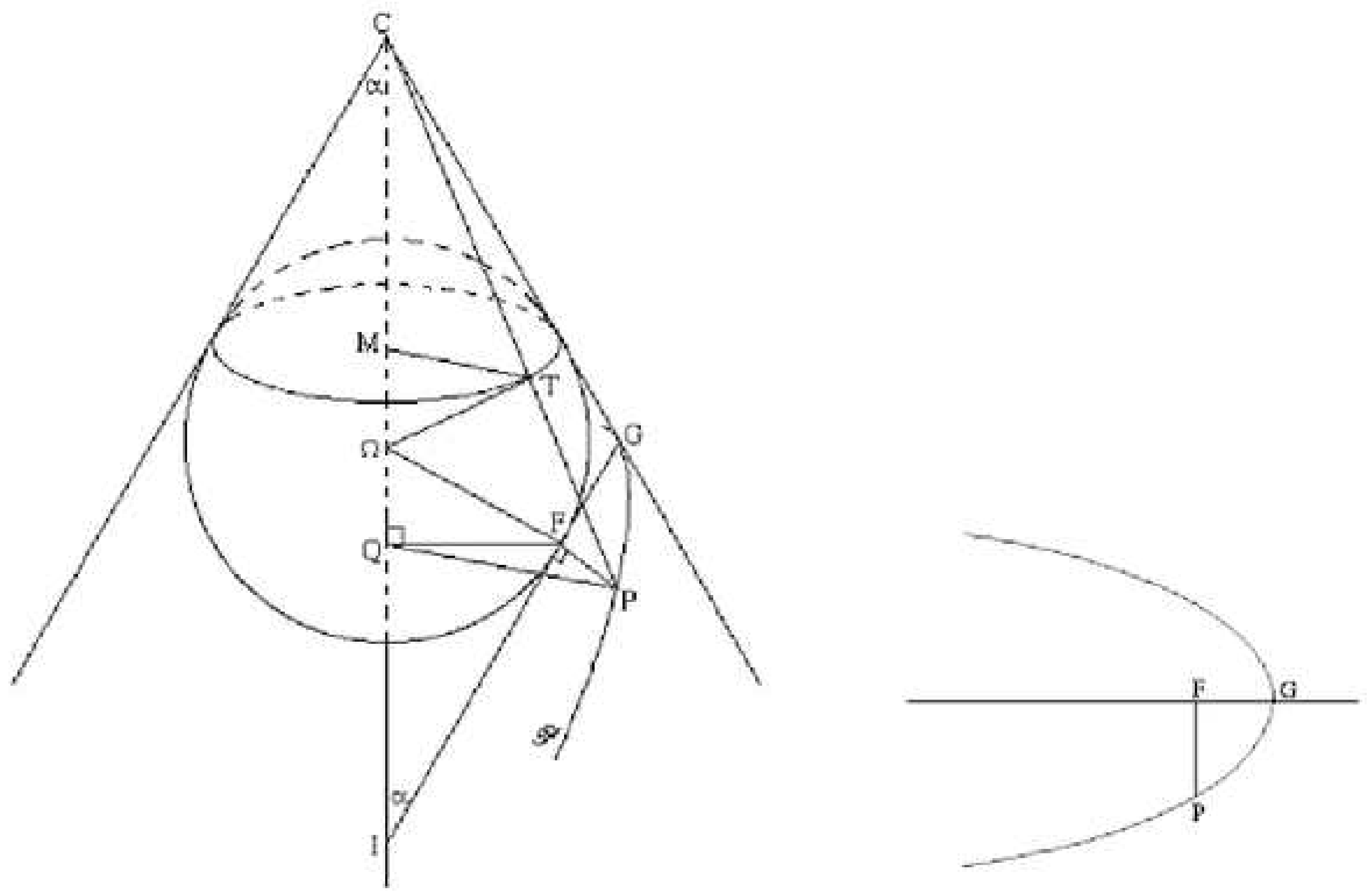
ملاحظات :

1) يحدد فوبك الضلع القائم D باستعمال مبرهنة داندلان Dandelin على النحو التالي:

لنذكر أنه، إذا كان $\mathcal{P}$ قطعاً مكافئاً ذا محور GF ورأس G وبؤرة F، يمكننا أن نحدد وضع نصف *الضلع القائم* $\frac{1}{D}$ برسم FP (حيث P نقطة ما على القطع المكافئ) ورسم العمودي على المحور الذي يبعد عنه بـــ $FP = \frac{1}{2}D$.

لنأخذ مخروطاً دورانياً رأسه C محوره CI ماراً بـــ $\mathcal{P}$. نعلم أن الكرة المرسومة داخل المخروط والمماسة لمستوى $\mathcal{P}$ تمس هذا المستوى في البؤرة F (مبرهنة داندلان) بحيث $PF = PT = \frac{1}{2}D$. إن المستوى $\mathcal{P}$ عمودي على مستوى الشكل، فـــ PF، العمودي على GI، عمودي على مستوى الشكل وعلى المستقيم CI للتخصيص. نرسم المستوى FPQ العمودي على CI المار بـــ PF.

ليكن Ω مركز الكرة و M مركز الدائرة المماسة للمخروط وT نقطة تماس CP مع الكرة. لدينا $\Omega C \,.\, \Omega M = \Omega T^2$ ؛ و $\Omega I \,.\, \Omega Q = \Omega F^2$ لأن GI مماس للكرة، الزاوية $\Omega\hat{F}I$ قائمة.



الشكل. 81

نستنتج أن

$$MQ = \Omega M + \Omega Q = \frac{\Omega T^2}{\Omega C} + \frac{\Omega F^2}{\Omega I} = \frac{\Omega T.\Omega F}{\Omega C.\Omega I}(\Omega I + \Omega C) = CI \sin^2\alpha = \mathscr{A}\sin^2\alpha$$

لأن

$$\frac{\Omega T}{\Omega C} = \sin\alpha = \frac{\Omega F}{\Omega I} \qquad \text{و} \qquad \Omega T = \Omega F$$

وبما أن

$$MQ = TP\cos\alpha = PF\cos\alpha = \frac{1}{2}D\cos\alpha$$

فلدينا إذاً $D\cos\alpha = 2\mathscr{A}\sin^2\alpha$ أو $D\cos\alpha = 2\mathscr{A}(1-\cos^2\alpha)$ وهي معادلة من الدرجة الثانية نستخرج منها

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{D^2}{16\mathscr{A}^2} + 1} - \frac{D}{4\mathscr{A}}$$

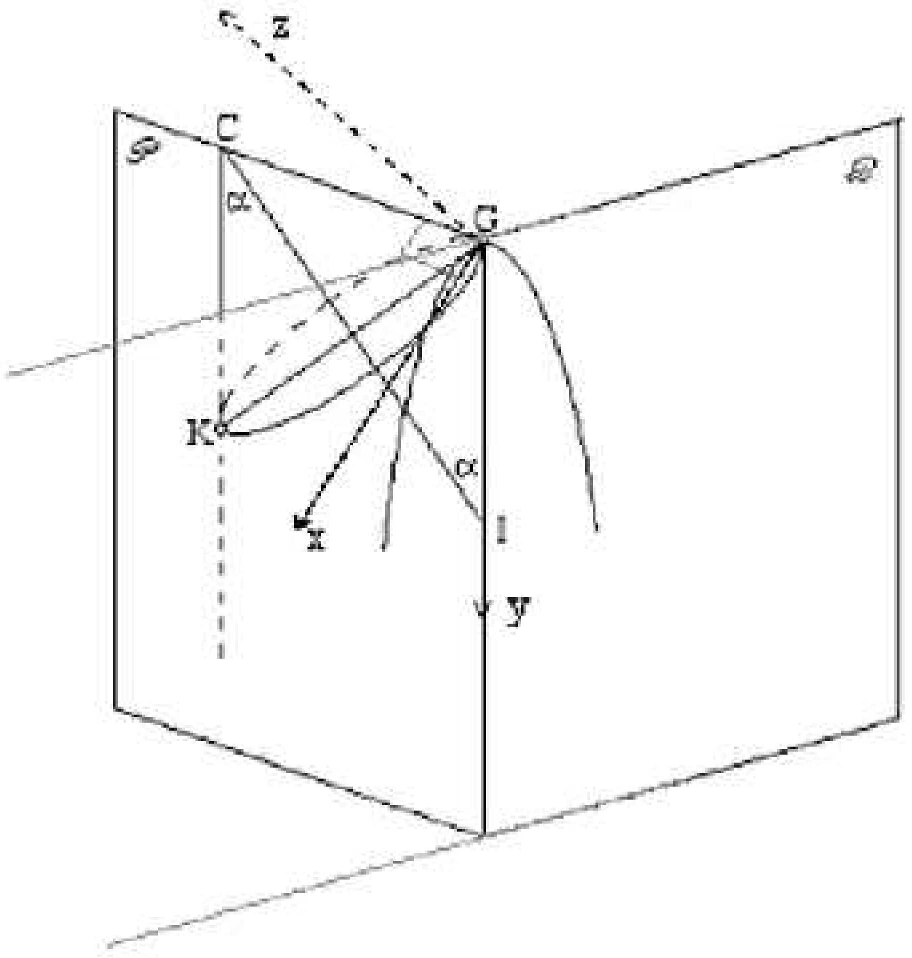
2) يطرح ابن الحسين مسألة الأبهري على نفس الشكل تماماً: لدينا *الضلع القائم* للقطع المكافئ وطول محور البركار والمطلوب تعيين زاوية رأس البركار α. يتطابق هذا التعيين في الرسالتين أي باستعمال المعين الذي يمثل قطره محور البركار.

والطريقة المستعملة من قبل ابن الحسين في القضية 5 مطابقة للطريقة المتبعة هنا من قبل الأبهري.

الشكل في الأبعاد الثلاثة: ليكن $\mathscr{P}$ مستوى المثلث GCK و Π مستوى قاعدة المخروط، الدائرة التي قطرها KG، و $\mathfrak{Q}$ المستوى الذي يقطع $\mathscr{P}$ على خط مواز للمولد CK.

أي أن

$\mathcal{P} \perp \Pi$ و $\mathcal{P} \perp \mathfrak{Q}$. $\mathcal{P} \quad \mathfrak{Q} = (KG)$ و $\Pi \quad \mathfrak{Q} = (GI)$ و $\mathcal{P} \quad \mathfrak{Q} = (Gx)$ ، $\Pi \quad GI \perp (Gx)$



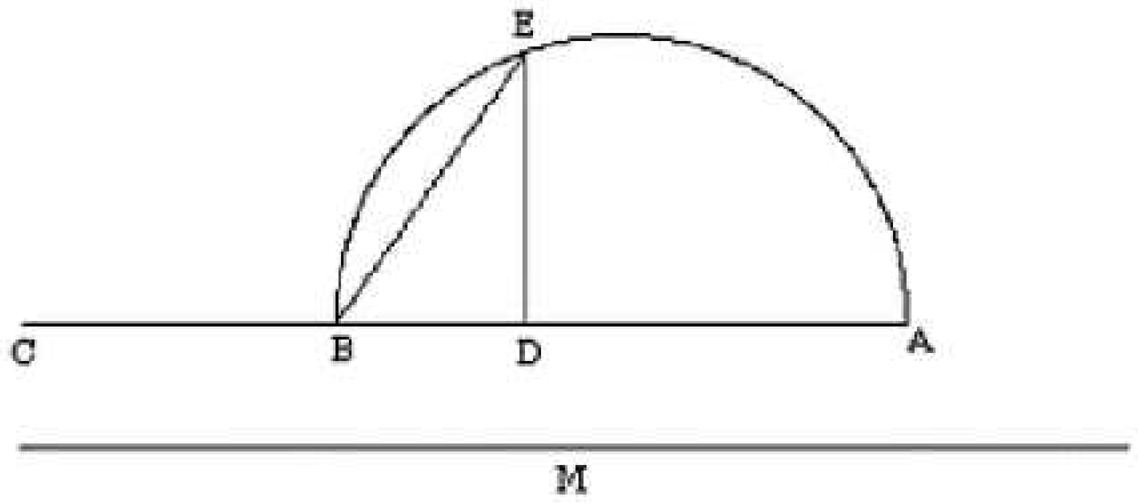
الشكل. 82

والمولد CK مواز للمستوي $\mathfrak{Q}$.

رسم القطع الزائد:

إنشاء قطع زائد محوره SL معلوم وكذا *ضلعه القائم* M بواسطة البركار:

لنضع $AB = \frac{M}{2}$ و $AB \cdot BC = SL^2$ و $\frac{DC}{DB} = \frac{DB}{DA}$.

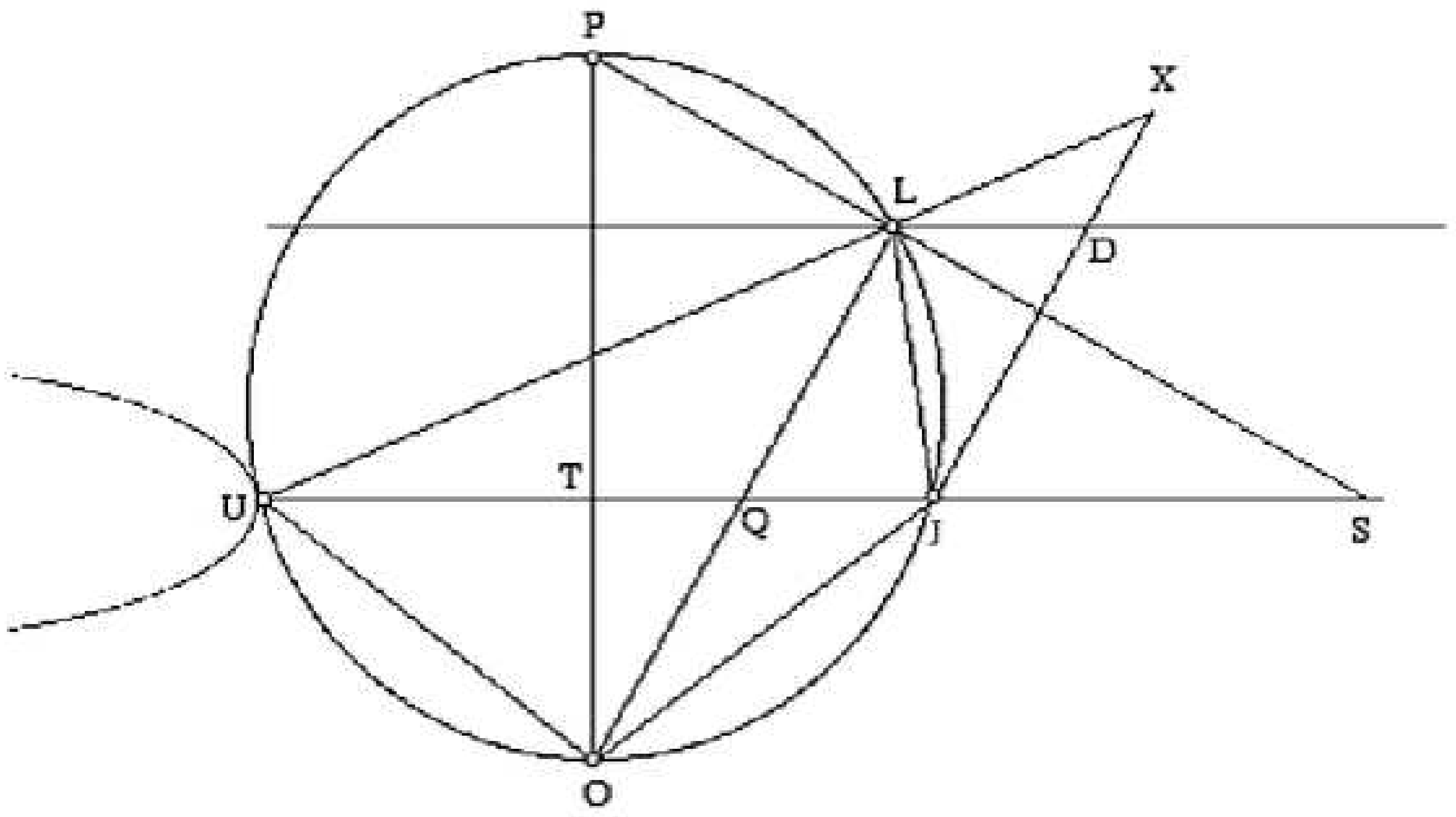


الشكل. 83

النقاط C و D وكذا AB هي ما وجدت في المقدمة 3 (SL يحل هنا محل I، فهو معلوم) D منشأة بواسطة المقدمة 2. نرسم نصف الدائرة التي قطرها AB و $AB \perp ED$. تعطينا نتيجة المقدمة 3 العلاقة

$$\frac{SL^2 + BE^2}{BE^2} = \frac{BE^2}{EA^2} \qquad (1)$$

$$EA^2 = \frac{M^2}{4} - EB^2$$



الشكل. 84

نرسم LQ ⊥ LS، حيث LQ = BE، ونمدده إلى النقطة O حيث QL = QO. ونرسم المستقيم SQ وكذا OT ⊥ SQ، فيقطع SL في P.

نرسم الدائرة التي قطرها PO؛ تمر بالنقطة L وتقطع SQ في النقطتين U و J. إن T هي وسط UJ.

وبما أن BE = LQ فإن العلاقة (1) تعطينا

$$\frac{SL^2 + LQ^2}{LQ^2} = \frac{LQ^2}{\frac{M^2}{4} - LQ^2}$$

أو

$$\frac{SQ^2}{LQ^2} = \frac{LQ^2}{\frac{M^2}{4} - LQ^2}$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$\frac{SQ^2}{LQ^2} = \frac{QO^2}{QT^2} \qquad \text{(تشابه المثلثين SLQ و OTQ)}$$

وبما أن LQ = QO، فإن $LQ^2 = LQ\,.\,QO$

$$\frac{\frac{M^2}{4} - LQ\,.\,QO}{QO^2} = \frac{QT^2}{QO^2} \Rightarrow QT^2 = \frac{M^2}{4} - LQ\,.\,QO$$

ثم إن

$LQ . QO = QU \cdot QJ$ و $TJ^2 = QU . QJ + QT^2$ (من تشابه المثلثين LQJ و UQO)

ومنه $QT^2 = TJ^2 - LQ . QO$

وفي النتيجة

$$TJ^2 = \frac{M^2}{4}$$

وإذاً $UJ = M$.

لدينا من تساوي الزاويتين $U\hat{L}O$ و $O\hat{L}J$، اللتين تقطعان قوسين متساويين، ومن $S\hat{L}Q = P\hat{L}Q = \frac{\pi}{2}$

$$S\hat{L}J = P\hat{L}U = S\hat{L}X$$

فإذا أخذنا البركار ورأسه في L ومحوره SL وأدرنا المستقيم LJ حول SL فإننا نولد مخروطاً JLX. يقطع المستوي العمودي على مستوى الشكل والمار بالمستقيم SJQU المولد LJ في J والمولد LX في U (على امتداد LX).

دراسة الضلع القائم في هذا القطع الزائد:

$DL \parallel JU$، $JD \parallel LQ$، والمثلثان UQL و LDX متشابهان $\Leftarrow \frac{DL}{DX} = \frac{QU}{QL}$.

والمثلثان JLQ و DLJ متساويان $\Leftarrow \frac{DL}{DJ} = \frac{QJ}{QL}$.

وهكذا لدينا

$$\frac{DL^2}{DX . DJ} = \frac{JQ . QU}{QL^2} = \frac{LQ . QO}{QL^2} = \frac{QO}{QL} = 1$$

وحسب تعريف *الضلع القائم* c (أبلونيوس I.12)

$$\frac{UJ}{c} = \frac{DL^2}{DX . DJ} = 1$$

وبالتالي $c = UJ$.

وهكذا نكون قد رسمنا القطع الزائد ذا المحور المجانب UJ و*الضلع القائم* $UJ = M$ وهو قطع زائد قائم. وكونه كذلك ناتج عن أخذنا $QO = LQ$.

إن طريقة الإنشاء هذه هي نفس طريقة ابن الحسين، مع الفارق أن هذا الأخير يبني الشكل بترتيب معاكس لترتيب الأبهري: أي أنه يبدأ بوضع UJ مساويا للمحور المجانب للقطع الزائد (مستعملاً نفس حروف الأبهري) ثم يرسم عليه العمود المنصف OP والمستقيم OQL الذي يحقق $\frac{UJ}{M} = \frac{OQ}{QL}$ و $UQ . QJ = OQ . QL$. وهذه المرة OQ ليس مساوياً بالضرورة لـــ QL وليس القطع الزائد قائماً بالضرورة. كان بإمكان الأبهري أن يفعل مثله عوضاً عن وضعه $QO = LQ$ فتصبح الحالة عامة بكل معنى الكلمة. قد يعود الأمر إلى عدم الانتباه.

لنكتب معادلة القطع الزائد آخذين JS كمحور للتراتيب y والعمودي في J على المستوى $\mathscr{P}$، الذي شكله المثلث XLJ المولد للمخروط، كمحور للفصول. ونأخذ بعد ذلك Jz عمودياً على مستوى القطع الزائد $\mathscr{Q}$ (المستوى القاطع) إحداثيات S في المستوى (Jz ،Jy) هي (0، a) وإحداثيات L هي (c ،-b).

لتكن N نقطة ما على فرع القطع الزائد ذي الرأس J، إحداثياتها (0، y ،x) نحصل على المعادلة المطلوبة بملاحظة أن $\alpha = S\hat{L}J = S\hat{L}M$ وبمساواة جيب تمام هاتين الزاويتين نحصل على

$$\frac{(a+b)(y+b)+c^2}{\sqrt{(a+b)^2}\sqrt{x^2+(y+b)^2+c^2}} = \frac{b(a+b)+c^2}{\sqrt{(a+b)^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}} \qquad (1)$$

أي

$$\left(b^2+c^2\right)\left((a+b)(y+b)+c^2\right)^2 = \left(x^2+(y+b)^2+c^2\right)\left(b(a+b)+c^2\right)^2 \qquad (2)$$

$$\left(ab+b^2+c^2\right)^2 x^2 = 2ac^2\left(ab+b^2+c^2\right)y + c^2y^2\left(a^2-b^2-c^2\right) \qquad (3)$$

وهكذا *فالضلع القائم* هو $M = \frac{2ac^2}{ab+b^2+c^2}$، بينما المحور المجانب هو $UJ = 2a\frac{ab+b^2+c^2}{a^2-b^2-c^2}$.

لنلاحظ أن $a^2 > b^2+c^2$ لأن $JS > JL\ (\alpha > \beta)$.

لدينا

$$\cos\alpha = \frac{JL^2+SL^2-JS^2}{2JL\,.\,SL} = \frac{b^2+c^2+ab}{\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{(a+b)^2+c^2}}$$

و

$$\cos\beta = \frac{JS^2+SL^2-JL^2}{2JS\,.\,SL} = \frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2+c^2}}$$

وهكذا نجد الزاويتين α و β معبراً عنهما بدليل a، b، c. يمكننا الآن تعيين الوسطاء انطلاقاً من *الضلع القائم* M والمحور المجانب UJ ومحور البركار SL.

لدينا

$$\cos\beta = \frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2+c^2}} \qquad \text{و} \qquad \mathscr{A} = \sqrt{(a+b)^2+c^2}$$

أي أن $a+b = \mathscr{A}\cos\beta$. فإذاً

$$\mathscr{A}^2 = (a+b)^2+c^2 = \mathscr{A}^2\cos^2\beta + c^2$$

ومنه

$$c^2 = \mathscr{A}^2\sin^2\beta \qquad \text{و} \qquad c = \mathscr{A}\sin\beta$$

لدينا من جهة أخرى $\left(b(a+b)+c^2\right)M = 2ac^2$، أي أن

$$M\left(\mathscr{A}\,b\cos\beta + \mathscr{A}^2\sin^2\beta\right) = 2\mathscr{A}^2\,a\sin^2\beta$$

ومنه
$$2\mathscr{A}\ a\sin^2\beta - Mb\cos\beta = \mathscr{A}\ M\sin^2\beta$$

لنكتب b بدليل a و $\mathscr{A}$ في هذه المعادلة، فنحصل على

$$a = \frac{\mathscr{A}M}{2\mathscr{A}\ \sin^2\beta + M\cos\beta}$$

ومنه
$$b = \mathscr{A}\ \sin^2\beta\ \frac{2\mathscr{A}\cos\beta - M}{2\mathscr{A}\ \sin^2\beta + M\cos\beta}$$

وهكذا عبرنا عن a، b، c بدليل $\mathscr{A}$، M و β.

لنضع هذه القيم في التعبير الذي يعطينا القطر المجانب UJ، فنحصل على المعادلة التي تعطينا الزاوية β:

$$b^2 + c^2 = \mathscr{A}^2\ \sin^2\beta\ \frac{4\mathscr{A}^2\sin^2\beta + M^2}{\left(2\mathscr{A}\ \sin^2\beta + M\cos\beta\right)^2}$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = \mathscr{A}^2\frac{M^2\cos^2\beta - 4\mathscr{A}^2\sin^4\beta}{\left(2\mathscr{A}\ \sin^2\beta + M\cos\beta\right)^2}$$

و
$$ab + b^2 + c^2 = \frac{2\mathscr{A}^3\sin^2\beta}{2\mathscr{A}\ \sin^2\beta + M\cos\beta}$$

وهكذا فإن $UJ\left(M^2\cos^2\beta - 4\mathscr{A}^2\sin^4\beta\right) = 4\mathscr{A}^2M\sin^2\beta$، وبالتالي لدينا المعادلة

$$\sin^4\beta + \left(\frac{M}{UJ} + \frac{M^2}{4\mathscr{A}^2}\right)\sin^2\beta - \frac{M^2}{4\mathscr{A}^2} = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بـــ $\sin^2\beta$ وبجذر ينتمي إلى [0،1].

كما أن العلاقات السابقة تسمح لنا بكتابة cosα بدليل sinβ والنتيجة هي

$$\cos\alpha = \frac{2\sin\beta}{\sqrt{4\mathscr{A}^2\sin^2\beta + M^2}}$$

وهكذا نكون قد حددنا الزاويتين α وβ بدليل عناصر القطع الزائد المعطاة لإنشائه (UJ، M)، وكذا محور البركار.

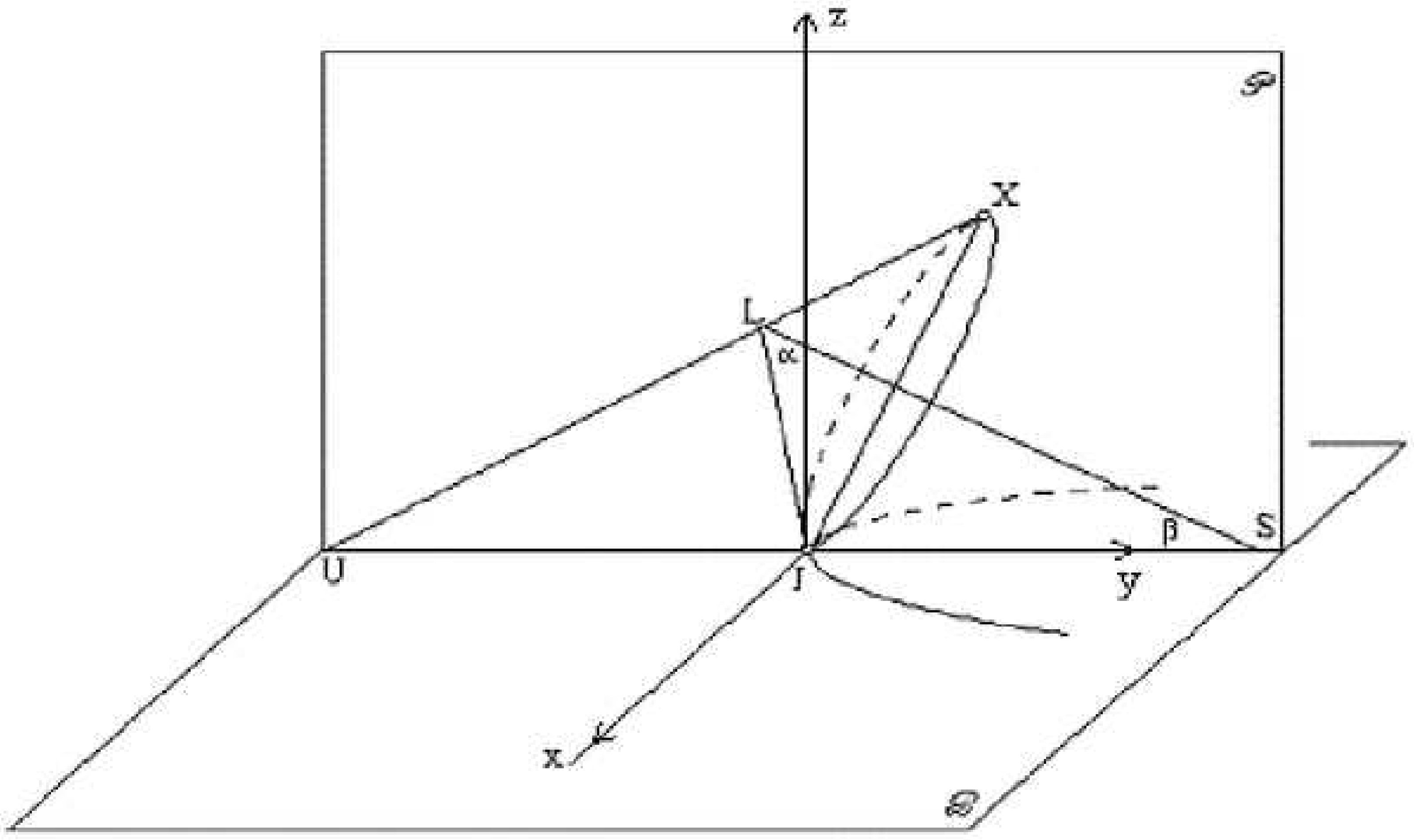
نلاحظ على الفور أنه إذا أصبح UJ لامتناه، فإن المعادلة التي تعطي β تتحول إلى المعادلة التي وجدناها من أجل القطع المكافئ

$$\sin^4\beta = \frac{M^2}{4\mathscr{A}^2}\ \cos^2\beta$$

أي أن
$$\sin^2\beta = \frac{M}{2\mathscr{A}}\ \cos\beta$$

ملاحظة: ينطلق فوبك في مقدمته لرسالتي ابن الحسين والقوهي من مبرهنة داندلان ويعبر عن نصف *الضلع القائم* بكونه ترتيب نقطة القطع الزائد المسقطة على البؤرة.

الشكل بثلاثة أبعاد: ليكن $\mathcal{P}$ مستوى المثلث JLX الذي يولد المخروط. دائرة قاعدة المخروط وقطرها JX تقع في مستوى Π عمودي على $\mathcal{P}$، $\mathcal{P} \perp \Pi$ و $\Pi \quad \mathcal{P} = (JX)$. مستوى القطع $\mathcal{Q}$ عمودي على $\mathcal{P}$ $\mathcal{P} \perp \mathcal{Q}$ و $\mathcal{Q} \quad \mathcal{P} = (US)$.

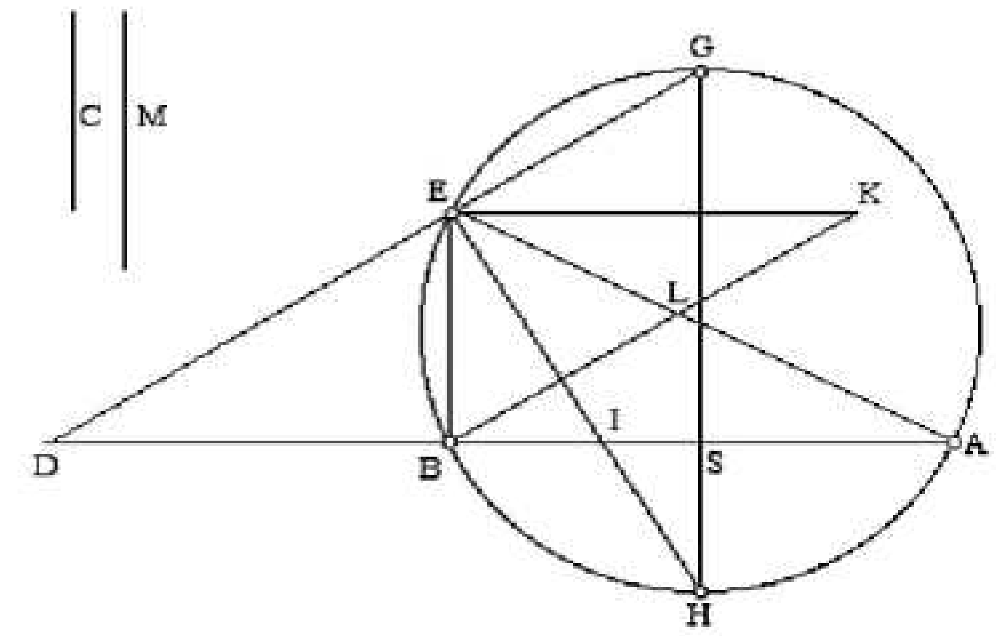


الشكل. 85

يقطع المستوى $\mathcal{Q}$ المولد LJ في J والمولد LX المدد في U؛ $\mathcal{P} = JX$ Π و $(UJ) \perp (JX)$.

رسم القطع الناقص: رسم قطع ناقص محوره الكبير AB و*ضلعه القائم* M معلومان.

D نقطة على AB و G نقطة على العمود المنصف لــ AB؛ وضع هاتين النقطتين غير محدد تماماً (انظر التعليق أسفله).



الشكل. 86

نحدد على المستقيم GD نقطة E بالعلاقتين $\frac{AB}{M} = \frac{GD}{DE}$ و $GD \,.\, DE = AD \,.\, DB$. نرسم المستقيم العمودي على EG في E، فيلقى AB في I و GS في H (S وسط AB). نرسم الدائرة التي قطرها GH؛ تمر هذه الدائرة في النقط E و A و B. نرسم من E موازياً لــ AB ومن B موازياً لــ GD. يلتقي هذا المستقيمان في النقطة

K، AB ∥ EK و BK ∥ GD؛ يلقى BK المستقيم AE في L. المثلث BEL متساوي الساقين $BE = BL$ لأن العمود BI على الضلع BL ينصف زاوية الرأس $H\hat{E}A = B\hat{E}H$ (تحددان قوسين متساويين).

نأخذ EI كمحور للبركار ونجعل EB يدور حوله لتوليد مخورط دوراني. إن المستوى $\mathcal{Q}$ العمودي على مستوى الدائرة على استقامة AB يقطع المولد EB في B والمولد EL في A. إن مقطع سطح المخروط مع هذا المستوى هو القطع الناقص المطلوب ذو المحور الكبير AB.

نضع رأس البركار في E، محوره EI وقاعدته IB والرجل الحاملة للقلم الراسم EB. تدور هذه الرجل حول EI مع بقاء زاوية الرأس دون تغيير، فيرسم القلم الراسم عندئذ القطع الناقص في المستوى $\mathcal{Q}$.

دراسة الضلع القائم:

$$\frac{AB}{M} = \frac{GD}{DE}$$

و

$$GD \,.\, DE = AD \,.\, DB$$

لكن $DE = BK$، لذا

$$\frac{GD}{DE} = \frac{DB}{BK} \cdot \frac{AD}{DE} = \frac{KE}{KB} \cdot \frac{AD}{DE}$$

ومن تشابه المثلثين ADE و ABL، لدينا

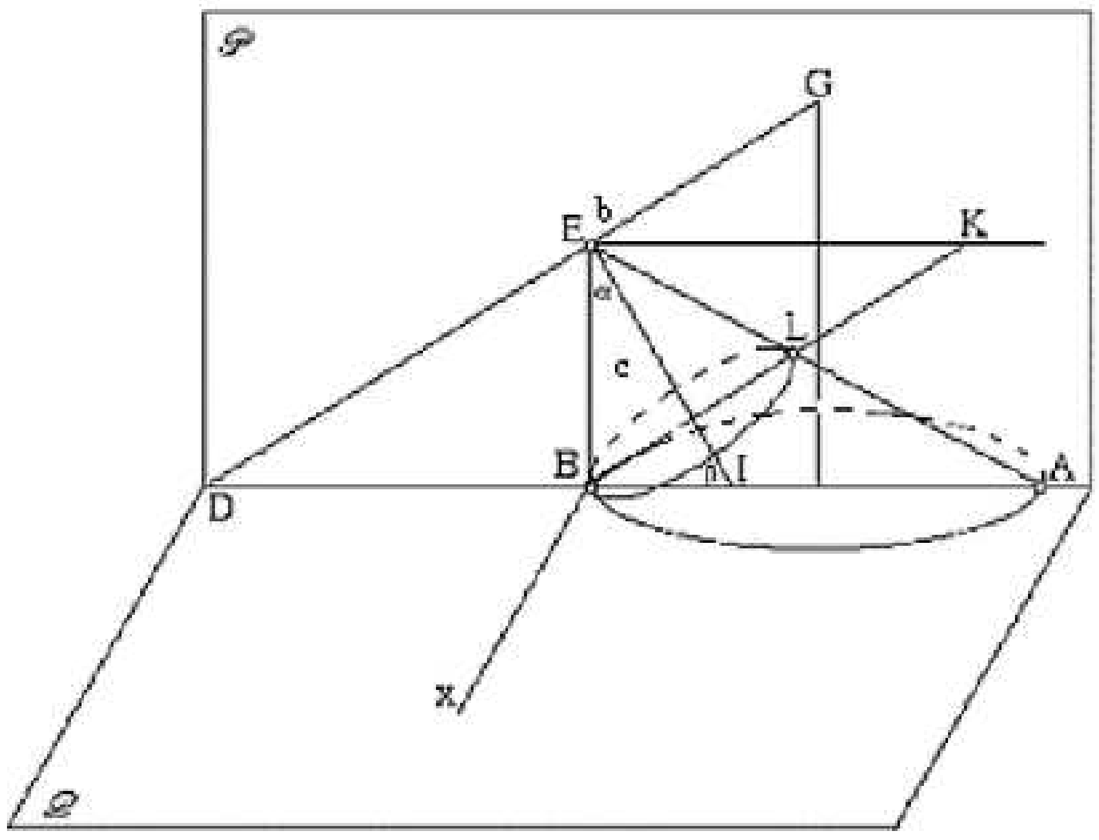
$$\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BL} = \frac{EK}{KL} = \frac{EK^2}{EK \,.\, KL}$$

وإذاً

$$\frac{GD}{DE} = \frac{EK^2}{KB \,.\, KL} = \frac{AB}{M}$$

وهكذا فإن M هو *الضلع القائم* للقطع المخروطي ذي القطر AB (أبلونيوس I.13).

الشكل في الأبعاد الثلاثة: لنرمز بـــ $\mathcal{P}$ لمستوى المثلث EBL و بـــ Π لمستوى الدائرة، قاعدة المخروط، التي قطرها BL، ولمستوى القطع بـــ $\mathcal{Q}$ ، لدينا $\mathcal{Q} \perp \mathcal{P}$ و $\Pi \perp \mathcal{P}$، $\mathcal{P} \quad \Pi = BL$، $\mathcal{P} \quad \mathcal{Q} = AB$ و $\mathcal{Q} = Bx \quad \Pi$ و $Bx \perp \mathcal{P}$ أي $Bx \perp AB$.



الشكل. 87

تعليق: 1) لم يفصل الأبهري في كيفية اختيار النقطتين D و G. يعطي الشكل D على امتداد AB و G على العمود المنصف لـــ AB؛ لكننا لا نعرف الطولين DB و SG.

يجب أن تحقق النقطة E على GD الشرطين

$$\frac{GD}{DE} = \frac{AB}{M} \qquad (1)$$

و

$$GD \cdot DE = DA \cdot DB \qquad (2)$$

يحدد الشرط الأول وضع النقطة E على [DG] فقط؛ أما الشرط الثاني فيعبر عن وجود E على الدائرة ABG (قوة النقطة D). لكن ما هو شرط وقوع النقطة E المحققة للشرط (1) على الدائرة؟ يرتبط هذا الشرط بالضرورة بوضع النقطتين D و G.

$$\frac{GD}{DE} = \frac{AB}{M} \Rightarrow \frac{GD^2}{GD \cdot DE} = \frac{AB}{M} \Rightarrow GD^2 = \frac{AB}{M} \cdot GD \cdot DE$$

$$\Rightarrow GD^2 = \frac{AB}{M} \cdot DA \cdot DB \Rightarrow GS^2 + SD^2 = \frac{AB}{M} \cdot DA \cdot DB$$

$$GS^2 = \frac{AB}{M}\left(SD^2 - \frac{AB^2}{4}\right) - SD^2$$

وهكذا فالطول SG تابع الطول SD. فإذا كانت D معطاة عرفنا منها وضع G. وتعطينا الدائرة التي قطرها HG النقطة E على DG.

كتب الأبهري بعد أن تم الإنشاء ووجدت النقطة I "يكون $\overline{\text{هـــ ط}}$ (EI) كـــ $\overline{\text{جـــ}}$ (C) لما تقدم"[64] إلا أن الطول C لم يستخدم في الإنشاء. هل كان يريد القول ببساطة: سنأخذ EI كمحور للبركار كما فعلنا بـــ LS في حالة القطع الزائد؟

[64] ص. 845، سطر. 5.

2) لنكتب معادلة القطع الناقص بمحوري الإحداثيات (By، Bx) حيث Bx عمودي على المستوي $\mathscr{P}$ وBy منطبق على BA. ونأخذ Bz عمودياً على المستوى $\mathscr{Q}$. لتكن (0، a، 0) إحداثيات نقطة I (a = BI) و(c، b، 0) إحداثيات E و (0، y، x) إحداثيات نقطة ما N من القطع الناقص. ولنقم الآن بنفس الإجراءات التي قمنا بها في حال القطع الزائد فنحصل على المعادلة

$$\left(b^2 + c^2 - ab\right)^2 x^2 = 2ac^2\left(b^2 + c^2 - ab\right)y - c^2y^2\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$$

وهكذا *فالضلع القائم* هو $M = \dfrac{2ac^2}{b^2 + c^2 - ab}$ والمحور الكبير هو $AB = 2a\dfrac{b^2 + c^2 - ab}{b^2 + c^2 - a^2}$ ؛ لنلاحظ أن $b^2 + c^2 > a^2$ لأن $BE > BI$ حيث $\beta > \alpha$.

لدينا

$$\cos\alpha = \frac{EB^2 + EI^2 - IB^2}{2EB\,.\,EI} = \frac{b^2 + c^2 - ab}{\sqrt{b^2 + c^2}\sqrt{\left(b - a\right)^2 + c^2}}$$

و

$$\cos\beta = \frac{IB^2 + EI^2 - EB^2}{2IB\,.\,EI} = \frac{a - b}{\sqrt{\left(b - a\right)^2 + c^2}}$$

وكما في حال القطع الزائد يمكننا التعبير عن a، b و c بدليل M و $EI = \mathscr{A}$ والزاوية β. ونحصل عندئذ على المعادلة التي تعين β ومن ثم α. يُجرى الحساب كما في حالة القطع الزائد مع بعض التبديلات للإشارة ونجد

$$a = \frac{\mathscr{A}\,M}{2\mathscr{A}\sin^2\beta + M\cos\beta}\,,\ b = \mathscr{A}\sin^2\beta\frac{M - 2\mathscr{A}\cos\beta}{2\mathscr{A}\sin^2\beta + M\cos\beta}$$

و $c = \mathscr{A}\sin\beta$. وبالتالي

$$\sin^4\beta + \left(\frac{M^2}{4\mathscr{A}^2} - \frac{M}{AB}\right)\sin^2\beta - \frac{M^2}{4\mathscr{A}^2} = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بـــ $\sin^2\beta$ يقع جذرها الموجب في المجال [0،1] إذا كان $AB > M$، كما هو عليه الحال بالفعل لأن AB هو المحور الكبير فرضاً.

ثم نحدد α من

$$\cos\alpha = \frac{2\mathscr{A}\sin\beta}{\sqrt{4\mathscr{A}^2\sin^2\beta + M^2}}$$

3) يستعمل فوبك، كما في حال القطع المكافئ والزائد، نظرية داندلان لإيجاد *الضلع القائم* للقطع الناقص.

4) يعالج نصا الأبهري وابن الحسين القطع الناقص بشكل متطابق ماعدا بعض الكلمات الناقصة من قبل الناسخ في النص الأول.

8. الخلاصـــة: رسم القطوع المخروطية: مجال بحث جديد في الهندسة

لقد قدمنا، بقدر ما تسمح به الوثائق المتاحة (والبعض منها قد اكتشف حديثاً) وعلى قدر استطاعتنا، عرضاً لتاريخ تقليدين أحدهما في النصوص والآخر في المفاهيم قادا إلى فتح مجال جديد في البحث الهندسي وأصيل في آن واحد: الرسم المتصل للقطوع المخروطية والآلات التي يتطلبها. وشرحنا طبيعة الخطوط الرئيسية للمحاكمة التي طبعت هذا البحث. كما رأينا في هذين التقليدين ظهور البحث الإنكساري على كل القطوع والبحث في طرق رسم المنحنيات بطريقة ميكانيكية (ابن سهل) من جهة، وتأسيس وتطوير نظرية البركار التام من جهة أخرى. ويمكن التعبير عن المسألة الأساسية في هذه النظرية كما يلي: لديك قطع مخروطي معرف بمحوره الرئيسي و*بضلعه القائم*، أنشئ مخروطاً دورانياً ذا محور معلوم الطول يمر عبر هذا القطع. ويعود هذا الإنشاء إلى تعيين الزاويتين α، العمودية، و β، الزاوية بين المحور والمستوى القاطع. تعبر هذه المسألة بوضوح عن الآفاق الجديدة في دراسة القطوع المخروطية تكاد تكون معاكسة للطريقة المتبعة من قبل أبلونيوس في الكتاب الأول من *المخروطات*. فبينما ينطلق أبلونيوس من مخروط معلوم ومستوى قاطع مستخلصاً منهما الخواص المميزة للقطع و*الضلع القائم*، فإننا ننطلق هنا من الضلع القائم ونستعمل العلاقة التي تعينه عند أبلونيوس ثم نقوم بالإنشاء.

نعلم الآن أن المخروطات الدورانية التي تمر عبر قطع معلوم تشكل جماعة بوسيط واحد. لكن رياضيي القرن العاشر وخلفاءهم لقرون عدة لم يأخذوا بعين الاعتبار إلا مخروطاً واحداً من الفصيلة، المخروط ذا طول المحور المعلوم. ثم إن هؤلاء الرياضيين، القوهي على سبيل المثال، قاموا بدراسة القطوع المخروطية باعتبارها مساقط للدائرة. وقد حاول بعضهم على غرار الصاغاني[65] إيجاد الإسقاط المخروطي والدائرة المسقطة المؤديين إلى قطع معلوم على نحو يماثل تماما البحوث في البركار التام وإن كنا هنا لا نهتم بآلة راسمة.

وأخيراً فإن مؤلفين آخرين، السجزي على سبيل المثال[66]، توصلوا إلى طريقة رسم متصل للقطوع باستعمال معايرة نحصل عليها بإسقاط دائرة (الظل المسقط). وعلينا لنكمل الصورة الإشارة إلى مجال بحث آخر نبهنا إليه البيروني، رياضي القرن الحادي عشر وأحد أفضل الشهود بحق: رسم هذه المنحنيات نقطة فنقطة. إن الرسمين المتصل ونقطة فنقطة هما القاعدتان اللتان ارتكز إليهما بناء هذا المجال الجديد في الهندسة.

صحيح أنه وقع في الماضي رسم هذا المنحنى أو ذاك، إلا أن الأمر اقتضى انتظار القرن العاشر لنرى كتباً كرست بأكملها لرسم كل القطوع المخروطية. فقد طرح الرياضيون آنذاك، وبشكل مختلف عما جرت عليه العادة سابقاً، مسألة الرسم بالتحديد وحاولوا أن يجدوا أو يبتكروا عند الحاجة الطرق الهندسية والعملية لحلها. وكل شيء يدل الآن أنه كان لا بد من بلوغ هذا المستوى من العمومية ومن طرح المسألة ضمن هذه الشروط الجديدة قبل التمييز بين الرسم بالنقط والرسم المتصل.

---

[65] *كتاب في كيفية تسطيح الكرة على شكل الأصطرلاب في رسائل متفرقة في الهيئة للمتقدمين معاصرين البيروني* (حيدر آباد 1948).

[66] R. Rashed and P. Crozet, *Œuvres mathématiques d'al-Sijzī*, vol. 1.

إن إحدى أولى الرسائل المكرسة كلياً للرسم بالنقط دون سواه للقطوع المخروطية هي رسالة ابن سنان (269/ 909-335/946) ذات العنوان الملائم تماماً "في رسم القطوع المخروطية الثلاثة". لقد بينا[67] أنه لم يكن من الممكن عرض مسألة الرسم بالنقط وحلها لولا اهتمام الرياضيين الجديد بالتحولات الهندسية ولولا الدراسات التي خصصت لها في نصف القرن السابق. ويكفينا للتأكد من ذلك أن نفحص باعتناء كيف استعمل ابن سنان التحولات الخطية والتآلفية وغير الخطية في دراسته للرسم. لكن هذا العمل لم يكن فريداً: فقد ألف خليفته أبو جعفر الخازن كتاباً حول الموضوع[68]، يبين أنه كان موضوعاً ينتمي إلى زمانه ولا يخص أحداً بمفرده.

إن الأسباب التي دعت خلفاء ابن سنان والخازن إلى دراسة الموضوع المتمم ونعني به الرسم المتصل للقطوع والمستقيم والدائرة كانت هندسية من جهة، ولكنهم كانوا مهتمين أيضاً بالتطبيقات الممكنة له وخاصة في صناعة المزاول وفي الانكساريات. وهكذا تكاثر عدد الطرق والآلات. فقد بنى ابن سهل عمله على خاصة البؤرتين في القطوع المركزية، وخاصة البؤرة – الدليل في القطع المكافئ، واخترع جملة ميكانيكية للرسم. وانطلق القوهي من الخاصة الميزة Symptoma وتخيل البركار التام. وانصبت جهود السجزي على تحسين طرق رسم القطوع وتحسين أدواته. والقوهي، في كتابه المؤسس لهذه التقاليد، هو أول من عبر عن هذه الفكرة الخصبة: لا يمكن استعمال البركار إلا من أجل المنحنيات "القياسية" تلك التي يمكن دراستها في إطار نظرية التناسب – وهو شرط يميز صفاً معيناً من المنحنيات. ويتقدم السجزي بخطوة إضافية عندما فرق بين هذا الصف وبين صفين آخرين من المنحنيات، صف المنحنيات المسماة "ميكانيكية"، غير القياسية وكلها تتصف "بالترتيب والنظام"، وصف لمنحنيات أخرى لم ينعتها باسم، غير قياسية أيضاً ومعرفة سلبياً: "بدون ترتيب ونظام"، ويصل على هذا النحو إلى أول عرض لتصنيف المنحنيات حسب نوع الحركة أو الحركات المستعملة في رسمها المتصل.

ولم تقف الأمور عند هذا الحد. فالسجزي الذي ألف رسالة في الرسم المتصل عنوانها "رسالة في عمل البركار التام وهو بركار المخروط"[69]، وأخرى في وصف القطوع الثلاثة[70] بالنقط متبعاً في ذلك ابن سنان بالتحديد، وثالثة في رسم القطع الزائد بالنقط، يتابع ويؤلف رسالة نجد فيها جنبا إلى جنب طرق الرسم بالنقط – حسب التقليد الذي أنشأه ابن سنان[71]، والرسم المتصل بالبركار التام أو بواسطة المعايرة الحاصلة بالإسقاط. إن عنوان هذه الرسالة، التي تضم كل العناصر المكونة لمجال البحث الجديد، يكشف عنها تماماً: "في وصف القطوع المخروطية"[72].

---

[67] R. Rashed and H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xᵉ siècle* (Leiden, 2000), chap. III.

[68] انظر الفصل الرابع في التثليث.

[69] انظر أعلاه الفقرة 3.

[70] عن *الأشكال كلها من الدائرة* في R. Rashed and P. Crozet, *Œuvres mathématiques d'al-Sijzī*.

[71] R. Rashed, 'Al-Sijzī et Maïmonide : Commentaire mathématique et philosophique de la proposition II-14 des *Coniques* d'Apollonius', *Archives internationales d'histoire des sciences*, 37, 119 (1987), pp. 263-296. English translation : 'Conceivability, Imaginability and Provability in Demonstrative Reasoning : al-Sijzī

and Maimonides on II.14 of Apollonius *'Conic Sections'*, Fundamenta Scientiae, 8, 3/4 (1987), pp. 241-256; see also R. Rashed and P. Crozet, *Œuvres mathématiques d'al-Sijzī*, chap. II.

[72] R. Rashed, *Œuvres mathématiques d'al-Sijzī*, vol. I, chap. II; Géométrie des coniques et théorie des nombres au X[e] siècle, ed. Perters, Louvan 2004.

بسم الله الرحمن الرحيم

كتاب أبي سهل ويجن بن رستم القوهي في البركار التامّ

قال أبو سهل ويجن بن رستم القوهي: هذا كتاب في الآلة التي سميت البركار التامّ وهو مقالتان: المقالة الأولى في البرهان على أنه يمكن بهذا البركار رسم الخطوط القياسية، أعني المستقيمة أو محيطات الدوائر أو محيطات قطوع المخروط، وهي المكافئة والزائدة والناقصة والمتقابلة الوضع؛ والمقالة الثانية في علم رسم أحد الخطوط التي ذكرناها على وضع معلوم. فإن كان قبلنا هذه الآلة عند الأوائل موجودة معروفة الذكر والاسم، وكان اسمها وأسامي الأشياء التي تتبعها بخلاف ما سميناه، فإنّ لنا فيه عذرًا، إذ لم يقع إلينا هذه الآلة ولا ذكرها، مع أنه يمكن أن تكون هذه / الآلة مع البرهان على أنها ترسم (ل-٢-و) الخطوط التي ذكرناها كانت ولم يكن استعمالها كما / استعملناها في المقالة الثانية من (هـ-٦٨-و) هذا الكتاب.

1 الرحيم: كتب بعدها «ربّ يسر» [ا] «ربّ تمّم بالخير» [ط] «ربّ يسر ولا تعسّر» [س] – 2 كتاب ... التامّ: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل، ن] – 3 قال ... سميت البركار: قال أبو سهل القوهي أنّا وضعنا هذا الكتاب في الآلة المعروفة بالبركار [ن، ض] وكتب «القوهي» فوق السطر [ن] / ويجن: ويخن: [ا، ب، هـ] محن [س]، ثم أثبت الصواب في الهامش / القوهي: الكوهي [د] / سميت: سمينا [ب، ط] سميناها [س] سميته [ل] / البركار: بالپركار [س] – 4 البركار: ناقصة [ط] – 5 أعني: اى [ن، ض] – 6 والناقصة: والمناقضة [ل] / والمتقابلة: المقابلة [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / والمقالة: المقالة [ا، ب، جـ، هـ، س، ط، ل] / علم رسم أحد: علم الرسم أخذ [ض] – 7 عند: أثبتها فوق السطر [ب] / والاسم: ناقصة [ا، د، جـ، هـ، ط، س، ل] – 8 عذرًا إذ: عذراذ [س] / إذ: اذا [ن] – 9 تكون: ناقصة [ن، ض] / ترسم: يرسم [ب، س، ل] برسم [ن] – 10 يكن: تكن [ب، د، هـ] / استعمالها: أثبتها في الهامش [ا] / استعمالها كما: ناقصة [ل] / استعملناها: استعملنا [س] / المقالة: نجدها في مخطوطة [ن] فقط.

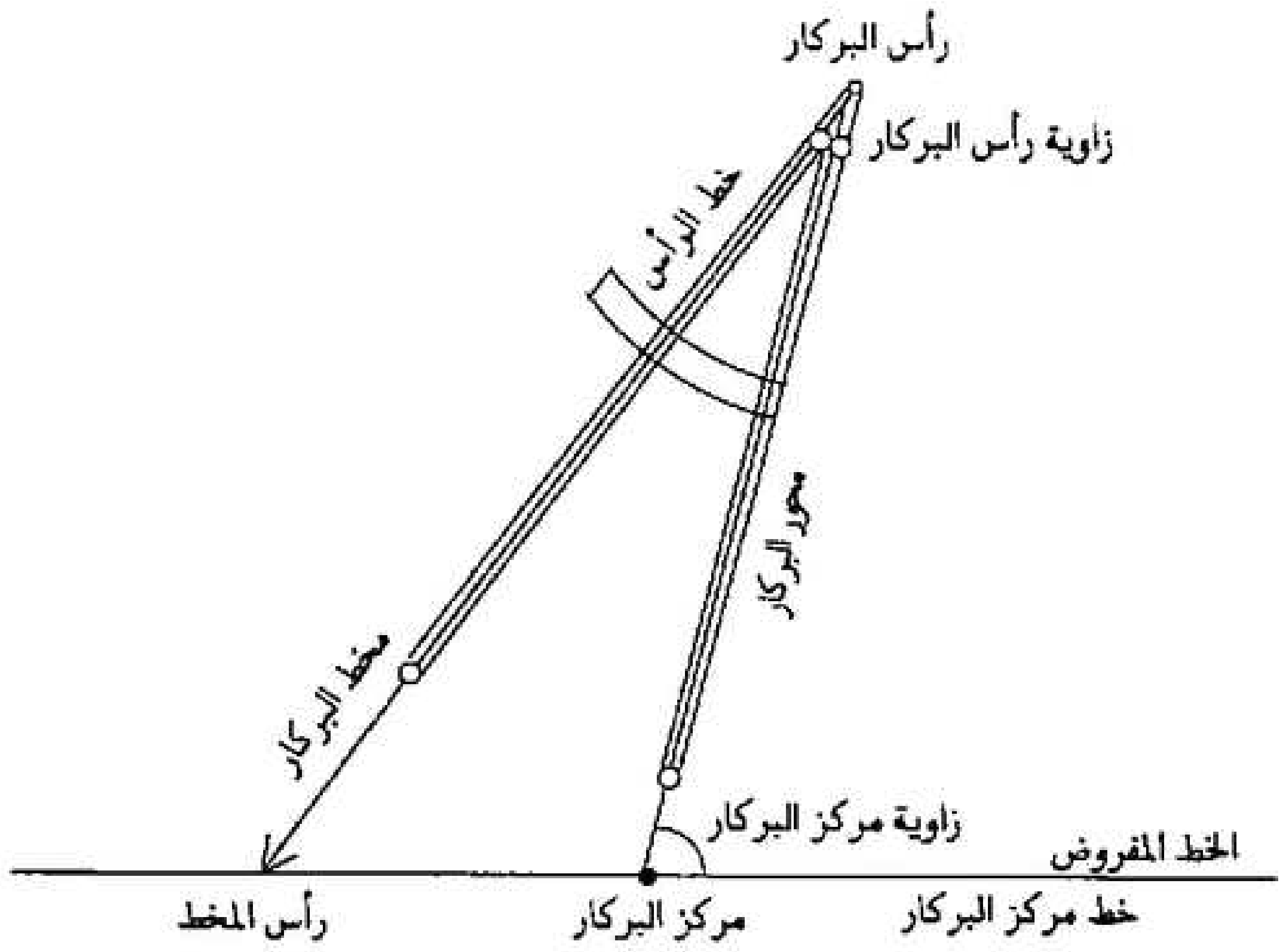
المقالة الأولى

في البرهان على أنه يمكن بهذا البركار رسم الخطوط القياسية التي ذكرناها

إذا قام من نقطة على سطح مستوٍ خطٌ مستقيم له حركة على أحد السطوح المستوية
القائمة على ذلك السطح، ومرّ بنقطة أخرى على ذلك الخطّ خطٌّ آخر مستقيم له ثلاث
حركات: إحداهنّ حول ذلك الخطّ القائم على ذلك السطح؛ والثانية على السطح
المستوي الذي كان عليه ذلك الخط؛ / والثالثة على استقامته في الجهتين جميعًا، فإنه إذا ن-٢
كانت الآلة بهذه الصفة، سُميت بركارًا *تامًا*. والنقطة التي على السطح المستوي تسمّى
مركز البركار، والسطح المستوي / يسمّى *سطح مركز البركار*، والخط المستقيم / القائم من د-٢١٩-و
المركز يسمّى *محور البركار*، والنقطة التي على ذلك المحور تسمى *رأس / البركار*، والخط ط-١٠٦-ظ ل-٢-ظ
المستقيم المار بذلك الرأس يسمّى *خط رأس / البركار*، وفي وقت استعماله فقط يسمى هـ-٦٨-ظ
مخطّ البركار، ورأسه *رأس مخطّ البركار*، والزاوية التي يحيط بها مخطّ البركار ومحوره
تسمى *زاوية رأس البركار*، والزاوية التي / يحيط بها محورُ البركار والفصلُ المشترك لسطح س-٦٠
مركز البركار وللسطح الذي يتحرك عليه المحور تسمى *زاوية مركز البركار*، وذلك الفصل
المشترك يسمّى *خط مركز البركار*، والسطحُ المستوي الذي ينطبق عليه سطحُ مركز البركار
يسمى *السطح المفروض للبركار*، وحركة / خط رأس البركار حول المحور فقط مع حركة جـ-٩٦-و
رأس المخطّ على السطح المفروض فقط تسمى *حركة البركار*، وذلك البركار يسمى *البركار*
التامّ. وإنّما يسمّى البركار التامّ، لأنه يمكن أن يرسم به الخطوط القياسية / بالتمام، لأن ب-٤١
الخطوط التي يجري عليها القياس إما خطوط مستقيمة أو محيطات دوائر / أو محيطات / هـ-٦٩-و

2 في البرهان ... ذكرناها: ناقصة [د] – 4 السطح ... ذلك: ناقصة [ط] – 5 إحداهنّ: احدها [ن] احديها [ض] / والثانية على السطح: اما [ل] – 5-6 السطح المستوي الذي: السطوح المستوية التي [د] – 6 كان: ناقصة [جـ، هـ، ن، ض] كانت [ب، د، س، ط، ل] كتب أولاً «كانت»، ثم ضرب عليها بالقلم [ا] / الخط: الخطوط [د، ل] / استقامته: استقامة [ا، جـ، د، هـ] – 7 الآلة: آلة [ن، ض] / سميت: أُسميَت [ل] / بركارًا: بركار [ل] / تامًا: ناقصة [ض، ن] / على: ناقصة [ا، هـ] في [جـ] – 8 والسطح ... البركار: ناقصة [ل] – 10 بذلك: مكررة في بداية السطر التالي [د] – 11 مخط: مخسط [هـ] / ورأسه: راسه [ط] / والزاوية: والزوايد [ل] – 11-12 التي يحيط ... والزاوية: ناقصة [ل] – 11 يحيط: ناقصة [ن، ض] نحيط [جـ] / مخطّ: محيط [ط] – 12 رأس: ناقصة [س، ط] / الفصل: الفضل [د، ن]، ولن نشير إليها فيما بعد – 13 للسطح: السطح، في كل المخطوطات / الذي: المستوي [ن، ض] / عليه: على [ل] / الفصل: للفصل [ل] – 14 سطح: ناقصة [ن، ض] – 15 يسمى: سُمّى [د، ل] / السطح: سطح [ط، س، ل] / المفروض: مفروض [س] / للبركار: البركار [س، ل] / خط: ناقصة [ب، س] / مع: ناقصة [ل] – 16 المخط: المحيط [ل] / السطح: راس [ا، جـ، د، هـ] / المفروض ... حركة: أثبتها في الهامش [ا] / حركة: مركز [ط] – 17 يسمّى: سمّى [هـ] / لأنه: لانه لا [ل] – 18 التي: ناقصة [ل] / يجري: تجري [ا، جـ، هـ] / أو (الأولى): مكررة في بداية السطر التالي [د] / أو (الثانية): و [هـ].

قطوع مكافئة أو زائدة أو ناقصة. ويمكن أن يرسم بهذا البركار هذه الخطوط كلها من جهة ل-٣-و وضع المحور على خط رأس البركار وعلى خط المركز، لأن المحور / إما أن يكون عمودًا على ن-٣ خط الرأس وخطِّ المركز جميعًا أو يكون عمودًا على خط الرأس فقط أو يكون عمودًا على خط المركز فقط أو لا يكون عمودًا على أحدهما. فحينئذٍ إما أن تكون زاويتا الرأس / والمركز متساويتين، وإما أن تكون زاوية الرأس الحادّة أعظم من زاوية المركز الحادة أو المنفرجة د-٢١٩-ظ أصغر من / منفرجته، وإما أن تكون على خلاف ذلك، أعني أن الزاوية الحادة للمركز ا-٩٥-و أعظم من الزاوية الحادّة للرأس أو منفرجته أصغر من منفرجته.

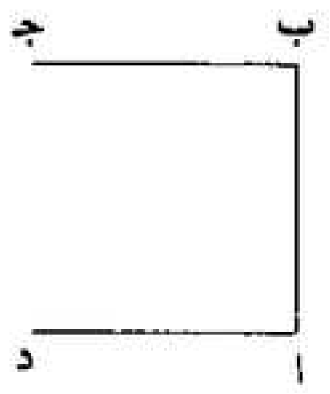


– آ – في كيفية وضع / الآلة حين لا ترسم شيئًا من الخطوط. ط-١٠٧-و

إذا كان محور البركار عمودًا على / خط الرأس وخطِّ المركز جميعًا، فإن رأس المخطّ هـ-٦٩-ظ لا يرسم بحركة البركار / شيئًا من الخطوط على السطح المفروض. ل-٣-ظ

1 بهذا: هذا [ا، ب، جـ، د، هـ، ل] / الخطوط: نجدها في [ن] فقط – 2 وضع ... البركار: ناقصة، وكرر بدلها «قطوع مكافئة أو زائدة أو ناقصة» [ط] / خط (الأولى): مخط [ل] أثبتها فوق السطر [ا] – 3 فقط: فقد [هـ] / أو: و [ا، د، هـ] – 3-4 يكون عمودًا على خط المركز فقط أو: ناقصة [ط، ل] – 4 أو لا: ولا [ا، د، هـ] / فحينئذٍ: فح [ب، ل]، وهو الاختصار المعروف – 5 والمركز: ناقصة [ن] / متساويتين: متساويين [د] / زاوية: زاويتا [ن] / المنفرجة: منفرجته [ب] منفرجة [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 6 منفرجته: منفرجة [ا، د، جـ، هـ، س، ط، ل] / على خلاف ذلك أعني أن: أثبتها في الهامش [ا] / أعني أن: ان يكون [ط] / أن: ناقصة [س] / للمركز: المركز، في كل المخطوطات – 7 الزاوية: زاوية [ب، د، س، ط، ل، ن] / للرأس: الرأس [ا، ب، جـ، د، هـ، ط، س، ل] / منفرجته (الأولى): منفرجة [س، ط، ل] / منفرجته (الثانية): منفرجة [س، ط] – 8 آ: فالاولى [د] / آ ... الخطوط: ناقصة [ن، ض] / كيفية: في خط كيفية [ل] / لا: نجدها في مخطوطة [ب] فقط / ترسم: يرسم [ب] نرسم [ا، جـ، هـ] / شيئًا: شيء [ب، د، ط، ل] بشيء [س] – 9 إذا: فإذا [ن، ض] / المخطّ: الخط [هـ، ل] – 10 شيئًا: شياءً [ن] / الخطوط: الخط [جـ].

مثاله: أن المحور خط ا ب وخط الرأس ب جـ وخط المركز ا د، وكان خط ا ب عمودًا على خط ب جـ وعلى خط ا د جميعًا.



فأقول: إنه لا يرسم رأسُ المخط بحركة البركار شيئًا من الخطوط على السطح المفروض.

برهانه: أنا لما حركنا البركار، كانت كلُّ زاوية يحيط بها المحور وخطُّ الرأس قائمة؛ فخط الرأس، وهو ب جـ، على كل حال، في السطح المستوي الذي هو محور ا ب عمودٌ عليه، والمخطّ على ذلك السطح، لأن حركته على استقامة خط ب جـ، وذلك أن المحور عمود أيضًا على السطح المفروض، لأنه عمود على خط المركز، فهو عمود على سطح المركز. وسطح المركز منطبق على السطح المفروض. فالسطح المفروض /
والسطح الذي عليه مخط البركار متوازيان، فهما لا يلتقيان. فإذن رأس المخطّ لا يلقى // هـ-٧٠-و
السطح المفروض، / فهو لا يرسم شيئًا من الخطوط على السطح المفروض بحركة ن-٨
البركار الذي محوره عمودٌ على خط الرأس وخط المركز جميعًا؛ / وذلك ما أردنا أن ل-٤-و
نبين. س-٦١
د-٢٢٠-و

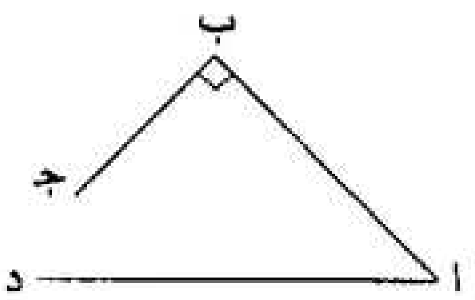
1 مثاله: مثال ذلك [ن، ض] ومثاله [ل] / خط (الأولى): ناقصة [ن، ض] / ا د، وكان خط: ناقصة [ا، د، هـ، ط، ل] / وكان خط: ناقصة، لكن كتب «ويكون ا ب» مع «ظ» فوق السطر [س] / كان: ناقصة [جـ، ن، ض] / خط: ناقصة [جـ] – 2 عمودًا: عمود [ط، ن، ض] / ب جـ: ب ح [ل]، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / خط: نجدها في [ن] فقط – 3 إنه: انّ به [ل] / المخطّ: المحيط [ل] / بحركة البركار شيئًا: شيئًا بحركة البركار [ن، ض] / شيئًا: ناقصة [ل] فوق السطر [س] – 5 برهانه: برهان ذلك [ن، ض] / أنا لما: انه ان [ض] انا [ن] / الرأس: رأس البركار [ا، جـ، هـ] – 6 فخط: وخط [ط] / هو: ناقصة [ب، س، ط] – 7 عمود: عمودا [ا، جـ، د، هـ، ط، ل، ن] / السطح: والسطح [ل] / خط: بخط [جـ، هـ] / ب جـ: لَا [هـ] بع [ن] – 8 أن: لأن [ب، ط] / عمود: عمودا [ا، هـ] / عمود أيضًا: عمودًا يضا [د] – 8-9 فهو ... وسطح المركز: ناقصة [ن، ض، ل] – 9 وسطح المركز: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ط، س] / منطبق: ينطبق [ض، ن] / السطح: الخط [س] – 10 مخط: فخط [ب] / متوازيان: ومتوازيان [ل] / فهما: فيهما [ل] / يلتقيان: يلقيان [ا، هـ، ط]، وهي صحيحة في [ع] / فإذن: فان [ا، جـ، هـ] فاذا [ض] / المخط: الخط [ل] مكررة [ط] / يلقى: يلتقي [ا، ب، جـ، د،٠هـ، س، ط، ل] نقل ناسخ [ن] الرسوم في صفحة ٤، وترك الصفحات التالية، حتى السابعة، بيضاء – 12 الرأس: رأس البركار [جـ] رأس [ا، هـ] / جميعًا: كتب بعدها «وهذه صفته» [د]

– بَ – في كيفية وضع الآلة عند رسمها الخطَّ المستقيم.

إذا كان المحور عمودًا على خط المركز، فهو عمودٌ على السطح المفروض؛ وإذا لم يكن عمودًا على خط المركز، لم يكن عمودًا على السطح المفروض.

فإذا كان المحور عمودًا على خطّ الرأس فقط، فإن رأس المخطّ بحركة البركار يرسمُ على السطح المفروض خطوطًا مستقيمة.

مثاله: أن المحور خط ا ب وخطَّ الرأس ب جـ وخط المركز ا د، وخط ا ب عمود على خط ب جـ، / وليس بعمود على خط ا د. ط-١٠٧-ظ



فأقول: إن رأس المخطّ بحركة البركار يرسم على / السطح المفروض / خطًّا مستقيمًا. هـ-٧٠-ظ ب-٤٢

برهانه: أنا إن حركنا البركار، كانت كلُّ زاوية يحيط بها المحور وخطُّ الرأس قائمةً، فخط الرأس، / وهو ب جـ، على كل حال، على السطح المستوي الذي خط ا ب / عمود عليه، والمخط على ذلك السطح، لأن حركته على استقامة خط ب جـ؛ وخط ا ب ليس بعمود على السطح المفروض، لأنه ليس بعمود على خط المركز. فالسطح المفروض والسطح الذي عليه مخطّ البركار ليسا بمتوازيين، فهما يلتقيان. فالفصل المشترك لهما خط مستقيم، لأنهما مستويان؛ ويجوز رأس المخط على ذلك الفصل المشترك، فيرسم رأسُ ل-٤-ظ جـ-٩٦-ظ

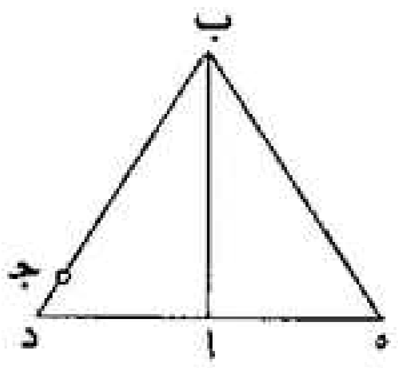
1 بَ: والثانية [د] / بَ ... المستقيم: ناقصة [ن، ض] / الخط المستقيم: الخطوط المستقيمة [س] – 2 إذا: فبيّن انه اذا [ن، ض] / خط: الخط [ل] / فهو: وهو [ل] / عمودٌ: عمود بَ [ل] / وإذا: فاذا [ا، جـ، د، هـ، ل] – 2-3 فهو ... المركز: مكررة [ن] – 3 عمودًا: عمود [ن] / خط المركز، لم يكن عمودًا على: ناقصة [ل] – 4 فإذا: اذا [ن، ض] / المحور: ناقصة [ط، ل] / الرأس: الرأس البركار [ل] رأس البركار [ب، ط] / المخط: الخط [ل] / بحركة: يُحركه [ل] – 4-5 فإذا ... مستقيمة: ناقصة [س] / بحركة ... المفروض: يرسم على السطح المفروض بحركة البركار [ن، ض] – 5 على السطح المفروض: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ط، ل] – 6 مثاله: مثال ذلك [ن، ض] / ا د: اَ [ا، د، هـ، ط، ل] – 6-7 عمود ... ب جـ: ناقصة [ل] – 7 ا د: ا ب [ط] – 8 المخط: الخط [ل] – 9 برهانه: برهان ذلك [ن، ض] / إن: ناقصة [ل] / كل: ناقصة [س] على واحد [ل] – 10 فخط: وخط [ل] / وهو: هو [ا، جـ، د، هـ، س، ل] ناقصة [ط] / ا ب: ناقصة [ط، ل] – 11 عمود: عمودًا [ل] / والمخط: والمخط الذي [ن] والمحيط [ل] / استقامة: استقامته [ن] / وخط: وعلى [ا، د، جـ، هـ] – 12 ليس: فليس [ن، ض] وليس [ل] / السطح ... بعمود على: ناقصة [ط، س، ل] – 13 مخطّ: فخط [ط، ل] / ليسا: ليس [ا، ب، جـ، د، هـ، ط، ل، ن] / بمتوازيين: متوازيين [ل] / فهما: فيما [ل] / لهما: هما [جـ، هـ] فهما [ل] – 14 مستويان: مستويين [ن] متساويين [ل] / ويجوز: ومحور [ط، هـ] / المخط: كثيرًا ما كتبها «الخط»، ولن نشير إليها فيما بعد [ل] / فيرسم: ويرسم [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] ورسم [ن، ض] / رأس: برأس [ا، د، جـ، هـ، ل].

المخطّ بحركة البركار، الذي محوره عمودٌ على خط الرأس فقط، / خطوطًا مستقيمة على ن-٩
السطح المفروض؛ / وذلك ما أردنا أن نبين. د-٢٢٠-ظ

- جـ - في كيفية وضع الآلة عند رسمها محيطات الدوائر./

إذا كان المحور عمودًا على خط المركز فقط، فإن رأس المخطّ بحركة البركار يرسم هـ-٧١-و
محيطات الدوائر على السطح / المفروض. ا-٩٥-ظ

مثاله: أن المحور خط / ا ب وخط الرأس ب جـ وخط المركز ا د وخط ا ب عمودٌ ل-٥-و
على خط ا د وليس بعمود على خط ب جـ.



فأقول: إن رأس المخطّ بحركة البركار يرسم على السطح المفروض محيط دائرة.

برهانه: أن زاوية د ا ب قائمة، وزاوية ا ب جـ ليست بقائمة، فرأس المخطّ بحركة
البركار يلقى السطح المفروض؛ فليلقه على خط ا د على نقطة د. فإن حركنا البركار دار
رأس المخطّ حول نقطة ا ولقي خط ا د من جهة أخرى، فيلقاه على نقطة هـ. فلأن الزوايا
التي / يحيط بها خطّ ب جـ ومحور ا ب على كل حال متساوية، والزاوية التي يحيط بها ط-١٠٨-و
محور ا ب وأحد الخطوط المستقيمة الخارج من / نقطة / ا على السطح المفروض قائمة، س-٦٢ هـ-٧١-ظ
فالزاويتان من كل مثلث اللتان يحيط بهما محور ا ب وخطٌ خارج من نقطة / ا إلى ذلك / ل-٥-ظ
الخط الذي يرسمه رأس المخطّ متساويتان، وضلع ا ب مشترك، فالخطوط المستقيمة د-٢٢١-و

1 عمود: عمودًا [د] ناقصة [س، ط، ل، ن] / خطوطًا: خطوط [ن] – 2 المفروض: كتب بعدها «وهذه صفته» [د] – 3 جـ: الثالثة [د] / جـ ... الدوائر: ناقصة [ن، ض] / محيطات: المحيطات [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ل] / الدوائر: للدوائر [ب، جـ، هـ، س] للداوير [ا] – 5 على: أثبتها فوق السطر [ب] / السطح: أثبتها فوق السطر [س] ناقصة [ل] – 6 مثاله: مثال ذلك [ن، ض] / ب جـ وخط: حـ و ب [د] / المركز: للمركز [د] / ا د: ا ب [ط] / خط: نجدها في مخطوطة [ن] فقط / عمود: عمودا [ب] – 7 خط (الأولى): نجدها في [ن] فقط / خط (الثانية): نجدها في [ن] فقط – 8 المخط بحركة: أثبتها في الهامش [ا] / محيط: ناقصة [ط] – 9 برهانه: برهان ذلك [ن، ض] / د ا ب: ا ب [هـ] / وزاوية: فزاوية [ب، ط] – 10 فليلقه: فليلقاه [ب] فيلقاه [ا، جـ، د، س، ط] فان لقاه [ل] / على نقطة: نقط [ل] على نقط [ا] – 11 لقي: بقي [ل] / ا د: ا هـ [ن، ض] / الزوايا: الزاوية [ن، ض، ل] – 12 خط ب جـ: مخط ب د [ن، ض] / متساوية والزاوية: مساوية الزاوية [ض] متساوية الزاوية [ن] – 13-14 وأحد ... ا ب: ناقصة [ن، ض] – 13 الخارج: الخارجة [س] / على السطح المفروض: ناقصة [ا، جـ، هـ] – 14 ا: ب [ض] – 15 الخط الذي: ناقصة [ل] / يرسمه: يرسم، في كل المخطوطات/ رأس: ناقصة [ن، ض] / المخط: المحيط [جـ]؛ أضاف بعدها «على السطح المفروض فلنا مثلثات فيها زاويتان» [ض] / ا ب: ناقصة [ن، ض] / مشترك: مشتركة [ا، جـ، د، هـ].

الخارجة من نقطة آ إلى ذلك الخط متساوية؛ فالخط الذي يرسمه رأس المخط دائرةً، وخط هـ د قطر تلك الدائرة. فرأس المخطّ يرسم بحركة البركار الذي محوره عمودٌ على خط المركز فقط على السطح المفروض محيطات الدوائر؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

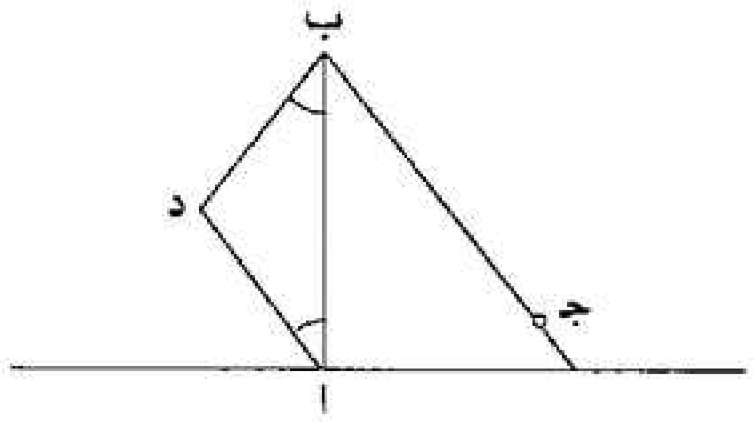
– دَ – في كيفية وضع الآلة عند رسمها محيطات القطوع المكافئة.

وإذا كان المحور ليس بعمود على خط الرأس ولا على خط المركز، فإن مخطّ البركار يرسم بحركته / مخروطين قائمين يلتقيان على نقطة الرأس؛ وذلك الرأس هو رأس البركار، ن-١٠ والخط الذي/ من جهة الزاوية الحادّة / يرسم مخروطًا يلي محور البركار، والخط الذي يلي هـ-٧٢-و ب-٤٣ الزاوية المنفرجة يرسم المخروط المتقابل. /

وإذا كان المحور ليس بعمود على أحد خطي الرأس والمركز – لكن زاويتي الرأس والمركز ل-٦-و متساويتان –، فإن رأس المخط يرسم بحركة البركار على السطح المفروض محيطات القطوع المكافئة.

مثاله: أن المحور خط ا ب وخط الرأس ب جـ وخط المركز ا د وخط ا ب ليس بعمود على واحد منهما؛ ولكن زاويتي الرأس والمركز، وهما ب ا د ا ب جـ، متساويتان.

فأقول: إن رأس المخطّ يرسم على السطح المفروض بحركة البركار محيط قطع مكافئ./



1 يرسمه: يرسم [ا، جـ، د، هـ] – 1-2 دائرة ... المخط: ناقصة [ط، س، ل] – 2 خط: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل، ن] – 3 محيطات الدوائر: محيط الدوائر [جـ، د، هـ، ط] محيط الداوير [ا] محيطا الداوائر [س] فخط الدوائر [ل] – 4 دَ: والرابعة [د] / دَ ... المكافئة: ناقصة [ن، ض] / المكافئة: الكافئة [ل] للكافئة [د] – 5 وإذا: فبيّن من هذا انّه اذا [ن، ض] فإذا [ط] / خط: الخط [ل] / ولا على خط المركز: ناقصة [ن، ض] / مخط: محيط [ل] – 6 نقطة الرأس: الرأس [جـ، هـ، ن، ض] نقطة [س، ط، ل] نقطة الرأس دَ [د] وأثبت «الرأس» في الهامش [هـ] – 7 والخط: والمخط [ب، س، ط] والمحيط [ل] / يلي: على [ط، ل] / والخط: والمخط [ا، ب، جـ، هـ، د، س، ط] والمحيط [ل] / الذي: ناقصة [ل]، ونجدها في التكرار – 7-8 الحادة ... يلي الزاوية: مكررة [ل] – 8 يرسم: رسم [جـ] / المتقابل: المقابل [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط] – 9 وإذا: اذا [ن، ض] / زاويتي: زاويتا، في كل المخطوطات – 10 متساويتان: متساويتين [ا، جـ، هـ، س، ط، ل] متساويين [ب، د] / البركار: ناقصة [ل] – 11 المكافئة: المتكافئة [جـ، هـ، د، س، ل] – 12 مثاله: مثال ذلك [ن، ض] / المحور: خط المحور [ل] / المركز: للمركز [د] – 13 واحد منهما: احدهما [ن، ض] واحد منها [جـ] / ولكن: وليكن [ا، هـ، س] / زاويتي: زاويتا [س، ل] / ب ا د ا ب جـ: ا ب جـ ب ا د [جـ] – 14 السطح: سطح [ن] / محيط قطع: بمحيط وطع [ل].

برهانه: / أن زاوية الرأس الحادة مع زاوية المركز الحادة بحركة البركار تقع مرة من جهة ط-١٠٨-ظ
واحدة / مثل ا ب د ومرّة من الجهتين المتبادلتين مثل ا ب جـ. فإن كانتا من جهة واحدة، د-٢٢١-ظ
فإن رأس المخطّ/ يلقى خط ا د، فليلقه على نقطة د. فيقع في المخروط الذي يحدث جـ-٩٧-و هـ-٧٢-ظ
بحركة البركار / من السطح المفروض قطعٌ سهمه خط ا د، لأن ذلك المخروط قائم. وإن ل-٦-ظ
كانتا متبادلتين، فإن خط ب جـ يكون موازيًا لخط ا د، لأن الزاويتين المتبادلتين، وهما
ا ب جـ ب ا د، متساويتان، والفصل / المشترك لقاعدة المخروط وللسطح المفروض عمودٌ س-٦٣
قائم على سطح عليه خطوط ب د ب جـ ب ا، لأن كل واحد من قاعدة المخروط
والسطح المفروض قائم على سطح عليه د ب جـ./ فذلك الفصل المشترك/ أيضًا عمود ن-١١ ا-٩٦-و
على الفصل المشترك لقاعدة المخروط وللمثلث الذي يقع في المخروط من سطح د ب جـ
الذي يمرّ برأس المخروط وبمحوره. وخط ب جـ واحد من أضلاع المثلث وموازٍ لخط ا د
الذي هو سهم القطع الذي يقع في المخروط من السطح المفروض؛ وخط ب د ضلع آخر /
لذلك المثلث، وقد لقيه سهم ا د على نقطة د. فمن السطح المفروض يقع في المخروط هـ-٧٣-و
قطعٌ مكافئ رأسُه نقطة د وسهمه خط ا د، ويجوز على/ محيطه رأسُ المخطّ، لأن المخطّ ل-٧-و
على سطح المخروط، فرأس المخطّ بحركة البركار الذي محوره ليس بعمود على أحد خطي
الرأس والمركز – لكن / زاوية الرأس مثل زاوية المركز – يرسم على السطح المفروض د-٢٢٢-و
محيطات قطوع / مكافئة؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ط-١٠٩-و

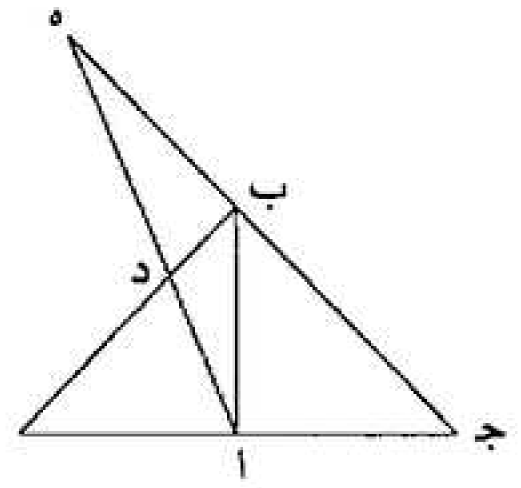
– ه – في كيفية وضع الآلة عند رسمها محيطات القطوع الزائدة والمتقابلة الوضع.

1 برهانه: برهان ذلك [ن، ض] / مع ... الحادة: أثبتها في الهامش [ن] / المركز: مركز [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ل] – 2 كانتا: كان [ن] – 3 خط: ناقصة [ل] / فليلقه: فليلقاه [ب] فيلقاه [ا، جـ، د، هـ، س] فليقاه [ط] – 4 قطع: قطعًا، في كل المخطوطات / ذلك: ناقصة [ا، جـ، د، هـ] – 5 موازيًا: متوازيا [ل] / وهما: ناقصة [ل] – 6 ب ا د: وب ا د [د] / متساويتان: متساويتين [ن] / وللسطح: والسطح [ا، د، جـ، هـ، ل] – 7 قائم: ناقصة [ن، ض] / ب د: د ب [جـ، س] د [ا، د، هـ، ل] / واحد: واحدة [ب، س، ط، ن، ض] – 8 الفصل: السطح [س] السطح الفصل [ط] – 8-9 أيضًا عمود على: ايضا على عمود [ل] – 9 وللمثلث: والمثلث [ا، جـ، هـ، ل] / د ب جـ: د ب ح [ا، هـ] – 10 وبمحوره ... ا د: ناقصة [ط، س، ل] / وموازٍ: وموازن [هـ] – 11 السطح: كتب أولاً «السهم»، ثم صحح عليها وأثبتها في الهامش [ن] – 12 ا د: د هـ [ا، د، هـ، س، ط، ل، ن] / السطح: السطوح [ا، د، جـ، هـ] – 13 د وسهمه: رأس المخروط [ل] / محيطه: محيطها [ا، ب، جـ، د، هـ، ط، ل] محيطهما، وأثبت «محيطها» في الهامش [س] / المخط: المحيط [ل] / لأن المخط: ناقصة [د، ط] لأن المخروط [جـ، هـ] لأن الخط [ل] – 14 سطح المخروط: السطح المفروض [ن، ض] رأس المخروط [ا، د، جـ، هـ] / فرأس المخط: ورأس المخط [ن، ض] ناقصة [ا، د، هـ، جـ] – 15 لكن: ان [ل] / زاوية (الأولى): زاويتي [ا، د، هـ، س، ط، ل] – 17 ه: والخامسة [د] ناقصة [ل] / ه ... الوضع: ناقصة [ن، ض] / رسمها: رسم [ط] / والمتقابلة: المقابلة [جـ] المتقابلة [هـ].

إذا كان المحور ليس بعمود على أحد خطي الرأس والمركز، لكن زاوية الرأس الحادّة أعظم من زاوية المركز الحادّة، فإن رأس المخطّ بحركة البركار يرسم على السطح المفروض محيطات القطوع الزائدة والمتقابلة الوضع./

مثاله: أن المحور خط ا ب، وخط الرأس ب جـ، وخط / المركز ا د، وخط ا ب ليس هـ-٧٣-ظ ب-٤٤
بعمود على واحد منهما، والزاوية الحادّة للرأس – وهي ا ب جـ – أعظم من الزاوية الحادة للمركز، وهي ب ا د.

فأقول: إن رأس المخطّ بحركة البركار يرسم على السطح المفروض محيط القطع الزائد والمتقابل الوضع. /



برهانه: أن زاوية الرأس الحادة مع زاوية المركز الحادة، بحركة / البركار، تقع مرّة من ن-١٢ ل-٧-ظ
جهة واحدة مثل ا ب د ومرّة متبادلتين مثل ا ب جـ. فإن كانتا من جهة واحدة، فإن رأس المخطّ يلقى خط ا د، فليلقه على نقطة د، فيقع في المخروط الحادث من حركة البركار من السطح المفروض قطعٌ سهمه خط ا د، لأن ذلك المخروط قائم. وإن كانتا متبادلتين، فخط ا د، الذي هو سهم القطع الذي يقع في المخروط من السطح المفروض، يلقى خط جـ ب
من جهة ب، لأن زاوية ا ب جـ أعظم من زاوية / ب ا د؛ فليلقه على نقطة هـ./ وأيضًا، هـ-٧٤-و س-٦٤
إن مخط ب هـ من جهة الزاوية المنفرجة، وهي زاوية ا ب هـ، وهو / على سطح المخروط د-٢٢٢-ظ

1 أحد: ناقصة [س] – 1-3 إذا كان ... الوضع: ناقصة [ل] – 2 السطح: السطوح [ا، جـ، هـ] – 4 مثاله: مثال ذلك [ن، ض] / وخط الرأس ب جـ وخط المركز ا د: وخط المركز ا د وخط الرأس ب جـ [ط] – 5 للرأس: الرأس [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 6 للمركز: المركز [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / ب ا د: ا د [س] – 7 على: ناقصة [جـ] / القطع: قطع [ل] / الزائد: الزائدة [س] – 8 والمتقابل: والمتقابلة [ا، د] والمقابلة [جـ، هـ] المتقابلة [س، ل] المتقابل [ط] – 9 برهانه: برهان ذلك [ن، ض] / تقع: وهذا جائز. يقطع [ل] / مرة: ناقصة [س] – 11 فليلقه: فلقيه [س] فيلقاه [ا، ب، جـ، د، هـ، جـ] فليلقاه [ط] فيلتقياه [ل] / نقطة: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 11-12 من السطح: السهم [ا، جـ، هـ] ومن السطح [د] – 12 قطع: قطعا [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط] / سهمه: سهم [ا، جـ، هـ] / خط: ناقصة [ن، ض] أثبتها فوق السطر [س] / وإن: فان [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / كانتا: كانت [ن] / فخط: بخط [س] – 13 ا د: ا ب [ا، ب، د، هـ، س، ط، ل] / المفروض: ناقصة [ا، جـ، هـ] المخروط [ط] – 14 ب ا د: د [ب، س، ط، ل] / فليلقه: فيلقاه [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 15 إن: لأن [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] على ان، ثم ضرب على «على» بالقلم [ن] / مخط: خط [س] / زاوية: ناقصة [ن، ض] / ا ب هـ: ا ب د [س] / وهو: وهي [ض].

المتقابل، وهو على استقامة / ضلع المثلث الذي يقع في المخروط من السطح الذي يمرّ ط-١٠٩-ظ
بالمحور وبرأس المخروط. والفصل المشترك لقاعدة المخروط وللسطح/ المفروض قائم على الفصل جـ-٩٧-ظ
المشترك لقاعدة المخروط ولذلك المثلث كما ذكرنا قبل. فمن السطح المفروض / يقع في أحد ل-٨-و
المخروطين المتقابلين قطع زائد أو في المخروطين قطعان متقابلا الوضع وقطرهما د هـ، ويجوز
على محيطهما رأس المخط، لأن المخط على السطحين المفروضين المتقابلين./ فرأس المخطّ ا-٩٦-ظ
يرسم بحركة البركار الذي محوره ليس بعمود على أحد خطي الرأس والمركز، لكن زاوية
الرأس الحادّة أعظم من الزاوية الحادّة للمركز، على / السطح / المفروض، محيطات القطوع ن-١٣ هـ-٧٤-ظ
الزائدة والمتقابلة الوضع؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

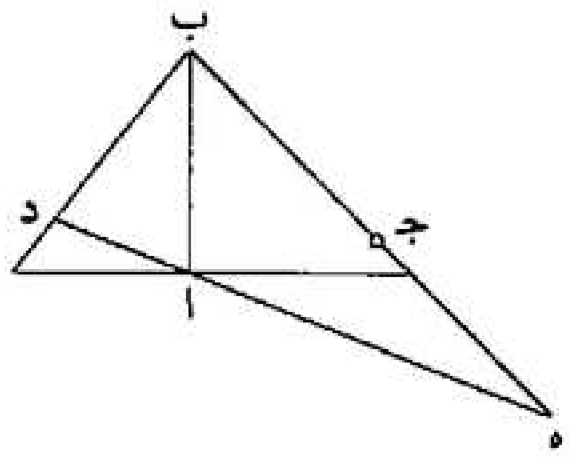
– وَ – في كيفية وضع الآلة عند رسمها محيطات القطع الناقص.

إذا كان المحور ليس بعمود على أحد خطي الرأس والمركز – لكن زاوية المركز الحادة أعظم من زاوية الرأس الحادة – فإن رأس المخطّ يرسم بحركة البركار على السطح المفروض محيطات القطوع الناقصة.

مثاله: / أن المحور خط ا ب وخط الرأس ب جـ وخط المركز ا د وخط ا ب / ليس د-٢٢٣-و ل-٨-ظ
بعمود على واحد منهما، لكن الزاوية الحادة للمركز، وهي زاوية ب ا د، أعظم من الزاوية الحادة للرأس، وهي ا ب جـ.

فأقول: إن رأس المخط، بحركة البركار، يرسم على السطح المفروض محيط القطع الناقص.

1 المتقابل: المقابل [ن، ض] / وهو: وهي [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / على استقامة: استقام [ل] / ضلع: ظلع [ا، د، هـ] – 2 بالمحور: بالمخروط [ط] / لقاعدة: القاعدة [س] / وللسطح: والسطح [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 3-2 وللسطح ... المخروط: ناقصة [ن، ض] / قائم ... المفروض: ناقصة [س، ط، ل] – 3 ولذلك: وكذلك [جـ] / فمن: ناقصة [ن] أضافها [ض] / أحد: واحد [ل] – 4 المتقابلين قطع زائد أو في المخروطين: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ل] / قطع زائد: قطعا زايدا [ب، س] قطعا زايد [ط] / أو في: وفي [ب، ط، س، ن، ض] / قطعان متقابلا: قطعين متقابلي [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط] قطعتين متقابلي [ل] قطعان متقابلان في [ن، ض] / ويجوز: يجوز [ط] – 5 محيطهما: محيط [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] محيط محيطها د ل [ب] محيطها [ن] / رأس: راسا [ن، ض]، وهو أيضًا صواب لو اعتبرنا أن الرسم يتم في نفس الوقت ويكون للمخط عندئذٍ رأسان، ولكنه لم يذكر هذا من قبل / المفروضين: المخروطين [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] وفي الهامش [س] / فرأس: فراسا [ن] – 6 يرسم: يرسمان [ن، ض] / والمركز: وللمركز [ا] / زاوية: أثبتها فوق السطر [ا] – 7 للمركز: المركز [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / السطح: ناقصة [س، ل] الحادة، ثم ضرب عليها بالقلم [ط] / القطوع: القطع [ل] – 8 والمتقابلة: المتقابلة [ط] – 9 وَ: والسادسة [د] / وَ ... الناقص: ناقصة [ن، ض] / وضع: ناقصة [ل] / رسمها: ترسيمها [س] – 10 لكن: من [ن] – 13 مثاله: مثال ذلك [ن، ض] – 14 واحد: واخط [ب] / للمركز: المركز [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / زاوية: ناقصة [ن، ض] – 15 للرأس: الرأس [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل].



برهانه: أن الزاوية الحادّة للرأس مع زاوية المركز الحادّة تقع بحركة البركار مرة من جهة هـ-٧٥-و
واحدة مثل ا ب د ومرّة / متبادلتين / مثل ا ب جـ. فإن كانتا من جهة واحدة،/ فإن ب-٤٥
رأس المخطّ يلقى خط ا د، فليلقه على نقطة د، فيقع في المخروط الحادث من حركة ط-١١٠-و
البركار من السطح المفروض قطعٌ سهمه خط ا د، لأن المخروط قائم. فإن كانتا متبادلتين،
فإن خط ا د، الذي هو سهم القطع الذي يقع في المخروط من السطح المفروض، يلقى
خط ب هـ الذي هو أحد أضلاع المثلث الذي يقع/ في المخروط من السطح المارّ برأس / س-٦٥
المخروط وبمحوره الذي ‹ليس بعمود على أحد خطي الرأس والمركز›؛ ‹و›الفصل المشترك ل-٩-و
لقاعدة المخروط وللسطح المفروض قائمٌ على الفصل المشترك لقاعدة المخروط وللمثلث. وخط
ب د ضلع آخر للمثلث ويلقاه سهم ا د / على نقطة د. فمن السطح المفروض يقع في ن-١٤
المخروط قطع ناقص، قطره د هـ، ويجوز على محيطه رأس المخط، لأن المخط على سطح
المخروط. فرأس المخط يرسم بحركة البركار الذي محوره ليس بعمود على أحد خطي الرأس

1 برهانه: برهان ذلك [ن، ض] / الزاوية الحادة للرأس: زاوية الرأس [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] الزاوية الحادة الرأس [ن] / مرة: ناقصة [س] – 2 واحدة: ناقصة [ل] – 3 خط: ناقصة [ل] / ا د: ا ر [ب] ا ب [ط] / فليلقه: فليلقاه [ب] فيلقاه [ا، جـ، د، هـ، س، ل] فليقاه [ط، ن] / فيقع: فيقطع [ب] / الحادث: الحاد [ا، جـ، د، هـ، ل] الحادة، وكتب في الهامش الصواب مع «ظ» [س] / من: عن [ط] / من حركة: مكررة في السطر التالي [ن] – 4 من: ومن [ا، جـ، هـ] / قطع: قطعًا [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / خط: ناقصة [ن، ض] / المخروط: المخروص [د] / فإن: وان [ن، ض] – 5 ا د: أثبتها في الهامش [ن] – 5-6 المفروض ... السطح: ناقصة [ا، جـ، هـ] – 6 أحد: ناقصة [ط، ن، ض] – 7 وبمحوره: والمحوار [هـ] ومحوره [جـ] / الفصل: القصْدُ [ل] للفصل [ا، ب، جـ، هـ] – 7-8 الفصل ... قائم على: ناقصة [ن]؛ أضاف [ض]: «والفصل المشترك لقاعدة المخروط وللسطح المفروض عمود على الخط الذي هو» – 8 وللسطح: والسطح [ا، جـ، د، هـ، ل] / المشترك: ناقصة [ل] / وللمثلث: والمثلث [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 9 ا د: ب د [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / د: هـ [جـ] حـ [ن] – 9-10 في المخروط: ناقصة [س] – 10 قطع ناقص: قطعًا ناقصًا [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل،] / محيطه: محيطها، في كل المخطوطات / رأس: برأس [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل، ن] / لأن المخط: ناقصة [ن، ض] / سطح: رأس [ا، جـ، د، هـ] الرأس [ل] – 11 فرأس المخط: ناقصة [جـ، هـ] / المخط: المخروط [ا].

والمركز، لكن / الزاوية الحادة للمركز أعظم من الزاوية الحادة للرأس، على السطح المفروض هـ-٧٥-ظ
محيطات القطوع الناقصة؛ / وذلك ما أردنا أن نبيّن. د-٢٢٣-ظ

فقد تبيّن لنا أنه يمكن بهذا البركار أن نرسم الفصول المشتركة للسطح المخروطي وأي سطح كان من / السطوح المختلفة الأجناس. ل-٩-ظ

تمت المقالة الأولى.

1 للمركز: الرأس، في كل المخطوطات / أعظم ... للرأس: ناقصة [ن] أضافها [ض] / للرأس: المركز [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / أعظم ... السطح: مكررة [س، ل] / المفروض: ناقصة [ا، د، جـ، هـ] – 2 القطوع الناقصة: ناقصة [ن]؛ أضافها [ض] – 3 الفصول المشتركة: الفصل المشترك [ط] / للسطح: للسطوح، ثم صحح عليها [د] / المخروطي: المخروط [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 5 تمت المقالة الأولى: تمت [د] نجد بعدها «والحمد لله رب العالمين» [ب، جـ، س] ناقصة [ط، ن، ض]

المقالة الثانية

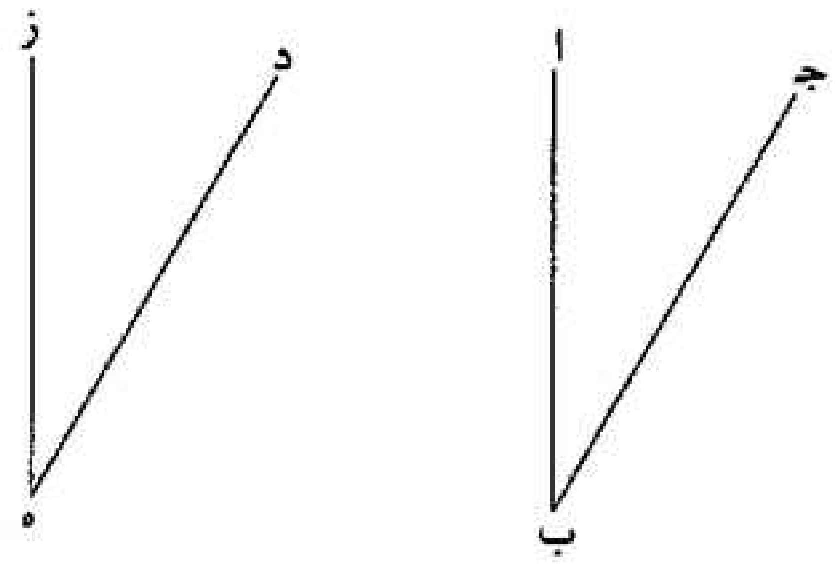
في علم رسم أحد الخطوط، التي ذكرناها في المقالة الأولى، على وضع معلوم.

فينبغي أن نتّفق على انطباق سطح مركز البركار على سطح مستوٍ معلوم، وخط الرأس
أو خط المركز أو المحور على خط مستقيم / معلوم الوضع، ونقطةٍ معلومة على أحد هذه ط-١١٠-ظ
الخطوط على نقطة معلومة، إذا أردنا ذلك.

– آ – نريد أن نعمل زاوية رأس البركار أو زاوية المركز مساويةً لزاوية معلومة مستقيمة الخطين.

فليكن محور البركار خط ا ب وخط / الرأس أو خط / المركز ب جـ والزاوية المعلومة هـ-٧٦-و
زاوية د هـ ز. / ونريد أن نعمل زاوية يحيط بها محور ا ب وخطُ ب جـ مساويةً لزاوية جـ-٩٨-و ا-٩٧-و
د هـ ز. فنطبق نقطة ب التي هي رأس البركار أو مركزه على نقطة هـ، ومحورَ ا ب على
أحد خطي د هـ هـ ز؛ / وليكن على د هـ وخط ب جـ على خط / هـ ز. فقد انطبقت ل-١٠-و د-٢٢٤-و
الزاوية التي يحيط بها محور ا ب وخطُ ب جـ / على // زاوية د هـ ز المعلومة؛ فقد س-٦٦ ن-١٥ ب-٤٦
صارت مساويةً لها. فالزاوية التي يحيط بها محور ا ب وخطُ ب جـ مساويةً لزاوية د هـ ز
المعلومة. فقد عملنا زاوية رأس البركار أو زاوية المركز مساوية لزاوية معلومة؛ وذلك ما أردنا
أن نبيّن.

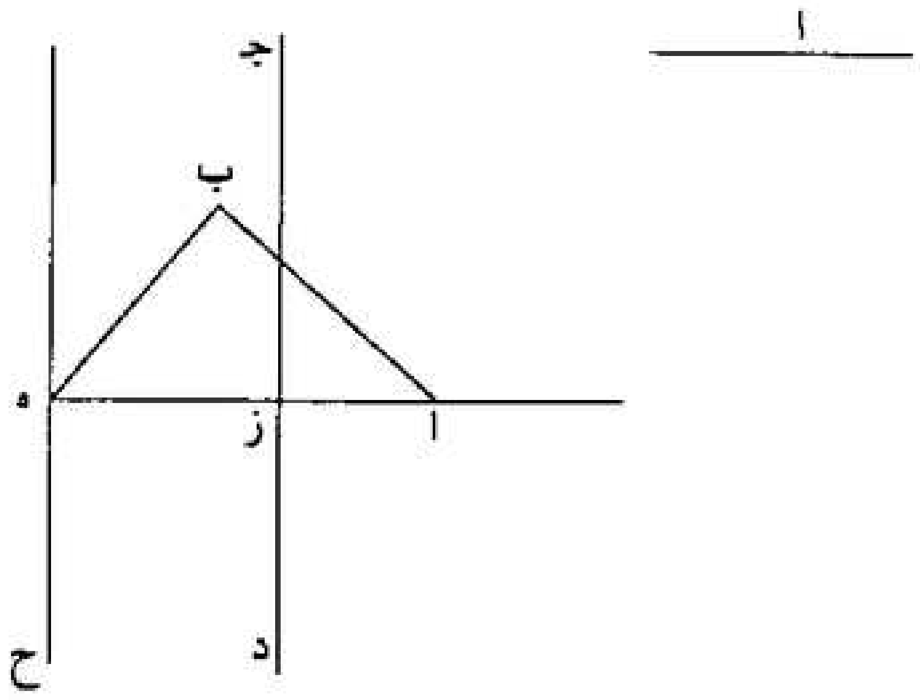
1 المقالة الثانية: بسم الله الرحمن الرحيم والمقالة الثانية [ل] كتب قبلها «بسم الله الرحمن الرحيم رب أنعمت قرو» [ب] «وبسم الله الرحمن الرحيم به نستعين» [س] – 1-2 المقالة ... معلوم: ناقصة [ن] المقالة الثانية، في علم رسم الخطوط القياسيّة على وضع معلوم [ض] – 2 في علم رسم أحد: علم ترسيم [س] علم رسم [ط] على رسم [ا، جـ، د، هـ، ل] / ذكرناها: رسمناها [د] – 3 فينبغي: وينبغي [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / انطباق: اتصاليه [ط] / سطح: ناقصة [ن، ض] – 4 أو (الأولى): و [جـ] / أو المحور: والمحور [ا، جـ، د، هـ، ل، ن، ض] – 6 آ: ناقصة [ن، ض] مقدمة آ [جـ] مقدمة [ا، جـ، د، هـ، س، ل]، وأثبت آ في الهامش [ط] / زاوية: ناقصة [ل] / رأس البركار: رأس مركز البركار [س] / أو: و [ا، جـ، هـ] / مساوية: متساوية [ل] – 8 خط (الأولى): ناقصة [د] / الرأس أو خط: الرأس ب ا وخط [ا، ب، د، هـ] الرأس آ و [ن، ل] / ب جـ: كررها في بداية السطر التالي [د] – 9-10 ونريد ... د هـ ز: ناقصة [ل] – 9 زاوية: ه ب [ب] / لزاوية: الزاوية [ض] – 10 فنطبق: فيطبق على [ا، ب، جـ، د، هـ، ط، ل]، وضرب ناسخ [ب] على «على» بالقلم؛ وهي ممحوة في [س] / أو: و [ض] / مركزه: مركز [ن] – 11 على: نجدها في مخطوطة [ن] فقط / د هـ: خط د هـ [ط] – 13 مساوية (الأولى والثانية): متساوية [ل] – 13-14 زاوية د هـ ز المعلومة ... ب جـ: ناقصة [ن]؛ أضاف [ض]: «زاوية د هـ ز فهي» – 14 المعلومة: المعلوم [ا، د، جـ، هـ] / عملنا: علمنا [ا، جـ، هـ، ل] علمنا ان [ن، ض] / مساوية: ناقصة [ب] / معلومة: معلوم [ل].



– بَ – في رسم خط مستقيم موازٍ لخط مستقيم معلوم.

نريد أن نرسم بالبركار الذي محوره خط اَ خطًا مستقيمًا موازيًا / لخط جـ د المستقيم المعلوم الوضع، ويجوز على نقطة هـ المعلومة. فنخرج من نقطة هـ عمودًا على خط جـ د، وهو هـ ز. ونجعل محور البركار، وهو اَ، عمودًا على خط الرأس وليس بعمود على خط المركز. ونحرك / البركار حتى يلقى رأسُ المخط من جهة الزاوية الحادّة خطَّ المركز، فيلقاه على نقطة ما، ونطبق / تلك النقطة على نقطة هـ، وخطَّ المركز على خط هـ ز من أي جهة كانت، وسطح المركز على السطح المفروض، حتى يكون البركار ا ب هـ ورأسه بَ ومركزه اَ ومحوره ا ب، وخط المركز ا هـ وخط الرأس ب هـ. هـ-٧٦-ظ ل-١٠-ظ ط-١١١-و

فأقول: إن رأس المخط بحركة البركار يرسمُ خطًا موازيًا لخط جـ د ويجوز على نقطة هـ.



1 بَ: الثاني [د] / بَ ... معلوم: ناقصة [ن، ض] / رسم: ترسيم [ب، س] / معلوم: ناقصة [ب، ط] – 2 خط: ناقصة [ن، ض] / اَ: ا بَ [جـ، س، ن]؛ في هذا الشكل كما في الأشكال التالية اَ هي طول المحور، وسيرمز بنفس الحرف اَ لمركز البركار، ولا مجال للخلط بينهما / لخط: ناقصة [هـ] – 3 المعلوم الوضع: ناقصة [ل] / المعلومة: المعلوم [د] / فنخرج: فيخرج [ا، د، هـ، ن] – 4 هـ ز: هـ ط [ن، ض] / محور: محورا [ن] / اَ: ا ب [جـ، س] الى [ل] – 5 يلقى: يلتقي [ا، د، جـ، هـ] / المخط: الخط [ب] / الحادة: ناقصة [ا، د، جـ، هـ] – 6 ونطبق: وتنطبق [ن، ض] / هـ ز: هـ ط [ن، ض] – 7 ا ب هـ: اعهَ [ن، ض] كتب في هذا الشكل عَ بدلاً من بَ، لَ بدلاً من حَ، ظَ بدلاً من زَ – 8 ب هـ: ب هـ متصل [ل] – 9 بحركة: براس [ل] / موازيًا: متوازيا [ن] / لخط: بخط [ط، ل].

برهان ذلك: أن الخط الذي يرسمه رأس المخط، وهو هـ ح، مستقيمٌ، كما بيّنّا في المقالة الأولى، ويجوز على نقطة هـ. وأيضًا، لأن سطح ا ب هـ قائم على // السطح المفروض وعلى ‹كل› سطح يدور عليه / مخطّ ب هـ، ‹فكل واحد من هذه السطوح› والسطح المفروض قائم على سطح ا ب هـ، فالفصل المشترك لهما، وهو هـ ح مستقيم، وهو عمود / على سطح ا ب هـ، ويجوز عليه رأس المخطّ ويرسمه. ولأن خط هـ ح عمود على سطح ا ب هـ، فهو عمود على خط ا هـ، فزاوية ا هـ ح قائمة وزاوية هـ ز جـ قائمة، فخط هـ ح موازٍ لخط جـ د المستقيم المعلوم الوضع، لأن كل واحد منهما على سطح واحد مستوٍ.

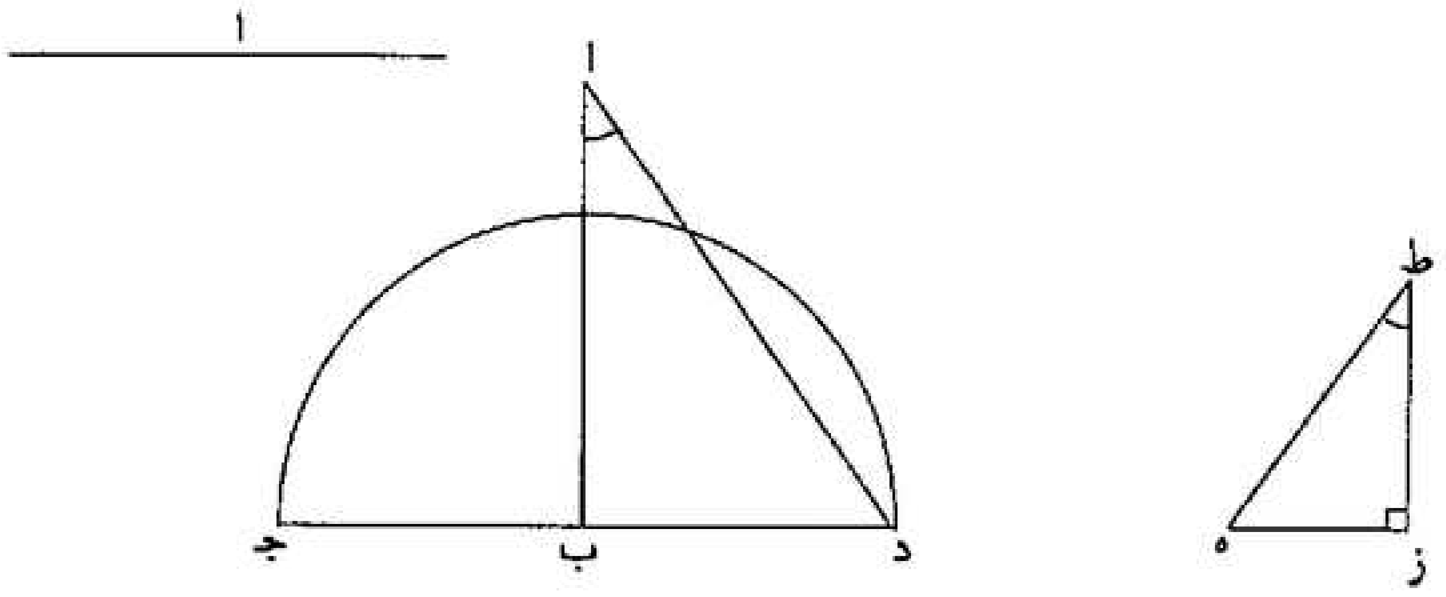
هـ-٧٧-و د-٢٢٤-ظ ن-١٦ ل-١١-و

فقد رسمنا بالبركار الذي محوره خط آ خطًا مستقيمًا موازيًا لخط مستقيم معلوم الوضع، ويجوز على نقطة معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– جـ – في رسم محيط دائرة أحدُ أقطارها خطٌ مستقيم معلوم على سطح مستوٍ معلوم.

نريد أن نرسم / بالبركار الذي محوره / خط آ على سطح مستوٍ معلوم محيط دائرة أحد أقطارها خط جـ د المستقيم المعلوم الوضع. /

س-٦٧ هـ-٧٧-ظ



1 يرسمه: يرسم [د] – 3 عليه: ناقصة [ط]؛ نجد بعدها «مخط محع فكل واحد من السطح الذي يدور عليه» [ن، ض] / مخط: بخط [جـ] محيط [ل] – 4 فالفصل: والفصل [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / لهما: بهما [ل] – 5 وهو عمود ... ا ب هـ: ناقصة [س] / عليه: على [ل] / ويرسمه: فيرسمه [ا، جـ، د، هـ، س، ل] / ولأن: فلان [ل] / هـ ح: هـ ا ح [ا، هـ، د، ل] – 6 هـ ز جـ: هـ ز ح [هـ] – 9 فقد: وقد [د] / الذي: الذي هو [ل] / خطًا: ناقصة [ن، ض] – 11 جـ: الثالث [د] ناقصة [ل] / رسم: ترسيم [ب، س] الاسم [ل] / محيط: ناقصة [ط] / معلوم: معلومة [ل] – 12-11 جـ ... معلوم: ناقصة [ن، ض] – 12 معلوم: معلومة [ل] – 13 محوره خط آ على سطح: يجوزه خطان على خط [ل] / آ: كتب بَ فوقها [س] / معلوم: معلومة [ل].

فنجعل / نسبة خط هـ ز / إلى خط ز ط كنسبة نصف خط جـ د إلى محور آ، ا-٩٧-ظ د-٢٢٥-و ل-١١-ظ وزاوية هـ ز ط قائمة. ونصل خط هـ ط، ونجعل / زاوية مركز البركار قائمة، وزاوية الرأس ط-١١١-ظ مثل زاوية هـ ط ز، ونحرك البركار حتى يلقى رأسُ المخط من جهة الزاوية الحادة خطَّ المركز، فليلقه على نقطة ما. / فنطبق تلك النقطة على إحدى نقطتي جـ د؛ فليكن على جـ-٩٨-ظ د وخطَّ المركز على خط جـ د، وسطحَ المركز على السطح المفروض / حتى يكون البركار ب-٤٧ د ا ب، ورأسه / نقطة آ، ومحوره ا ب، ومركزه نقطة ب، وخط الرأس خط ا د. ن-١٧

فأقول: إن رأس المخطّ بحركة البركار يرسم على السطح المفروض محيط دائرة أحدُ أقطارها خط جـ د.

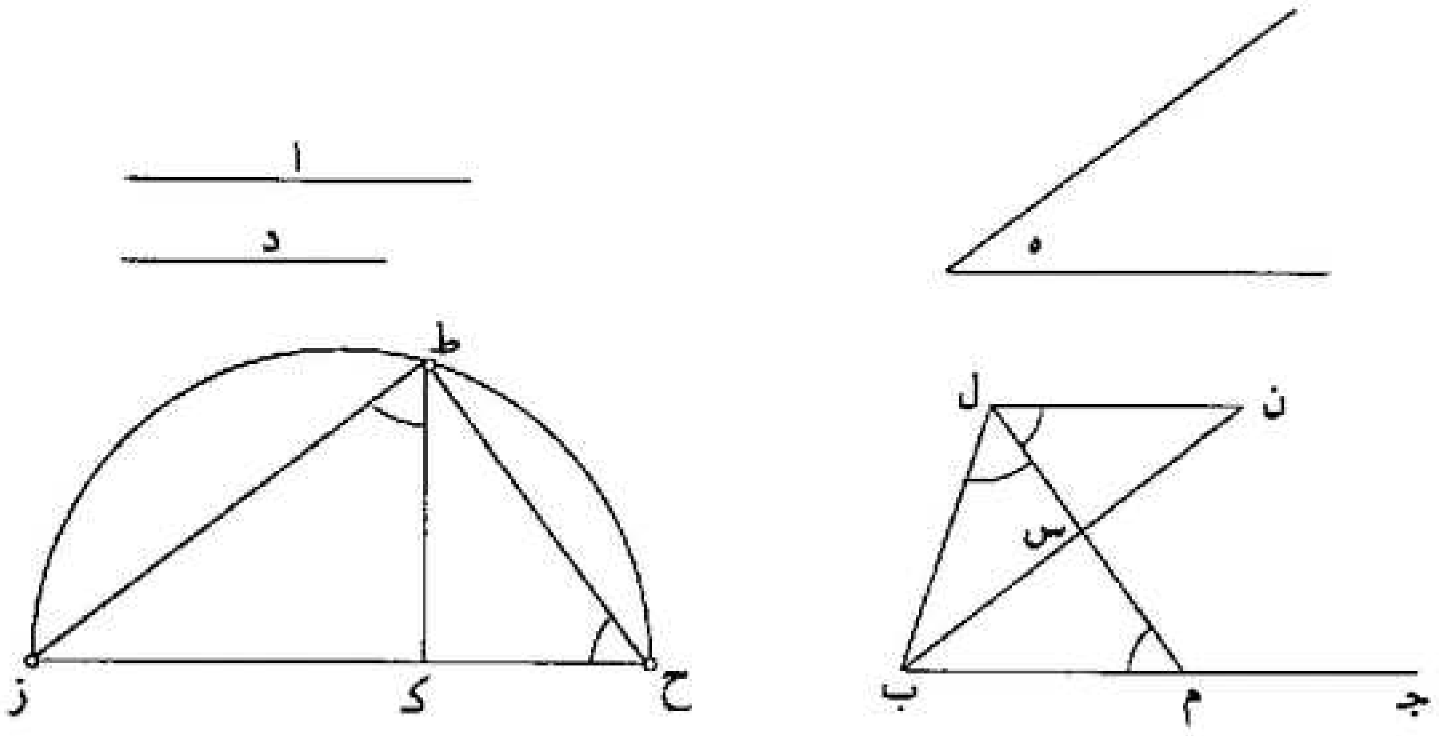
برهانه: أن / الخط الذي يرسمه رأس المخطّ على السطح المفروض محيط دائرة، كما هـ-٧٨-و بيّناه في المقالة الأولى، ونقطة / ب مركز تلك الدائرة. وأيضًا، لأن نسبة د ب إلى ب ا ل-١٢-و كنسبة هـ ز إلى ز ط من جهة تشابه المثلثين، ونسبة هـ ز إلى ز ط كنسبة نصف خط جـ د إلى خط ب ا، فنسبة كل واحد من نصف خط جـ د، وخط د ب، إلى خط ا ب واحدة، فخط د ب نصف خط جـ د، فخط ب د مساوٍ لخط ب جـ، فمحيط الدائرة يمرّ على نقطة جـ، فخط جـ د قطر الدائرة، لأنه يمرّ بمركز ب، ورأس المخطّ يرسم محيط تلك الدائرة.

فقد رسمنا بالبركار الذي محوره خط آ على السطح المستوي المعلوم محيط / دائرة د-٢٢٥-ظ أحد أقطارها خط جـ د المستقيم المعلوم الوضع؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

1 نسبة: النسبة [ل] / خط (الثانية): أثبتها فوق السطر [ب] / جـ د: ب د [ب] و بد [ل] / آ: كتب ب فوقها [س] – 2 وزاوية: فزاوية [ب] / هـ ز ط: ز ط [هـ] / قائمة: ناقصة [ل] – 3 ونحرك: وتحرك [هـ] ويحرك [ن] ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / يلقى: يلتقى [ا، د، هـ، س، ل] / الحادة: كتب أولاً «الزايدة»، ثم صحح عليها [ن] – 4 فليلقه: فيلقيه [ل] / نقطتي: نقطة [ل] / فليكن: وليكن [ب، س، ط، ن، ض] ولكن [ل] – 5 خط (الثانية): ناقصة [ا، جـ، د، هـ، س] / خط جـ د وسطح المركز على: ناقصة [ط] / السطح: سطح [ن] – 6 ا ب: ناقصة [ا، جـ، هـ] – 7 فأقول: اقول [س، ط، ل] / السطح: سطح [ن] – 9 برهانه: برهان ذلك [ن، ض] / يرسمه: يرسم [ا، جـ، هـ] / المخط: البركار، وأثبت الصواب تحتها [ا] البركار [جـ، هـ] / محيط: مخط [ا، د، هـ] بخط [جـ] / دائرة: دائرة المخط [جـ، هـ] الدائرة [ن] – 10 بيّناه: بينا [ا، جـ، هـ، ن، ض] بينه [د، ل] قلناه [ط] / الأولى: ناقصة [ط] / لأن: ان [ط] / د ب: د ر [ب، ط، ل] / ب ا: ب [ل] – 11 جهة تشابه: تشابه جهة، وأشار إلى ذلك، فكتب الحرف «ح» تحت «تشابه» و«م» تحت «جهة» [ط] / تشابه: منا تشابه [ن] / هـ ز: د ر [ل] – 12 نصف: ناقصة [س] / جـ د: حر [ب، س، ط، ل] / وخط: خط [ل] / د ب: حـ ر [ب] / إلى خط ا ب: أثبت «إلى ب ا» فوق السطر مع «ظ» [س] ناقصة [ب، ط، ل] – 13 فخط: فقط [ل] / د ب: د ز [جـ] / فخط: وخط [ا، جـ، د، هـ] – 13-14 فخط ب د ... فخط جـ د: ناقصة [ل] – 14 فخط: وخط [ا، جـ، د، هـ] / لأنه يمر بمركز ب ... الدائرة: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ط، س، ل] – 15 فقد: وقد [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / محوره: محور ا ب [ل] / آ: كتب ب فوقها [س] / المستوي: المستو [ل] – 16 أحد: ناقصة [ا، جـ، هـ، س، ل].

– د – في رسم محيط قطع مكافئ أحدُ أقطاره خطٌّ معلوم على سطح مستوٍ معلوم. /

نريد أن نرسم بالبركار، الذي محوره خط ا، على سطح مستوٍ معلوم محيط قطع مكافئ أحد أقطاره خط ب جـ المعلوم / الوضع، ورأس القطر نقطة ب، والضلع القائم لذلك / القطر خط د المعلوم القدر، والزاوية التي يحيط بها القطر وخط / ترتيبه مساوية لزاوية هـ المعلومة. هـ-٧٨-ظ ط-١١٢-و ن-١٨ ل-١٢-ظ



‹ا› فإن كانت زاوية هـ قائمة، خطّطنا على خط ما مستقيم، وهو ز ح، نصف دائرة ز ط ح، ونحدث على خط ز ح نقطة، فلتكن / ك، حتى تكون نسبة مربع ز ك إلى سطح ز ح في ح ك كنسبة مربع نصف خط الضلع القائم، وهو د، إلى مربع المحور، وهو ا، كما بينا في كتابنا في *إحداث النقط على الخطوط في نسب السطوح*. ونجعل ك ط عمودًا على ز ح، ونصل / خط ط ح، ونجعل كل واحدة من زاويتي رأس البركار ومركزه س-٦٨ د-٢٢٦-و

1 د: الرابع [د] / رسم: ترسيم [س] / محيط: أثبتها في الهامش [ا] / قطع: ناقصة [جـ، هـ] / مكافئ: مكافيا [ط] مكافيه [ل] / معلوم: معلوم الوضع [ط] – 1-2 د ... معلوم: ناقصة [ن، ض] / على سطح مستوٍ معلوم: ناقصة [هـ] – 1-3 على سطح ... معلوم: ناقصة [ل] – 3 الذي: الى [ا، هـ] التي [جـ] / ا: كتب ب فوقها [س] / محيط: ناقصة [ط] – 4 ب: ا [ا] ز [هـ، جـ] – 5 د: ا ز [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 5-6 مساوية لزاوية هـ: معلوم لزاويته هى [ل] – 6 المعلومة: المعلوم [هـ] – 7 هـ: ناقصة [ل] / خططنا: وخططنا [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / نصف: ناقصة [ن، ض] – 8 ز ط ح: و ط ح [ا، هـ] / ونحدث: أثبتها فوق السطر مع «ظـ» [س] / على خط ز ح: ناقصة [س] / خط: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ط، ل] / فلتكن: وليكن [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط] ولكن [ل] – 9 ح ك: حـ ك [س] / الضلع: ضلع [س] / د: د هـ [ب، د، س، ط، ل] كه [جـ، هـ]؛ من هنا توقف مصطفى صدقي عن النقل ونسخ باقي المخطوطة ناسخ آخر لا نعرف هويته [جـ] – 10 ا: با [جـ] / بينا: نجدها في مخطوطة [ن] فقط / في كتابنا: كانتا [د] / نسب: نسبة [ا، جـ، د، هـ، ل] / ونجعل: وتجعل [جـ]، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / ك ط: بط [جـ] – 11 نصل: يحصل [س، ط، ل] / ط ح: لحـ [جـ، هـ] / كل: ناقصة [ط] / ومركزه: ومركز [جـ، هـ].

مساوية لزاوية كـ ح ط التي هي أصغر من قائمة. ونحرّك البركار حتى يلقى/ رأس المخطّ خطُّ المركز من جهة الزاوية الحادة على نقطة ما. فنطبق تلك النقطة على نقطة ب وخطُّ المركز على خط ب جـ، وسطحَ المركز على السطح المعلوم، فليكن البركار ب ل م / ورأسُه نقطةَ ل، ومحوره ل م، ومركزه نقطة م، وخطُّ الرأس إن كانت زاوية / الرأس الحادة متبادلة مع زاوية المركز الحادة، وهو ل ن، وإن كانتا من جهة واحدة، وهو ل ب، وخطُّ المركز، وهو ب م. فإن رأس المخطّ بحركة البركار يرسم على السطح المعلوم قطعًا / مكافئًا، كما بينا في المقالة الأولى. (هـ-٧٩-و، ل-١٣-و، ا-٩٨-و، جـ-٩٩-و)

فأقول: إن ضلعه القائم خطُّ د والزاويةَ التي يحيط بها قطر ب جـ وخط ترتيبه مساويةٌ لزاوية هـ التي فرضناها قائمة.

برهانه: أنّا نخرج من / نقطة ب / خطًا يكون عمودًا على محور ل م، وهو ب س، ونصل خط ز ط؛ فلأن نسبة / مربع نصف خط د إلى مربع المحور، وهو ل م، كنسبة مربع زكـ إلى سطح ز ح في ح كـ، / وسطح ز ح في ح كـ مساوٍ لمربع ط ح، فنسبة مربع نصف خط د إلى مربع ل م كنسبة مربع / زكـ إلى مربع ط ح. فنسبة نصف خط د إلى خط ل م كنسبة خط زكـ إلى خط ح ط؛ ونسبة خط زكـ إلى خط ح ط كنسبة سطح ح ز في زكـ، أعني مربع ز ط، إلى سطح / ح ز في ح ط، لأن ز ح ارتفاع مشترك لهما. فنسبة مربع ز ط إلى سطح ز ح في ح ط كنسبة نصف خط د إلى خط ل م، وهي كنسبة ربع خط د إلى خط ل س لأن خط ل س نصف خط ل م، من (ن-١٩، ب-٤٨، هـ-٧٩-ظ، ط-١١٢-ظ، ل-١٣-ظ، د-٢٢٦-ظ)

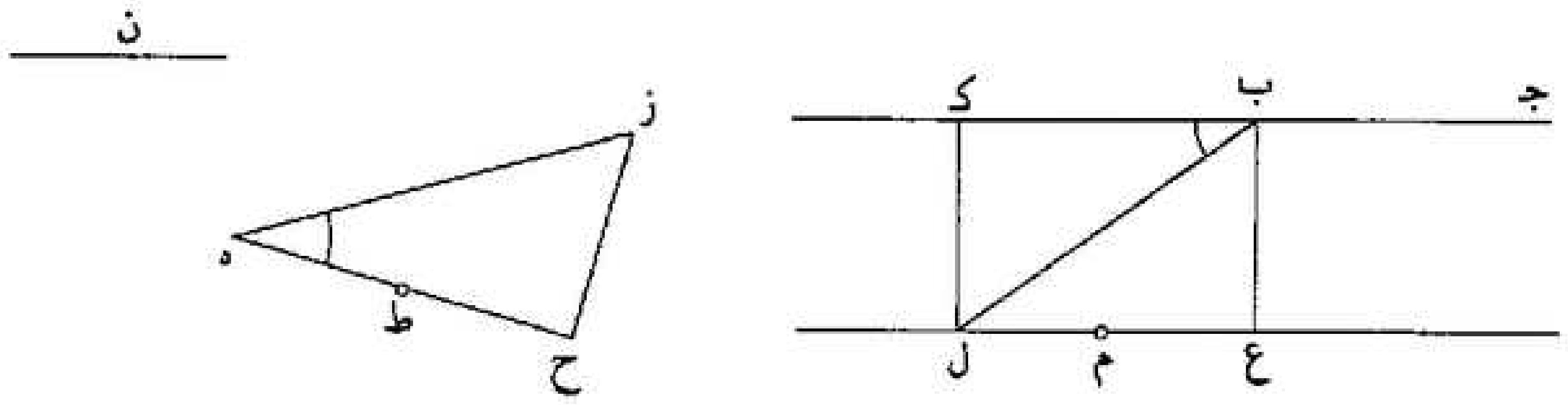
1 مساوية: متساوية [ل] / كـ ح ط: كـ حـ ط [س] – 1-2 المخطّ خطُّ: المحيط خط ب [ل] – 2 فنطبق: نطبق [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] فتطبق [ن] / فنطبق ... نقطة: أثبتها في الهامش [ب] / ب: ن [جـ] – 3 فليكن: ولكن [ا، ب، جـ، هـ، س] وليكن [د، ط] / فليكن البركار: ناقصة [ل] / ب ل م: ناقصة [س] نلم [ب] – 4 ل م: كر [جـ، هـ] / زاوية: زاويته [جـ، هـ، د] – 5 متبادلة: قد تقرأ «مساوية» [س] / المركز: مركز [س] / ل ن: لر [جـ، د، هـ، ل] / وهو: وهي [ب، ل] هي [ا، جـ، د، هـ، س، ط] – 6 ب م: ل م [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 8 فأقول: ناقصة [د] / القائم: لقائم [ب] / د: و [جـ] / ب جـ: د [ل] – 9 فرضناها: فرضنا هما [ل] – 10 برهانه: برهان ذلك [ن، ض] / أنّا: انما [ل] / ل م: ناقصة [س، ط، ل] / ب س: ل س ن [ب، س، ط] ليس [ل] – 11 وهو: ناقصة [ل] – 12 ح كـ: حـ كـ [س] / مساوٍ: مساويًا [ن] / ط ح: ط ى [هـ] – 13 زكـ: د كـ [س] / نصف: نجدها في مخطوطة [ن] فقط – 14 خط (الثانية): ناقصة [ل] / ل م: ل حـ [ا، د، هـ] بحـ [جـ] / زكـ: حـ ط [ن] / خط (الثالثة): ناقصة [ن، ض] / ح ط (الأولى): كـ ط [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / خط (الخامسة): خط [ن] / ح ط: ناقصة [ل] كتبها «خط» [هـ]، ولن نشير إليها فيما بعد – 15 سطح: ناقصة [ن، ض] / ح ز: حـ ر [ا، ب، جـ، د، هـ] / ز ط: نطر [جـ، هـ] ب ط [ل] / ح ز: حـ د [ا، جـ، د، هـ] حـ ر [س، ل] / ح ط: حـ ط [س] كثيرًا ما كتبها «خط» ولن نشير إليها فيما بعد [ل] / ز ح: د ح ا [ل] – 15-16 ارتفاع مشترك: قد تقرأ «ونتلع مشتركا» [ل] – 16 ز ط: ناقصة [ط، س، ل]، وترك ناسخا [س، ط] فراغًا لها / ح ط: خط [جـ] / نصف: أثبتها فوق السطر [ب] – 17 ل م: لحم [ل] / وهي ... ل م: ناقصة [ن، ض] / كنسبة: نسبة [جـ، د، هـ، ل] / خط (الثانية): ناقصة [ل] / ل س: ل س ن [ب، د، س، ل] / لأن خط ل س: أثبتها في الهامش [ب] / ل س: لسن [ب، د، ل]، وكذلك فيما يلي / ل م: ا [ل] / من: في [س].

جهة أن مثلث ل ب م متساوي الساقين وب س عمود على قاعدة ل م؛ فنسبة مربع
ز ط إلى سطح ز ح في ح ط كنسبة ربع خط د إلى خط ل س. وأيضاً، لأن زاوية
س ل ب / مساوية لزاوية ز ح ط، وزاوية ل س ب مساوية لزاوية ز ط ح، لأن كل هـ-٨٠-و
واحدة منهما قائمة، فمثلث ل س ب يشبه مثلث ز ط ح،/ فنسبة س ب إلى ب ل س-٦٩
كنسبة ط ز إلى ز ح، ونسبة ب س إلى س ل كنسبة ز ط إلى / ط ح؛ فالنسبة المؤلفة ل-١٤-و
من نسبة س ب إلى ب ل ومن نسبة ب س إلى س ل، أعني نسبة مربع ب س إلى
سطح س ل في ل ب، كالنسبة المؤلفة من نسبة ط ز إلى ز ح ومن نسبة ز ط إلى
ط ح، أعني نسبة مربع ز ط إلى سطح ز ح في ح ط؛ فنسبة مربع ب س إلى سطح
س ل في ل ب كنسبة مربع ز ط إلى سطح ز ح في ح ط. ولكن نسبة مربع ز ط / إلى ن-٢٠
سطح ز ح في ح ط كنسبة ربع خط د إلى خط ل س؛ فنسبة مربع س ب إلى سطح
س ل في ل ب كنسبة ربع خط د إلى خط ل س؛ فنسبة أربعة أمثال مربع ب س، وهو
مربع ب ن – لأن خط ب س مثل خط س ن – إلى سطح س ل في ل ب كنسبة
أربعة أمثال / ربع خط د، أعني / خط د، إلى خط ل س؛ ونسبة خط د إلى خط د-٢٢٧-و هـ-٨٠-ظ
ل س كنسبة سطح خط د في ل ب إلى سطح س ل في ل ب، لأن ل ب ارتفاع
مشترك لهما؛ فنسبة كل واحد من مربع خط ب ن وسطح د في ل ب إلى سطح س ل / جـ-٩٩-ظ
في ل ب واحدة؛ فمربع خط / ب ن مساوٍ لسطح خط د في ل ب، / فنسبة خط د ل-١٤-ظ ط-١١٣-و

1 ل ب م: ل م د [س، ط] كز [ل] لـم [جـ، ن] / متساوي: مساوي [ض] متساوية [ن] / وب س: ولس [ا، جـ، د، هـ، س، ط] ونس [جـ] وعـر [ن] – 2 ربع: ناقصة [ل] / د: ه [ن] – 3 زح ط: حط [ل] / ل س ب: فوق السطر [ن] / ز ط ح: ط ح [ل] د ط ح [ب] – 4 واحدة: واحد [ب، د، س، ل] / يشبه: تشبه [ض، ن] / ز ط ح: ط ح [ل] / إلى ب ل: ناقصة [ن] أضافها [ض] / ب ل: با [ب، س، ط، ل] – 5 زح: اح [ط] / ب س: ن س [د، س] / س ل: سد [ا، جـ، د، هـ، ل] – 6 نسبة (الأولى): ناقصة [ن، ض] / س ل: سد [ا، جـ، د، هـ، ل] / ب س: نس [جـ، هـ] سن [ل] نر [ن] – 6-7 مربع ... من نسبة: أثبتها في الهامش [ا] – 7 س ل: سد [ا، جـ، د، هـ، ل] / كالنسبة: كنسبة [ن] / ط ز: كز [ن] / ومن: من [ل] – 8 مربع: ناقصة [ب، س، ط، ل] / إلى: في [جـ] / فنسبة: ونسبة [ا، جـ، د، هـ، ل] / ب س: نس [ن] لسن [ل] – 9 س ل: سد [ا، جـ، د، هـ، ل] / ل ب: ل م [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / ح ط: خطان [ل] / ولكن: لكن [ن، ض] – 10 زح: د [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] د رح [ب] / ربع: ربع مربع [ب] / ل س: بس [ب، س] – 10-11 فنسبة ... ل س: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ل، ن] – 11 فنسبة: ونسبة [ا، جـ، د، هـ، ل] / أمثال: آحاد [ن، ض] / مربع: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ل] ربع [ن] / ب س: ل س [ا، ب، د، س، ل، ن] – 12 ب ن: ب ز [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل]، ولن نشير إليها فيما بعد/ ب س: ل س [ا، ب، د، هـ، س، ط، ل] نس [ن] / خط: ناقصة [ن، ض] / سطح: خط [ا، جـ، د، هـ، ل] – 13 ربع: ناقصة [ط، س، ل] / خط د: حط [ط] / خط (الثالثة): ناقصة [ن، ض] – 14 كنسبة: نسبة [ا، جـ، هـ] / سطح: ناقصة [ب، س، ط، ل] / إلى سطح س ل في ل ب: ناقصة [ط] / ل ب: ل [ط] – 16 خط (الثانية): نجدها في [ن] فقط / د (الثانية): حـ [هـ، ل].

إلى خط ب نَ كنسبة خط ب نَ إلى ‹خط› ب لَ؛ فنسبة خط دَ إلى خط ب لَ كنسبة مربع ب نَ إلى مربع ب لَ. ومربع ب لَ مساوٍ لسطح ب لَ في ل نَ، لأن مثلث ب ل نَ متساوي الساقين، فنسبة خط دَ إلى خط ب لَ كنسبة مربع ب نَ إلى سطح ب لَ في ل نَ. ونقطة لَ رأس المخروط، وخط ب جـ موازٍ لخط ل نَ، ونسبة خط دَ إلى ضلع المثلث / المارّ برأس المخروط، على ما وصفنا قبل، كنسبة ‹مربع› قاعدة المثلث إلى ب-٤٩ سطح أحد الضلعين من المثلث في الآخر، فخط دَ هو الضلع القائم للقطع المكافئ، كما قال / أبلونيوس، / وسهم ذلك القطع ب جـ، لأن المخروط هو قائم. فالزاوية التي يحيط بها خط ب جـ / وخط الترتيب قائمة ورأس المخطّ يجوز على / محيطه. ل-١٥-و هـ-٨١-و ا-٩٨-ظ ن-٢١

فقد / رسمنا بالبركار، الذي محوره خط اَ، على سطح مستوٍ مفروض قطعًا مكافئًا س-٧٠ أحدُ أقطاره ب جـ وضلعُه القائم خط دَ، والزاوية التي يحيط بها القطر وخط ترتيبه مساوية لزاوية هـ / القائمة. د-٢٢٧-ظ



‹بَ› وإن كانت زاوية هـ ليست بقائمة، نجعل خط ز حَ عمودًا على أحد خطي هـ ز هـ طَ من جهة الزاوية الحادة، فليكن عمودًا على خط هـ حَ، ونقسم خط هـ حَ بنصفين على نقطة طَ، ونجعل نسبة خط دَ إلى خط آخر، وهو نَ، كنسبة مربع خط هـ ز إلى

1 خط: ناقصة [ن، ض] / ب نَ (الأولى): بدَ [ا، جـ، د، هـ، ل] بلَ [ب، س] برَ [جـ] / ب نَ (الثانية): ب ن رَ [ب] / ب لَ: بدَ [د، جـ] / فنسبة: ونسبة [ا، د، جـ، هـ، ل] / دَ: د لَ [ن] / خط: ناقصة [ط] – 2 ب لَ (الأولى): بدَ [ا، جـ، د، هـ، ل] / لسطح: لخط [ن، ض] / ب لَ: بدَ [س] – 3 متساوي: مساوي [ن، ض] مساو [ل] / دَ: حـَ [ا، ب، جـ، د، هـ، س] حَ [ل] – 4 وخط: ناقصة [ل] / ب جـ: كـَ [ا، جـ، هـ] / ونسبة: فنسبة [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 5 المثلث: مثلث الى [س، ل] المثلث الى [ط] / ‹مربع›: في [ض] / المثلث: مثلث [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 6 للقطع: ناقصة [ا، جـ، هـ] القطع [د، س، ط، ل] يقطع [ن] – 7 هو: وهو [ب] – 8 خط: ناقصة [ل] / ب جـ: دَ [جـ، هـ] ب حَ [س، ل] / قائمة: قائم [جـ، هـ] / المخط: للمخط [ا] المحيط [ل] / محيطه: محيطها، في كل المخطوطات – 9 اَ: باَ [جـ] وكذلك فيما بعد / سطح: راس سطح [ل] / قطعًا مكافئًا: قطع مكاف [ن] – 10 أقطاره: اقطار [جـ] – 11 القائمة: قائمة [ا، جـ، هـ] – 12 نجعل: نجعل على [ا، جـ، د، هـ، ل] / خط: ناقصة [ط] / أحد: نجدها في مخطوطة [ن] فقط / هـ زَ: هـ نَ [ب] – 13 هـ طَ: ز طَ [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / الحادة: الحالية [ا، د، جـ، هـ، س، ط، ل] الحالية الحادة [ب] / فليكن: وليكن [ن، ض] – 13-14 هـ حَ ونقسم ... إلى خط: ناقصة [ل] – 14 خط (الثانية): فوق السطر [س] / نَ: رَ [ا، ب، جـ، د، هـ، س] / مربع: أثبتها في الهامش [ن].

سطح زح في ح ط؛ ونجعل زاوية كـ ب ل مساوية / لزاوية ز هـ ح، وخط كـ ل مساويًا هـ-٨١-ظ
لخط ن، وهو عمود على خط ب كـ؛ ونجعل خط ل ع موازيًا لخط / كـ ب جـ، وخط ل-١٥-ظ
ب ع موازيًا لخط ل كـ؛ ونقسم *ل ع بنصفين على نقطة م، ونجعل نسبة خط ع ب إلى
خط آخر، وهو س، كنسبة م ع إلى ع ب. ونرسم بالبركار الذي محوره خط ا على
السطح المفروض القطع / المكافئ الذي أحد أقطاره خط م ع المعلوم الوضع، / ورأسه جـ-١٠٠-و ط-١١٣-ظ
نقطة م، وضلعه القائم خط س المعلوم / القدر، والزاوية التي يحيط بها قطر م ع وخط ل-١٧-ظ
ترتيبه قائمة كما رسمنا قبل؛ فذلك القطع هو القطع المكافئ الذي يجوز محيطه على
نقطة ب وأحد أقطاره، هو خط ب جـ، والضلع القائم لقطر ب جـ هو خط د، والزاوية
التي يحيط بها قطر ب جـ وخط ترتيبه هي مساوية لزاوية هـ المعلومة، كما بين أبلونيوس // ن-٢٢
الفاضل في المقالة / الأولى من كتاب *المخروطات*. هـ-٨٢-و د-٢٢٨-و

فقد رسمنا بالبركار الذي محوره خط ا محيط قطع مكافئ أحد أقطاره خط ب جـ
المعلوم الوضع ورأسه نقطة ب، وضلعه / القائم خط د المعلوم القدر، والزاوية التي يحيط ل-١٨-و
بها القطر وخط ترتيبه مساوية لزاوية هـ المعلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبين. /

– هـ – في رسم القطع الزائد والمتقابل الوضع، أحدُ أقطارهما خطٌّ معلوم والضلع ا-٩٩-و
القائم لهما خط معلوم.

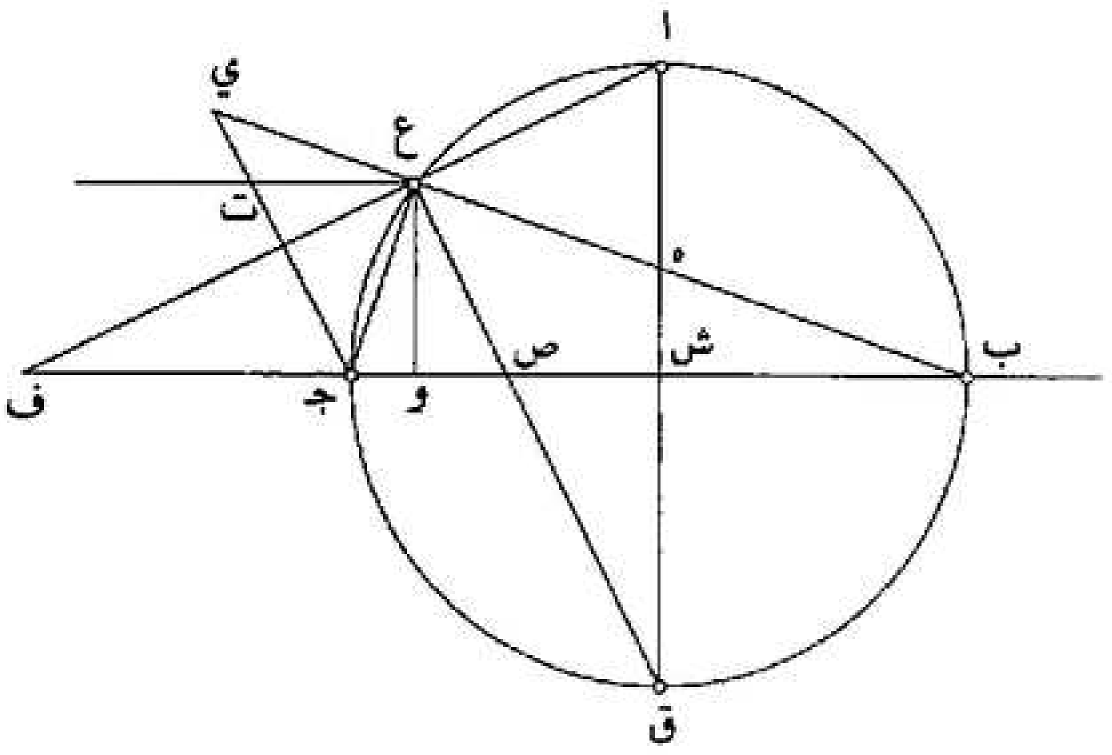
1 سطح: ناقصة [د] / كـ ب ل: كل [ا، د، جـ، هـ، س، ن] د ل [ل] / مساويًا: مساوٍ [ا، ب، د، جـ، هـ، س، ل، ن] مساوية [ط] – 2 لخط ن: وط ن [ط]، وهو صحيح في [ع] / ب كـ: ركـ [ا، ب، د، جـ، هـ، س، ط، ل] / خط: نجدها في [ن] فقط / موازيًا: موازٍ، في كل المخطوطات – 3 ب ع: لع [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ل] / موازيًا: موازٍ، في كل المخطوطات / ل كـ: د كـ [ل] / ونقسم: بعد هذه الكلمة قدم ناسخ [ل] ما يساوي الورقة وأخر ما يساوي مثلها، وهكذا نجد ما بين النجمتين في ١٧و–١٨ظ؛ وفي الأغلب يرجع هذا الخطأ إلى قلب ورقة في النسخة التي نقل عنها. فمن الواضح أن الناسخ لم يكن يفهم ما ينقل، وهذا يؤكده أيضًا كثرة عدد الأخطاء – 4 خط: ناقصة [ن، ض] / ونرسم: كررها في بداية السطر التالي [ن] – 5 ورأسه: فرأسه [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ل] ناقصة [ط] – 7 فذلك: فلذلك [ا، جـ، د، هـ، ل] فكذلك [ط] / القطع هو: ناقصة [ط] / يجوز: محور [ل] / محيطه: محيطها، في كل المخطوطات – 8 هو: وهو [ن، ض] / ب جـ: د [ب] / والضلع: الضلع [ط] / والضلع القائم لقطر: والضلع لقطر [د] والظلع لقطر [ا، هـ] والطلع القطر [جـ] والضلع القائم لخط [ن، ض] / هو: وهو [ا، د، جـ، هـ، س، ط، ل] – 9 مساوية: متساوية [د] / لزاوية هـ المعلومة: لدايره المعلوم [ا، جـ، د، هـ] / المعلومة: المعلوم [ب، س] ناقصة [ط] – 10 الفاضل: ناقصة [ن، ض] – 11 محيط قطع مكافئ: محيطًا قطعًا مكافئًا [ا، جـ، د، هـ، ط، ل] محيط قطعا مكافئا [س] – 13 بها: كررها في بداية السطر التالي [ن] / المعلومة: المعلوم [ا، جـ، د، هـ، ل] / نبين: كتب بعدها «من العمل والحمد لله وحده» [ا، جـ، هـ] – 14-15 هـ ... معلوم: ناقصة [ن، ض] – 14 هـ: و [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ل] ناقصة [ط] / في رسم: كيف نرسم [ا، جـ، هـ] في ترسيم [ب، س] / والمتقابل: والمقابل [جـ، د، هـ] والمتقابلة [س] والقابل [ل] / والضلع: والقطع [س] – 15 القائم: القائمة [ا، جـ، د، هـ، ل].

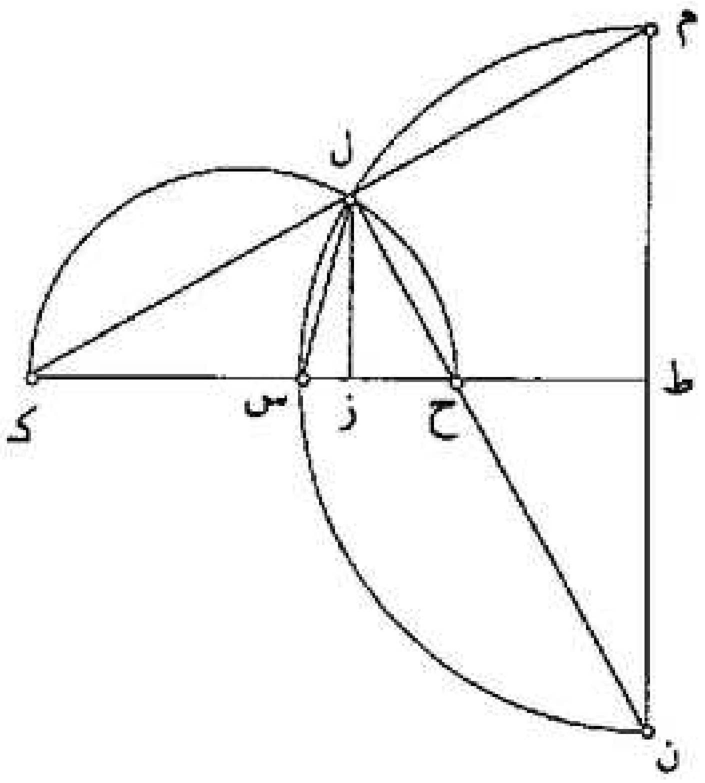
نريد أن نرسم بالبركار الذي محوره خط آ على سطح مستوٍ / مفروض قطعًا زائدًا س-٧١
ومتقابل الوضع ، / يكون أحد أقطارهما خط ب جـ المعلوم القدر والوضع ، وضلعه القائم هـ-٨٢-ظ
خط د المعلوم القدر، والزاوية التي يحيط بها القطر وخط ترتيبه مساوية / لزاوية هـ ب-٥٠
المعلومة.

فإن كانت زاوية هـ قائمة، / جعلنا نسبة ز ح إلى ح ط كنسبة الضلع القائم، وهو جـ-١٠٠-ظ
د، إلى القطر، وهو ب جـ؛ ونحدث على استقامة خط ط ز من جهة ز نقطة، فلتكن
ك، حتى تكون نسبة سطح / ك ح في ك ز إلى سطح ك ط في ط ح كنسبة مربع محور ل-١٨-ظ
البركار، وهو آ، إلى مربع نصف قطر ب جـ، كما بينا في كتاب *إحداث النقط على*
الخطوط في نسب السطوح. / ونخطّ على خط ك ح نصف دائرة ك ل ح، ونجعل / ط-١١٤-و ن-٢٣
خط ل ز عمودًا على خط ك ح، ونصل خطي ك ل ل ح، ونخرجهما على الاستقامة،
ونجعل خط ن ط م عمودًا على خط ك ط، ونخطّ على / خط ن ط م نصف دائرة من هـ-٨٣-و
جهة ك، فيجوز محيطها على نقطة ل، لأن زاوية ن ل م قائمة، وعلى نقطة من خط
ك ح، ولتكن س، ونصل خط س ل. ونجعل زاوية رأس البركار مساوية لزاوية ك ل س
وزاويةَ مركز البركار مساوية لزاوية ل ك س. ونحرّك / البركار حتى يلقى رأس المخطّ من د-٢٢٨-ظ
جهة الزاوية الحادة خط المركز على نقطة ما، فنطبق تلك النقطة * على نقطة جـ، وخط
المركز على استقامة خط ب جـ وسطح المركز على السطح المفروض، حتى يكون البركار
جـ ع ف ورأسه نقطة ع، ومحوره ع ف، ومركزه نقطة ف، وخط الرأس – إن كانت
زاوية الرأس الحادة مع زاوية المركز الحادة من جهة واحدة – ع جـ؛ وإن كانتا متبادلتين،
كان ع ي وخط المركز جـ ف.

1 أن: ناقصة [ن] أضافها [ض] / بالبركار: البركار [ط] / زائدًا: زايد [ن] – 2 ومتقابل: ومقابل [ا، جـ، د، هـ] او متقابل [ب، س] متقابل [ن] / ب جـ: لا [جـ، هـ] ناقصة، وترك فراغًا لها [ن] أضافها [ض] – 3 خط: ناقصة [ن، ض] / هـ: ناقصة [س] – 5 جعلنا: حولنا [ط] – 6 نقطة: فقط [ط] / فلتكن: وليكن [ن، ض] – 7 ك ح: ح ك [ا، جـ، د، هـ، ط، ل] حـ ك [س] / ك ز: ك د [س] / ك ط: بط [جـ] / ط ح: بحح [جـ] – 8 ب جـ: ب ح [س] / كتاب: ناقصة [ل] – 9 على: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، س، ل] – 10 خط: نجدها في مخطوطة [ن] فقط / ل ز: ل ن [ا، جـ، هـ] ل د [س] / خط: نجدها في [ن] فقط / ك ح: بح [جـ] / خطي: خط [ن] / ك ل: ل [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 11 خط (الأولى): ناقصة [س] / ن ط م: لطم [ن] / ن ط م عمودًا على خط: مكررة [جـ، هـ] / ونخط على: ونجعل على [ب] ونجعل [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / ن ط م: فطم [ن] – 12 محيطها: محيطهما [ا، جـ، د، هـ] / ن ل م: بلم [ا، جـ، س] فلم [ن] / وعلى: علي [ا، د، جـ، هـ] – 13 س ل: سد [ا، د، جـ، هـ، ل] / ونجعل: وجعل [ل] – 14 ل ك س: كلس [ا، جـ، د، هـ] / المخط: الخط [ل] المحيط [س، ط] – 15 الزاوية: لزاوية [ن] الدايرة [ل] / جـ: ح [ا، د، هـ، س، ط، ل] خ [جـ] – 17 نقطة: فنقطة [ا، جـ، د، هـ] / ف: و [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 18 جهة: ناقصة [ط] / وإن: فان [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 19 ع ي: مى [ا] فى [جـ، د، هـ] ه [ل] / جـ ف: جب [ا، د، جـ، هـ] ح ف [س].

فأقول: إن رأسَ المخطّ بحركة البركار الذي محوره خط / ا يرسم على السطح المفروض قطعًا زائدًا، ورأسَ المخطّ المتقابل ‹المتقابلَ› الوضع، قطرُهما ب جـ وضلعُه القائم خط د، والزاويةُ التي يحيط بها القطر وخط ترتيبه مساوية لزاوية هـ القائمة أولاً. هـ-٨٣-ظ





برهانه: أنا نجعل خط ع ص ق عمودًا على خط ف ع، ونجعل نسبة / ع ف إلى ص ش كنسبة ل ك / إلى ح ط، ونخرج من نقطة ش عمودًا على خط ب جـ حتى يلقى خطي ف ع ع ص على نقطتي ا ق، ونجعل ع و عمودًا على خط ف ص ونخرج من نقطة جـ عمودًا على محور ع ف، وهو جـ ت ي، ونجعل خط ع ت موازيًا لخط ب جـ. فلأن نسبة مربع / محور البركار، وهو ع ف، / إلى مربع نصف خط القطر، وهو ب جـ، كنسبة سطح ح ك في ك ز، الذي هو مساوٍ لمربع خط ك ل، إلى سطح ك ط في ط ح، فنسبة مربع ك ل إلى سطح ك ط في ط ح كنسبة مربع ع ف إلى مربع نصف خط ب جـ. / وأيضًا، / نسبة ع ف إلى خط ف ص كنسبة خط ل ك إلى خط ك ح من جهة تشابه / المثلثين. ونسبة ع ف إلى ص ش كنسبة خط ل ك إلى ح ط، ل-١٦-و ن-٢٤ ط-١١٤-ظ س-٧٢ جـ-١٠١-و هـ-٨٤-و د-٢٢٩-و

1 بحركة: حركة [جـ، هـ] / على: مكررة في السطر التالي [ن] – 2 رأس المخط: ناقصة [ب] راسى المخط [ن، ض] / قطرهما: هما [ا، جـ، د، هـ، س، ط] اخرا [ل] – 3 مساوية: متساوية [ا، جـ، هـ] / هـ: نجدها في [ن] فقط / أولاً: في [ن] فقط – 4 برهانه: برهان ذلك [ن، ض] مطموسة [س] / ع ص ق: عصو [ا، ب، جـ، د، هـ، ل] / ف ع: مع [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] بع [ن] – 5 ص ش: مس [ا، جـ، د، هـ] س [ل] / كنسبة: ناقصة [ل] / ح ط: خط [جـ، د، هـ، ل] / خط: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 6 خطي: خط [ن] / ف ع: ق ع [ب، س] مع [ط] / ع و: ع ق [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ن] عن عق [ل] / ف ص: ق ص [ا، جـ، د، هـ، س، ل] – 7 جـ: ح [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / جـ ت ي: حـ ى [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط] حـ ه [ل] ح ث ى [ن] / خط: ناقصة [ن، ض، ل] – 9 ح ك: حـ ك [س] / الذي: مكررة [ن] / ك ط: بط [جـ] – 10 ك ل: غير واضحة، فأثبتها في الهامش [ن] / ك ط: بط [جـ] – 11 ب جـ: ل جـ [س] / نسبة: كنسبة [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / ف ص: ق ص [ا، جـ] فس [ن] / خط (الرابعة): ناقصة [ن، ض] – 12 ك ح: كـ م ن [س] لح [جـ، هـ] / ونسبة: فنسبة [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / ص ش: م س [ا، جـ، هـ، د، س، ل] فس [ب] / خط: ناقصة [ن، ض] / ح ط: خطّ [هـ]، وكثيرًا ما كتبها خط.

فنسبة ‹خط› ع ف إلى ف ش كنسبة خط ل ك إلى ك ط. فالنسبة المؤلفة من نسبة ل-١٦-ظ ع ف / إلى ف ش ومن نسبة ع ف إلى ص ش، أعني نسبة مربع ع ف / إلى سطح ا-٩٩-ظ ف ش في ش ص كالنسبة المؤلفة من نسبة ل ك إلى ك ط ومن نسبة ل ك إلى ح ط، أعني نسبة مربع ل ك إلى سطح ك ط في ط ح. فنسبة مربع ع ف إلى سطح ف ش في ش ص كنسبة مربع ل ك إلى سطح ك ط في ط ح. فنسبة مربع ع ف / إلى كل ب-٥١ واحد من سطح ف ش في ش ص وإلى مربع نصف خط ب جـ واحدة، لأنها كنسبة مربع ل ك / إلى سطح ك ط في ط ح. فسطح ف ش في ش ص مساوٍ لمربع نصف ن-٢٥ خط ب جـ. وأيضًا، لأن نسبة ق ش إلى ش ص كنسبة ف ش / إلى ش ا من جهة هـ-٨٤-ظ تشابه المثلثين، فسطح ق ش في ش ا مساوٍ لسطح ف ش في ش ص الذي هو مساوٍ لمربع نصف خط ب جـ. فسطح ق ش في ش ا مساوٍ لمربع نصف خط ب جـ. وأيضًا، لأن نسبة جـ ص إلى ف ع كنسبة ح س إلى ل ك من جهة تشابه المثلثين، ونسبة ف ع إلى ش ص كنسبة ل ك إلى ح ط، فنسبة جـ ص إلى / ص ش كنسبة س ح إلى ح ط. ل-١٧-و ونسبة جـ ش إلى ش ص كنسبة س ط إلى ط ح، ونسبة ص ش إلى ش ق كنسبة ح ط إلى ط ن، فنسبة جـ ش إلى ش ق كنسبة س ط إلى ط ن. وبمثل هذا التدبير، نسبة جـ ش إلى ش ا كنسبة س ط إلى ط م. فالنسبة المؤلفة من نسبة جـ ش إلى ش ق

1 فنسبة: ونسبة [ا، جـ، هـ] نسبة [ل] / ‹خط›: ح ط [ن] / ف ش: ق س [جـ، د، س] / ل ك: ا ك [ا] ك ل [س] / ك ط: بط [جـ] – 2 ف ش: ق س [جـ، د] / ص ش: مس [ا، جـ، د، هـ، ل]، وكذلك فيما يلي [ل] – 3 ف ش: ق س [س] بس [جـ، هـ] / ش ص: ص ش [ن، ض] / كالنسبة: فالنسبة [ن] / ك ط: لط [جـ] – 3-4 ومن نسبة ... سطح ك ط: ناقصة [س، ط، ل] – 4 فنسبة: نسبة [هـ] / ف ش: ق س [ا، جـ، د، هـ، س] – 5 مربع: مع [ط] / ل ك: ا ك [ا، ب، جـ، س، ط، ل] – 5-6 كنسبة ... ش ص: مكررة [ن، ض]، وأضاف [ض] بين الجملتين: «ومربع نصف خط ب جـ» – 6 ف ش: ق ش [ا، جـ، س] / نصف: مكررة [ن] – 7 ك ط: ل ط [جـ] / فسطح: وسطح [ل] / ف ش: ق س [ا، ب، جـ، د] ك س [س] / في: ناقصة [ن] / ش ص: س ص ن [س] / لمربع: لربع [ل] – 8 ب جـ: ب ح [ا، جـ، هـ، د، ل] / ق ش: ف ش [ن] / ف ش: ق ش [ا، ب، جـ، د، هـ، س] – 8-10 وأيضًا ... ب جـ: مكررة [ب] – 9 ق ش: ف س [ب، ن] / لسطح ... مساوٍ: ناقصة [ط، ل] / ف ش: ق ش [جـ، هـ، ن] – 10 نصف: ناقصة [ن] أضافها [ض] / فسطح ... ب جـ: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ط، ل] / خط (الثانية): نجدها في [ن، ض] – 10-11 فسطح ... المثلثين: ناقصة [س] – 11 جـ ص: ق ش [ا، ب، هـ، جـ] مص [ط] قص [د] / ف ع: ق ع [ب، جـ، هـ] مع [د، ط] مع [ن] / ف ع: ق ع [د، هـ، ن] م ع [س، ط] – 12 فنسبة: ونسبة [ن] / جـ ص: مس [جـ] ح س [ب، س] / إلى: ناقصة [ا، هـ، جـ] / ص ش: ش ص [ن، ض] مش [د] / س ح: ح س [ض] ه [ن] – 13 جـ ش: ح س [ب، س] / ص ش: حس [ا، ب، د، جـ، هـ، ط، ل] ح س [س] – 14 ط ن: ط ر [ا، جـ، هـ] / جـ ش: ح س [س]، ولن نشير إليها فيما بعد / ش ق: سر [ا، د، ل] س [جـ، هـ] / س ط: ش ط [ا، جـ، د، هـ، س، ط] / ط ن: ط ر [س] – 15 س ط: ش ط [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / ط م: ط ر [جـ، د] ط ن [هـ، ل] / فالنسبة: والنسبة [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل].

ومن نسبته إلى ش ا، أعني نسبة مربع جـ ش إلى سطح ق ش في ش ا كالنسبة المؤلفة / من نسبة س ط إلى ط ن ومن نسبته إلى ط م، / أعني نسبة مربع س ط / د-٢٢٩-ظ ل-١٩-و إلى سطح ط ن في ط م. لكن مربع س ط مساوٍ لسطح ن ط في ط م،/ فمربع جـ ش ط-١١٥-و هـ-٨٥-و مساوٍ لسطح ق ش في ش ا. وسطح ق ش في ش ا مساوٍ لمربع نصف خط ب جـ، فخط جـ ش نصف خط جـ ب، فخط جـ ش مثل خط ش ب. فنخط على نقط ا ب ق جـ محيط دائرة قطرها ا ش ق، لأن سطح ق ش في ش ا مساوٍ لمربع نصف خط ب جـ وزاوية ش قائمة. / ويجوز المحيط بنقطة ع، لأن زاوية ا ع ق قائمة. ن-٢٦

وأيضاً، إن حركنا البركار حتى تقع زاوية الرأس الحادة، وهي ف ع ي، متبادلة مع زاوية المركز الحادة، فلأن / زاوية / ف ع ص قائمة، فزاوية ف ع ي مع زاوية ص ع ب س-٧٣ جـ-١٠١-ظ مثل زاوية قائمة، لأن خط ي ع هـ مستقيم وزاوية ي ع ف مساوية لزاوية جـ ع ف، فزاوية جـ ع ق مساوية لزاوية ص ع ب، فالقوس التي بين جـ ق من تلك الدائرة مساوية للقوس التي فيما بين نقطة ق والتقاء رأس المخط على محيط/ الدائرة؛ وتلك النقطة هي هـ-٨٥-ظ ب. فخط ب جـ قطر القطع الزائد، لأن مخط ع هـ ب من جهة الزاوية المنفرجة، وهو على سطح المخروط المتقابل.

وأيضاً، لأن نسبة و ص إلى ع ف كنسبة ز ح إلى ل ك من جهة تشابه المثلثين، ونسبة ع ف إلى ص ش كنسبة ل ك إلى ح ط، فنسبة و ص إلى ص ش كنسبة ز ح

1 جـ ش: د س [ا، ب، جـ، د، هـ، ط، ل] ك س [س] – 2 س ط: ش ط [س] / ط ن: ط ر [ا، جـ، هـ] / ط م: ط ر [ا، جـ، د] ط ن [هـ] ط ن ا [ل] / س ط: ش ط [س] – 3 ن ط: و ط [س، ط] يط [ل] / ط م: ط ر [ا، جـ، ل] ط ن [د، هـ] – 4 ق ش (الأولى والثانية): ف س [ب] – 5 فخط (الأولى): بخط [ل] / فنخط: فيختط [ن، ض] – 5-6 نقط ا ب ق جـ: نقطة ا قبحـ [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط] نقطة ا ب و ح [ن] نقطة امح [ل] – 6 دائرة: دائرة التي [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / قطرها: قطرهما [ن] / ش ا: ش ب [ن] – 7 ويجوز: ومحور [ط] / المحيط: المخط [ط] / بنقطة: نقطة [ط] / ا ع ق: ا من [ا، هـ] ا ح ق [ب] ا ص ر [س] اصى [ط] ا مس [جـ] ا مر [د] – 8 حركنا: حركها [جـ] / وهي: وهو [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط] / ف ع ي: م ع ى [ا، جـ، د، هـ، س] بعى [ط] معى [ل] ق ع ي [ن] / متبادلة: مساوية [ط] / مع: فى [ل] – 9 ف ع ص: ب ع ص [ا، جـ، د، هـ، ل] / فزاوية: وزاوية [ا، جـ، د، هـ] / ف ع ي: ق ع ي [هـ، ن] بعى [ط] – 10 وزاوية: فزاوية [ن] – 11 فزاوية: وزاوية [ا، جـ، هـ] صححها في الهامش [د] / جـ ع ق: جـ ع ف [ا، ب، جـ، د، هـ، ن] / ص ع ب: صعد [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] صعق [ن] / جـ ق من: د ومن [ل] / من: في [س] / الدائرة: الزاوية [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / مساوية: نجدها في [ن] فقط – 12 للقوس: والقوس [ا، جـ، هـ] من القوس [ب] القوس [ط] / فيما: أثبتها في الهامش [ا] / وتلك: وثكل [جـ] – 12-13 هي ب: وهي ر [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] وهي ب ر [ب] – 13 ع هـ ب: عفه [ا، ب، جـ، د، هـ، ط، ل] ع ض هـ [س] / وهو: وهي [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 15 لأن ... ل ك: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / و ص: ف ص [ب] / ع ف: عفا [ن] – 16 ع ف: عف بد [ل] / ص ش: فس [د] ص [هـ] / و ص: ق ص [ا، ب، جـ، د، هـ] ف ص [س] ص [ط] و ش [ن] / ص ش: م س [س] فس [د].

إلى ح ط. ونسبة ز ح إلى ح ط كنسبة / خط د، الذي هو الضلع القائم، إلى قطر د-٢٣٠-و
ب جـ، فنسبة خط د إلى خط ب جـ كنسبة خط و ص إلى ‹خط› ص ش. ولكن نسبة
ص و إلى ص ش كنسبة خط ع ص إلى ص ق من جهة تشابه المثلثين. فنسبة خط د /
إلى خط ب جـ كنسبة ع ص إلى ص ق. ونسبة ع ص إلى ص ق كنسبة مربع ع ص ب-٥٢
إلى سطح ع ص في ص ق. وسطح ع ص في ص ق مساوٍ لسطح ب ص في ص جـ،
فنسبة خط د إلى ب جـ كنسبة مربع ع ص / إلى سطح ب ص في ص جـ، أعني ن-٢٧
كالنسبة المؤلفة من نسبة ع ص / إلى ص ب ومن نسبة ع ص إلى ص جـ. فنسبة خط ط-١١٥-ظ
د / إلى ب جـ كالنسبة المؤلفة من نسبة ع ص إلى ص ب ومن نسبة ع ص إلى ص جـ. ا-١٠٠-و
ونسبة ع ص إلى ص ب كنسبة ي ت / إلى ت ع / من جهة تشابه المثلثين، ونسبة ل-٢٠-و هـ-٨٦-و
ع ص إلى ص جـ كنسبة جـ ت إلى ت ع، لأن سطح جـ ت ع ص متوازي الأضلاع.
فنسبة خط د إلى خط ب جـ كالنسبة المؤلفة من نسبة ي ت إلى ت ع ومن نسبة جـ ت
إلى ت ع، أعني نسبة سطح جـ ت في ت ي إلى مربع ت ع. فنسبة خط د إلى خط
ب جـ كنسبة سطح جـ ت في ت ي إلى مربع ت ع. ونقطة ع رأس المخروط،

1 خط د: ناقصة [جـ، هـ] حطر [ا، د] ح ط [س] / الضلع: الطالع [جـ، هـ] الطلع [ا] – 2 ب جـ: ل حـ [س] / فنسبة خط د إلى خط ب جـ: ناقصة [ا، جـ، د، هـ] / فنسبة: كنسبة [س] / خط (الثانية): نسبة خط [ن] / خط (الثالثة): ناقصة [ن، ض] / و ص: فص [ا، د، هـ] / ص ش: فس [د] / ولكن: لكن [ن، ض] – 2-4 فنسبة ... إلى خط ب جـ: ناقصة [ل] – 3 ص و: و ص [ب، جـ، س، ط] قص [هـ] ف ص [ا، د] ص ق [ن] / ص ش: فس [د] / ع ص ... فنسبة خط: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، س، ط] / ص ق: ص ف [ب] / د: كـ [س]، ولن نشير إليها فيما بعد – 4 ص ق: ص و [د، جـ]، ولن نشير إليها فيما بعد – 5 ص ق: ص د [س] سو [جـ، هـ] / وسطح ع ص في: ونسبة ع ص الى [ن] / ب ص: ل ص [ب، جـ، د، هـ، س، ط] ن ص [ن] / ص جـ: ص ح [ا، د، جـ، هـ] – 6 فنسبة: ونسبة [س، ط] / فنسبة ... ص جـ: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ل] / ب جـ: رح [ب] / ب ص: ل ص [ا، س، ل] ن ص [ن] / ص جـ: سحـ [ن] – 6-8 كنسبة ... إلى ب جـ: مكررة [ب] – 7 من: ومن [ل] / ص جـ: ص ح [د، ط] / فنسبة: ونسبة [ط] / خط: ناقصة، وهي موجودة في التكرار [ن] – 7-8 ص جـ فنسبة ... ع ص إلى: مكررة [ن] – 8 ص جـ: ص ح [د، ط] ص حر [جـ] – 9 ي ت: ت [ا، جـ، د، ط] ب [هـ، ل] – 10 ص جـ: ص ح [جـ، د] س ح [ط] / جـ ت: حب [جـ، هـ، ن] / ت ع: بع [ن] / جـ ت ع ص: جـ ب ع ص [ا، جـ، هـ] / متوازي: متساوي، ثم أثبت الصواب تحتها [ا] متساوي [جـ، هـ] – 11 ب جـ: ب كـ [س] ب ح [جـ] ، وكثيرًا ما كتبها هكذا، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / ي ت: ع ت [س] ت [ط] / ت ع: بع [جـ] / نسبة (الثانية): نسبة متوازي [جـ، هـ] / جـ ت: جـ ب [هـ] – 11-12 ومن نسبة جـ ت إلى ت ع: أثبتها في الهامش [ب] – 12 جـ ت: جـ ب [هـ] / ت ي: فى [ط] / ت ع: بع [جـ] / فنسبة: ونسبة [ا، جـ، د، هـ] / د: حـ [ط] / خط: ناقصة [ن، ض] – 13 ب جـ: ل جـ [س] / جـ ت: جـ ب [هـ] / ت ي: في [ط، ل] / ت ع: يع [ل] بع [جـ] / ع: ح [ل].

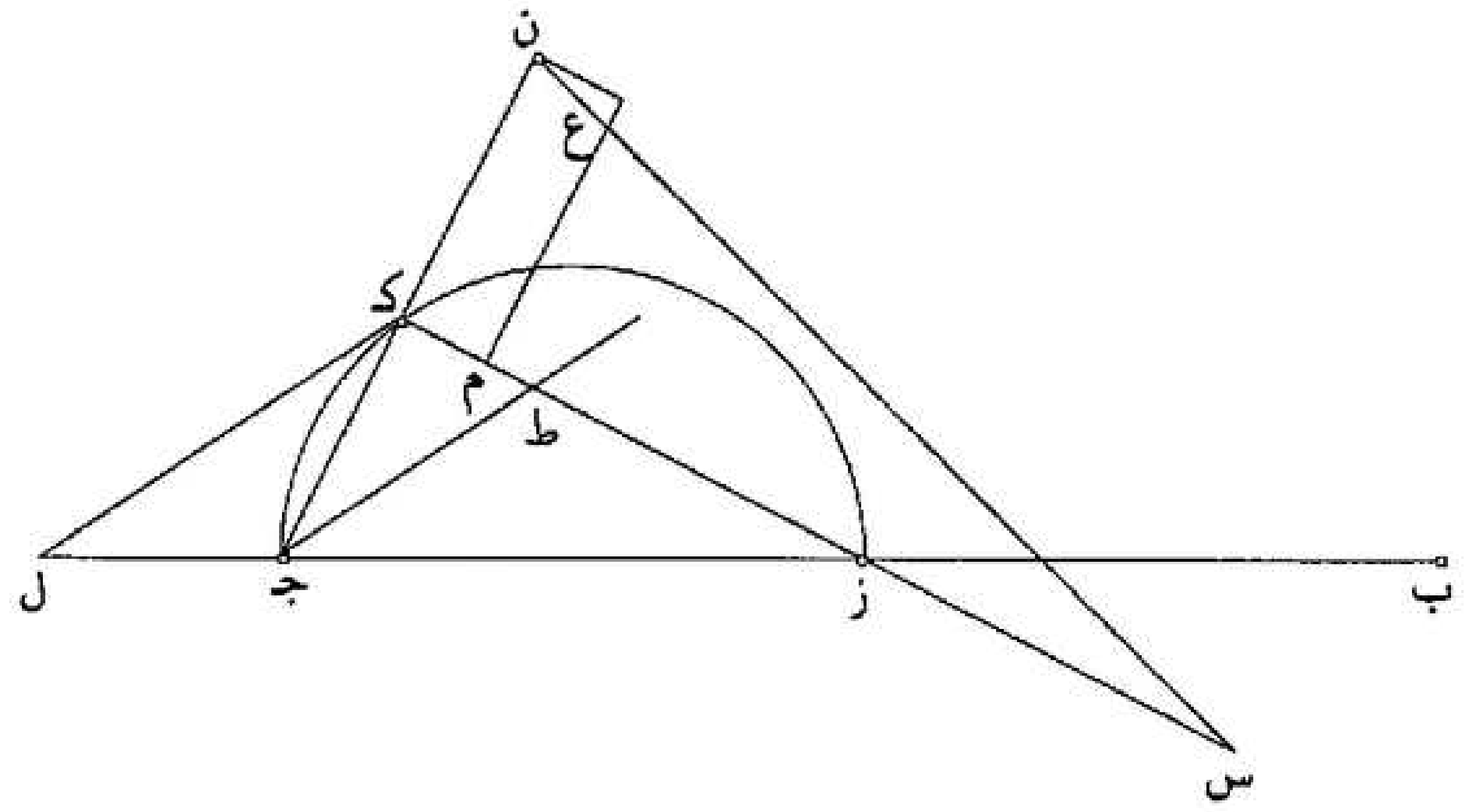
وخط ت ع موازٍ لقطر القطع الزائد، فخط د الضلع القائم لقطر ب جـ، كما بيّن أبلونيوس الفاضل في *المخروطات*. والزاوية التي يحيط بها ذلك القطر وخط ترتيبه هي قائمة، لأن الفصل المشترك للسطح المفروض ولقاعدة المخروط عمود على مثلث ي ع جـ، لأن المخروط قائم. ورأس المخطّ بحركة البركار يجوز على محيط القطع الزائد ورأساه على المتقابل الوضع ويرسمهما. / س-٧٤

فقد رسمنا بالبركار الذي محوره خط ا / على سطح مستوٍ مفروض قطعًا زائدًا ومتقابل / الوضع، أحدُ / أقطارهما خط ب جـ المعلوم القدر والوضع، والضلع القائم لهما خط د المعلوم القدر، والزاوية التي يحيط // بها قطر ب جـ وخط ترتيبه مساوية لزاوية هـ القائمة. ل-٢٠-ظ هـ-٨٦-ظ د-٢٣٠-ظ جـ-١٠٢-و ن-٢٨

وإن كانت زاوية هـ ليست بقائمة، نجعل زاوية ز جـ ط على السطح المفروض مثل زاوية هـ، ونخطّ على نصف خط ب جـ نصف دائرة، وهو جـ كـ ز، ونجعل نسبة مربع كـ ل إلى سطح ز ل في ل جـ كنسبة خط د إلى خط ب جـ، ونجعله موازيًا لخط جـ ط المعلوم الوضع، ونصل خط ز كـ. ونجعل خط ز م وسطًا في النسبة فيما بين خطي ز كـ ز ط، ونجعل سطح م ن مساويًا لمربع خط جـ كـ، ونجعل ز س مساويًا لخط / ز م، ونصل خط س ع ن، وهذا العمل هو عمل أبلونيوس الفاضل في *المخروطات*. / ونرسم بالبركار الذي محوره خط ا على السطح المفروض قطعًا // زائدًا ومتقابل الوضع، أحدُ أقطارهما خط س م المعلوم القدر والوضع، والضلع القائم لهما م ع المعلوم القدر، والزاوية التي يحيط بها قطر س م وخط ترتيبه قائمة، كما رسمنا قبل هذا. فهذا القطع هو الزائد ط-١١٦-و ل-٢١-و هـ-٨٧-و ب-٥٣

1-2 وخط ت ع ... المخروطات: ناقصة [ا، جـ، د، هـ] – 1 القطع الزائد ... القائم لقطر: ناقصة [س، ط، ل] – 2 والزاوية: والزوايا [ط] / بها: ناقصة [ل] – 3 لأن: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ط، ل] / الفصل: الفضل [د] / ولقاعدة: والقاعدة [ب] – 4 على: مكررة في السطر التالي [ن] / ورأساه: ورأسه [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] وراسيه [ن] – 5 ويرسمهما: ويرسمها [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] ورسماهما [ض] ورسمهما [ن] – 6 محوره: يجوزه [ن] في محوره [جـ، هـ] / مفروض قطعًا: قطعا مفروض [ن] / ومتقابل: أو متقابل [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 7 خط: ناقصة [ا، جـ، هـ] / القدر والوضع: الوضع والقدر [ا، جـ، هـ] – 8 قطر: القطر [ط] / مساوية: مساو [ن] متساوية [ل] / هـ: ر [ن] / القائمة: القائم [ا، جـ، هـ] – 9 بقائمة: قائمة [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط] / ز جـ ط: بحط [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط] حط [ل] كـ حط [ن] – 10 ونخط: وخط [ل] / نصف (الثانية): أثبتها في الهامش [ا] كتبها بعد «دائرة» [جـ] / وهو: وهي [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / جـ كـ ز: حـ كـ [س] – 11 ز ل: د ل [س] / ل جـ: ل ح [ا، جـ، د، هـ] / ز ل في ل جـ: ز ل ح [ل] – 12 ونصل: وحصل [ل] / ز كـ: د كـ [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / خط (الثانية): ناقصة [ا، جـ، د، هـ] / ز م: د م [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / وسطًا: وسيطًا [ا، ب، جـ، د، هـ، ل] / ز كـ: ا كـ [ب، س] – 13 م ن: سر [ا، ب، جـ، د، س] بر [ط] سو [ل] سن [هـ] / خط: ناقصة [س] / جـ كـ: ح كـ [ا، جـ، د، هـ، س] / ز س: د س [ا، جـ، د، هـ] / مساويًا: موازيًا [ن] / ز م: د م [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 14 س ع ن: شعن [ب، س] بعن [ا، جـ، د، هـ] / الفاضل: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 15 ومتقابل: أو متقابل [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ن، ل] – 16 التي: الذي [ن] – 17 قائمة: قائم [جـ، د، هـ، ل] / هذا: أثبتها فوق السطر [ب] / فهذا: وهذا [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل].

والمتقابل الوضع، ويجوز على نقطتي / جـ ب، / أحدُ أقطارهما خط ب جـ، والضلع القائم لهما خط د، والزاوية التي يحيط بها قطر ب جـ وخط ترتيبه مساوية / لزاوية هـ المعلومة، كما بيّن أبلونيوس الفاضل في *المخروطات*. ن-٢٩ د-٢٣١-و ل-٢١-ظ

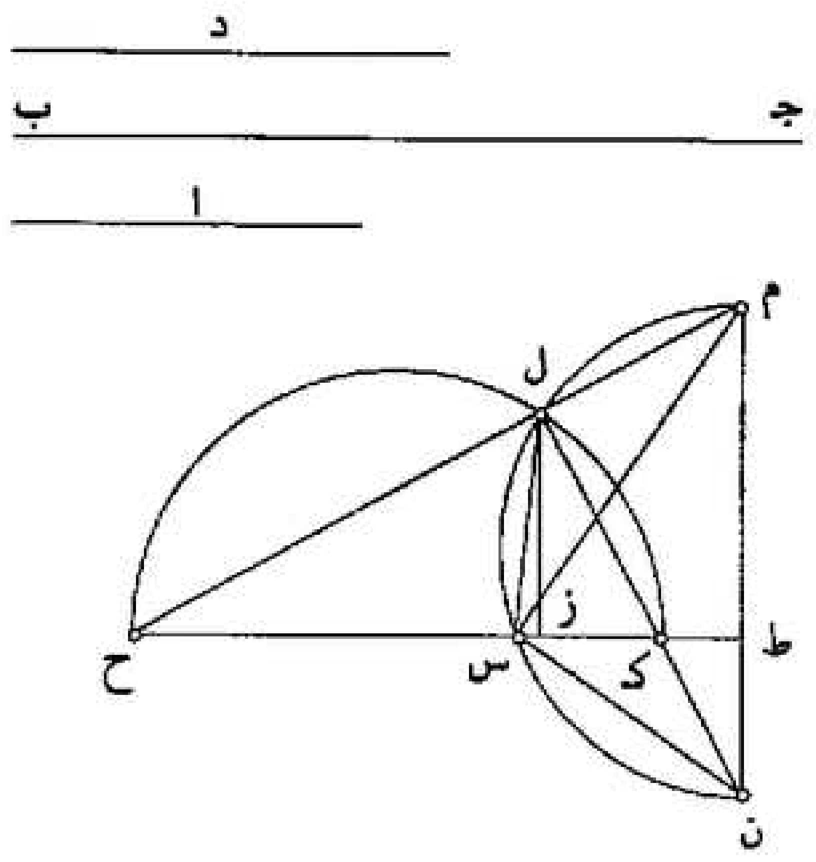


فقد رسمنا بالبركار الذي محوره خط ا على سطح مستوٍ مفروض قطعًا زائدًا ومتقابل الوضع، أحدُ أقطارهما خط ب جـ المعلوم / القدر والوضع، والضلع القائم لهما خط د المعلوم القدر، والزاوية التي يحيط بها قطر ب جـ وخط ترتيبه مساوية / لزاوية هـ المعلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبين. س-٧٥ هـ-٨٧-ظ

– و – في رسم القطع الناقص، أحدُ أقطاره خط معلوم / الوضع والقدر وضلعه القائم خط معلوم القدر. / ا-١٠٠-ظ

نريد أن نرسم بالبركار الذي محوره خط ا على سطح مستوٍ معلوم قطعًا ناقصًا، يكون أحد أقطاره خط ب جـ المعلوم القدر والوضع، وضلعه القائم خط د المعلوم القدر، والزاوية التي يحيط بها القطر وخط ترتيبه مساوية لزاوية هـ المعلومة. جـ-١٠٢-ظ

1 والمتقابل: أو المتقابل [س، ط] والمقابل [جـ] المتقابل [ن] / ب: ز [ا، جـ، د، س، ط، ل] و [هـ] / أحد: واحد [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / ب جـ: جـ ب [ا، جـ، هـ، س، ط، ل] حـ ر [د] / والضلع: والمطلع [جـ] والطلع [ا، هـ] – 2 خط د: حـ ط د [س] / بها: بهما [ا، ب، جـ، هـ] – 3 الفاضل: ناقصة [ن، ض] – 4 رسمنا: رسم [ا، جـ، د، هـ] / ومتقابل: أو متقابل [ا، ب، جـ، هـ، د، س، ط، ل] – 5-6 والوضع ... القدر: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ل] – 5 والضلع: وضلع [ن] / د: ناقصة [س، ط] – 6 المعلوم: معلوم [ط] / بها: ناقصة [د، ل] / المعلومة: المعلوم [ا، جـ، د، هـ] – 8 و: ح [ب] د [ل] ز [س] ناقصة [ا، جـ، هـ، ط] السابع [د] / في رسم: في ترسيم [ب، س] في ترسم [ا، د، هـ] – 8-9 و في رسم ... القدر: ناقصة [ن، ض] – 10 أن: ناقصة [ن] أضافها [ض] – 11 خط: وخط [ب] / ب جـ: ناقصة [ن] أضافها [ض] / وضلعه: ناقصة [ل] / والزاوية: الزاوية [س] الزايدة [ل] – 12 مساوية: ناقصة [ا، جـ، هـ].

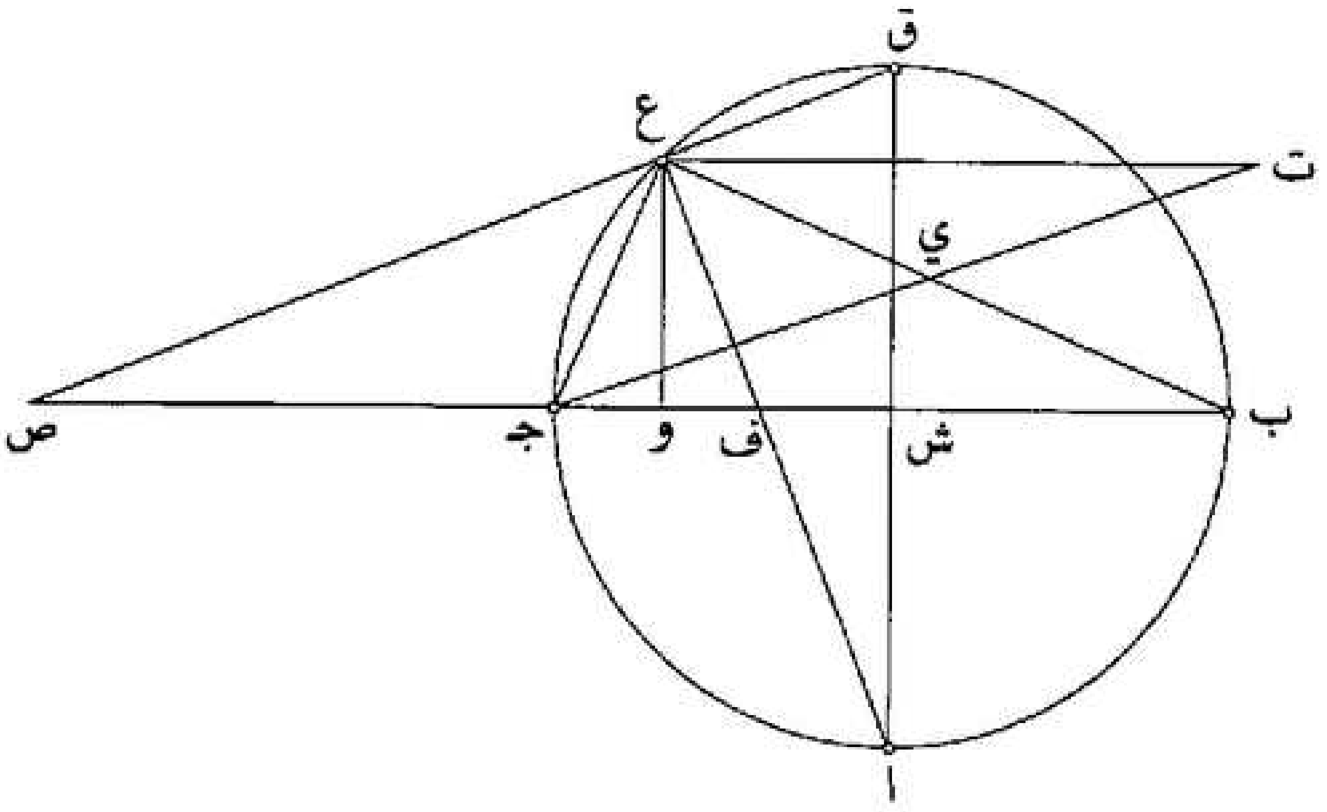


فإن كانت زاوية هـ قائمة، جعلنا نسبة خط / ز ح إلى خط ح ط / كنسبة الضلع ل-٢٢-و جـ-١١٦-ظ
القائم، وهو د، إلى القطر المجانب، وهو ب جـ، فتقع نقطة ط من جهة ز خارجة من
خط ز ح، لأن الضلع القائم أصغر من القطر المجانب في القطع الناقص. / ونحدث على ن-٣٠
خط ط ز نقطة، ولتكن كـ، حتى تكون نسبة سطح / ح كـ في كـ ز إلى سطح كـ ط هـ-٨٨-و
في ط ح كنسبة مربع محور البركار، وهو ا، إلى / مربع نصف خط ب جـ، كما عملنا د-٢٣١-ظ
في كتاب *إحداث النقط على الخطوط في نسب السطوح*. ونخط على خط كـ ح نصف
دائرة كـ ل ح، ونجعل ز ل عمودًا على خط كـ ح، ونصل خطي كـ ل ل ح، ونخرجهما
على استقامة، ونجعل خط ن ط م عمودًا على خط كـ ط، ونخطّ على خط ن ط م
نصف دائرة من جهة كـ، فيجوز محيطها على نقطة ل، لأن زاوية ن ل م قائمة، وعلى
نقطة من خط كـ ح، ولتكن س؛ ونصل خط س ل، ونجعل زاوية رأس / البركار مساوية ل-٢٢-ظ
لزاوية كـ ل س وزاوية المركز مساوية لزاوية ل كـ س. ونحرّك البركار حتى يلقى رأس المخطّ

1 ز ح: د ح [ا، ب، جـ، د، هـ، ط] هـ ح [س] / خط: ناقصة [ن، ض] / ح ط: حـ ط [ب] / خط ح ط: حط خط خط [ل] – 2 المجانب: الجانب [ل]، وكذلك فيما يلي / فتقع: فنضع [ا، ب، جـ، هـ] فتضع [د] نضع [ط] فيقع [س] فيصع [ل] / جهة: حـ ب [ط] / ز: و [ا، جـ، د، هـ، ل] / خارجة: خارج [ن، ض] وخارجة [ل] – 3 ز ح: و ح [ا، جـ، د، هـ] / ونحدث: يحدث [ل] – 4 ح كـ: حـ كـ [س] ل ط [جـ] / في كـ ز: ناقصة [ل] / كـ ط: ط كـ [س] ل ط [جـ] – 5 خط: نجدها في [ن] فقط / عملنا: علمنا [ب، ل] – 6 كتاب: ناقصة [ب] / نسب: النسب [ب، س، ط] / ونخط على: ونجعل [ا، جـ، د، هـ، ط، ل] ونجعل على [ب، س] – 7 ز ل: ز كـ [ا، هـ] / خطي: خط [ل] – 8 ن ط م: ن ط [ا، جـ، د، هـ، ل] / عمودًا ... ن ط م: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / خط: فوق السطر [ب] / ونخط: ونجعل [ا، ب] – 9 كـ: ل [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل، ن] / محيطها: محيطهما [جـ] / ن ل م: بلم [جـ] – 10 كـ ح: بحـ ح [ا، جـ، هـ] / خط: ناقصة [ن، ض] بخط [ل] / س ل: ا س ل [ا، د، هـ، ل] ا ش ل [جـ] / مساوية: متساوية [ل] – 11 مساوية: ناقصة [ن، ض] / ل كـ س: كلس [د] لكن [ط] / يلقى: يلتقي [ا، هـ، جـ، د].

من جهة الزاوية الحادة خط المركز على نقطة ما؛ ونطبق تلك النقطة على نقطة جـ / وخطَّ ب-٥٤
المركز على خط ب جـ وسطحَ المركز على / السطح المفروض حتى يكون البركار جـ ع ف هـ-٨٨-ظ
ورأسه نقطة ع ومحوره ع ف ومركزه نقطة ف. وخط الرأس، إن كانت زاوية الرأس الحادة مع زاوية المركز / الحادة من جهة واحدة، ع جـ، وخط المركز جـ ف. / س-٧٦

فأقول: إن رأس المخط بحركة البركار يرسم على السطح المعلوم قطعًا ناقصًا أحد أقطاره ط-١١٧-و
ب جـ، وضلعه القائم خط د، والزاوية التي يحيط بها القطر وخط ترتيبه مساوية لزاوية هـ التي هي أولاً قائمة.



برهانه: أنا نجعل خط ع ص ق عمودًا على خط ف ع، ونجعل نسبة خط / ع ف إلى ل-٢٣-و
ص ش كنسبة / خط ل ك إلى ح ط، ونخرج من نقطة ش عمودًا على خط / ب جـ ن-٣١ جـ-١٠٣-و
حتى يلقى خطي ف ع ع ص على نقطتي / ا ق. ونخرج من نقطة جـ عمودًا على محور د-٢٣٢-و
ع ف، وهو جـ ي ت، ونجعل خط ع ت موازيًا لخط ب جـ. فلأن نسبة مربع محور /
البركار، وهو ع ف، إلى مربع نصف خط القطر، وهو ب جـ، كنسبة سطح ح ك في هـ-٨٩-و

1 النقطة: ناقصة [ن] أضافها [ض] – 2 ب جـ: رح [ا، جـ، د، هـ، ط] رحـ [س] – 3 ف: ب [ب، جـ، د، هـ، س] بر [ط] – 4 من جهة: من جـ، كرر بعدها فقرة صفحة 787 سطر 14 إلى صفحة 789 سطر 5 [ط] – 5 يرسم: يمر [ط] – 6 وخط: خط [ا، جـ، هـ، س، ط، ل] / ترتيبه: رب [ط] – 7 التي هي: أثبتها في الهامش [ا] ناقصة [جـ، هـ] / أولاً: ا هـ [ط] – 8 برهانه: برهان ذلك [ن، ض] / ع ص ق: عص [ط] عضو [جـ، هـ] / عمودًا: عمود [ط] / ف ع: قع [ن] وقع [ا، جـ، د، هـ، ط، ل] ربع [ب] وف غ [س] / خط: ناقصة [ن، ض] – 9 ص ش: حس [ا، ب، جـ، د، هـ، ط، ل] ح س [س] / كنسبة: نسبة [ب، س] / ح ط: ناقصة [ل] / خط: ناقصة [ن، ض] – 10 خطي: خط [ن] / ف ع: قع [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ن] / ع ص: عـى [ل] / جـ: ناقصة [س] خ [جـ] – 11 جـ ي ت: جيب [د] حب [جـ، هـ، س، ط] حـى [ل] / ع ت: عف [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / محور: محور رأس [ا، جـ، د، هـ، ل] – 12 نصف: صف [ط] / ب جـ: ل جـ [س] / ح ك: حـ ك [س].

كـ ز، الذي هو مساوٍ لمربع كـ ل، إلى سطح كـ ط في ط ح، فنسبة مربع كـ ل إلى سطح كـ ط في ط ح كنسبة مربع ع ف إلى مربع نصف خط ب جـ. وأيضاً، نسبة ع ف إلى ف ص كنسبة ل كـ إلى كـ ح من جهة تشابه المثلثين. ونسبة ع ف إلى ص ش كنسبة كـ ل إلى ط ح، فنسبة ع ف إلى ف ش كنسبة ل كـ إلى كـ ط. فالنسبة المؤلفة من نسبة ع ف إلى ف ش ومن نسبته إلى ص ش، أعني نسبة مربع ع ف إلى سطح ف ش / في ش ص كالنسبة المؤلفة من نسبة ل كـ إلى كـ ط ومن نسبته إلى ح ط، أعني نسبة [ل-٢٣-ظ] مربع ل كـ إلى سطح كـ ط في ط ح. فنسبة مربع ع ف إلى سطح ف ش في ش ص كنسبة مربع ل كـ إلى سطح كـ ط / في ط ح. فنسبة مربع ع ف إلى كل / واحد من [ا-١٠١-و] [هـ-٨٩-ظ] سطح ف ش في ش ص وإلى مربع نصف خط ب جـ واحدة، لأنها كنسبة مربع ل كـ إلى سطح كـ ط في ط ح. فسطح ف ش في ش ص مساوٍ لمربع نصف خط ب جـ. وأيضاً، لأن نسبة ق ش إلى ش ص كنسبة ف ش إلى ش ا من جهة تشابه المثلثين، فسطح ق ش في ش ا / مساوٍ لسطح ف ش في ش ص / الذي هو / مساوٍ لمربع نصف [س-٧٧] [ن-٣٢] [د-٢٣٢-ظ] خط ب جـ. فسطح ق ش في ش ا مساوٍ / لمربع نصف خط ب جـ. وأيضاً، لأن نسبة [ط-١١٧-ظ] جـ ص إلى ف ع كنسبة ح س إلى ل كـ من جهة / تشابه المثلثين، ونسبة ف ع إلى [ل-٢٤-و] ش ص كنسبة ل كـ إلى ط ح، فنسبة جـ ص إلى ش ص كنسبة س ح إلى ح ط.

1 الذي هو مساوٍ لمربع: هي مساوية فنسبة مربع [ا، جـ، هـ] التي هي مساوية لنسبة مربع [ب، س، ط] هي مساوية لنسبة مربع [د] التي هي مساوية لمربع [ن] التي هي مساوية كنسبة مربع [ل] / إلى: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ل] / كـ ط: ط كـ [ا، جـ، د، هـ، ل] – 1-2 فنسبة ... ط ح: ناقصة [ط] / كـ ط: بط [جـ]، وكذلك فيما يلي – 3 ف ص: ق ص [جـ، د، س، ل] حـ ص [ط] / من: في [ا، جـ، د، هـ، س، ل] – 4 ط ح: ح ط [ا، ب، هـ، س، ط، ل] خط [جـ، د] / ف ش: ر س [ط، ل] ق س [جـ] / كـ ط: ل ط [هـ] – 5 ف ش: ر ش [ل] ر س [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط] / ومن: و س [د] / نسبته إلى: نسبة [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / ف ش: ر س [هـ، ط] نسبه [ب] س [هـ، جـ، د، ل] – 6 ش ص: ص ش [س، ن، ض] / ل كـ: ل ط [ط] / كـ ط: ل ط [جـ، هـ] / نسبته: نسبة ا كـ [س] – 7 مربع: ناقصة [ن] أضافها [ض] / ل كـ: ا كـ [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط] / سطح: ناقصة [ن، ض] / ف ش: ق س [ب، س] مس [ا، جـ، د، هـ، ل] بس [ط] – 7-8 كـ ط ... سطح: ناقصة [ب] / سطح ف ش ... ع ف إلى: مكررة [ب] – 8 ل كـ: ا كـ [ا، جـ، د، هـ، س، ط]؛ كتبها ا كـ في التكرار فقط [ب] / واحد: واحدة [ب] – 9 ف ش: ق س [ا، جـ، د] / وإلى: والا [ل] / ب جـ: ر ح [ا، جـ، د، هـ، ل] – 10 كـ ط: ل ط [جـ، هـ] / ف ش: ق س [د، جـ] سس [ط] – 11 ق ش: فش [ب، س، ن] بس [ط] / ف ش: ق س [ب] مس [ا، جـ، د، هـ، س، ل] بس [ط] – 12 ق ش: و س [ب، س، ط، ل] ف ش [ن] / ف ش: ق س [ب، س] مس [ا، جـ، د، هـ، ل] / نصف: مكررة [ن] – 13 ق ش: فس [س] فش [ن] بس [ب] – 14 جـ ص: ح ط ن [س] / ف ع: بع [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ل] لع [ط] / كنسبة ح س: كنسبته [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / ف ع: قع [ب، س] بع [د، ل] – 15 ط ح: ح ط [س] / ش ص: ص ش [ن، ض].

ونسبة جـ ش إلى ش ص كنسبة س ط إلى ط ح، ونسبة ص ش إلى ش ق كنسبة
ح ط إلى ط ن، فنسبة جـ ش إلى ش ق كنسبة س ط إلى ط ن. وبهذا التدبير، نسبة
جـ ش إلى ش ا كنسبة س ط إلى ط م، فالنسبة المؤلفة من نسبة جـ ش إلى ش ق،
ومن نسبته إلى ش ا، أعني نسبة / مربع جـ ش إلى سطح ق ش في ش ا، كالنسبة ب-٥٥
المؤلفة من نسبة س ط إلى / ط ن ومن نسبته إلى ط م، أعني نسبة مربع س ط إلى هـ-٩٠-و
سطح ن ط في ط م. لكن مربع س ط مساوٍ لسطح ن ط في ط م، فمربع جـ ش مساوٍ
لسطح ق ش في ش ا. وسطح ق ش في ش ا / مساوٍ لمربع نصف خط ب جـ، فخط جـ-١٠٣-ظ
جـ ش نصف خط جـ ب، فخط جـ ش مساوٍ لخط ش ب. فنخط على نقط ا ب ق جـ
محيط دائرة قطرها خط ا ش ق، لأن سطح ق ش في ش ا مساوٍ لمربع ش ب، ويجوز
بنقطة ع، / لأن زاوية ق ع ا قائمة. ل-٢٤-ظ

وأيضاً، إن حركنا البركار حتى تقع زاوية الرأس الحادة، وهي ف ع ي، مبادلة مع
زاوية المركز الحادة، تكون زاوية ف ع جـ مساوية لزاوية ف ع ي، فالقوس التي فيما بين
جـ ا من تلك الدائرة مساوية للقوس التي بين نقطة / ا والنقطة التي ينتهي إليها خط ن-٣٣
ع ي، وتلك النقطة هي / ب. فخط ب جـ قطر القطع الناقص، لأن خط ع ي ب من د-٢٣٣-و
جهة الزاوية الحادة،/ وهو على سطح المخروط الذي على المحور. وأيضاً، لأن نسبة و ص هـ-٩٠-ظ

1 ونسبة: فنسبة [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / ط ح: ط حـ [ا، ب، د، هـ، س] / ص ش: مس [ا، جـ، د، هـ] قس [ل] – 1-2 كنسبة ح ط: كنسبته [جـ، د، ل] كنسبة [ا، هـ] – 2 ح ط: حـ ط [ب] / ط ن: ط ز [ب] – 2-3 ح ط ... كنسبة: ناقصة [س، ط] مكررة [ب] / ط ن، فنسبة ... كنسبة س ط إلى: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ل] – 2 ط ن: هـ ن [ن] ط ر [ب] – 4 ش ا: ش [جـ، هـ، ط، ل] / ق ش: ف س [ب، س] – 5 س ط: س [س] / ط ن ... س ط إلى: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 6 س ط: كرر بعدها «إلى سطح ن ط في ط م لكن مربع س ط» [ا، جـ، د، هـ، ل] / جـ ش: مس [ط] هـ ش [ن] – 7 ق ش: ف ش [ن] ف س [ب، س] / وسطح: فسطح [ا، جـ، هـ] / ق ش: ف س [ب، س] / وسطح ق ش في ش ا: مكررة [ن] – 8 مساوٍ: مساوية [ا، جـ، د، هـ، ل] / فنخط: فيختط [ن، ض] محيطة [ا، جـ، د، هـ، س] محيط [ط، ل] / نقط: نقطة [ا، ب، جـ، د، هـ، ط، ن] / ا ب ق جـ: ا ر و حـ [ب] ا ب و ح [جـ] ا ب و جـ [ا، د، هـ، س، ط، ن] – 9 ا ش ق: قس [ا، ب، د، هـ، ط، ل] قش [جـ] ش ق ا [ن] و س [س] / ق ش: بس [ط] – 10 ق ع ا: م ع ا [س] بعا [ط] فعا [ن] – 11 حركنا: حركها [جـ] / ف ع ي: قعا [ب، د، ل] م ع ا [س] بعا [ا، جـ، هـ، ط] / مبادلة: متبادلة [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 12 ف ع جـ: م ع جـ [س] / ف ع ي: م ع ي [س] لعحـ [ل] – 13 مساوية: متساوية [ط] / التي: ناقصة [ل] / بين: من [ا، جـ، د، هـ] / إليها: ناقصة [ن] أضافها [ض] – 14 ع ي: قي [جـ، هـ] / هي: وهي [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / القطع: القلع [ل] / ع ي ب: عبف [ا، جـ، س] عسف [د] عف [ب، هـ، ط] – 15 وهو: هو [ن] / سطح: السطح [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل، ن] / على: يلي [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / و ص: قص [جـ، هـ].

إلى ع ف كنسبة ز ح إلى ل ك من جهة تشابه المثلثين، ونسبة ع ف إلى ص ش كنسبة
ك ل إلى ح ط، فنسبة و ص / إلى ص ش كنسبة ز ح إلى ح ط. ونسبة ز ح إلى س-٧٨
ح ط كنسبة خط د، الذي هو الضلع القائم، إلى قطر ب جـ، فنسبة خط د إلى خط
ب جـ كنسبة / و ص إلى ص ش. لكن نسبة و ص / إلى ص ش كنسبة ع ص إلى ل-٢٥-و ط-١١٨-و
ص ق، لأن خط ق ش موازٍ لخط ع و. فنسبة خط د إلى خط ب جـ كنسبة ع ص إلى
ص ق وكنسبة مربع ع ص إلى سطح ع ص في ص ق. وسطح ع ص في ص ق مساوٍ
لسطح جـ ص في ص ب، فنسبة خط د إلى خط ب جـ كنسبة مربع خط ع ص إلى
سطح ب ص في ص جـ، أعني كالنسبة المؤلفة من نسبة ع ص إلى ص ب ومن نسبته
إلى ص جـ. فنسبة خط د إلى خط ب جـ كالنسبة المؤلفة من نسبة / ع ص إلى ص ب هـ-٩١-و
ومن نسبته إلى ص جـ. ونسبة ع ص إلى ص ب كنسبة ت ي إلى ت ع من جهة تشابه
المثلثين. ونسبة ع ص إلى ص جـ كنسبة جـ ت إلى ت ع، لأن سطح ص جـ ت ع
متوازي الأضلاع. فنسبة خط د إلى خط ب جـ مؤلفة من نسبة ي ت إلى ت ع ومن
نسبة جـ ت إلى ت ع، أعني نسبة / سطح جـ ت في ت ي إلى مربع/ ت ع. فنسبة ا-١٠١-ظ د-٢٣٣-ظ
خط د إلى قطر ب جـ // كنسبة سطح جـ ت في ت ي إلى مربع ت ع. ونقطة ع رأس ن-٣٤ ل-٢٥-ظ
المخروط، وخط ت ع // موازٍ لقطر القطع الناقص، فخط د هو الضلع القائم لذلك ب-٥٦ جـ-١٠٤-و
القطر، وهو ب جـ، كما بيّن أبلونيوس الفاضل في كتاب *المخروطات*، والزاوية التي
يحيط بها قطر ب جـ وخط ترتيبه قائمة، لأن الفصل المشترك للسطح المفروض ولقاعدة

1 ل ك: كل [ل] – 2 ح ط: خط [ب] / و ص: ف ص [ا، د] ق ص [ب، جـ، هـ، ل] م ص [س] / ص ش: ف ش [ن] / كنسبة: لكن كنسبة [ب] – 4 و ص (الأولى والثانية): و ش [ن] / ع ص: حص [ل] – 5 ق ش: فش [ب] – 6 ص ق وكنسبة: نجد بعدها «ونسبة ع ص إلى ص ق كنسبة» [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / وكنسبة: كنسبة [ن، ض] / في ص ق: ناقصة [س] / وسطح: فسطح [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 7 فنسبة: ونسبة [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / خط: ناقصة [ل] / كنسبة: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ل] / مربع خط: خط مربع [ن] – 8 سطح: ناقصة [ل] / ب ص في ص جـ: جـ ص في ص ب [ن، ض] – 9 فنسبة خط د: ناقصة، وترك فراغًا لها [س] / نسبة: ناقصة [ن] أضافها [ض] – 10 ص جـ: ص ح [ب] – 9-10 فنسبة ... ص جـ: ناقصة [ل] – 10 ت ي: ط [ط] / ت ع: قع [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 11 ت ع: قع [ا، جـ، د، هـ، ط، ل] / ص جـ ت ع: ص جـ قع [ا، ب، جـ، د، هـ، ط، ل] حـ ص ق ع [س] – 12 متوازي ... نسبة: ناقصة، وترك فراغًا لها [س] / خط (الثانية): نجدها في [ن] فقط / مؤلفة: مطموسة [ا] / ي ت: ت ي [ا، ب، جـ، د، هـ، ط، ل] – 13 نسبة (الأولى): نجدها في [ن] فقط / جـ ت (الأولى والثانية): حـ ث [جـ، هـ] / ت ي: فى [ط] / ت ع: بع [جـ، هـ] – 13-14 فنسبة ... قطر: ناقصة، وترك فراغًا لها [س] – 14 قطر: قطره [ل] / ب جـ: ب ح [ب، س، ط] ب بجـ م [ا، جـ، د، هـ، ل] / جـ ت: ح ط [س] حث [هـ] / ت ي: ط ي [س] د ي [ل] / ت ع: ب ع [جـ] – 15 موازٍ: موازية [ل] / القطع الناقص فخط: ناقصة، وترك فراغًا لها [س] / هو: وهو [ب] – 16 الفاضل: ناقصة [د، ط] / كتاب: ناقصة [ط] – 17 قطر: طر [جـ] / ولقاعدة: لقاعدة [س، ط].

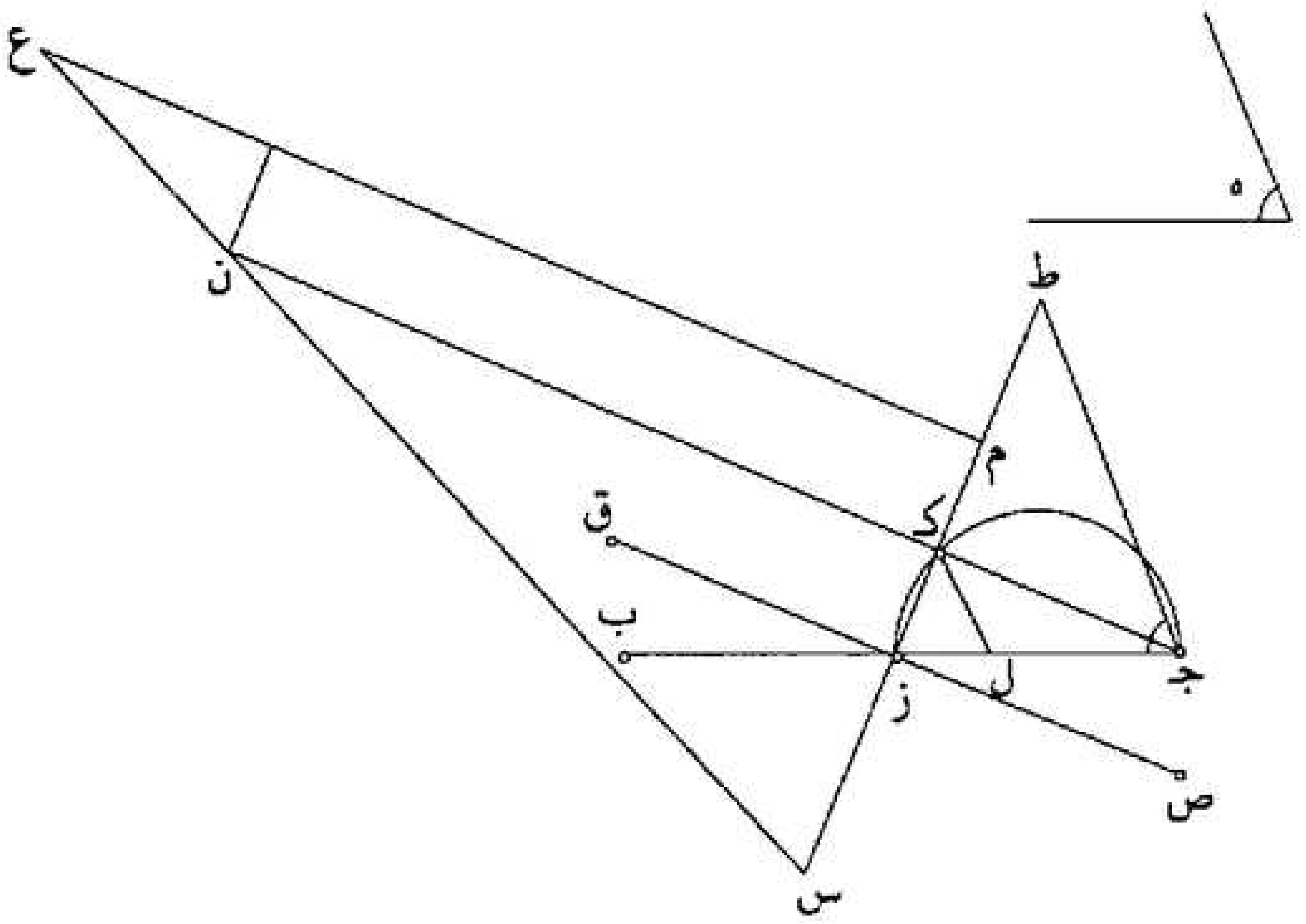
المخروط عمود على مثلث ي ع جـ، لأن المخروط قائم ورأس المخطّ / [هـ-٩١-ظ] يجوز على محيطه.

فقد رسمنا بالبركار الذي محوره خط آ على السطح المستوي المعلوم قطعًا / [ل-٢٦-و] ناقصًا أحد أقطاره / [س-٧٩] خط ب جـ المعلوم القدر والوضع، والضلع القائم له خط د المعلوم القدر، والزاوية التي يحيط بها قطر ب جـ / [ط-١١٨-ظ] وخط ترتيبه مساوية لزاوية هـ التي فرضناها قائمة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وإن كانت زاوية هـ ليست بقائمة، نجعل زاوية ز جـ ط على سطح / [د-٢٣٤-و] معلوم مساوية لزاوية هـ، ونخط على نصف خط ب جـ على السطح المعلوم نصف دائرة جـ كـ ز، / [ن-٣٥] ونجعل نسبة مربع كـ ل إلى سطح ز ل في ل جـ كنسبة خط د إلى خط ب جـ، ول كـ موازيًا لخط جـ ط المعلوم الوضع، ونصل خط ز كـ، ونجعل / [هـ-٩٢-و] خط ز م وسطًا في النسبة فيما بين خطي كـ ز ز ط، ونجعل سطح م ن مساويًا لمربع خط جـ كـ، ونجعل ز س مساويًا لخط ز م، ونصل خط س ن ع. وهذا العمل هو عمل أبلونيوس/ [ل-٢٦-ظ] في القطع الناقص، وخط ع م الضلع القائم لقطر س م على زاوية قائمة في القطع الذي أحد أقطاره خط ب جـ وضلعه القائم على زاوية مساوية لزاوية ز جـ ط مساوٍ لخط د، كما بيّنه أبلونيوس الفاضل في *المخروطات* . فخط م س إما القطر المجانب، وإما القطر القائم. فإن كان / [جـ-١٠٤-ظ] القطر المجانب، نرسم بالبركار الذي محوره خط آ قطعًا ناقصًا ضلعه القائم خط ع م

1 ي ع جـ: ب ع جـ [ا، ب، جـ، ط، ل] الجيم مطموسة [هـ] / ورأس: وآ رأس [ط] / المخط: المخروط [ن] المحيط [ل] والمخط [ط] / يجوز: محور [ا، جـ، د، هـ] – 2 محيطه: محيطها، في كل المخطوطات – 3 محوره: محو [هـ] / على: مكررة [ب] – 4 ب جـ: ناقصة [جـ] / له: لَ [ط] – 6 وذلك ما أردنا أن نبين: ناقصة [ن، ض] – 7 ز جـ ط: حط [ا، جـ، د] خط [هـ] بخط [ب] بحط [س، ط] خط [ل] / مساوية: متساوية [ا، جـ، هـ] – 8 ونخط: ونحيط [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / ب جـ: جـ [ا، جـ، د، هـ] / نصف: بنصف [ل] ناقصة [ن] أضافها [ض] / جـ كـ ز: حـ كـ د [ا، هـ، ط] جـ كـ ل [ن] – 9 ز ل: ر ب [س] ر كـ [ن] د ل [ل] / ل جـ: ب جـ [ا، ب، جـ، د، س، ط، ل] ب ح [هـ] – 10 موازيًا: مواز [ل] / جـ ط: ح ط [س] خط [هـ] حط [جـ] / ز كـ: ح كـ [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل، ن] / ز م: و م [ن] – 11 ز ط: مطموسة [ب] ز ط هـ [س] / ونجعل: مكررة [جـ] / م ن: مر [د] / مساويًا: مساو [ن] / لمربع: لربع [جـ، ل] / مساويًا: مساو [ن] – 12 س ن ع: شنع [ب] سبع [جـ، هـ] سع [س، ط، ل] – 13 وخط ع م: وحكـ كر [ا، د، جـ، هـ] وخط كر [ب، س، ط، ل] وخط كن [ن] – 14 ب جـ: ب ح [ب، جـ، ط] / مساوية: متساوية [ط، ن، ض] / لزاوية: ناقصة [ب، جـ، هـ] / ز جـ ط: د جـ ط [ا، ب، جـ، د، هـ، ط، ل] د ح ط [س] ز كـ ط [ن] / بينه: بين [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 15 م س: كر [ا، ب، د، جـ، هـ، س، ط، ل] كس [ن] / القطر (الأولى): قطر [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / القطر (الثانية): ضلع [ا، جـ، هـ] الضلع [د، ب، س، ط، ل] – 16 القطر المجانب: قطرًا مجانبًا [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / نرسم: رسم [ن] / ع م: ر كـ [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] ن كـ [ن].

وسهمه م س، كما رسمنا قبل. وإن كان القطر القائم، نجعل ق ص وسطًا في النسبة
لخطي ع م م س وعمودًا على خط م س، ونقسمه بنصفين على نقطة ز. ونجعل نسبة
ق ص إلى / خط آخر، وهو ف، كنسبة ع م إلى م س. ونرسم بالبركار الذي محوره هـ-٩٢-ظ
خط ا على السطح المعلوم قطعًا ناقصًا قطره المجانب ق ص وضلعه القائم خط ف. / د-٢٣٤-ظ
فذلك / القطع هو / القطع الناقص، الذي يجوز محيطه على نقطتي جـ ب وأحد أقطاره ا-١٠٢-و ل-٢٧-و
خط جـ ب / وضلعه القائم خط د / والزاوية التي يحيط بها قطر ب جـ وخط ترتيبه ب-٥٧ ن-٣٦
مساوية لزاوية ز جـ ط التي هي مساوية لزاوية هـ / المعلومة، كما بيّن أبلونيوس الفاضل / ط-١١٩-و
في *المخروطات*. س-٨٠



فقد رسمنا بالبركار الذي محوره خط ا على السطح المستوي المعلوم قطعًا ناقصًا أحد
أقطاره خط ب جـ المعلوم القدر والوضع، وضلعه القائم خط د المعلوم القدر، / والزاوية هـ-٩٣-و
التي يحيط بها قطر ب جـ وخط ترتيبه مساوية لزاوية هـ المعلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

1 م س: كـ س ، في كل المخطوطات / القطر: قطر [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] / القائم: القائم خط سنع [ن] القائم خط سم [ض] / ق ص: ف ص [س] قرص [ا، ب، هـ، جـ، د، س، ل] س ص [ط] خط فرص [ن] خط ق ص [ض] – 2 خط: ناقصة [ط] / م س: م ش [ا] قس [ا، ب، هـ، د، س، ط، ل] ق ش [جـ] / ونقسمه: وتقسيمه [جـ] / ز: ن [ب، س، ط] د [ن] – 3 ق ص: ف ص [س] حـ ص [ا، جـ، د، ل] خص [هـ] / خط: ح ط [س] / آخر وهو: مطموسة [ب] / ف: ب [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل، ن] – 3-4 محوره خط ا: مطموسة [ب] – 4 خط: ناقصة [ن، ض] / ق ص: ف ص [س] / ف: ب [ا، جـ، د، هـ، س، ل] فب [ط] – 5 القطع هو: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ل] / يجوز: محوره [ا، د، ل] في محوره [هـ، جـ] / محيطه: محيطها، في كل المخطوطات – 7 ز جـ ط: ز هـ ط [ا، ب، جـ، د، هـ، س، ط، ل] بحط [ن] / لزاوية: ناقصة [ا، جـ، هـ] / المعلومة: المعلوم [ا، ب، جـ، د، هـ، س] – 8 المخروطات: كتاب المخروطات [ط] – 9 ا: له [هـ] / المعلوم: نجدها في [ن] فقط – 10 ب جـ: ا ب جـ [ب] / القدر والوضع: الوضع والقدر [ا، جـ، هـ] / وضلعه: فضلعه [ب] ضلعه [ل] / القدر: القدر والوضع [ط] / والزاوية: الزاوية [ط] – 11 مساوية: متساوية [ط] / مساوية ... نبين: ناقصة [س].

فقد تبيّن لنا رسم الفصول المشتركة للسطح المخروطيّ / وأيّ سطح / كان من السطوح المختلفة الأجناس على وضع معلوم بهذا البركار، وسهل علينا بذلك عمل الأسطرلابات على السطوح المستوية وذوات المحاور، وعملُ الرخائم على أيّ سطح كان؛ وكذلك كل الآلات التي يكون عليها خطوط الفصول المشتركة للسطح المخروطي وأيّ سطح كان – والله تعالى أعلم. (ل-٢٧-ظ، د-٢٣٥-و)

تمت المقالة الثانية من كتاب البركار التام، / وهو آخر الكتاب. (ن-٣٧)

1 الفصول المشتركة: الفضول المشترك [جـ] الفضول المشتركة [ا، د] / للسطح: السطح [د] / وأيّ: اي [ا، جـ، د، هـ، س، ط، ل] – 2 وسهل: ويسهل [ا، ب، جـ، د، هـ، ط] / بذلك: ناقصة [س] / الأسطرلابات: الأسطرلاب [ب، د، س، ط، ل] – 3 السطوح: السطح [ا، جـ، د، هـ] / وذوات: ذوات، في كل المخطوطات إلا [ن] / وعمل: عمل [س، ط] / كل: ناقصة [د، ط، ل] – 3-5 وكذلك ... أعلم: ناقصة [ا، جـ، هـ] – 4 التي: ناقصة [د، س، ط، ل] / الفصول: فصول [ب، د، ط، س، ن، ل] / المشتركة: مشتركة [ب، د، ط، س، ل] – 4-5 والله تعالى أعلم: والله أعلم بالصواب [ب] ناقصة [د، س، ط، ل] – 6 تمت ... الكتاب: ناقصة [ل] / من كتاب البركار التام: ناقصة [د] / وهو آخر الكتاب: ناقصة [ا، جـ، د، هـ، ط] ونجد بعدها «وبتمامها. تم الكتاب ووافق الفراغ من نسخه لنفسه بيلك بن عبد الله القبحاقي مولى المولى الملك المعزّ مجير الله بن يعقوب عز نصره في يوم الثلثاء الحادي والعشرون (كذا) من شهر شعبان سنة تسع وأربعين وستمئة هجرية ويتلوه صورة البركار التام الكامل واحمد لله وحده» [د] «وبتمامها. تم الكتاب، كان الفراغ منه بعض للأربعاء مستهل ذي القعدة سنة ٦٣٥ هجرية على صاحبها أفضل للسلام وذلك بمدينة دمشق حرسها الله تعالى مع جميع بلاد المسلمين، علقه لنفسه محمد حسن بن أبي المحاسن المقدسي الأنصاري» [ا] «وبتمامها تم الكتاب والحمد لله وحده وصلى الله على من لا نبي بعده» [جـ] «والله أعلم بالصواب» [س] «وبتمامها تم الكتاب والحمد لله وحده وصلواته على سيّدنا محمد وآله وصحبه وسلّم» [هـ] «لة د به ١ ٦ ذ ه تاريخه سنة ٩١٦» [ط] «والحمد للّه ربّ العالمين وصلواته على سيّدنا محمّد وآله وصحبه أجمعين، وسلّم تسليمًا كثيرًا» [ن، ض] «والحمد الله وحده والصلوة على رسوله محمد وآله وكان الفراغ من يوم الثلاثاء الخامس والعشرين رمضان المبارك ١٠٧٣» [ب]

بسم الله الرحمن الرحيم ١٠٣-ظ

رسالة في عمل البركار التام وهو بركار المخروط

استخراج

أحمد بن محمد بن عبد الجليل

نريد أن نعمل بركارًا نعمل به القطوع الثلاثة التي ذكرها أبلونيوس في كتابه في *المخروطات*. ولأن البركار نحتاجُ أن نعملَ به هذه القطوع، فينبغي أن نَصِف القطوع الثلاثة المشتركة بين السطح القاطع للمخروط وبين بسيطه، سوى ‹السطح القاطع› الذي يجوزُ على رأس المخروط، لأن السطحَ القاطع لبسيط المخروط الجائزَ على رأسه، إنما يحدث عنه المثلثُ المستقيم الخطوط، كما بُين في ذلك الكتاب.

والسطح المشترك بين السطح القاطع لبسيط المخروط وبين [بسيط] المخروط على ثلاثة أوجه: إمّا أن يقطعَ المخروطَ قطعًا يقسمه بقسمين، ويكون الفصل المشترك إمّا دائرةً وإمّا محدبًا، أعني دائرة مستطيلة؛ وإما أن يقطعه، ويجوز الفصل المشترك نحو القاعدة مع بسيط المخروط إلى غير نهاية؛ ويكون هذا القطع على وجهين: إما أن يكون سطحه جائزًا على خط مستقيم موازٍ لضلع المخروط، وإما على خط غير موازٍ له. ولا يقع من الفصل المشترك بين بسيط المخروط وبين سطح ما يفصله قطعٌ سوى ما ذكرناه. فلهذه العلة فحص أبلونيوس عن خواص هذه القطوع.

إذا كان سطح ما مفروضًا، ورُسم عليه خطٌ ببركار، قاعدتُه إما على السطح وإما ليست عليه، فإنه يقع خط ما بإدارة خط مخروطي بتزايد ضلع المخروط؛ وإذا احتاج إلى تزايده، فإنه يرسم على السطح قطعًا مخروطيًا.

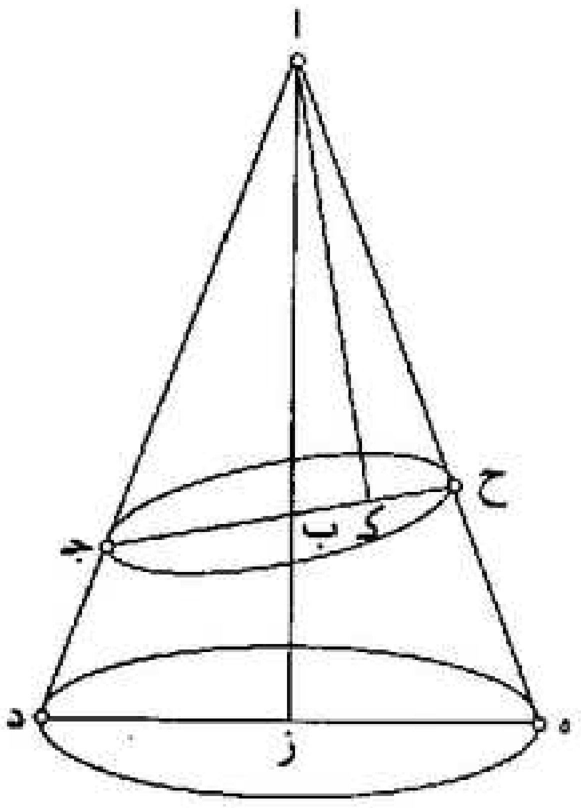
17 مفروضًا: مفروض.

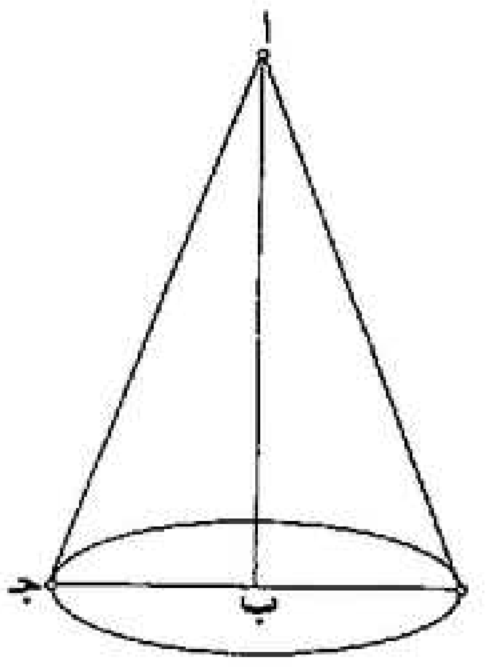
ولأن أوطوقيوس قد ذكرَ في كتابه *الموسطين* عملَ بركار تحتاج إليه قِطعُ المخروطي عن اسيدورس، وحكاه عنه أنه عمل «هذه الآلة التي استخرجها اسيدورس معلمنا» صاحب *المجانيقي* الذي هو ‹من أهل ملط›، وهو الكتاب الذي وصفه في كتابه الذي فسر فيه كتاب إيرن في *الخطوط الطاقية*، فينبغي أن نعمل هذه الآلة لشدة المشقة والحاجةِ إليها، وخاصة للأعمال المذكورةِ في كتاب أبلونيوس في *المخروطات*، وفي الآلات التي ترسم الأظلال والأسطرلابات المسطحة.

نريد أن نعمل بركارًا يمكن عنه قطوع المخروط الثلاثة.

فلنفرض خطي ا ب ا جـ يحيطان بزاوية ا، ولنفرض / دائرة د ه على مركز ز. فمن ١٠٤-و
أجل أنا إذا توهمنا خط ا جـ يتحرك، بثبات نقطة ا من موضعه، حركةً دوريةً إلى أن يعود إلى موضعه، فإنه يرسم بسيطًا مخروطيًا.

فإنا إذا عملنا عمودًا مثل ا ب، ‹فـ›ا جـ أمكن لنا بحركته أن يرسم مخروطًا [يكن] قاعدته تكون دائرة.



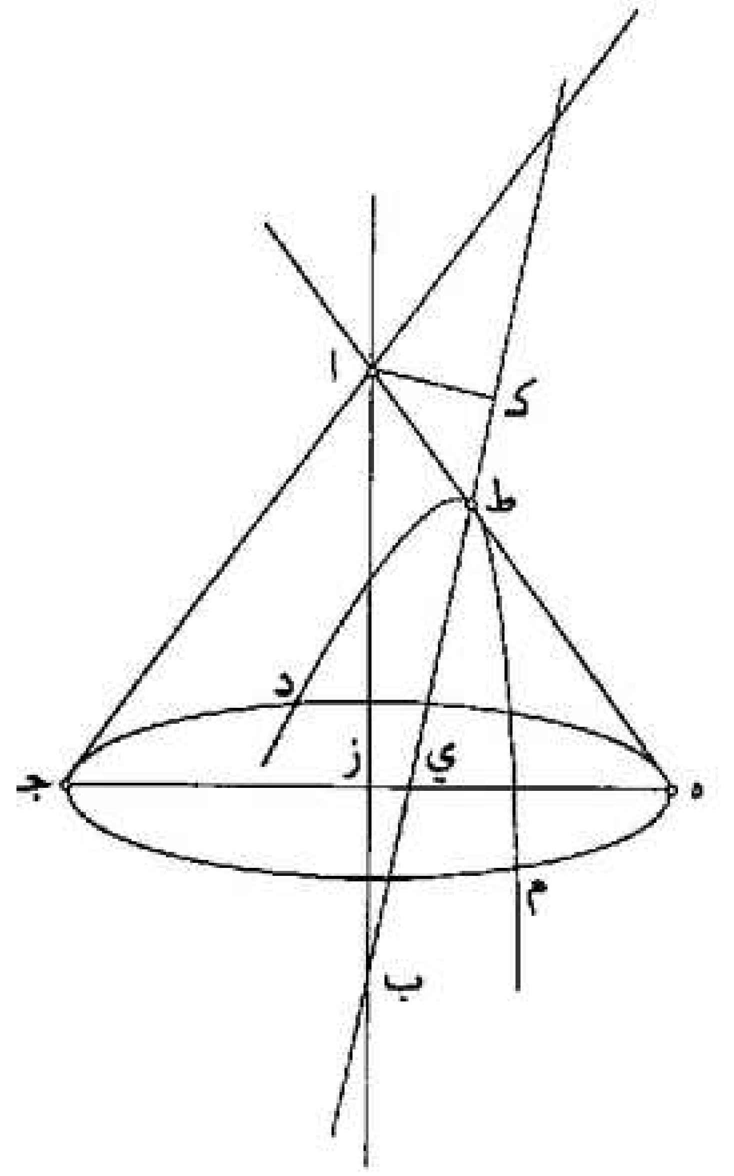


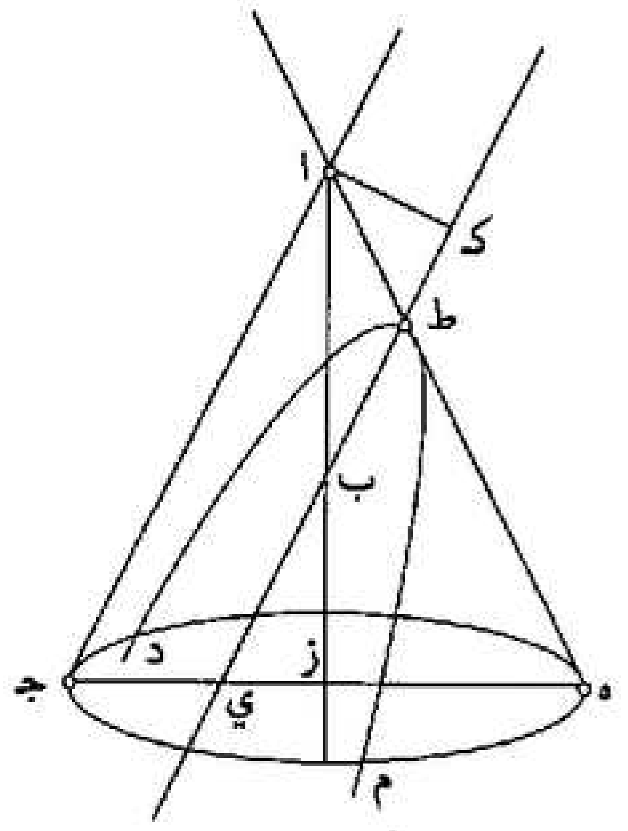
وإذا توهمنا أن خط ا جـ يتحرك، بثبات نقطة ا، حول دائرة د ه، وسطحَه مائلٌ عن سطح ح جـ، فإنه يرسم بدورانه في سطح ح جـ ‹خطًا يحيط بدائرة مستطيلة› وهو السطح المخروطي الذي سماه أبلونيوس إليبسيس، أي الناقص.

وإذا كان سطح مثل ط ي، ومدّه يكون إذا خرج من كل جهة، ‹و›لم يكن ضلع ا جـ المخروطي نحو جهة جـ، وأدير ا جـ على زاوية ا، بثبات نقطة ا، حتى يقطعه سطح

1 إليه: الى – 2 اسيدورس: السندورس / اسيدورس: السندورس – 4 إليها: اليه – 9 من: فى – 11 عمودًا: عمودين – 13 أن: كان – 14 ‹خطًا ... مستطيلة›: نجد مكان هذه العبارة كلمات غير مقروءة – 16 جهة: الجهة.

ط ي مثلاً على ‹خط› ط د م، فإنه إن كان العمود المخرج من ‹نقطة ا من› خط ا جـ على سطح ط ي عمودًا على ا جـ، فهو القطع المكافئ، وإن لم يكن عمودًا عليه فهو زائد.

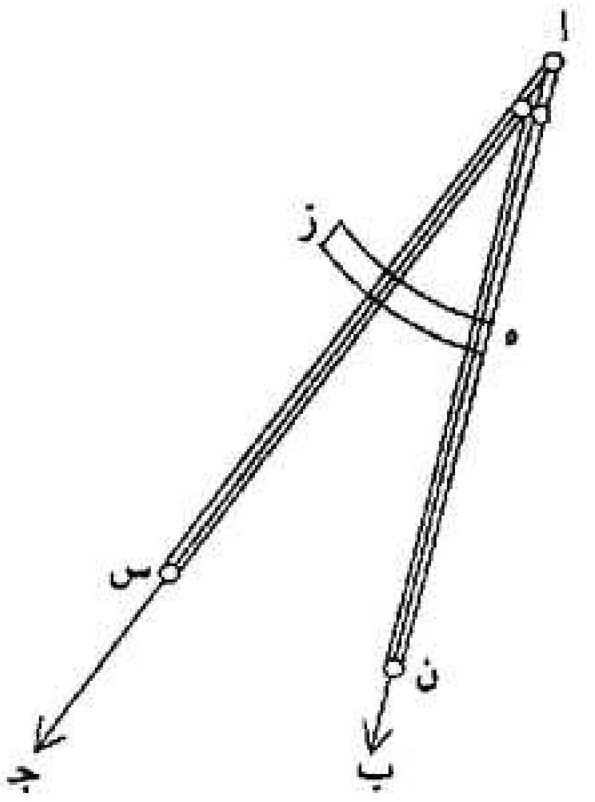




وقد يمكن أن يعمل بهذه الآلة قطعٌ مخروطي وقطرُه ومنتصبُ ضلعه. ويمكن أن يُرسم بهذه الآلة قطعٌ يساوي قطعين معلومي الوضع والقدر.

فينبغي الآن أن نبين كيفية عمل بركار يمكن أن نرسم به هذه القطوع: نعمل عمودًا مثل ا ب، ونجعل في رأسه أنبوبة مثل ا ن، ونشد في طرفها أنبوبة أخرى مثل ا س. يمكن لنا عملُ ذلك بنرماذجة أو غيرها، بعد أن تدور أنبوبة ا ن حول عمود ا ب، ونُدير معه أنبوبة ا س لكي نعمل عمودًا يجري في جوف أنبوبة ا س عليه جـ. ويمكن لنا عمل ذلك؛ وإنما يكون هذا العمود يسهّل إدارة البركار على البسيط بأبعاد النقط المختلفة من رأس المخروط.

1 على: مثل / ط د م: ك د م / من: في – 4 ومنتصب: قد تقرأ المنتصب – 7 رأسه: راس – 8 حول: في – 10 من: على.

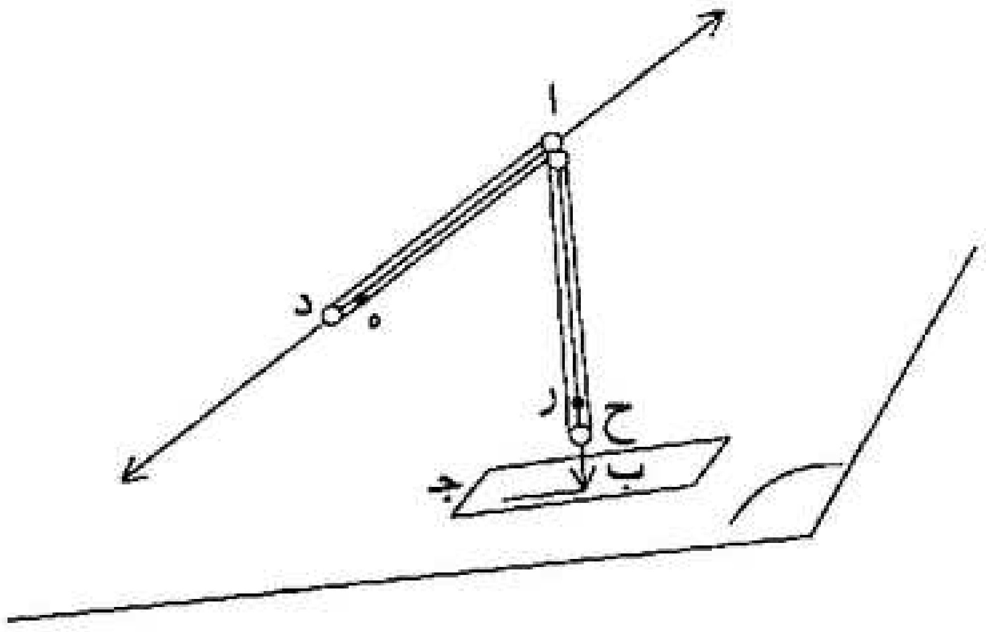


ثم نعمل قوسًا مثل زه على عمود اب منه نقطة هي على مركز به ترتفع وتنخفض جهتا زه نحو الرأس والقاعدة، وعملها سهلٌ إما بلولبٍ وإما بجري مسطرة في خرق أو بأي عمل أردنا سهلٍ.

فإذا فعلنا ذلك، فقد يمكن لنا من هذا البركار قطع ناقص على أي بعدٍ أردنا، بمقدار ما يمكن بهذا البركار وعلى أي زاوية أو انحراف أردنا.

فإذا قطعنا عمود اب مثلاً على نقطة ف، وربطنا بنرماذجة أو بحيلة ما، فقد يمكن لنا أن نخفض رأس عمود اب أو نرفعه إلى سطح ط ي. ونضع قاعدة البركار على سطح ط ي، مثل بين ب ‹وجـ›؛ هذا وقت الضرورة، إذا رفعنا سطح ط ي على أي زاوية أردنا. فقد يمكن لنا بهذا عمل القطع الزائد والمكافئ عليه.

عمل البركار الآخر: نتخذ عمودًا في رأسه أنبوبة اح، وعلى طرف ا أنبوبة اد مشدودة عليه بنرماذجة أو غيرها، تنفتح وتقرب نحو عمود اب، ونجعل عمودًا مستويًا عليه ه، ويكون هذا العمود يتحرك في أنبوبة اد.



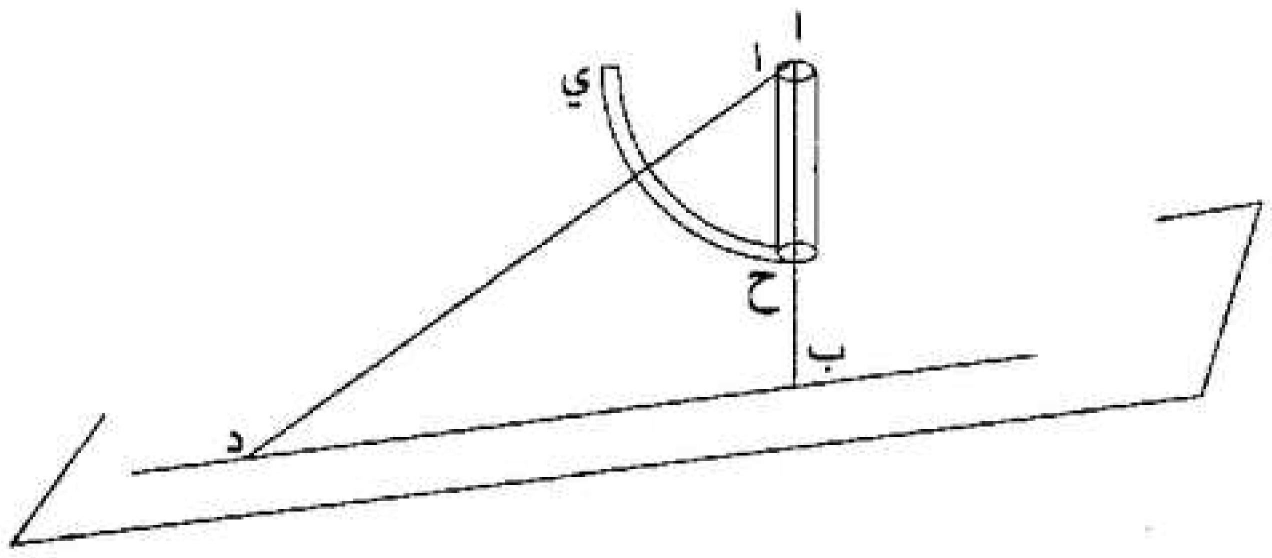
1 قوسًا: قيسا / منه: فيه / به: ر ه – 2 جهتا: جهتى / زَ: دَ – 4 قطع ناقص: قطعا ناقصا – 5 زاوية: غير مقروءة والمعنى يثبت ذلك – 10 اح: احـ – 11 مشدودة: مسددة / غيرها: غيره.

فإذا أردت أن تعمل قطعًا بهذا البركار، فلتفتح أنبوبة ا د لتحيط مع أنبوبة ا ح ‹بزاوية›، ولتُدخِل عمود ه في أنبوبة ا د وتعمل ب ر مشدودة على جـ ب بنرماذجة أو غيرها، فيُرفع ا ر ويُخفض وقتَ العمل.

وينبغي أن يخرج من نقطة ب ثلث ا ر مثلاً، لأن ليس طرف ب على السطح وقتَ العمل.

والعمل: ولنضع نقطًا بمقدار ما نحتاج، ولندر أنبوبة ا د وفيها عمود ‹ه› وليصعد عمود ه ويهبط باختلاف بعد السطح عن نقطة ا، وذلك ظاهر كما وصفنا في البركار الأول.

وجه ثالث من عمل البركار: وهو أن نعمل عمود ا ب وفي رأسه نضع دائرة ح ي [في رأسه] مشدودة في طرف أنبوبة ح ا، ونعمل عمود ا د مشدودًا بنرماذجة في رأس عمود ب ا ليكون معتمدًا عليه وقتَ العمل، ويكون طرفا ب د على السطح وقتَ العمل، ويمكن لنا عمل القطع على أي زاوية تكون بأن تُرفع نقطة ي وتخفض بحركة عمود د ا على سطح ب ا د، ونرفع السطح الذي نحتاج إلى أن نرسم القطع عليه على ذلك السطح / بزاوية أي قطع شئنا من هذه القطوع، ونعمل بالبركار الذي يكون عموده غير مقسوم بقسمين. ١٠٤-ظ



ولما لم يكن غرضنا وفحصنا على القطع الشبيهة بقطع ما عدا ‹ما› يحتاج إلى هذه القطوع المكافئة، فينبغي أن يوضع ا ب على ما بيناه ونفتح عمود ا د على زاوية، يكون ضلعا المثلث الذي يكون أحد ضلعيه موازيًا للخط المستقيم على السطح الذي يقطعه المثلث، ويمكن لنا ذلك؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

تمت رسالة عمل بركار المخروط

1 ا ح: ا حـ – 3 غيرها: غيره / فيُرفع: ارتفع – 6 نقطًا: نقطه / وفيها: وفيه – 10 ا د: ا ل – 11 طرفا: طرفى – 12 ي: ار / د ا: ط ا – 17 المكافئة: لمكافى / ا د: ا ه – 18 المثلث: للمثلث.

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz
منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

ب – ١٠٣ – و
م – ٢٣٩ – ظ

بسم الله الرحمن الرحيم

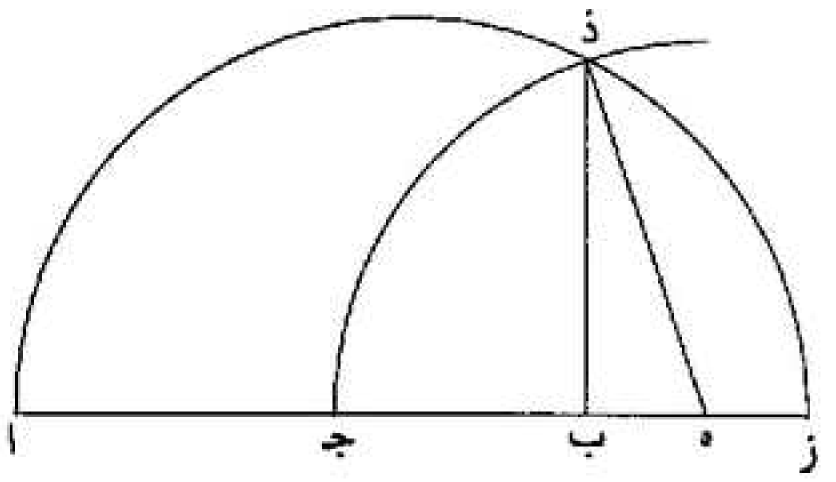
رسالة أبي نصر منصور بن علي بن عراق مولى أمير المؤمنين
إلى أبي الريحان محمد بن أحمد البيروني:
في الجواب عن مسائل هندسية سأله عنها

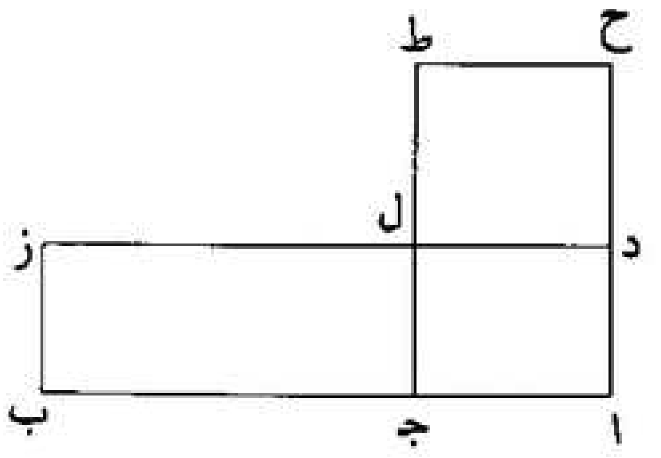
وصلت المسائل التي قرنتَها بكتابك، وذكرت أن ثلاثًا منها قد تضمنها كتاب أبي سهل الكوهي في البركار التام، وأنه أحال فيها على كتابه *في إحداث النقط على الخطوط على نسب السطوح*. فلما لم تفز بهذا الكتاب، سألتَ بعضَ مهندسي زماننا عنها، فأجاب مستعينًا فيها بخواص القطوع، ولم يطب قلبك بذلك، إذ كانت هي مقدمات لإيجاد القطوع، سابقة المرتبة أياها. وسألتني عملها بالأصول الهندسية والطرق الصناعية وعملَ سائر المسائل المقرونة بها. فأجبتَك إلى ملتمسك؛ وإن كانت تلك المسائل متفاوتة المراتب في السهولة والصعوبة، والله تعالى يوفق للصواب ويعين على بلوغ المجاب بِمَنّه وسعَةِ جوده.

المسألة الأولى: ونحتاج إليها في عمل القطع المكافئ بالبركار التام.

نريد أن نقسم خط ا ب المفروض على نقطة جـ حتى تكون نسبة مربع ا جـ إلى سطح ا ب في ب جـ كنسبة مفروضة. فنجعل نسبة د ا إلى ا ب كالنسبة المفروضة، ونتمم متوازي الأضلاع ا د ز ب، ونضيف إلى ا د سطحًا مساويًا لسطح ا د ز ب، يزيد على تمام ا د سطحًا مربعًا، وليكن سطح ا ح في ح د. ونتمم مربع د ح ط ل ونخرجه إلى خط ا ب، فينتهي إلى نقطة جـ، فتكون نقطة جـ هي التي نريد.

1 بسم ... الرحيم: ناقصة [م] – 2-3 رسالة ... البيروني: رسالة أخرى لأبي نصر إلى أبي الريحان [م] – 10 القرونة بها: المفروضة لها [م] / المسائل: المراتب [م] – 11 المراتب: الراتب [م] – 16 الأضلاع: اضلاع [م] ناقصة [ب].





برهانه: أن سطح ح جـ مساوٍ لسطح د ب، فيُلقى سطح د جـ المشترك، فيبقى مربع ح ل مساويًا لسطح ل ب. ونسبة سطح ل ب إلى سطح ا ب في ب جـ كنسبة ل جـ، المساوي لـ ا د، إلى ا ب، ونسبة ا د إلى ا ب كالنسبة المفروضة، فنسبة مربع ا جـ، أعني مربع ح ل، إلى سطح ا ب في ب جـ كالنسبة المفروضة؛ وذلك ما أردناه.

فأما عملها بالطريق الصناعي: فليكن الخط المفروض ا ب؛ ونجعل نسبة ز ب إلى ب ا كالنسبة المفروضة، ونستخرج بين ا ب ب ز خط ب ذ وسطًا في النسبة، ونقيمه على نقطة ب عمودًا على ا ز. ثم ننصف ز ب على ه مثلاً، ونفتح رأس البركار بقدر ه د وندير على / مركز ه قطعة ذ جـ، فتكون نقطة جـ هي المطلوبة؛ وذلك ما أردنا أن نعمل. م-٢٤٠-و

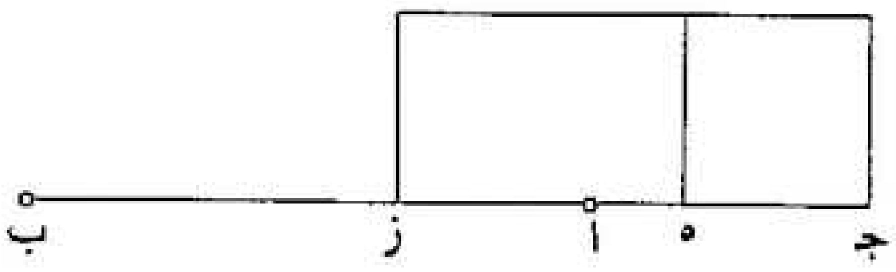
المسألة الثانية: ونحتاج إليها في عمل القطع الزائد بالبركار التام.

خط ا ب مفروض، ونقطة ز عليه / معلومة. كيف نجد على استقامة هذا الخط في جهة ا ‹نقطة› كنقطة جـ حتى تكون نسبة سطح ز جـ في جـ ا إلى سطح جـ ب في ب ز كنسبة مفروضة. ب-١٠٣-ظ

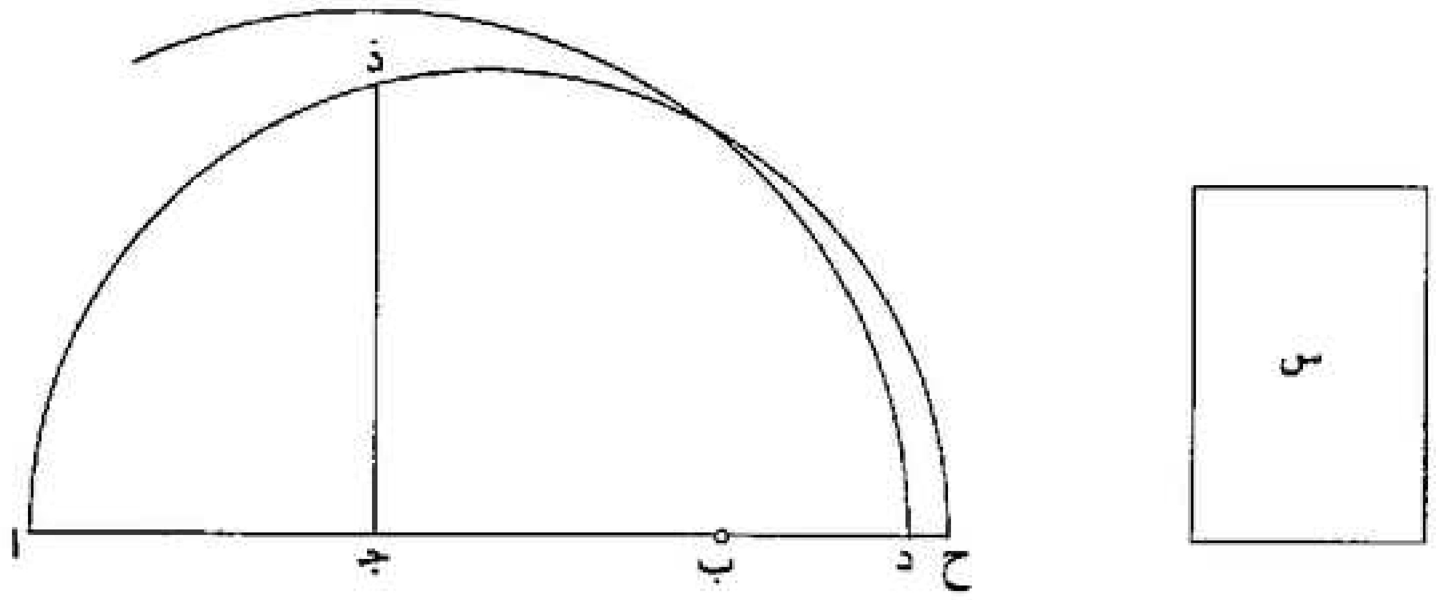
الجواب: نجعل نسبة ا ه إلى ب ز كالنسبة المفروضة، ونضيف إلى ز ه المعلوم سطحًا يزيد على تمامه مربعًا، وتكون نسبته إلى مربع ب ز كالنسبة المفروضة. وليكن سطح ز جـ في جـ ه، فتكون نقطة جـ هي المطلوبة.

برهانه: أن نسبة ا ه إلى ب ز كالنسبة المفروضة، فنسبة جـ ز في ه ا إلى جـ ز في ز ب كالنسبة المفروضة. وقد جعلنا نسبة ز جـ في جـ ه إلى مربع ب ز كالنسبة المفروضة، فـ ز جـ في جميع جـ ا نسبته إلى جميع جـ ب في ب ز كالنسبة المفروضة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

4-3 فنسبة مربع ... المفروضة: ناقصة [م] – 8 فتكون: كتب بعدها «يكون» [م] / ما: كررها، ثم ضرب عليها بالقلم [م]– 10 ز: جـ [ب، م] – 11 جـ: ز [ب] ناقصة [م] – 12 ب ز: جـ د [م] – 13 ب ز: ب د [م] – 17 ز جـ في جـ ه: ر ح في ح ه [ب].



وبالطريق الصناعي: إذا أردنا أن نضيف إلى خط سطحًا معلومًا يزيد على تمامه مربعًا، فإنا نستخرج الخط القوي على ربع مربع الخط والسطح المعلوم. ثم نفتح رأس البركار بقدره، ونأخذ مثله من منتصف الخط، فحيث بلغ منه على استقامته فهو النقطة المطلوبة. كأنا أردنا أن نضيف إلى خط ا ب سطحًا معلومًا يزيد على تمامه مربعًا. فنصفنا ا ب على جـ، واستخرجنا الخط القوي على السطح المعلوم وعلى مربع ب جـ، ثم فتحنا رأس البركار بقدر ذلك الخط، ووضعنا طرف رأس البركار على نقطة جـ، والطرف الآخر حيث بلغ على استقامته، ولتكن د، فتكون نقطة د النقطة المطلوبة.



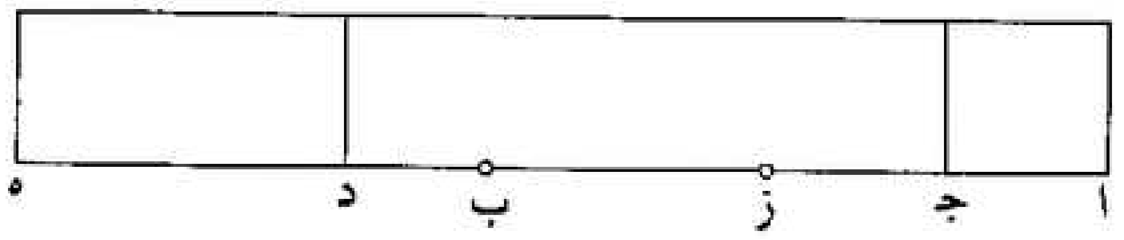
المسألة الثالثة: / ونحتاج إليها في عمل القطع الناقص بالبركار التام. م-٢٤٠-ظ

إذا كان خط ا ب معلومًا ونقطةُ ز عليه معلومة، وأردنا أن نجد ‹نقطة› كنقطة جـ حتى تكون نسبة ب جـ في جـ ز إلى ا جـ في ا ب كنسبة مفروضة، فإنا نخرج ا ب من نقطة ب على استقامة بلا نهاية ونجعل نسبة د ب إلى ب ا كالنسبة المفروضة، ونأخذ د ه مساويًا لـ ا ز، ونضيف إلى ه ا سطحًا مساويًا لسطح ا ز في ا ب المعلوم ينقص عن تمام ه ا سطحًا مربعًا، وليكن سطح ه جـ في جـ ا، فتكون جـ النقطة المطلوبة.

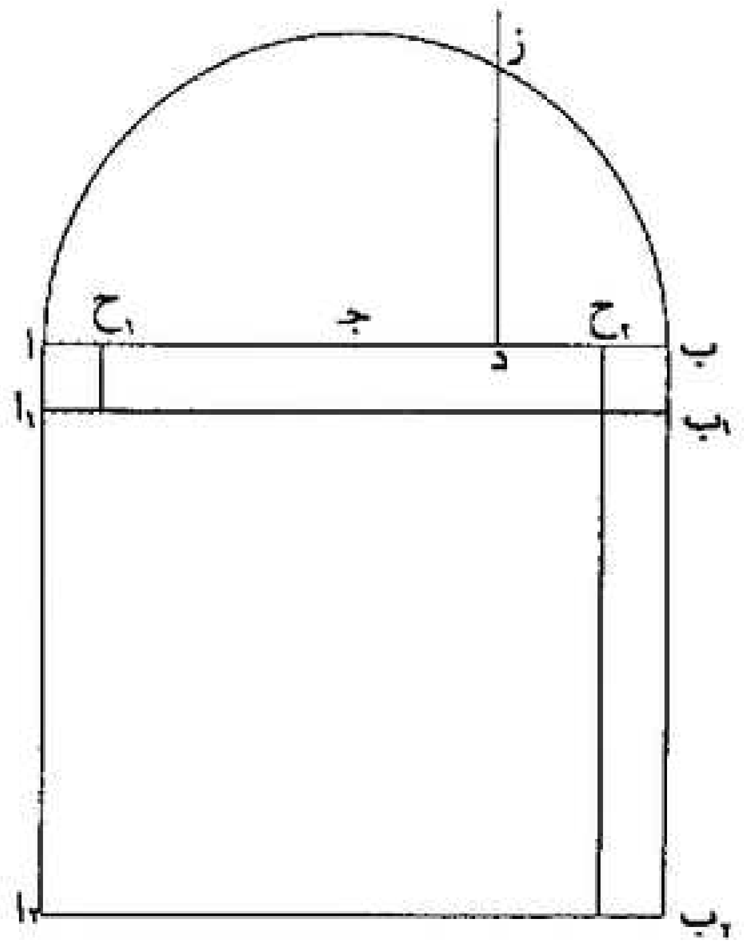
برهانه: أن ه جـ في جـ ا مساويًا لـ ا ز في ا ب، ود ه يساوي ا ز، فيُلقي ا ز في ا جـ المساوي لـ د ه في ا جـ، فيبقى د جـ في جـ ا مساويًا لـ ا ز في جـ ب، ويُلقي جـ ب في ا جـ المشترك، فيبقى د ب في ا جـ مساويًا لـ جـ ب في جـ ز. ونسبة د ب إلى ا ب كالنسبة المفروضة، ولذلك نسبة د ب في ا جـ إلى ب ا في ا جـ كالنسبة

2 والسطح: وللسطح [م] – 4 المطلوبة: المعلومة، وأثبت «المطلوبة» في الهامش مع «ظ» فوقها [ب] المعلومة [م] – 5 واستخرجنا: واخرجنا [م] – 6 ووضعنا: ووصفنا [م] – 7 النقطة: ناقصة [م] – 17 ا ب: ب ا [م] / د ب: ر ب [ب].

المفروضة. فنسبة ب جـ في جـ ز – المساوي لـ د ب في ا جـ – إلى ا جـ في ا ب كالنسبة المفروضة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



وأما الطريق الصناعي: فإذا أردنا أن نضيف إلى خط معلوم سطحًا مساويًا لسطح معلوم وينقص عن تمام الخط سطحًا مربعًا، فإنا نأخذ فضل نصف الخط الأول على الخط القوي على السطح المعلوم، ونستخرج بينه وبين تمام الخط الأول خطًا وسطًا في النسبة؛ فما كان ذلك الخط، ‹ثم فتحنا رأس البركار بقدره و›أخذنا مثله من نصف الخط الأول إلى حيث بلغ، فنجد النقطة المطلوبة. كأنا أردنا ذلك في خط ا ب: وجـ على منتصفه، وفضل ب جـ على الخط القوي على السطح المضاف المعلوم هو ب د، ود ز وسط في النسبة بين ب د ا د؛ وجـ ح مساوٍ لـ د ز، فتكون ح النقطة المطلوبة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



1 فنسبة: ناقصة [ب] – 2 أردنا أن نبين: أردناه [م] – 6 مثله: نصفه [م] / نصف: ناقصة [ب] – 9 مساوٍ: مساويًا [ب] – 10-9 أن نبين: بيانه [م].

البيروني

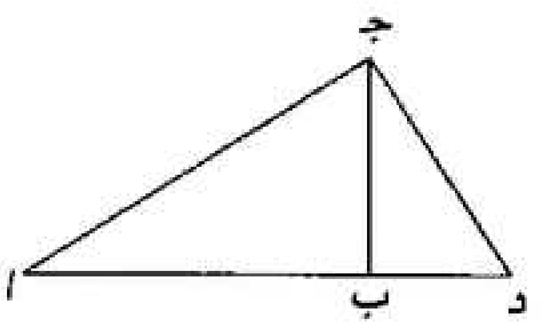
حكاية البركار التّام / وصفة حركاته س-٦٠-ظ

قال أبو سهل: إذا قام على نقطة على سطح مستوٍ خط مستقيم / له حركة على أحد ا-٨٠-و
السطوح المستوية القائم على ذلك / السطح الأول، ومرّ بنقطة أخرى على ذلك الخط ن-٤٥-و
خطٌ آخر مستقيم له ثلاث حركات، إحداها حول ذلك الخط القائم / على ذلك جـ-٥٢-و
السطح، والثانية على السطح المستوي الذي عليه ذلك الخط، والثالثة على استقامة في الجهتين جميعًا، فإنه إذا كانت آلةٌ بهذه الصفة، سمّيت بركارًا تامًّا. [...]

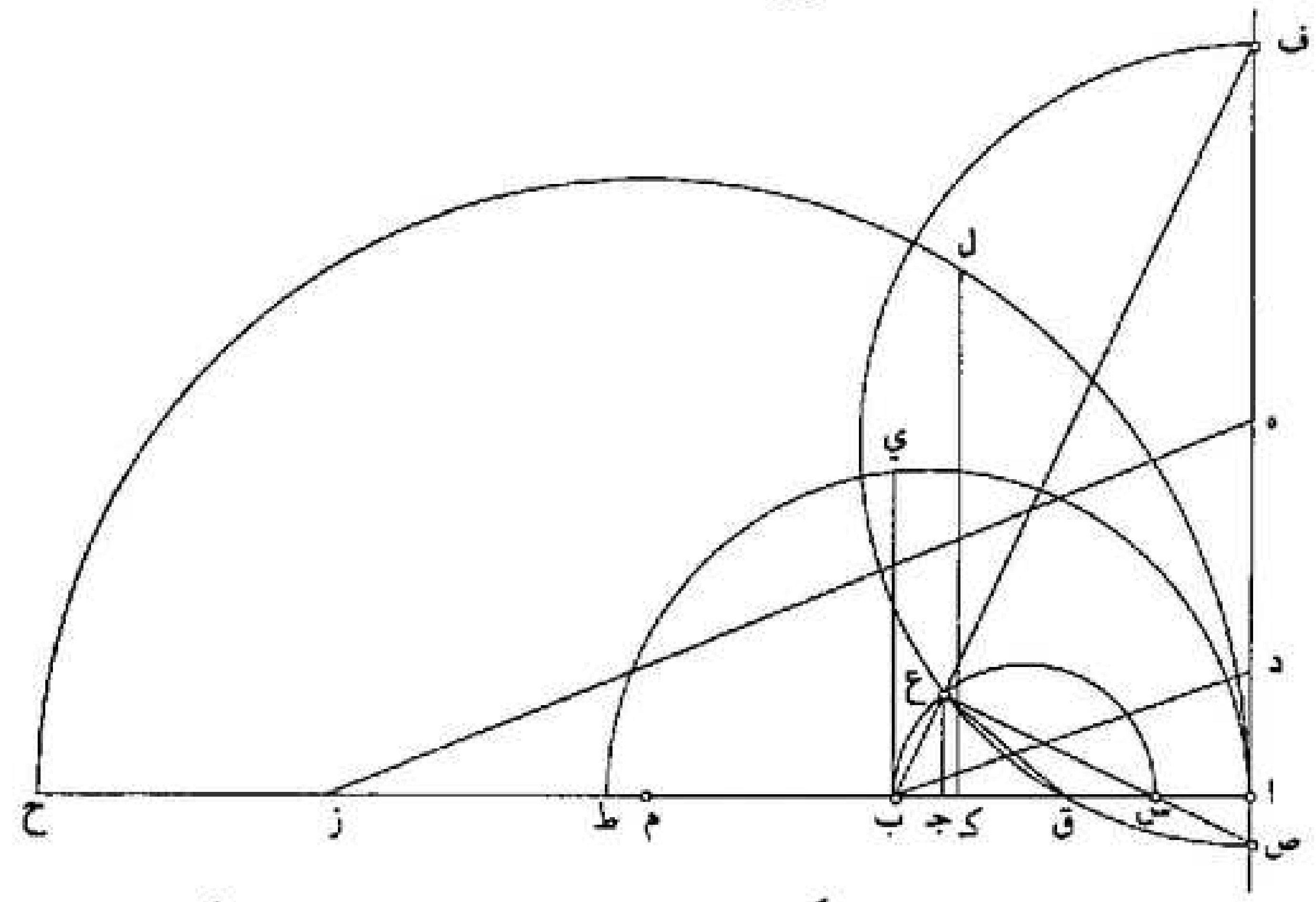
عمل القطع الناقص بالبركار التّام

ويجب أن نحصّل قبل ذلك نسبة مربع محور البركار / إلى مربع نصف القطر المجانب س-٦٢-و
للقطع المطلوب. فنفرض ا ب مساويًا لمحور البركار، وب جـ مساويًا لنصف القطر المجانب، وزاوية ب قائمة؛ ثم نخرج جـ د عمودًا على ا جـ، وا ب على استقامته حتى يلتقيا على د؛ فتكون نسبة ا ب / إلى ب د كنسبة مربع محور البركار إلى مربع نصف القطر ك-١٠٩-و
المجانب.

2 البركار: الفرجار، وكذلك فيما يلي [س] – 3 أبو سهل: أبو سهل القوهي [ت] / قام على: قام من [ا، ت، س، ن] – 4 السطح ... على ذلك: ناقصة [ت] / الأول: ناقصة [ا] – 5 آخر: ناقصة [ا] / إحداها: احد [ا] احداهن [ت] – 6 والثانية: والثاني [جـ] / والثانية على السطح: ناقصة [ك] / عليه: هو [ك، م]، وأثبت «عليه» في الهامش [م] / استقامة: استقامته [ا] – 7 جميعًا: ناقصة [ك] – 9 نسبة: يشبه [ك] – 10 المطلوب: المط [ا، جـ] / وب جـ: وب ح [ك، م] – 11 ا جـ: ا ح [ك، م] / حتى: على [م] / يلتقيا: يلقيا [م، ن] يلقيان [جـ] – 12 ب د: ي د [ا، ل، ك] / القطر: ناقصة [ت].



ثم نخطّ خطًا مستقيمًا، ونفرز منه ا ب مساويًا للقطر المجانب وب جـ مساويًا للضلع القائم، ونخرج عمود ا ف، ونفرز منه ا د مساويًا لـ ب د في الشكل المقدّم آنفًا، ود ه مساويًا لـ ا ب هناك حتى تكون نسبة ا د إلى د ه كنسبة مربع نصف القطر المجانب إلى مربع المحور. ونصل د ب ونخرج ه ز موازيًا له ونجعل ح ز مساويًا لـ ا جـ، وكذلك ب ط مساويًا لـ ا جـ؛ وندير على كل واحد من خطي ا ط ا ح نصف دائرة، ونقيم عمود ب ي على ا ط، وننصف ا ح على نقطة م، ونجعل م ك مساويًا لعمود ب ي، ونقيم على ا ح من نقطة ك عمود ك ل، ونفرز م س / بمقدار عمود ك ل، وندير على خط س ب نصف ا-٨٢-و
دائرة. ثم نقيم على خط س ب من نقطة جـ عمود جـ ع، ونخرج خطي ب ع ف ع س ص المستقيمين. ثم ندير على خط ف ص نصف دائرة، فسيمرّ على نقطة ع ومن خط س ب على نقطة ق، / فنضيق ع ق. جـ-٥٣-و



1 ثم ... المجانب: ناقصة [ت] – 1-3 ثم نخطّ ... المجانب: ناقصة [جـ] – 1 مستقيمًا: مستقيم [ا] / ونفرز: ونقرر [م] ويفرض [ا] / وب جـ: وب ح [ت، ك، م] – 2 ا ف: ا ب [ا، ت، س] / ونفرز: ونقرر [م] ونفرض [ا] / لـ ب د: ا ب د [س] / المقدّم: المتقدم [ا، ت، ن] / آنفًا: ايضا [ا] – 3 لـ ا ب: الى ب [ك، م]، ونجد في هامش [م]: «الى» مع «ظ» فوقها – 4 د ب: ب د [ت] / ح ز: حـ ز [م] زح [جـ، ت، س، ن] / لـ ا جـ (الأولى): مع ا جـ [جـ] لـ ا ه [س] الى ح [ك، م]، ونجد في هامش [م]: «الى» مع «ظ» فوقها – 4-5 وكذلك ... لـ ا جـ: ناقصة [ا] – 4 ب ط: ز ط [س] – 5 لـ ا جـ: لـ ا ح [ن] مع ا جـ [جـ] الى ح [ك، م]، ونجد في هامش [م]: «الى» مع «ظ» فوقها / على: ناقصة [ا، م، ك، ل] / ا ح: ا جـ [ا، جـ، ت، ل] / ب ي: ب حـ [جـ] ف ي [م] – 6 وننصف: ونصف [جـ] / ب ي: د ب ي [ك] ب جـ [جـ] – 7 ك: د [ت] / ا ح: ا ب [جـ] / عمود: وعمود [جـ] / ونفرز: ونفرض [ا] / وندير: ناقصة [ت] / س ب: س ف [جـ] – 8 نقيم: يتم [جـ] / جـ: ح [ك، م] / عمود: وعمود [ت] / ب ع ف: لعف [ن] – 9 المستقيمين: المستقيم [ا] / فسيمرّ: فنمر [ا، ت] قسم [جـ] – 10 ق: ناقصة [ا] و [ن] / فنضيق: فنطبق [ا] فنصل [جـ، ت، س] فيصير [ن] / ع ق: ع ق [ا] عو [ن].

ونجيء بالبركار التام، فنجعل زاوية رأسه، أعني التي يحيط بها المخط والمحور، مساوية لزاوية س ع ق، وزاوية مركزه، أعني التي يحيط بها / القاعدة والمحور، مساوية لزاوية م–١٠٠ ع س ق، وندير المحور حتى يلاقي ‹رأسُ› المخطّ القاعدةَ من جهة الزاوية الحادة على نقطة ما، فنطبق بتلك النقطة إحدى نهايتي القطر المجانب في وضع القطر وبالقاعدة نفس هذا القطر؛ / ثم ندير المحور، / مع ثبات القاعدة والزاويتين على أوضاعها، / فيرسم رأس ن–٤٦–و ت–٥٤–و س–٦٢–ظ ل–١٥٢ المخطّ / على السطح المفروض محيط قطع ناقص على الشرائط المفروضة له.

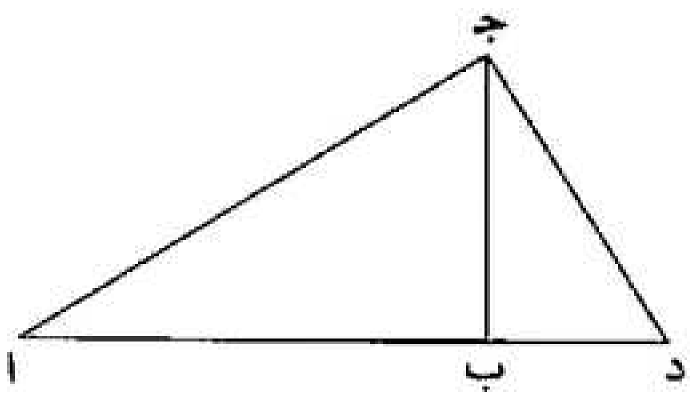
وربما سبق إلى وهم مَن لا دراية له أن الأعمال المتقدمة لسهولتها أقل مُؤْنةً من هذا / العمل لطوله. وليس الأمر كذلك، / فإن تكرير العمل هناك لإظهار كل نقطة يُربي على ك–١٠٩–ظ ا–٨٢–ظ هذا، الذي بحصوله مرة واحدة ‹يرسم رأس المخطّ› محيط القطع بأسره، أضعافًا مضاعفة.

عمل القطع المكافئ بالبركار التّام

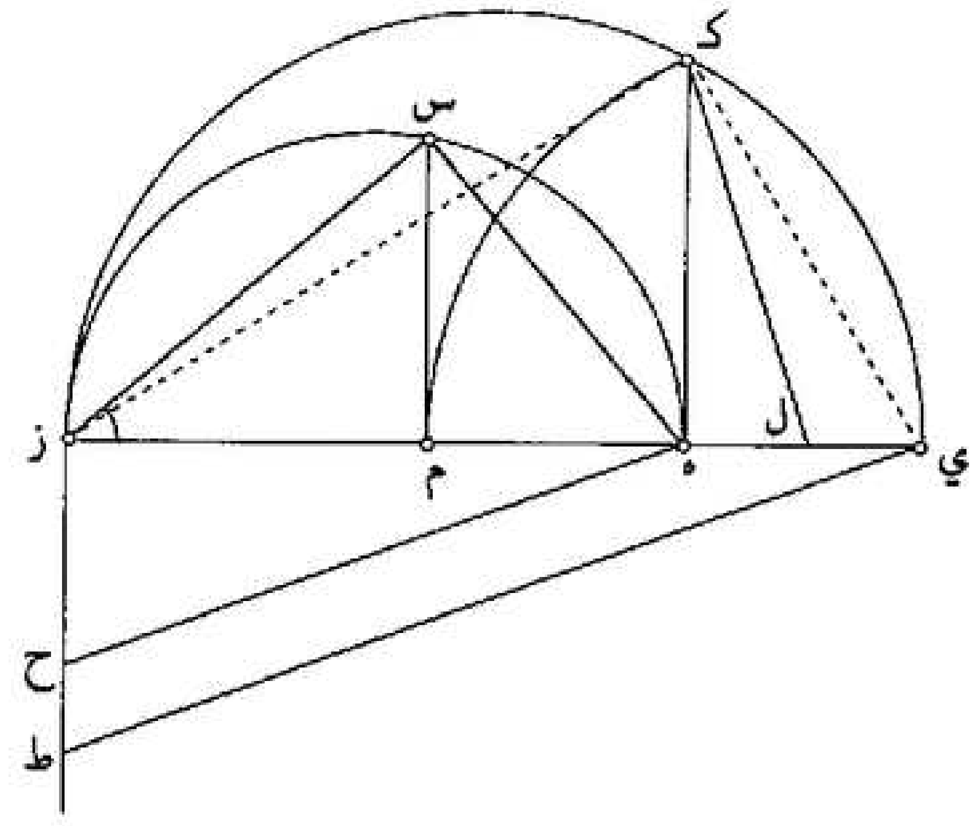
وكذلك يجب أن نقدم له تحصيل نسبة مربع نصف الضلع القائم لهذا القطع إلى مربع محور البركار.

فليكن ا ب مساويًا للمحور وب جـ مساويًا لنصف الضلع القائم وزاوية ب قائمة؛ ونخرج جـ د عمودًا على ا جـ، وا ب نخرجه على استقامته حتى يلتقيا على نقطة د. فتكون نسبة د ب إلى ب ا كنسبة مربع نصف الضلع القائم إلى مربع المحور.

1 التام: ناقصة [ا] / فنجعل: ونجعل [ا] / زاوية: مكررة [م] / التي: الذي [ا، ت، س، ل، ک، ن، م] / يحيط بها: ناقصة [ت] / بها: به [ا، س، ل، ک، ن، م] / المخط: المحيط [ا] / المخط والمحور: المحور والمخط [ت] / مساوية: مساويا [ا] – 1-2 المخط والمحور ... بها: ناقصة [جـ] – 2 س ع ق ... لزاوية: مكررة [ت] / التي: الذي [ا، ت، س، ن، ل، ک، م] / بها: به [ا، ت، س، ن، ل، ک، م] / القاعدة والمحور: المحور والقاعدة [ا، ت، جـ، س، ن] – 3 ع س ق: ع س ف [جـ] / المخط: المحيط [ا، جـ] / الزاوية: الزوايد [ت] / الحادة: ناقصة [ت، جـ، ل، ک، م] – 4 بتلك: تلك [ا، ت، جـ] / إحدى: احد [ا، س، ل، ک، م، ن] / وضع: موضع [ت] / القطر: القطع [ا، س] / وبالقاعدة: بالقاعدة [ا] / نفس: ليس [س] ونفس [جـ] نفس بعض [ت] – 5 ثبات: ثنان [ت] / أوضاعها: أوضاعهما [ک، م] / فيرسم: فنرسم [جـ، ل، ک، م] ويرسم [س] فرسم [ت] – 6 المخط: المحيط [ا، ت، جـ] / ناقص: غير موجودة في مخطوطة [ا] / على: عن [ت] / المفروضة: مفروضة [ت] – 7 إلى: قد تقرأ «له لي» [ت] / وهم: واهم [جـ] / مَن: ومن [ا] / لسهولتها: سهولتها [ا] / مؤنة: موونة [ت، ک، ن] – 8 فإن: وان [ت] / لإظهار: الا [ت] – 9 الذي بحصوله مرة: الوضع لحصوله مر [ت] – 10 مضاعفة: ناقصة [جـ، ل، ک، ن، م] متضاعفة [ت] – 11 المكافئ: ناقصة [ک] / بالبركار: هنا، كتبها «بالبركار» [س] – 12 لهذا: بهذا [جـ] – 14 ا ب: ناقصة، وترك فراغًا لها [جـ] / وب جـ: وب ح [ا، س، ک، م]؛ وكذلك فيما يلي في [ک، م] / ب: ناقصة [ا] – 15 ونخرج: فنخرج [ت] – 16 نصف: النصف [ا].



ثم نخطّ ه ز المستقيم، ونخرج من نقطة ز خط ز ح – على أية زاوية اتفقت – مساويًا لـ ب ا / فيما حصّلناه للقطع المكافئ، وح ط على استقامته مساويًا لـ ب د هناك، س-٦٣-و
حتى تكون نسبة ز ح إلى ح ط كنسبة مربع المحور إلى مربع نصف الضلع القائم؛ ونصل ح ه ونخرج ط ي موازيًا لـ ه ح، ونُدير على خط ز ي نصف / دائرة ز كـ ي ونقيم ك-١١٠-و
عمود // ه كـ على ز ي. ثم ننصّف ه ي على ل، ونُدير على مركز ل وببعد ل كـ قوس كـ م. ثم نُدير على خط ز ه أيضًا نصف دائرة ز س ه، ونقيم عمود م س على ز ه ونصل ز س س ه. ل-١٥٣ م-١٠١



ثم نجيء بالبركار التام، ونجعل كل واحدة / من زاويتي رأسه ومركزه مساوية لزاوية س ز م، ونُدير / محوره حتى يلاقي رأسُ المخط القاعدة من جهة الزاوية / الحادّة على نقطة ما. فنطبق بتلك النقطة رأس القطع وبالقاعدة سهمه المعطى؛ ثم نُدير المحور، مع ا-٨٣-و جـ-٥٣-ظ ن-٤٦-ظ

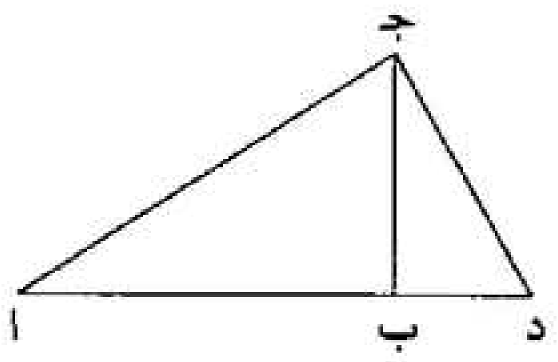
1 ه ز: هذا [ا] / ز: د [جـ] / ز ح: د حـ [جـ] / أية: أي [ا، جـ] – 2 لـ ب ا: مع ب ا [جـ] / فيما: فما [ا، ت، جـ، ل، كـ، م، ن] / للقطع: في القطع [س] / وح ط: وخط [ت] / لـ ب د: مع ب د [جـ] لـ بل [ت] – 3 ح ط: خط [ا، ن] – 4 ح ه: حـ ه [ا، جـ، ل] / لـ ه ح: لـ ه حـ [ا] ناقصة [ت] مع ه ح [جـ] / ز ي: د ح [جـ] / ز كـ ي: ز ل ح [جـ] – 5 ه كـ: ا ه كـ [جـ] / ز ي: ز ح [جـ] / ننصّف: نصف [ت] / ه ي: ه ح [جـ] / ل (الأولى): لد [ا، ن، ل، كـ، م] / وببعد: وبعد [جـ] – 6 كـ م: ل م [كـ، م] / ز ه: د ه [جـ] / نصف: ناقصة [ا، جـ، ل، كـ، م] / ز س ه: س ه ز [ن] / م س: س ه [ت] ناقصة، وترك فراغًا لها [جـ] [جـ] / ز ه: م س [جـ] – 7 س ه: ناقصة [جـ] – 8 بالبركار: البركار [ن] / واحدة: واحد [جـ] – 9 س ز م: س م [ت] / محوره: محوز [جـ] / حتى: على [كـ] / يلاقي: يلاق [س] / المخط: المحيط [ا، جـ] – 10 ما: ناقصة [جـ] / القطع: القاعدة [ت] / وبالقاعدة: والقاعدة [جـ] / المعطى: المعاتا [ا].

ثبات القاعدة والزاويتين على أوضاعها، فيرسم رأس المخط بحركته على السطح المفروض قطعًا مكافئًا كما اشترط.

عمل القطع الزائد بالبركار التام

وكما حصّلنا في القطعتين المتقدمتين، ما احتاجا إليه من النسبة، كذلك نحتاج / في ا-٨٣-ظ هذا القطع أن نحصل نسبة مربع محور البركار إلى مربع نصف القطر المجانب.

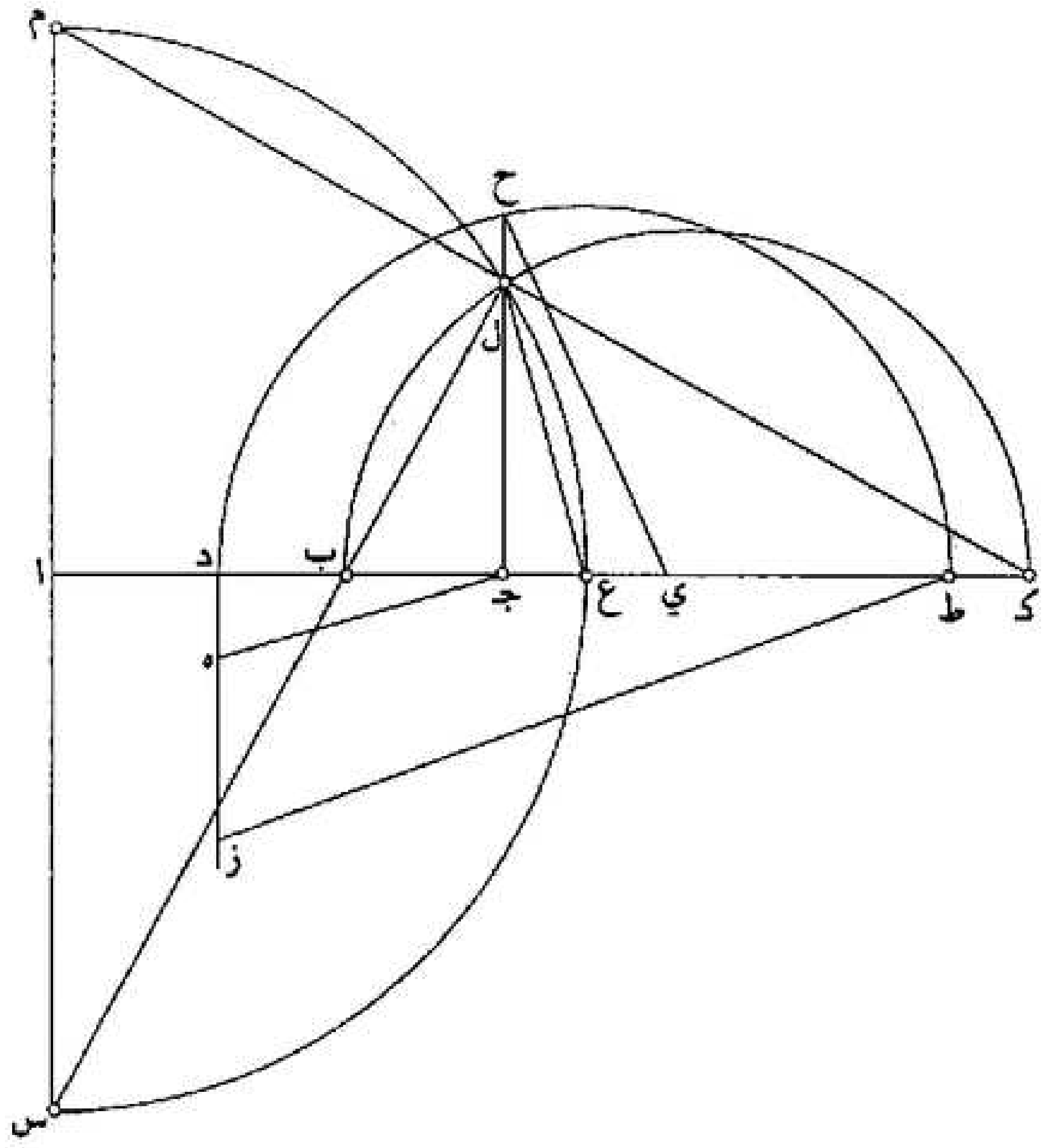
فليكن ا ب / مساويًا للمحور وب جـ مساويًا لنصف القطر المجانب وزاوية ب قائمة؛ ت-٥٤-ظ ونخرج جـ د عمودًا على ا جـ ونخرج ا ب على استقامته حتى يلتقيا على نقطة د. فتكون نسبة ا ب إلى ب د كنسبة مربع المحور إلى مربع نصف القطر المجانب.



ثم نفرز من خطّ ما مستقيم في موضع / مفرد خطًّ ا ب مساويًا للقطر المجانب في س-٦٣-ظ هذا القطع، وب جـ مساويًا للضلع / القائم، وكذلك ا د مساويًا للضلع القائم. ونخرج ا-٨٤-و د ه على أي زاوية اتفق مساويًا لـ ب د في هذا / الشكل الذي قدّمناه لهذا القطع، وه ز ك-١١٠-ظ مساويًا لـ ا ب فيه، حتى تكون نسبة ز ه إلى ه د كنسبة مربع المحور إلى مربع نصف القطر المجانب؛ ونصل ه جـ ونخرج ز ط موازيًا لـ ه جـ. ثم ندير على خط ط د نصف دائرة د ح ط، ونقيم عمود جـ ح على د ط، وننصّف / ط ب على نقطة ي، ونُدير ل-١٥٤

1 والزاويتين: والزوايتين [ت] / أوضاعها: اوضاعهما [س] / فيرسم: فنرسم [ا، ك، م] / المخط: المحيط [ا] / بحركته: بحركة [ا، س، ل، ك، م، ن] / السطح: التسطيح [ن] – 4 القطعتين: القطعين [ا، ت، جـ، ن] / المتقدمتين: المتقدمين [ا، جـ، ن] / ما احتاجا: ما احتجنا [ا] لاحتاجنا [ن] / من النسبة: ناقصة [ا] بالنسبة [جـ] / كذلك: لذلك [ا] – 5 هذا: ناقصة [ت] / نحصل: نجعل [ن] / محور: لمحور [م] – 6 فليكن: وليكن [ك] / وب جـ: وب ح [ن] ب ح [س] / ب: ر [ن] – 7 ا ب: ناقصة [ت، جـ] / يلتقيا: يلقيا [ا] – 8 ا ب: ا د [ن] مربع، وترك فراغًا بعدها [جـ] / ب د: ر د [ت] / مربع: أثبتها في الهامش [ك] / نصف: ناقصة [جـ] – 9 نفرز من: نفرض [ا، جـ] / موضع: موضع من [جـ] – 10 وب جـ: وب ح [ن] وب د [جـ] / ا د: ا حـ [ا] «ا د ه» في التكرار [ن] – 10-11 للضلع (الأولى) ... مساويًا: مكررة [ن] – 10 وكذلك ... للضلع القائم: ناقصة [جـ] – 11 اتفق: اتفقت [ت] / لـ ب د: لـ ي د [ا] لـ ب ل [ت] مع ب د [جـ] / هذا: هذه [ا] / لهذا: لهذه [ا] / القطع: الوضع [جـ] / وه ز: وه د [ا، جـ، ل، ك، م] وس ه [ت] – 12 لـ ا ب: مع ا ب [جـ] / فيه: ناقصة [جـ] – 13 ه جـ: ه ح [س] / ونخرج: ونخرجه [ت] / لـ ه جـ: مع ه جـ [جـ] / ط د: ط ه [ا] – 14 جـ ح: ح حـ [ا، جـ] / د ط: ك ط [ا] / نقطة: ناقصة [جـ].

على مركز ي وببعد ح ي قوسًا من دائرة تنتهي من استقامة خط د ط إلى نقطة ك. ثم ندير على خط ك ب نصف دائرة ب ل ك يقطع عمود جـ ح على نقطة ل. ونقيم على/ خط ك ا على نقطة ا منه عمودًا ممتدًا / في الجهتين معًا، ونصل ك ل ونخرجه إليه على (ت-٥٥-و، م-١٠٢) استقامته حتى يلقاه على نقطة م. وكذلك نصل ل ب ونخرجه إليه على استقامته حتى يلقاه على نقطة س. وندير على مثلث م ل س نصف دائرة، فيقطع ك ا على نقطة / ع (ن-٤٧-و) ونصل ل ع.



ثم نجيء بالبركار التام، فنجعل زاوية رأسه مساوية لزاوية ك ل ع / وزاوية مركزه مساوية (جـ-٥٤-و) لزاوية ل ك ع. وندير المحور حتى يلاقي رأسُ المخط القاعدة على نقطة ما من جهة الزاوية / الحادة. ثم نطبق بتلك النقطة رأس القطع وبالقاعدة سهمه الممتدّ على استقامة القطر / (ا-٨٤-ظ) المجانب. وندير المحور، مع ثبات القاعدة والزاويتين على أوضاعها، / فيرسم رأس المخط (س-٦٤-و، ك-١١١-و) بحركته قطعًا زائدًا على السطح المعطى بالشرائط المفروضة فيه.

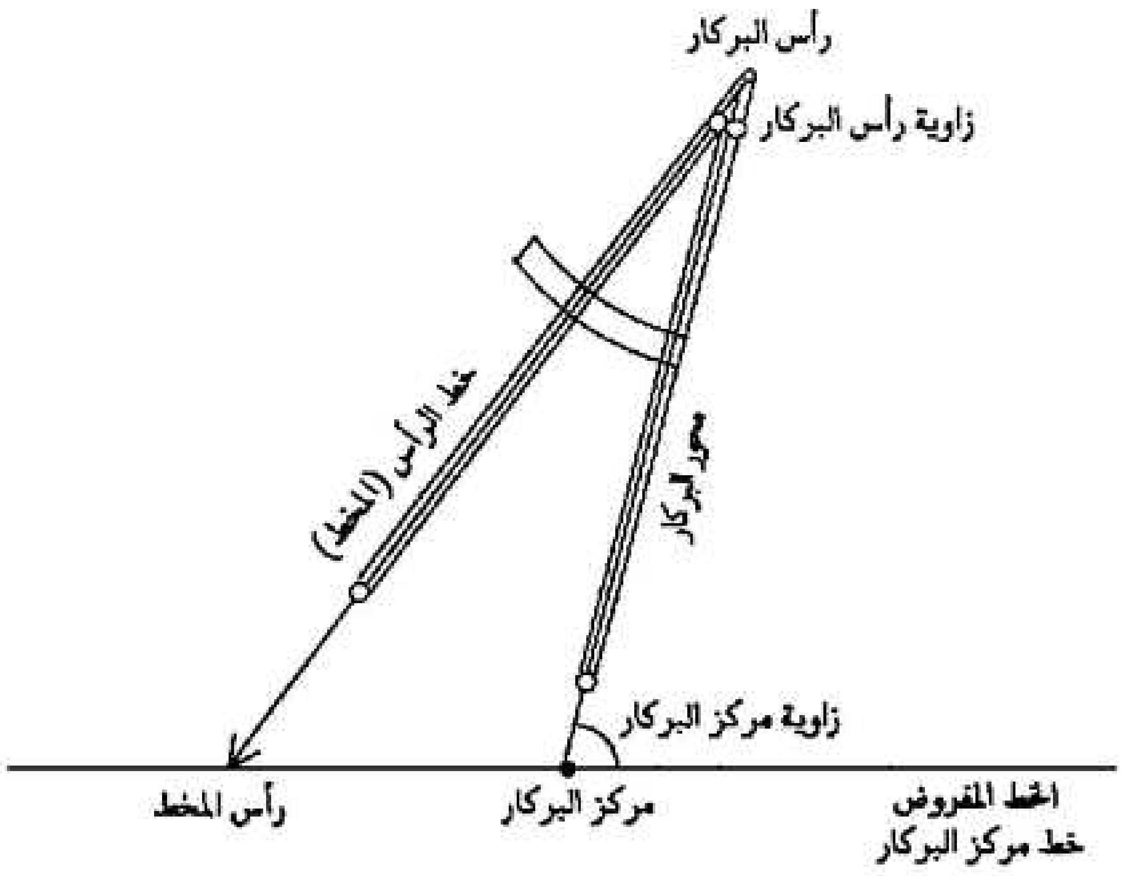
1 ح ي: ي ح [ن، س] / من استقامة: ناقصة [ك] / د ط: ر ط [ت] – 2 ك ب: ل ب [جـ] / دائرة: ناقصة [جـ] / ب ل ك: د ا ك [ت] / عمود جـ ح: عمودي ح حـ [ا] / ل: ك [ت] – 4 استقامته: استقامة [س] / يلقاه: يلقا [ك] / م: س [ك] – 4-5 وكذلك ... نقطة: ناقصة [س] / على استقامته: ناقصة [ن] – 7 بالبركار: الفرجار [س] / مساوية: مساويا [ا] / ك ل ع وزاوية: ناقصة [ك، م] – 7-8 ك ل ع وزاوية ... لزاوية: ناقصة [ت] / مساوية: متساوية [ا، ل، ك، م] – 8 وندير: ثم ندير [جـ] / حتى: على [جـ] / يلاقي: يلاق [س] تلاقى [جـ] / المخط: ناقصة [ا] – 9 بتلك: تلك [م] / وبالقاعدة: بالقاعدة [ت] – 10 فيرسم: فنرسم [ا، جـ] فرسم [ل، ك، م] ويرسم [س] / المخط: المحيط [ا] – 11 المفروضة: كتب أولاً «المعطى»، ثم ضرب عليها بالقلم [س].

٢٣٤ – ظ

هذه رسالة في بركار القطوع
حررها الإمام أثير الدين المفضل بن عمر بن المفضل الأبهري
حين قرأ على الشيخ كمال الدين بن يونس رسالة البركار التام

في البحث في صنعة البركار

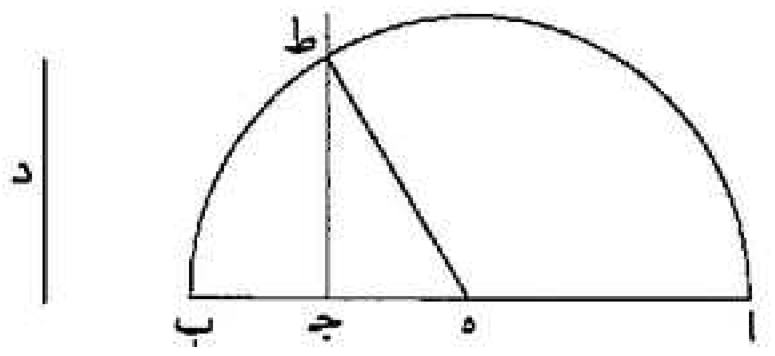
إذا قام على نقطة مفروضة من خط مستقيم مفروض في سطح مستوٍ مفروض خطٌ مستقيمٌ وبالطرف الآخر من الخط القائم خطٌ آخر مستقيم وصار ملاقيًا للخط المفروض للسطح المستوي، فإنا نسمي هذه الخطوط على هذا الوضع *بركار القطوع*، والنقطة المفروضة أولاً *مركز البركار*، والطرف الآخر من المحور *رأس البركار*، والخطُّ المستقيم المارّ بالرأس الملاقي للخط المفروض في السطح المستوي *خطَّ الرأس* ‹وهو› مخط البركار، ‹و›طرفه الملاقي للخط المفروض *رأس المخط*، والزاوية التي يحيط بها مخط البركار ومحوره *زاوية رأس البركار*، والتي يحيط بها محوره والخط المفروض *زاوية مركز البركار*، والخط المفروض *خط مركز البركار*، وحركة خط رأس البركار حول المحور مع حركة رأس المخط على السطح المفروض *حركة البركار*.



5 نقطة مفروضة: خط مفروض – 6 وصار: وصارا – 12 المخط: المخروط.

في المقدمات

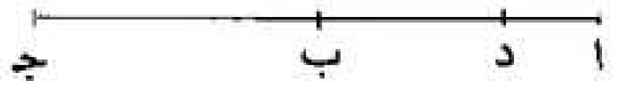
‹ا› نريد أن نضيف إلى ا ب سطحًا كمربع د يزيد على تمامه مربعًا.



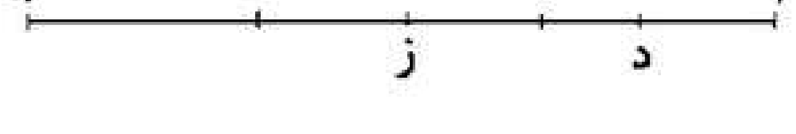
فننصف ا ب على ه، ونخرج عمود جـ ط كـ د ونصل ه ط؛ وعلى ه ببعد ه ط ‹نرسم› دائرة. فلأن ا جـ في جـ ب مع مربع ه جـ كمربع ه ب، أي مربع ه ط، أي مربعي ه جـ جـ ط، نسقط مربع ه جـ المشترك، يبقى ا جـ في جـ ب كمربع جـ ط، أي ‹مربع› د، ويزيد على تمامه بمربع جـ ب؛ وهو المراد.

‹**ب**› نفرض ب على ا جـ المفروض، ونريد أن نجد على ا ب نقطةً كـ د، يكون د جـ إلى د ب كـ د ب إلى د ا.

فإن كان ب جـ كـ ا ب، نجعل مربع ب د نصف مربع ا ب. فلأن ا د في د جـ مع مربع د ب كمربع ا ب، أعني ضعف مربع د ب، نسقط مربع د ب المشترك، يبقى ا د في د جـ كمربع د ب، فـ د جـ إلى د ب كـ د ب إلى د ا.

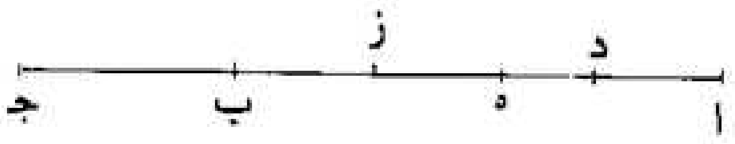


وإن كان ب جـ أعظم من ا ب، نفصل ه جـ كـ ا ب وننصف / ه ب على ز. ٢٣٥-و
ونضيف إلى ب ز سطح د ز في د ب مساويًا لنصف ا ب في ب جـ يزيد على تمامه مربعًا. فلأن ا ب في ب جـ، أعني ضعف د ز في د ب مع مربع ب ز المساوي لمربعي د ز د ب، كـ ا د في د جـ مع مربع د ز، نسقط مربع د ز من الجانبين، يبقى ا د في د جـ كمربع د ب، فـ د جـ إلى د ب كـ د ب إلى د ا.

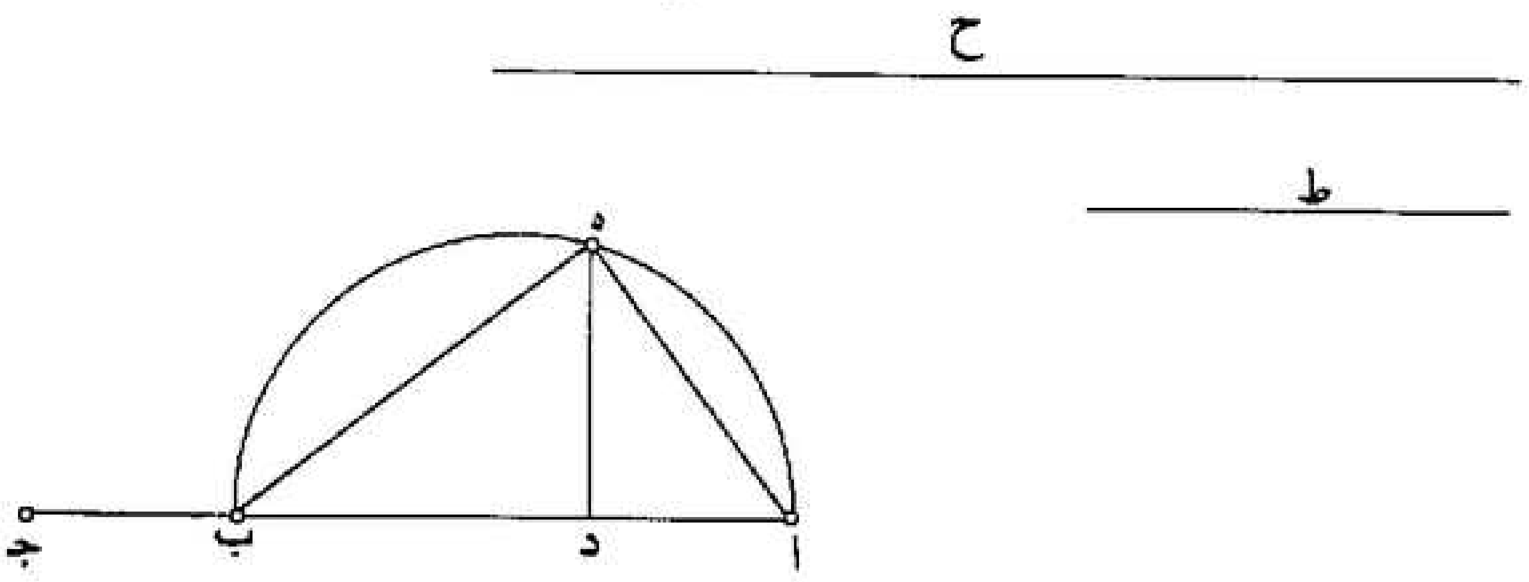


3 ببعد ه ط: ببعده – 4 أي: عادة ما يكتب «أي» مثل «إلى»، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 6 بمربع: مربع – 7 نفرض: النون تبدو ممحوة – 9 نجعل: فنجعل، وهو جائز، ولكنه سيسقط الفاء في مثل هذا التركيب فيما بعد – 16 د ا: ب ا.

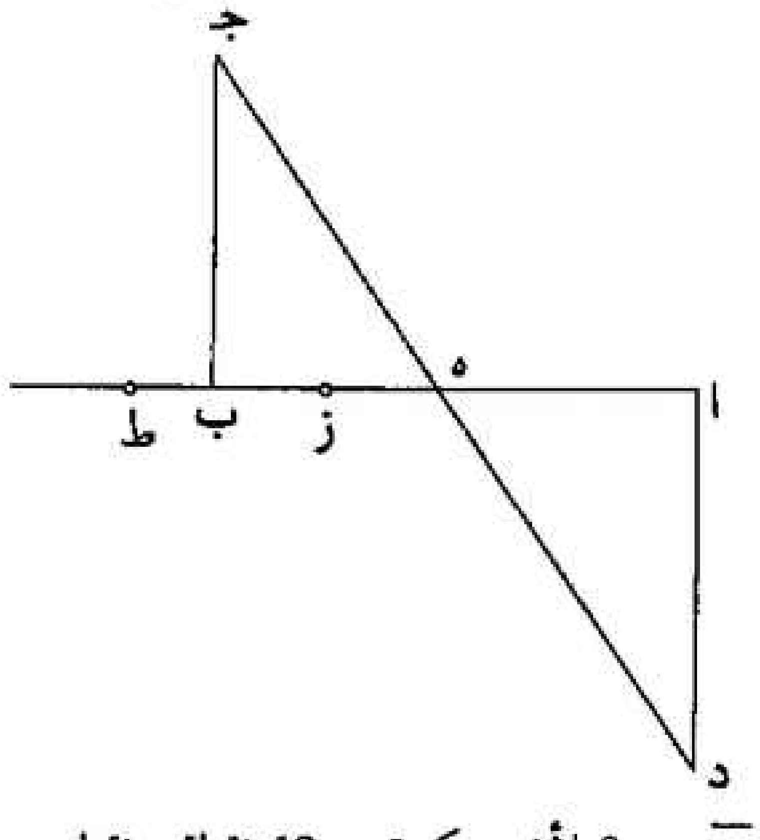
وإن كان ا ب أعظم من ب جـ، نضيف إلى ب ز سطح د ز في د ب مساويًا لنصف ا ب في ب جـ يزيد على تمامه مربعًا. فلأن ا ب في ب جـ، أعني ضعف د ب في د ز مع مربع ب ز المساوي لمربعي د ب د ز، كـ ا د في د جـ مع مربع د ز، ‹نسقط مربع د ز من الجانبين›، يبقى ا د في د جـ كمربع د ب، فـ د جـ إلى د ب كـ د ب إلى د ا.



‹جـ› خطوط ا ب ح ط مفروضة، وا ب نصف ح وا ب في ب جـ كمربع ط. وجعل د جـ إلى د ب كـ د ب إلى د ا، وأخرج عمود د ه، ورسم على ا ب نصف دائرة، ووصل ا ه ه ب. فنسبة مربعي ط ب ه معًا إلى مربع ب ه كنسبة مربعي ب ه ه ا، لأن نسبة ا ب في ب جـ، أعني مربع ط، إلى ا ب في ب د، أعني مربع ب ه، كـ ب جـ إلى ب د، لأن ا ب ارتفاع مشترك. فبالتركيب، مربعا ط ب ه إلى مربع ب ه كـ د جـ إلى د ب، بل د ب إلى د ا، بل مربع ب ه إلى مربع ه ا؛ وهو المطلوب.



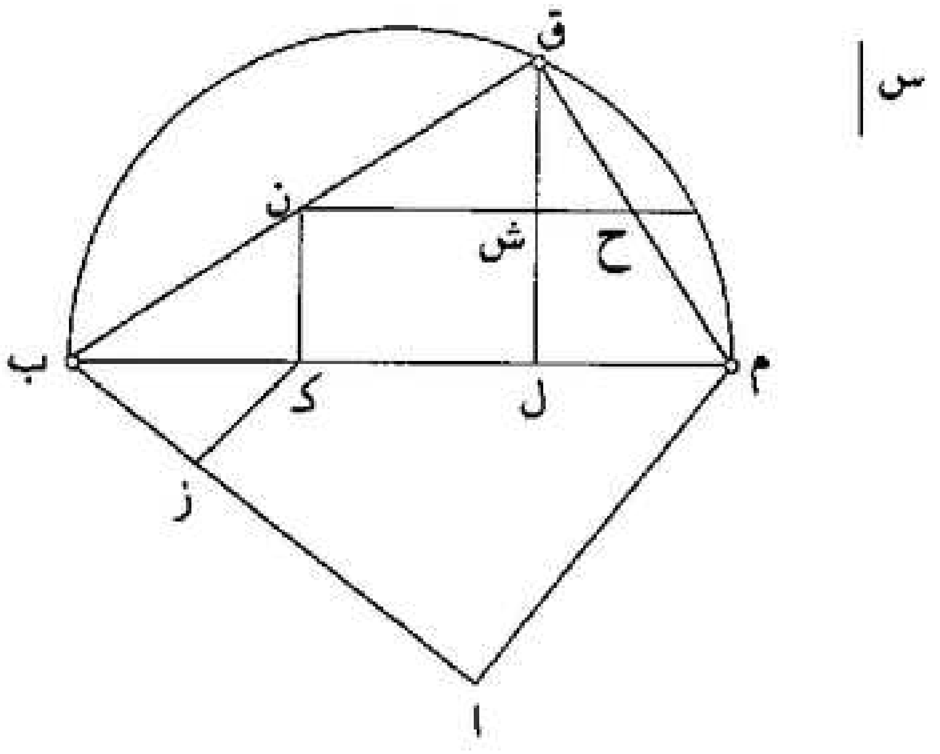
‹د› قام على ا ب المفروض ا د مساويًا لـ ا ز، وأخرج عمود ب جـ بغير نهاية. ونريد أن نخرج من د خطًا يقطع ا ب ويلقى ب جـ، وتكون نسبة ما بين نقطة الملاقاة وب، أعني جـ ب، إلى ب ز، كـ ب ز إلى ما بين نقطتي ز والقطع، أعني ز ه.



4 د ا: ب ا – 5 ح (الأولى): حـ – 9 لأن: مكررة – 12 نقطة: نقطتي.

فنجعل ا ز في ب ط كمربع ب ز ونضيف إلى ز ط سطحًا مساويًا لـ ا ز في ب ط يزيد على تمامه مربعًا؛ وليكن ضلعه ه ز. ونصل د ه ونخرجه إلى جـ، فـ جـ ب إلى ب ز كـ ب ز إلى ز ه. لأن ا ز في / ب ط كـ ه ط في ه ز، فـ ا ز إلى ه ز كـ ه ط إلى ٢٣٥-ظ ب ط. فبالتفصيل، ا ه إلى ه ز كـ ه ب إلى ب ط. فبالإبدال، ا ه إلى ه ب، أعني ا ز إلى ب جـ، كـ ه ز إلى ب ط، فـ ا د في ب ط، أعني مربع ز ب، كـ ب جـ في ه ز، فـ ب جـ إلى ب ز كـ ب ز إلى ز ه؛ وهو المراد.

‹٥› ا ب مفروض، وتعلم عليه ز، وقام عليه عمودا ا م ز ك ذاهبين إلى غير النهاية. ونريد أن نخرج من ب خطًا يقطعهما كـ ب ك ل م، حتى يكون م ل إلى ل ب كمربع س المفروض إلى مربع ب ك، ويكون ب م في ك ل كمربع ا ب.

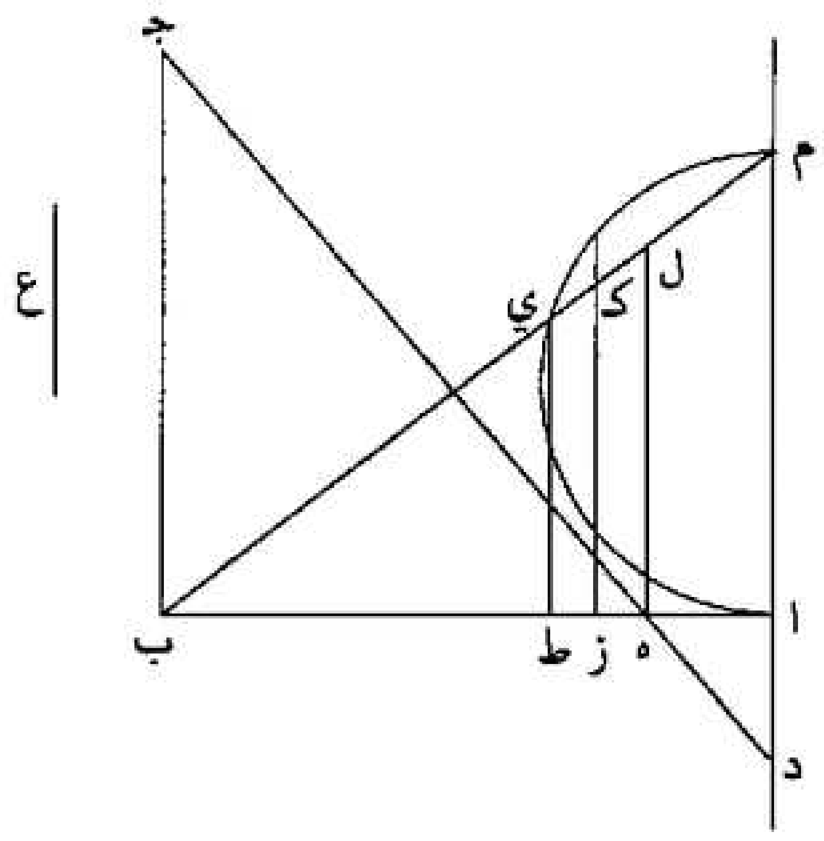


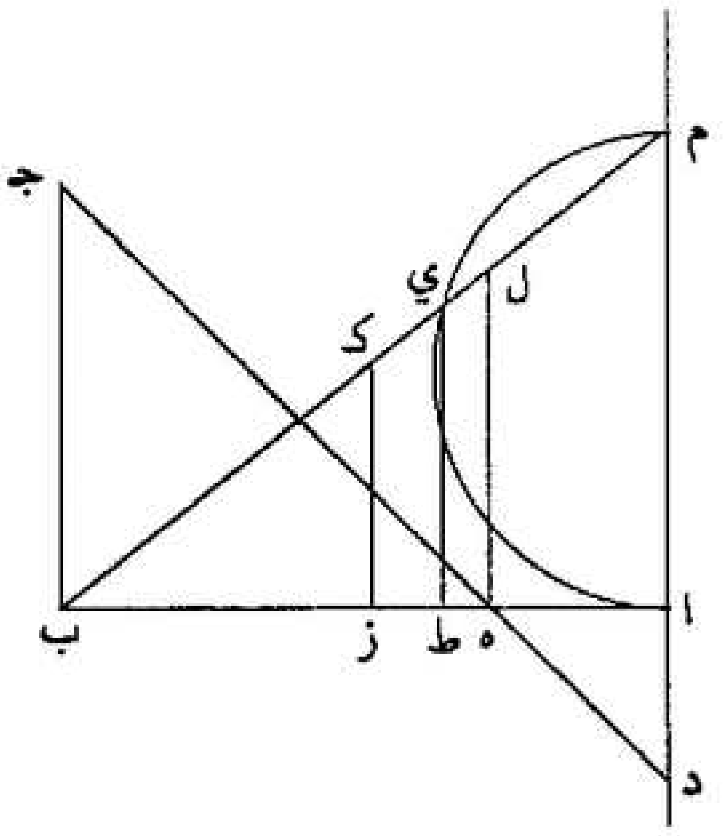
فنجعل نسبة مربعي س ا ب كـ ا د إلى ا ب، ونخرج عمود ب جـ و‹نخرج› د جـ يقطع ا ب على ه، حتى ‹يكون› ب جـ إلى ب ز كـ ب ز إلى ز ه لما تقدم. ونجعل ا ب في ب جـ كمربع ع. وعلى ب ببعد ع دائرة تقطع ز ك على ك، ونصل ب ك ونخرجه إلى م، ونرسم على م ا دائرة تقطع م ب على ي، ونخرج عمود ي ط. فلأن نسبة مربعي س ا ب كـ ا د إلى ا ب، ونسبة مربعي ا ب ب ك كـ ا ب إلى ب جـ، فبالمساواة مربع س إلى مربع ب ك كـ ا د إلى ب جـ، أعني ا ه إلى ه ب، بل م ل إلى ل ب. ولأن نسبة مربعي ب ي ب ك، أعني نسبة ب ط ب جـ، كنسبة مربعي ز ك ب ز، يكون ب ط إلى ب ز كـ ب ز إلى ب جـ، فـ ه ز ب ط متساويان، فـ ل ك ي ب متساويان، وم ب في ي ب كمربع ا ب. فـ م ب في ل ك كمربع ا ب؛ وذلك ما أردناه.

8 ل ب: ل م.

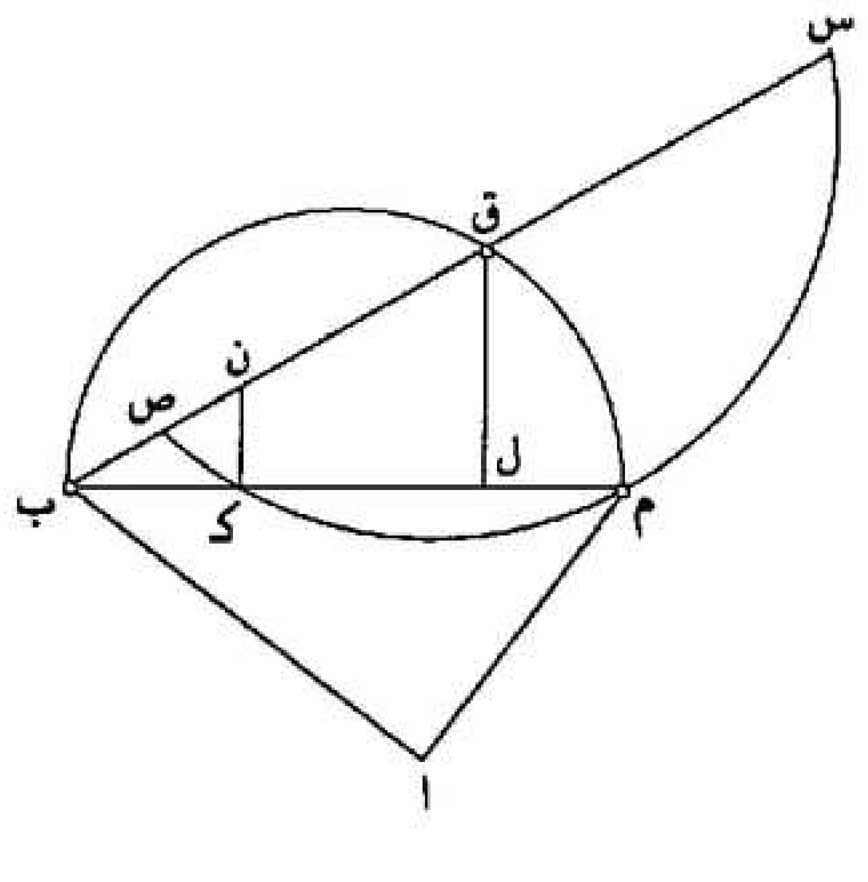
وأقول أيضًا: إذا عملنا على الخط المذكور، أعني م ل ك ب، دائرة م ق ب وأخرجنا عمود ل ق ووصلنا م ق ق ب، فإن ق ب أعظم من ا ب.

لأنا نخرج عمود كـ ن يقطع ق ب على ن، فلتشابه مثلثي كـ ن ب م ق ب، تكون نسبة مربعي م ق ق ب، أعني نسبة م ل ل ب، بل نسبة مربعي س كـ ب، كنسبة مربعي كـ ن كـ ب. فمربع س مساوٍ لمربع كـ ن. ونخرج ن ش ح يوازي ‹م ب، فيكون مربع ش ق مع مربع› ش ن كمربع ق ن. وم ب في ش ن، أعني ل كـ، أعني مربع ا ب، أعظم من ح ن في ش ن، أعني مربع ق ن، فـ ا ب أعظم من ق ن ولذلك / مربع ق ب كـ م ب في ب ل، فهو أعظم من مربع ا ب المساوي لـ م ب في ل كـ، ٢٣٦-و
فـ ق ب أعظم من ا ب وهو المطلوب.





وأقول أيضًا: إذا فصلنا ق ص كـ ا ب، وأدرنا دائرة تمرّ بـ م كـ وتقطع ق ب، فإنها تمرّ بـ ص.



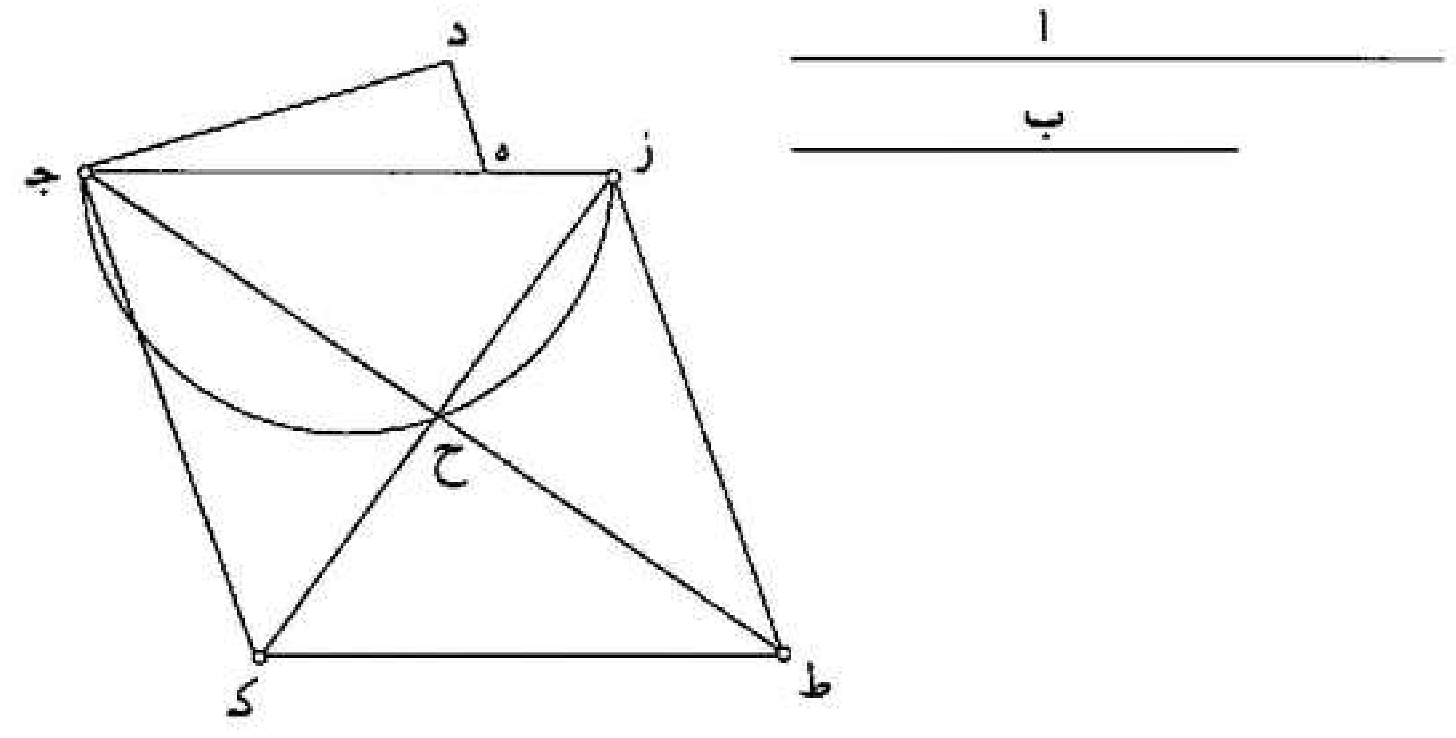
7 ولذلك: قد تقرأ «ولأنه».

لأنا نخرج ق س كـ ق ص ونصل م س. فلأن س ب في ب ص مع مربع ق ص كمربع ق ب المساوي لـ م ب في ل ب، بل لـ م ب في ل ك المساوي لمربع ق ص، أعني مربع ا ب ولـ م ب في ب ك، فنلقي مربع ق ص المشترك، يبقى س ب في ب ص كـ م ب في ب ك. فالدائرة المرسومة على نقطتي م ك القاطعة لـ ق ب تمرّ بـ ص، وإلا لكان م ب في ك ب إما أعظم من س ب في ب ص أو أصغر، هذا خلف والحكم ثابت؛ وذلك ما أردناه.

في المطالب

⟨آ⟩ نريد أن نرسم بالبركار الذي محوره آ قطعًا مكافئًا ضلعه القائم ⟨ب⟩.

فنجعل جـ د نصف المحور ود ه كثمنه، ونصل جـ ه ونخرجه إلى أن يصير ه ز كـ ه د، ونعمل على جـ ز نصف دائرة، وفيها وتر جـ ح كـ جـ د ونصل ز ح.



فأقول: إنا إذا جعلنا زاويتي الرأس والمركز، كل واحدة منهما ⟨مساوية⟩ لزاوية ح جـ ز وأدرنا البركار، فإن رأس المخط يرسم قطعًا مكافئًا ضلعه القائم ب.

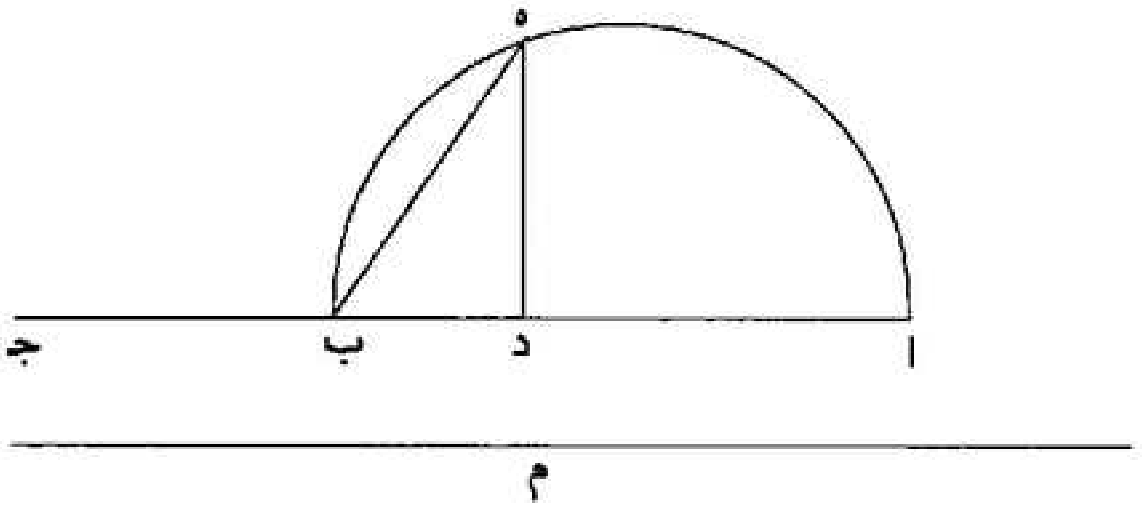
لأنا نخرج ح ط كـ ح جـ وح ك كـ ح ز، ونصل ز ط جـ ك. فلأن جـ د نصف المحور وجـ ح كـ ح ط، فـ جـ ط كالمحور وزح ح ط كـ زح ح جـ، وزاويتا ح قائمتان، فـ ز جـ ح كـ ز ط ح. ولأن ك ح ح ط كـ ز ح ح جـ، فالزاويتان قائمتان، فـ ك جـ ح كـ ح ط ز. فإذا جعلنا جـ نقطة الرأس وز نقطة رأس المخط، فالزاوية التي تحصل في / الجهة ظ-٢٣٦ الأخرى تكون هي ك جـ ح المساوية لـ جـ ط ز؛ فـ ك جـ ط ز متوازيان، فالقطع الذي يرسمه رأس المخط قطع مكافئ سهمه ط ز.

9 كثمنه: الضمير يعود هنا على الضلع القائم – 10 جـ ز: أثبتها في الهامش – 11 واحدة: واحد – 16 ح ط ز: حـ ط ز.

وأقول: إن ضلعه القائم ب.

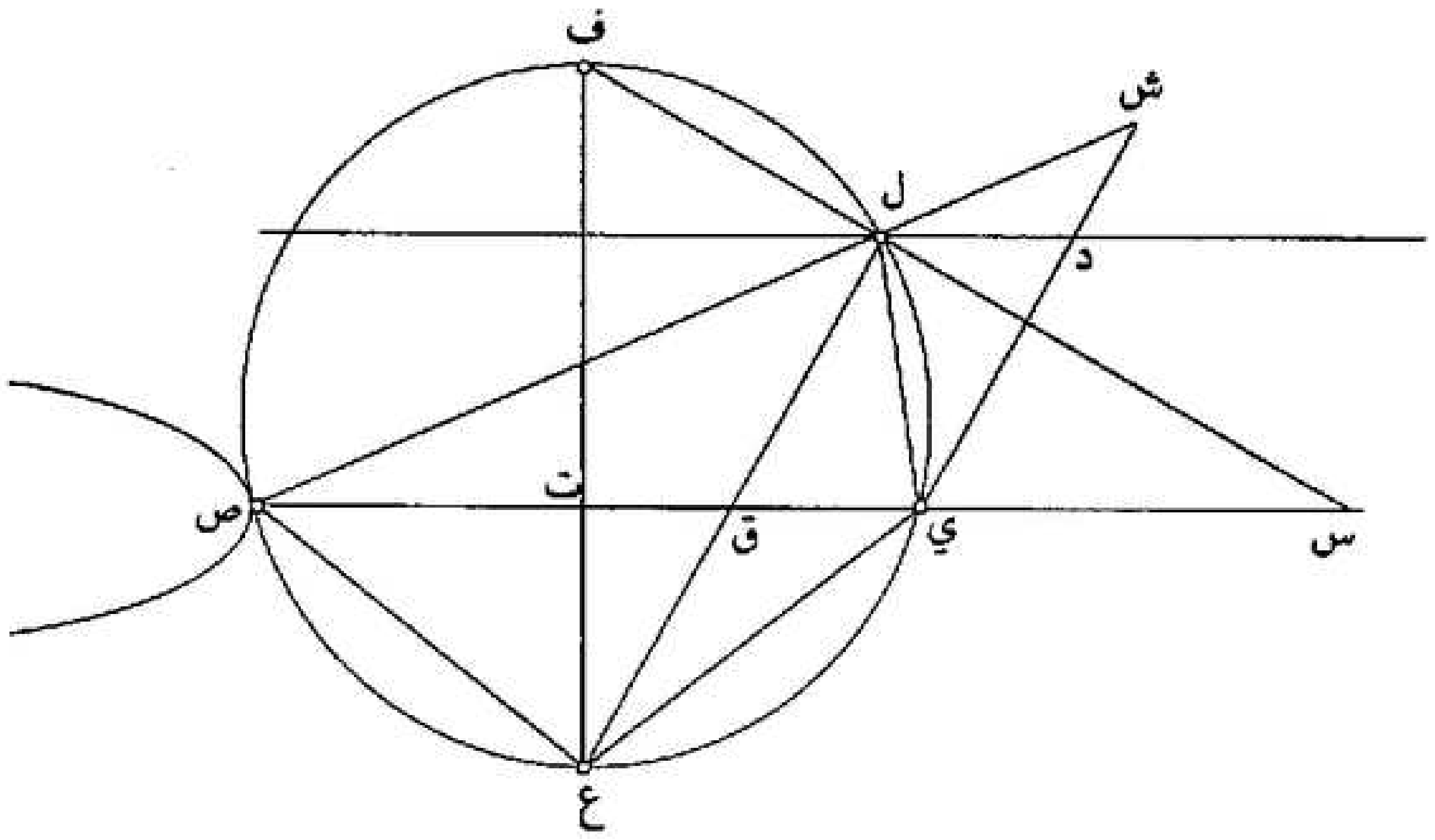
لأن مربعي جـ ز ز ه كضعف جـ ز في ز ه مع مربع ه جـ، أعني مربعي ه د د جـ، لكون د قائمة، يذهب مربع ز ه بمربع ه د لتساويهما، يبقى مربع جـ ز، أعني مربعي جـ ح ح ز، كضعف جـ ز في ز ه مع مربع د جـ، أعني مربع جـ ح؛ نسقط مربع جـ ح من الجانبين، يبقى ضعف جـ ز في ز ه كمربع ز ح، فمربع كـ ز ثمانية أمثال جـ ز في ز ه، أعني ضرب جـ ز في ثمانية أمثال ز ه، أعني ب؛ فـ جـ ز في ب كمربع كـ ز، فـ ب إلى كـ ز كـ كـ ز إلى جـ ز، أعني ز ط، فـ ب هو الضلع القائم؛ وذلك ما أردنا بيانه.

‹ب› نريد أن نجد بالبركار الذي محوره س ل قطعًا زائدًا ضلعه القائم م.



فنجعل ا ب نصف م، ونجعل ا ب في ب جـ كمربع س ل، ود جـ إلى د ب كـ د ب إلى د ا، لما سبق، وعمود د ه؛ وعلى ا ب نصف دائرة ب ه ا ونصل ب ه ه ا. فنسبة مربعي س ل ب ه معًا إلى مربع ب ه كمربع ب ه إلى مربع ه ا، لما قدمناه. ونجعل ق ع كـ ق ل، ونصل س ق، ونخرج عمود ع ت إلى س ق، يلقى س ل المخرج على ف. ونرسم على مثلث ع ل ف دائرة تقطع س ق على ي ص؛ ‹فأقول: إنا إذا جعلنا زاوية رأس البركار كزاوية س ل ي› وزاوية مركزه كزاوية ل س ي، ونديرالبركار مع ثبات المحور، فرأس المخط يرسم قطعًا زائدًا ضلعه القائم م.

3 قائمة: قائم / مربعي: مربع – 9 محوره: محور.

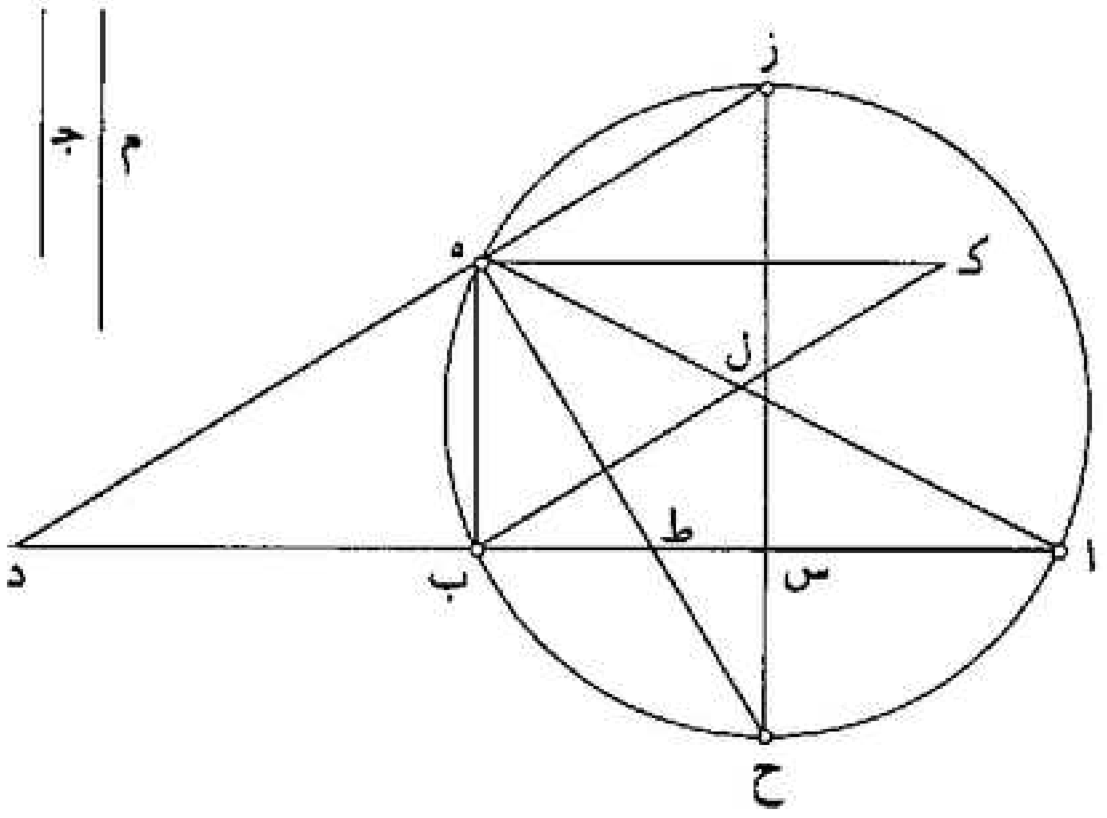


لأنا نصل ص ل ونخرجه مع ي د الموازي لـ ع ل إلى أن يلتقيا على ش. ونخرج ل د يوازي ق ي. فلأن نسبة مربعي س ل ل ق، أعني مربع س ق، إلى مربع ل ق كنسبة مربع ل ق إلى زيادة مربع نصف م على مربع ل ق، فنسبة زيادة مربع نصف م على مربع ل ق، أعني سطح ل ق في ق ع، إلى مربع ق ع، كنسبة مربع ل ق إلى مربع ق س التي هي كنسبة مربعي ق ت ق ع لتشابه المثلثين. فنسبة زيادة مربع نصف م على سطح ل ق في ق ع إلى مربع ق ع كنسبة مربع ق ت إلى مربع ق ع، فمربع ق ت مساوٍ لزيادة مربع نصف م على ل ق في ق ع، أعني ي ق في ق ص. وي ص / ضعف ت ي ومربعه كـ ص ق في ق ي، أعني ل ق في ق ع مع مربع ق ت، ٢٣٧-و فـ ت ي نصف م، فـ ص ي كـ م. ولأن ي ع كـ ع ص، فـ ع ل ي كـ ع ل ص وس ل ق كـ ف ل ق لقيامهما، فباقيتا س ل ي ف ل ص، المساوية لـ س ل ش، متساويتان. فإذا أدير البركار حتى انطبقت هاتان الزاويتان، حدث مخروط يقطع السطح المارّ على س ي ق ص قائمًا على س ل ي على زوايا قائمة. فحدث قطع زائد مجانبه ص ي الذي يلقى ش ل المخرج على الاستقامة خارج المخروط على ص. ولأن ل د يوازي ي ص، فنسبة مربع د ل إلى سطح ش د في د ي كنسبة سطح ي ق في ق ص إلى مربع ل ق لتشابه مثلثي ص ق ل ش د ل ومثلثي ي ل ق د ل ي؛ وي ق في ق ص كـ ل ق في ق ع، فنسبة ص ي إلى ضلع القطع الحادث كنسبة سطح ق ع في ق ل إلى مربع ق ل، أعني كنسبة ع ق إلى ق ل. فخط ص ي هو الضلع القائم للقطع الحادث؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

3 نصف: مكررة.

‹جـ› نريد أن نخط بالبركار الذي محوره جـ قطعًا ناقصًا قطره الأطول ا ب وضلعه القائم م.

فنخرج من س، منتصف ا ب، س ز، ونخرج ا ب إلى د ونصل ز د، ونجعل ز د إلى د ه كـ ا ب إلى م، وز د في د ه كـ ا د في د ب بحيث إذا أخرجنا من ه عمودًا يلقى س ب على ط، يكون ه ط كـ جـ لما تقدم. ونُدير دائرة ب ح ا ز ه تمرّ بنقط ا ب ز ه ونصل ب ه ونخرج ه ط يلقى س ز على ح، ونصل ا ه ونخرج ب كـ ه كـ موازيين لـ ز د ا د؛ وليتقاطعا ب كـ ا ه على ل.



فأقول: إن المخروط الذي يرسمه مثلث ل ه ب إذا أثبت محور ط ه، / يُحدث ‹السطح القائم على› سطح دائرة ا ح ه كـ في بسيطه قطعًا ناقصًا، مجانبه ا ب وقائمه م. ٢٣٧-ظ

برهانه: أن زاويتي ل ه ط ط ه ب متساويتان لتساوي قوسيهما، فمثلث ل ه ب إذا أدير مع ثبوت ه ط، رسم مخروطًا من قبل تساوي الزاويتين وإمكان انطباق أحدهما على الأخرى عند إدارته. والسطح القائم على سطح الدائرة المار بـ ا ب يقطع ضلعي المثلث الحادث. وسطح الدائرة يقطع بسيط هذا المخروط ويقطع ضلعي المثلث المار بمحوره الذي هو مثلث ل ه ب، والفصل المشترك لهما ا ب. فلأن المخروط قائم والسطح القاطع يلقى قاعدة المخروط، فالقطع الحادث ‹في› بسيطه قطع ناقص قطره الأطول ا ب. فمتى جعلت زاوية رأس البركار كـ ط ه ب وزاوية قاعدته كـ ب ط ه، وجعلت قاعدة البركار مطابقة لـ ا ب، وأدير البركار مع ثبات ه ط، رسم قطعًا ناقصًا في بسيط المخروط الذي يرسمه حركة البركار ‹و›في السطح القاطع له.

6 ب ه: ب ح في النص ولكن ب ه في الرسم، فأخذنا بهذا – 7 وليتقاطعا: وليتقاطع – 10 متساويتان: متساويان – 15 بسيطه: بسيط – 16 مطابقة: مطابق – 18 السطح: الشكل.

وأقول: إن مَ ‹ضلع› قائم لهذا القطع.

فلأن اب إلى مَ كـ زد إلى ده التي هي مؤلفة من بد، أعني كـه، إلى كـب ومن اد إلى ده، أعني اب إلى بل، أعني هكـ إلى كـل، أعني مربع هكـ إلى سطح بكـ في كـل، فـ اب إلى مَ كمربع هكـ إلى بكـ في كـل.

فهذا المخروط قائم قد قطع بسطح يقوم على المثلث المارّ بمحوره ويلقى قاعدته على ‹خط› هو القائم على الفصل المشترك بين قاعدة المخروط والمثلث المار بالمحور على زوايا قائمة. وأخرج من رأس المخروط في سطح المثلث المار بالمحور خط موازٍ للفصل المشترك. وجعلت نسبة مربعه إلى سطح الخط ‹المركب من قاعدة المثلث مع الخط الذي فصله الخط المخرج موازيًا لـ اب في الخط الذي فصل من خارج المثلث› كنسبة الفصل المشترك إلى خط مفروض. والخط المفروض ‹ضلع› قائم للقطع الحادث الذي قطره الأطول اب، كما بيّنه أبلونيوس في الشكل الثالث عشر من المقالة ‹اَ› من كتاب *المخروطات*. فخط مَ ضلع قائم للقطع الذي قطره الأطول اب؛ وذلك ما أردناه.

تمت الرسالة، بحمد الله. وهذه الرسالة قد استنسخت من نسخة سقيمة من غير تأمل وإصلاح فساد المواضع، فاعلم ذلك.

4 بكـ (الثانية): بط – 6 ‹خط› هو: هز – 7 قائمة: يبدو أن هنا فقرة سقطت نجدها في نص محمد بن الحسين، الذي هو هذا النص نفسه: «وذلك لأن قاعدة المخروط قائمة على المثلث المار بالمحور، لأنه قائم، والسطح القاطع قائم على المثلث المار بالمحور أيضًا، فالفصل المشترك أيضًا قائم على المثلث المار بالمحور وعلى كل خط يخرج فيه، فيكون قائمًا على قاعدته، ولهذا ينبغي أن نجعل المثلث المار بمحور البركار قائمًا على السطح الذي رسم فيه القطع» – 8-9 ‹المركب ... المثلث›: سقطت هذه العبارة التي نجدها في نص محمد بن الحسين – 11 مَ: حـ.

الهندسة وعلم المناظر في ضحى الإسلام

الفـــصل السادس

الإسقاطــات المخروطية و الاسطوانية و الأصطرلابات

رشدي راشد

مؤسســة الملك عبد العــزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

الفصل السادس

الإسقاطات المخروطية والاسطوانية والأصطرلابات

1. الأصطرلاب وطرق الإسقاط

تم اكتشاف المقاربة التحويلية في الهندسة في القرنين التاسع والعاشر بشكل يكاد يكون طبيعياً، وعلى نحو مستقل على كل حال، في دراسة زمرتين من المسائل. الأولى ذات طابع رياضي بحت قام بها رياضيون عرب ينتمون إلى المدرسة الأرخميديسية والأبولونية. وهي مسائل أثيرت من خلال دراسة المخروطات: في مساحة بعض القطاعات[1] الناقصة والمكافئة وفي توليد بعض المنحنيات[2]. والزمرة الثانية تحوي مسائل، طرحها الفلكيون، استدعت تطبيق الهندسة لحلها، وخاصة منها التمثيل الدقيق للكرة بغية إنشاء أصطرلاباتهم. لاشك أن هذه المسائل جد قديمة فالكل يعلم أن بطلميوس استعمل الإسقاط التسطيحي[3]. إلا أننا نشهد ظاهرة جديدة كل الجدة في القرن التاسع لم تعط ما تستحقه من الأهمية: هي هذا التقدم الذي لم يسبق له مثيل في إنشاء الأصطرلابات واستخدامها. وليس هنا المكان المناسب لوصف الطلب المجتمعي لهذه الآلة من قبل الفلكيين والمنجمين والأطباء الذي أدى إلى نشوء مهنة جديدة – معترف بها كمهنة – هي مهنة الأصطرلابيين[4].

---

[1] مثلاً تطبيق التآلفية من قبل ثابت بن قرة لتحديد قطاع قطع ناقص، ولتحديد قطاع قطع مكافئ من قبل إبراهيم بن سنان. انظر
R. Rashed, 'Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit ibn Qurra', *Dictionary of Scientific Biography* (1973), vol. 7, pp. 2-3; *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle. Vol. 1 : Fondateurs et commentateurs : Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd* (London, 1996), chap. 3; and B. Rosenfeld, *A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, vol. 12 (New York, 1988), pp. 130 ff.

[2] إحداث القطع الزائد من الدائرة على سبيل المثال. انظر:
R. Rashed and H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e^ siècle* (Leiden, 2000), pp. 245-289.

[3] O. Neugebauer, 'The Early History of the Astrolabe', Studies in Ancient Astronomy, IX, *Isis*, 40, 3 (1949), pp. 240-256, pp. 240 sqq. [repr. In *Astronomy and History. Selected Essays* (New York/ Berlin / Heidelberg / Tokyo, 1983), pp. 278-294].

[4] خصص ابن النديم، في القرن العاشر، جزءاً من فصل في فهرسه لإنشاء الآلات وصناعها وخاصة الأصطرلابيين (*كتاب الفهرست* تحقيق ر. تجدد طهران 1971 ص. 342–343). كما استعملت صفة الأصطرلابي للدلالة على بعض هؤلاء.

لقد ألهم هذا الطلب المتزايد بحوثاً متعددة في الإسقاطات هدفها إنشاء الأصطرلابات. وأسهم رياضيون من أمثال الكندي وبني موسى والخازن وإبراهيم بن سنان والسجزي وغيرهم بنشاط في دراسة الرسم الهندسي للأشكال على الأصطرلاب وفي طريقة الإسقاطات. ويصح الأمر نفسه على الرياضيين الفلكيين كما تشهد على ذلك أعمال ما شاء الله والمروروذي، والفرغاني وحبش والصوفي، حتى لا نذكر إلا البعض. ودار الحوار بين الرياضيين والفلكيين حول ميزات مختلف الأصطرلابات وبالتالي حول مختلف الإسقاطات. وهكذا نعلم من الفرغاني، ومن مفهرسين قدماء، أن الكندي – أو المروروذي – اخترع في عهد الخليفة المأمون إسقاطا سماه المبطخ وهو إسقاط سمتي متساوي الأبعاد بالنسبة لأحد قطبي فلك البروج: قريب جداً من الإسقاط الذي اخترعه لامبير Lambert وكانيولي Cagnoli من بعده. نعلم كذلك من نفس المصادر أن هذا الإسقاط لاقى انتقاداً من قبل الرياضيين بني موسى الذين لم يروا فيه وسيلة لإنشاء الأصطرلاب. وقدم الفرغاني نفسه في ذلك الزمان أول عرض نظري في تاريخ الإسقاط التسطيحي[5]. تكفي هذه المناقشات، التي اتخذت أحياناً طابع المساجلات، التي نقلها لنا شاهد معاصر لها، الفرغاني ومن بعده البيروني[6]، لإظهار جدة هذا البحث: لم يحدث قط سابقاً مثل هذا الاهتمام في الإسقاطات ولم يكرس لدراستها هذا العدد من الكتابات. فلا غرابة والحال هذه أن يؤدي هذا البحث، من حيث قيمته وتنوعه والمناقشات التي أثارتها مختلف الإسقاطات، إلى بروز مشروع جديد: إعداد أول نظرية لطرق الإسقاط أو على نحو أخر، أول نظرية في الهندسة الإسقاطية الموضعية للكرة. لقد بلغت هذه المناقشات الأوج كما سنرى، بعد مرحلة المخاض في أوائل القرن العاشر، في أعمال القوهي وابن سهل في النصف الثاني من هذا القرن.

فالقوهي هو مؤلف رسالة في مقالتين في *صنعة الأصطرلاب بالبرهان*. وتبدأ الرسالة بفصل عن نظرية الإسقاطات. لقد بدت ملاحظات القوهي "صعبة الفهم" لأحد معاصريه الذي وجد في هذا الفصل التمهيدي مفاهيم لم يوضحها، فتوجه، لسبب نجهله، إلى ابن سهل لسد هذه الثغرات وللبرهان بالتركيب على القضايا التي أثبتها القوهي بالتحليل. لقد أملى ابن سهل شرحه في هذا الإطار. وكما سنرى فإن هذين النصين شديدا الارتباط ببعضهما بحيث لا يمكن فصلهما، الأمر الذي يلزمنا بعرضهما معا. وليس هذا وحده الذي يملي علينا طريقة العرض هذه، ذلك أنها تتيح

---

[5] R. Rashed and P. Abgrall, 'Le tradizioni sulle coniche e l'inizio delle ricerche sulle proiezioni', in *Storia della scienza*, vol. 3 : *La civiltà islamica, Enciclopedia Italiana* (Rome, 2002), pp. 385-402.

[6] يعود البيروني أكثر من مرة إلى هذا الجدال. ففي رسالته القصيرة *تسطيح الصور وتبطيخ الكور* يشير إلى الإسقاط السمتي متساوي الأبعاد الذي اخترعه الكندي أو المروروذي – على قول الفرغاني – والذي حسنه الكندي. يذكر البيروني بالنقاش الذي أثاره هذا الإسقاط من قبل محمد بن موسى بن شاكر ومن قبل الفرغاني من بعده ويكتب "وقد يمكن نقل ما في الكرة إلى السطح بطريق آخر قد نسبه أبو العباس في نسخ عدة من كتابه الموسوم *بالكامل* إلى يعقوب بن اسحق الكندي، وفي عدة منها إلى خالد بن عبد الملك المروروذي، وهو الذي يسمى أصطرلاباً مبطخاً، ووجد لحبش كتاب مقصور على صنعته وأصحاب هذه الصناعة فيه فريقان: إما مستهجن وإما مستمحن إياه" MS Leiden, Or. 1068, fols. 300-314 تحقيق أ. سعيدان، في دراسات مجلد 4 العددان 1، 2 (1977) ص. 7–22. [لنلاحظ حبش وليس حسن كما قرأ سوتر Suter وغيره. ووجد وليس وجدنا له كما اقترح أ. سعيدان]. كما يذكر بهذا الجدل في كتابه الكبير *استيعاب الوجوه الممكنة في صنعة الأصطرلاب* (MS Leiden, Or. 591, fols. 125-126).

لنا فرصة فريدة في دراسة رياضيات القرن العاشر: إننا أمام رياضيين معاصرين من الطراز الأول أسهما الواحد منهما تلو الأخر في إنشاء أحد فصول تاريخ الهندسة. ولشرح ابن سهل وقع وصدى كبيران، إذ يعطينا فيه المؤلف المبدع تصور رياضي بارز لهذا الفصل وهو في طور البناء. وسنحاول، قدر المستطاع، احترام الصلات القائمة بين هذين العملين وارتباطهما التاريخي الوثيق[7].

1.1. لم يهتم القوهي في رسالته، كما سيتضح الآن، بالمسائل التطبيقية التي قد تشغل صناع الأصطرلابات الحرفيين: فهو لا ينظر إلا في النظرية الهندسية التي ترتكز عليها صناعتهم. فعنوان الرسالة وترتيب الفصول ومحتوياتها فيها لا تدع مجالاً للشك في مقاصده ذات الطابع النظري أساساً. أضف إلى ذلك، أن الفصل الأول من الكتاب الأول والمعد كتمهيد للرسالة يتجاوز هذه المهمة بكثير بتقديمه عرضاً لطريقة الإسقاطات. كما يكرس ابن سهل في شرحه أكثر من نصف هذا الشرح بقليل لمعالجة هذا الفصل الأول على وجه التحديد، مما يدل على الأهمية التي يوليها لإسقاطات الكرة وبشكل مستقل تماماً عن مسائل الأصطرلاب إن صح التعبير. ولذا سنتوقف عند فصل القوهي هذا وعند شرح ابن سهل له.

يبدأ القوهي بالتذكير أن الأصطرلاب آلة تستعمل لدراسة الفلك، الكرة السماوية – المتحركة بحركة دورانية حول محورها – بالإسقاط على سطح متحرك منطبق على سطح ثابت. يأخذ القوهي على عاتقه، للقيام بهذه الدراسة، الشروع بدراسة أشمل (وهذا ما سيفعله ابن سهل على نحو أوسع) لإسقاط كرة ذات محور معلوم على سطح قد يكون دورانياً أو غير دوراني. وتقودهما هذه الدراسة بدورها للتمييز بين حالتين من السطوح الدورانية حسبما تكون محاورها موازية أو غير موازية لمحور الكرة. وهذا ما دفع القوهي، وابن سهل من بعده، إلى تعريف الإسقاطات الأسطوانية – سواء أكانت اتجاهاتها موازية لمحور الكرة أم لا – والإسقاطات المخروطية من رأس واقع على المحور أو غير واقع عليه.

إنها، على حد علمنا، المرة الأولى التي يظهر فيها مفهوم وتعبير الإسقاطات المخروطية – لا من نقطة واقعة على المحور وحسب وإنما من أي نقطة خارج المحور. ويصح هذا أيضاً على الإسقاطات الأسطوانية القائمة أو المائلة[8]. وبعبارة أخرى فقد بُدئ بدراسة الإسقاطات الأسطوانية قبل البيروني[9]، ومن الممكن أيضاً أن تكون الإسقاطات

---

[7] R. Rashed, 'Ibn Sahl et al-Qūhī : dioptrique et géométrie', Colloque international d'histoire des sciences et de la philosophie arabe, Institut du Monde Arabe, Paris, 22-25 novembre 1989 ; published under the title 'Ibn Sahl et al-Qūhī : dioptrique et méthodes projectives au X^e siècle', in S. Garma, D. Flament and V. Navarro (eds.), *Contra los titanes de la rutina* (Madrid, 1994), pp. 9-18 ; 'A Pioneer in Anaclastics : Ibn Sahl on Burning Mirrors and Lenses', *Isis*, 81 (1990), pp. 464-491.

[8] نجد مفهوم الإسقاط الأسطواني في رسالة ثابت في الأسطوانة، انظر الملاحظة الإضافية 2 ص. 946.

[9] أجمع المؤرخون حتى يومنا هذا على أن البيروني هو مبدع الإسقاط الاسطواني، انظر مثلاً: دانسرشت، *رسالة في تسطيح الكرة مع تلخيصها بالفارسية*، (طهران 1973) ص. 18؛
Rosenfeld, A History of Non-Euclidean Geometry : Evolution of the Concept of a Geometric Space, p. 127.

المخروطية من نقطة خارج القطبين بل وخارج المحور قد أخذت بعين الاعتبار منذ زمن الصاغاني. لنلاحظ أن القوهي لم يدّع بأي أسبقية كما لم ينسبها ابن سهل له.

ولا تقل أهمية كيفية عرض هذين المؤلفين عن أهمية المفاهيم الجديدة نفسها: يشكل العرضان عناصر مناقشة عامة لطريقة الإسقاطات، مناقشة مستوحاة بلا ريب من المسائل التي أثارتها صناعة الأصطرلاب ولكنها أنجزت بمعزل عنها. وهكذا نرى القوهي، يهمل عن قصد الحالات التي عرفها بحيطة كبيرة: الإسقاط الأسطواني في اتجاه غير مواز لمحور الكرة، والإسقاط المخروطي من رأس لا يقع على الكرة. أو بعبارة أخرى فقد أدخل القوهي وابن سهل مختلف أنواع الإسقاطات في حين لا يستلزم الأصطرلاب إلا واحدة منها – الإسقاط التسطيحي. ونحن سننظر هنا

ينبع هذا الرأي، حقيقة، من تأكيد كرره البيروني نفسه. ففي تسلسل الأحداث كتب: "وقد نقل أبو حامد الصاغاني مركز المخروطات [أي مركز الإسقاط المخروطي] من القطبين وجعله داخل الكرة أو خارجها على استقامة المحور فتشكلت خطوط مستقيمة ودوائر وقطوع نواقص ومكافئيات وزوائد كما أرادها، ولم يسبقه إلى هذا التسطيح العجيب، ومنه نوع سميته الاسطواني ولم يتصل بي أن أحداً من أصحاب هذه الصناعة ذكره قبلي، وهو أن يجوز على ما في الكرة من الدوائر والنقط خطوط وسطوح موازية للمحور فيتشكل في سطح النهار [في المستوى الاستوائي] خطوط مستقيمة ودوائر وقطوع ناقصة فقط". انظر: أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني، *الآثار الباقية عن القرون الخالية*، في: Chronologie Orientalischer Völker, ed. C. E. Sachau (Leipzig, 1923), p. 357.
لا يترك هذا النص أي إشكال، إذ يؤكد البيروني أسبقية الصاغاني بتعميم الإسقاط المخروطي، ويدعي لنفسه باختراع الإسقاط الاسطواني.

ويردد البيروني ذلك في رسالته *تسطيح الصور وتبطيخ الكور* فيكتب: "وأما التسطيح الاسطواني فهو الذي خطر ببالي من كثرة ما أفاض فيه الفرغاني من الهذيان في آخر كتابه من الرد على الأصطرلاب المبطخ. وأظن السبق لي إليه، وقد سميته التسطيح [الاسطواني]، لعله ليس هذا موضعها، وهو من نوع متوسط لا شمالي ولا جنوبي وبه يمكن أن تسطح كواكب الفلك بأسرها من سطح فلك معدل النهار أو في سطح أي دائرة عظيمة فرضت". انظر: (MS Leiden, Or. 1068, fol. 306، تحقيق ا. سعيدان ص. 14). وفيه ما يدعيه البيروني من أسبقيته في اكتشاف الإسقاط الاسطواني.

وأخيراً يقدم البيروني في كتابه *استيعاب الوجوه الممكنة في صنعة الأصطرلاب* الإسقاط نفسه، ويلقبه حينها بالإسقاط "الكامل" لأنه "يمكن تسطح كواكب الفلك بأسرها"، انظر: (fol. 131)، ثم يضيف: "مبنى هذا التسطيح على الفصول المشتركة لسطح معدل النهار ولمحيطات الأساطين <التي مقطعها دائري> والمجسمات الناقصة المتوازية الأضلاع <المولدة>، المتوازيتها لمحور الكرة. فإنه مهما أجيز على محيطات المدارات <الموازية للاستوائي> سطوح أساطين بالشريطة المتقدمة قاطعة سطح معدل النهار على دوائر متوازية مساوية لمقادير المدارات أو متى أجيز على محيطات الدوائر المائلة في الكرة سواء كانت عظاماً أو كانت صغاراً مجسمات نواقص بالوضع المذكور تسلطت على سطح معدل النهار عند التقاطع قطوعاً ناقصة مختلفة الأوضاع والمقادير" الورقة 132.
إلا أن البيروني يعترف أن فكرة الإسقاط الأسطواني قد أتته من قراءاته النقدية لكتاب *الكامل* للفرغاني، ويؤكد أن الفرغاني كان يعتقد باستحالة هذا النوع من الإسقاط.

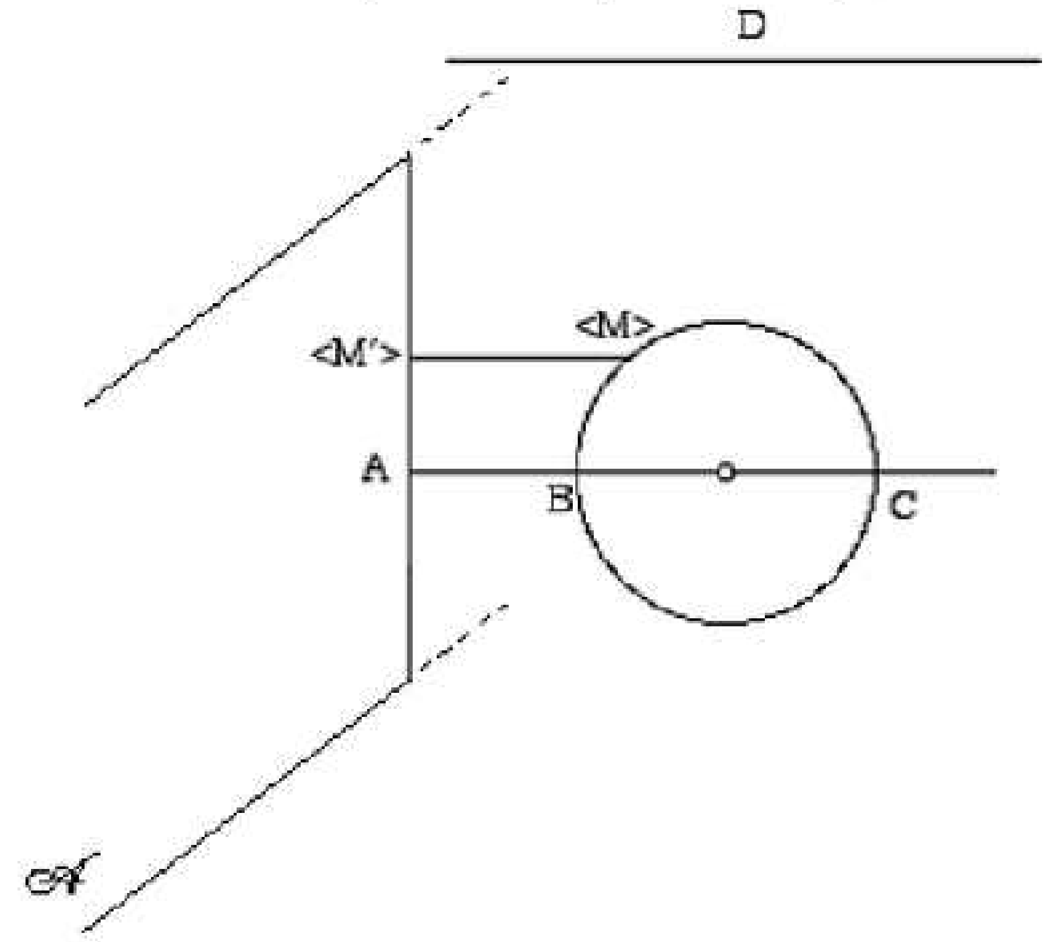
وفي نطاق بحثنا هنا نكتفي بأن نسلم بأن حدس الفرغاني أتاح إدراك الإسقاط الأسطواني مرتين: مرة عند القوهي، ومرة عند البيروني. ونفترض حتى الساعة أن البيروني كان يجهل دراسات القوهي ودراسات ابن سهل. ويبرر افتراضنا هذا، على الرغم من غرابته، معرفتنا بعمل البيروني، فما من أحد تعرف إليه قادر على الظن بخبث مؤلفه أو قلة أمانته.
يبقى أن القوهي وابن سهل قد درسا الإسقاطات الأسطوانية، قبل البيروني بمدة طويلة، وبطريقة أكثر شمولية منه.

للكشف عن سمة هذا البحث الهندسي في مختلف مراحله كما نجدها عند القوهي، ومن بعده وبصورة أكمل، عند ابن سهل.

لم يكتف ابن سهل بدراسة هذه الإسقاطات بل اهتم أيضاً بالكيفية التي تتيح فيها مختلف الحالات للسطح المتحرك للأصطرلاب بالدوران مع بقائه منطبقاً على السطح الثابت، بادئاً بالنظر في حالة السطح المستوي للأصطرلاب؛ وكل خط عمودي على هذا المستوى هو محور له.

ثم يتطرق لوضعين حسبما يكون محور الكرة BC ومحور السطح $\mathscr{A}$ منطبقين أم لا. لننظر في الحالة الأولى حيث ينطبق المحوران. يدخل ابن سهل هنا، على غرار القوهي وإنما على نحو ناجز، المفاهيم التالية:

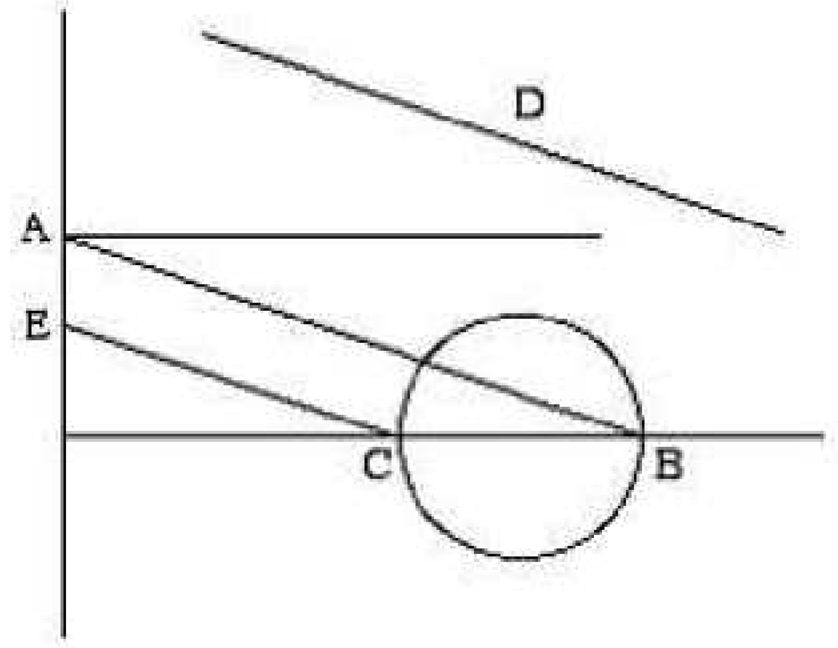
1. الإسقاط الأسطواني ذو الاتجاه D الموازي لـ BC (الشكل. 1a)



الشكل. 1a

إذا كان المحور BC هو محور دوران السطح المتحرك أيضاً واخترق السطح في النقطة A، فإن هذه النقطة هي مسقط النقطتين B وC. ويؤدي دوران أي نقطة M من الكرة حول BC إلى دوران مسقطها 'M حول A وبالتالي حول المحور BC. ويبقى السطح المتحرك – مجموعة النقاط 'M – منطبقاً على وضعه البدائي وبالتالي منطبقاً على السطح الثابت. لنلاحظ أنه إذا كان السطح $\mathscr{A}$ مستوياً فإن الإسقاط عمودي أو عمودي الرسم orthographic.

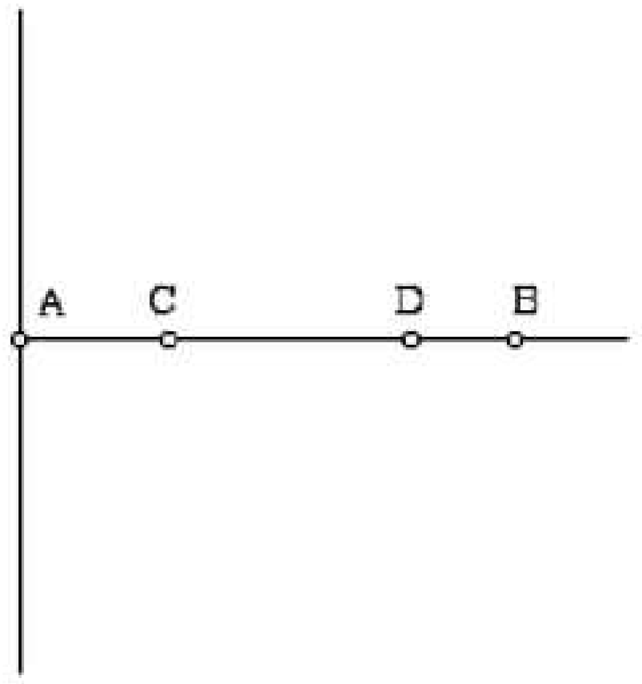
2. الإسقاط الأسطواني ذو الاتجاه D غير الموازي لـــ BC (الشكل. 1b)



الشكل. 1b

لتكن A مسقط القطب B و E مسقط القطب C؛ B و C ثابتان. لذا فإن A و E ثابتان أيضاً. وإذا كانت 'M مسقط النقطة M من الكرة فإن دوران M حول BC يؤدي إلى مسار إهليليجي لـــ 'M، وبالتالي غير دائري. ولذا لا يمكن للسطح $\mathscr{A}$ أن يدور حول BC لوجود نقطتين ثابتتين فيه هما A و E.

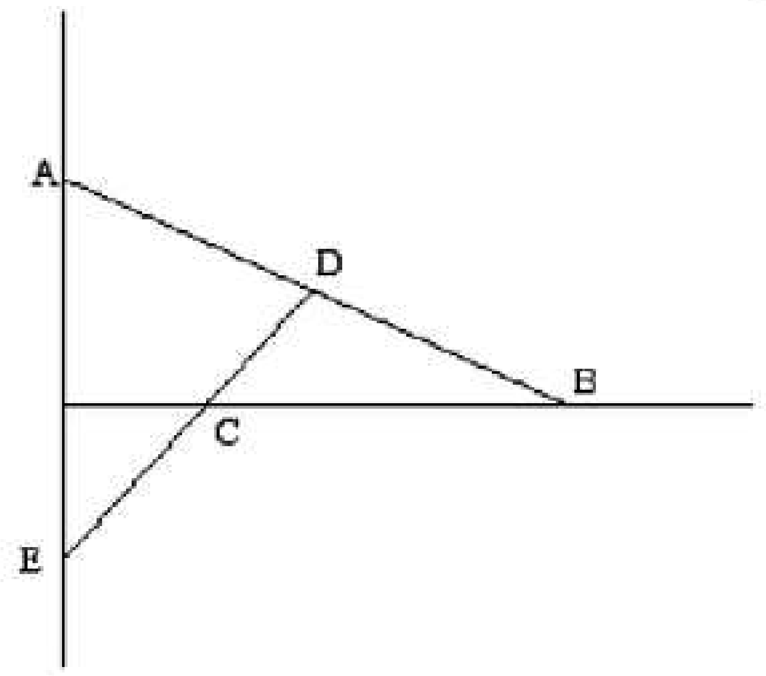
3. الإسقاط المخروطي من نقطة D واقعة على المحور BC (الشكل. 2a)



الشكل. 2a

إذا كانت B ≠ D و C ≠ D فإن A إسقاط للنقطتين B و C. وإذا كانت D = B فإن A هي إسقاط C؛ وإذا كانت D = C فإن A هي إسقاط B. ولما كانت النقطتان B و C ثابتتين فإن A ثابتة أيضاً وهي النقطة الوحيدة الثابتة من السطح $\mathscr{A}$. ويمكن بالتالي لهذا السطح أن يدور على السطح الآخر.

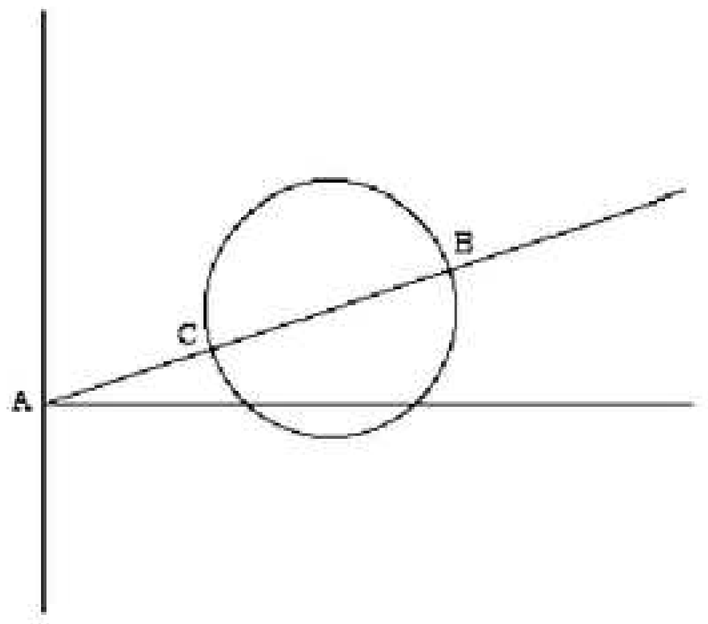
4. الإسقاط المخروطي من نقطة D لا تقع على المحور BC (الشكل. 2b)



الشكل. 2b

للقطبين B و C في هذه الحالة إسقاطان مختلفان، لنسمهما A و E. ولـــ $\mathscr{A}$ بالتالي نقطتان ثابتتان ويستحيل عليه الدوران والبقاء في نفس الوقت منطبقاً على السطح الآخر.

يعرض ابن سهل بعد ذلك حالة عدم تطابق المحور BC ومحور السطح $\mathscr{A}$. سيجر دوران الكرة حول BC سطح الأصطرلاب المتحرك $\mathscr{A}$، أيا كان نوع الإسقاط. فإذا دار $\mathscr{A}$ حول BC فلن يبقى منطبقاً على وضعه البدائي لأن BC ليس عمودياً عليه. لا يبقى السطح $\mathscr{A}$ منطبقاً على السطح الثابت.



الشكل. 3

إذا لم يكن سطحا الأصطرلاب – المتحرك والثابت – مستويين ودارا حول المحور AΔ فيمكن للسطح المتحرك أن يبقى منطبقاً على السطح الثابت في حالة واحدة هي تطابق المحورين AΔ و BC كما هو عليه الحال في الإسقاط الأسطواني الموازي لـــ BC وفي حال الإسقاط المخروطي ذي الرأس الواقع على BC.

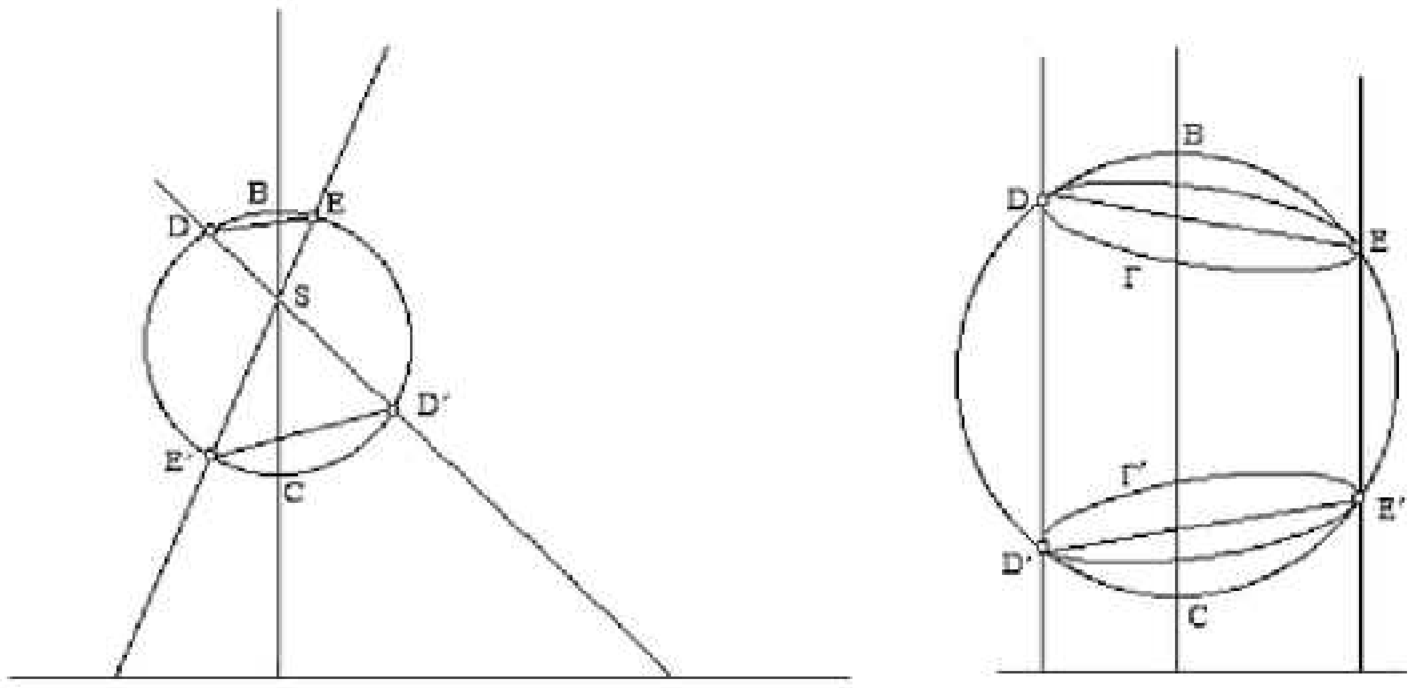
يحدد ابن سهل بعد ذلك بعض خصائص الإسقاطات المختلفة، بادئاً بعرض كيفية الحصول على إسقاط على سطح الأصطرلاب بتقاطع سطحين ومذكراً أنه إذا كان الإسقاط أسطوانياً ذو اتجاه D فإنه يقرن سطحاً أسطوانياً بكل دائرة لا يوازي مستواها الخط D أو لا يحتويه. وإذا كان الإسقاط مخروطياً من نقطة B، فإنه يقرن سطحاً مخروطياً بكل دائرة لا يحتوي مستواها على النقطة B. وإذا كان سطح الأصطرلاب ذاته أسطوانياً أو مخروطياً، فإن إسقاط كل دائرة من دوائر الكرة، ماعدا الدوائر المشار إليها أعلاه، يحصل بتقاطع سطحين أسطوانيين أو سطحين مخروطيين أو

سطح أسطواني وآخر مخروطي. (لنلاحظ أن هذه التقاطعات، وهي منحنيات من الدرجة الرابعة محللة أو غير محللة، ليست منحنيات مستوية بصورة عامة. ويهمل ابن سهل هنا، كما فعل القوهي، دراسة هذه التقاطعات). وإذا احتوى مستوى إحدى دوائر الكرة الخط D أو كان موازياً له – خلافاً للحالات السابقة – فإن الإسقاط الأسطواني يقرن بهذه الدائرة مستوياً موازياً لـــ D.

ثم يعود ابن سهل في شرحه لنص القوهي إلى فكرة الخط المُسقِط. ليوضح أن الخط المسقط لأي نقطة في حالة الإسقاط الأسطواني ذي الاتجاه D هو مستقيم مواز لـــ D، وأن السطح المسقط لأي خط مستقيم L هو سطح تولده الخطوط الموازية لـــ D، المرسومة من كل نقطة من نقاط L، إلا إذا كان L موازياً لـــ D، وهذا السطح مواز لـــ D. أما إذا كان L موازياً لـــ D فإنه مسقط لذاته.

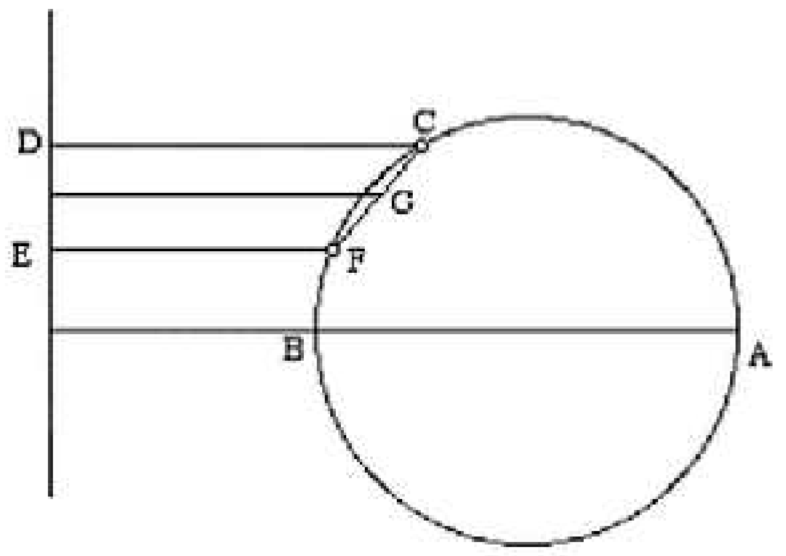
إن السطح المسقِط للدائرة، في الإسقاط المخروطي من نقطة B، هو بصورة عامة سطح مخروطي رأسه B، إلا إذا كانت B في مستوى الدائرة، وفي هذه الحالة فإن السطح المسقط هو المستوى نفسه.

وفي الإسقاط الأسطواني ذي الاتجاه BC، تقطع الأسطوانة المسقطة لدائرة Γ قطرها DE الكرة في دائرة أخرى 'Γ قطرها 'D'E؛ وهكذا فللدائرتين نفس الإسقاط. وإسقاط نقطة من القطاع الكروي ذي القاعدة Γ ينطبق على إسقاط نقطة من القطاع الكروي ذي القاعدة 'Γ. ويصح الأمر نفسه على الإسقاط المخروطي إذا وقع رأس المخروط S على المحور BC.



الشكل. 4

يلاحظ ابن سهل هنا أيضاً الحالات الاستثنائية التي لم يدل القوهي عليها والتي أشرنا إليها : الدوائر التي يحتوي مستواها المستقيم D أو يوازيه، وكذلك الدوائر التي يحتوي مستواها على رأس المخروط. ويتفحص، بعد إبعاد الحالات الاستثنائية هذه، إسقاط الدائرة مفترضاً سطح الأصطرلاب مستوياً متعامداً مع محور الكرة AB. ويبرهن قبل كل شيء من أجل الإسقاط الأسطواني أن مسقط كل دائرة من الكرة لا يتعامد مستواها مع AB هو قطع ناقص. وهكذا وعلى سبيل المثال فإن مسقط الدائرة ذات القطر CF (الشكل. 5) هو قطع ناقص محوره الصغير DE وطول محوره الكبير يساوي CF، أما مركزه فهو مسقط مركز الدائرة.



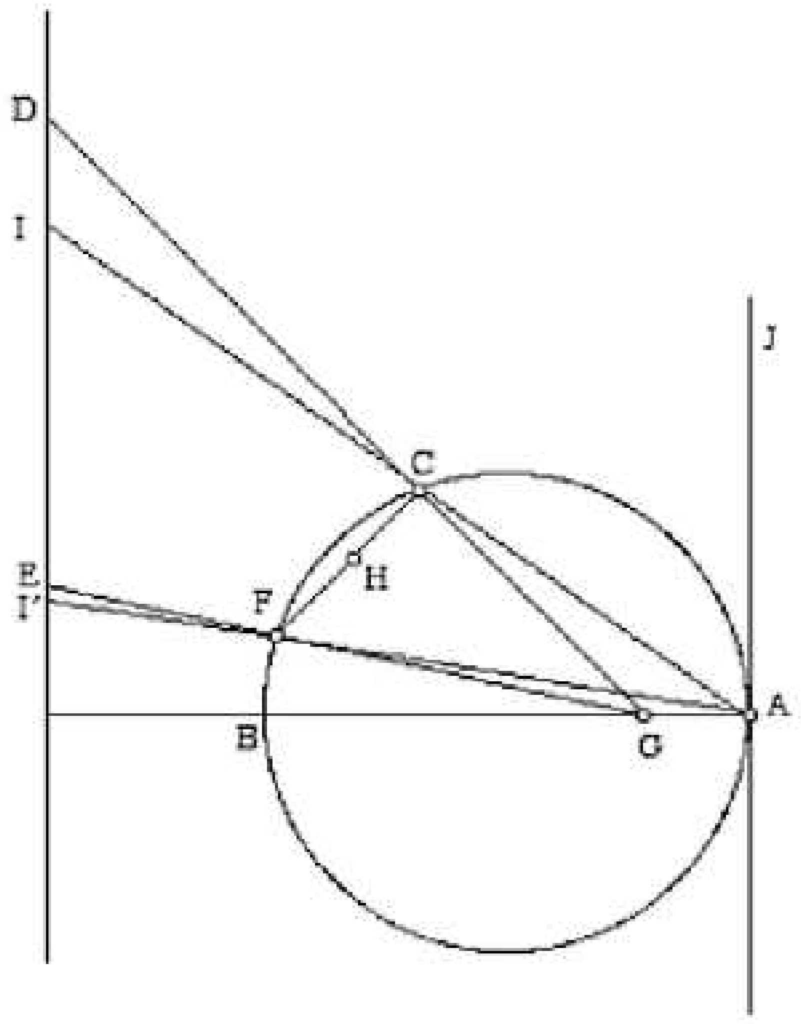
الشكل. 5

وفي حالة الإسقاط المخروطي، حيث رأس المخروط نقطة G من محور الكرة AB، يتفحص ابن سهل حالتين – $G \in [AB]$ و $G \in [AX)$ – ويدرس إسقاط دائرة قطرها CF ومركزها H على مستو عمودي على AB (الشكلان 6 و 7).

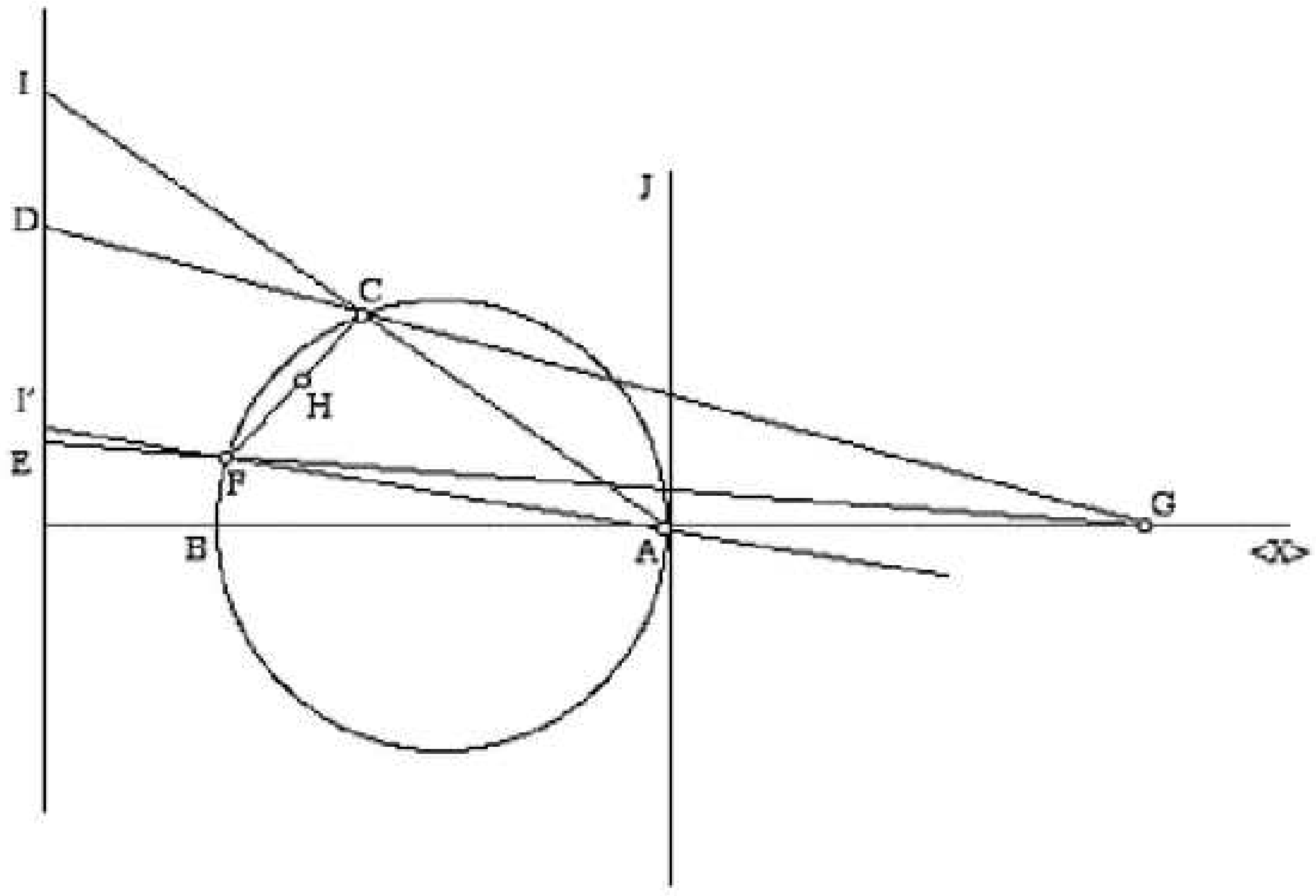
لدينا من أجل $G \in [AB]$ $G\hat{F}C > A\hat{F}C$ و $A\hat{I}E > G\hat{D}E$؛ ومن أجل $G \in [AX)$ $G\hat{F}C < A\hat{F}C$ و $A\hat{I}E < G\hat{D}E$.

وفي كلتا الحالتين، إذا كان AJ مماساً في A للدائرة، $DE \parallel AJ$، ولدينا

$$A\hat{F}C = I\hat{A}J = A\hat{I}E$$



الشكل. 6



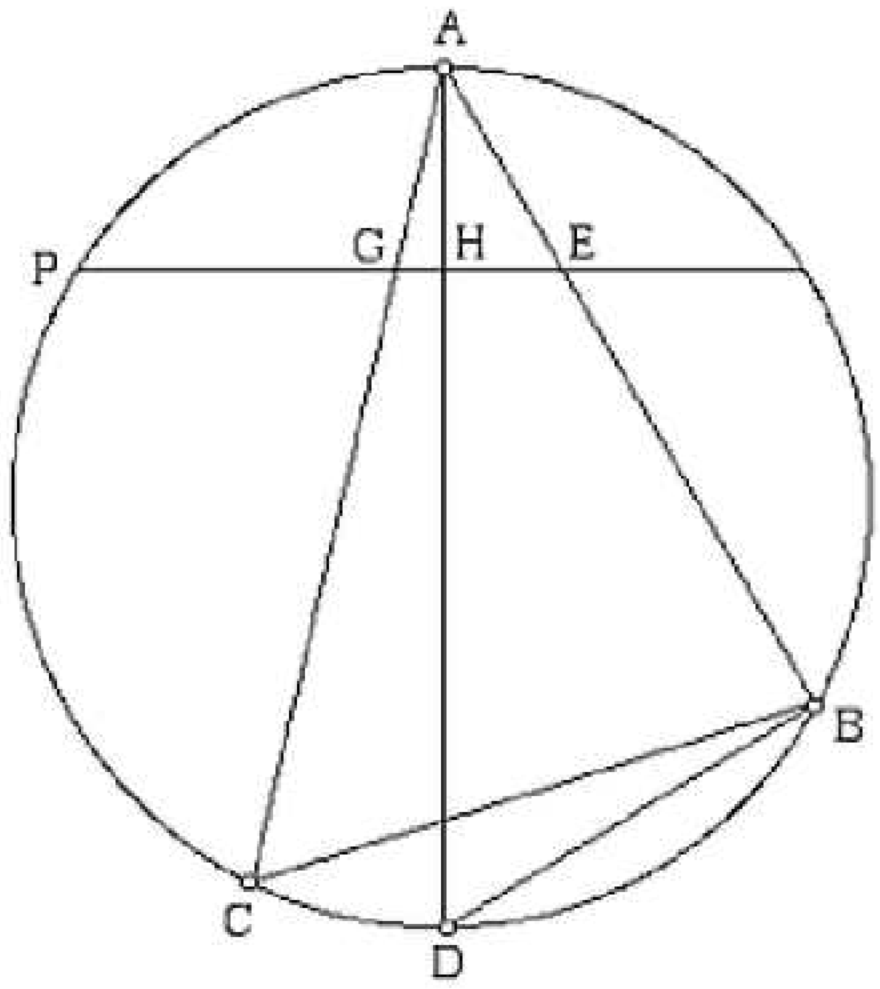
الشكل. 7

وبالتالي فإن $G\hat{D}E > G\hat{F}C$ في الحالة الأولى و $G\hat{D}E < G\hat{F}C$ في الحالة الثانية. ولذا، حسب أبلونيوس، فإن مسقط الدائرة CF قطع مخروطي غير دائري DE.

لم ينظر ابن سهل في الحالة التي يقع فيها رأس المخروط G في A أو B ولم يدرس بالتالي حالة الإسقاط التسطيحي الذي تفحصه القوهي بالتفصيل. فقد درس هذا الأخير الإسقاط التسطيحي، من قطب A، الذي يحول الكرة S ذات القطر AD إلى مستو عمودي على AD هو مستوى الإسقاط P. ويبين أن كل دائرة من S لا تمر من A تتحول إلى دائرة من P. يمكن إعادة صياغته للبرهان – الذي يعتمد على القضية 5 من الكتاب الأول من *المخروطات* – على النحو التالي:

لتكن H نقطة تلاقي P مع المحور AD. ولتكن دائرة قطرها BC على الكرة S في مستو عمودي على مستوى الشكل[10]. لتكن E و G نقطتي تقاطع AB و AC مع P على الترتيب. لدينا

$$A\hat{H}E = A\hat{B}D = \frac{\pi}{2}$$



الشكل. 8

وبالتالي $A\hat{D}B = A\hat{E}G$ (متمتي $\frac{\pi}{2}$) ؛ لكن $A\hat{D}B = A\hat{C}B$ (زوايا محوطة في الدائرة). إذاً $A\hat{E}G = A\hat{C}B$.

وحسب أبلونيوس I.5 يقطع المستوى P المخروط CAB على دائرة قطرها GE.

يبين القوهي أيضاً أن كل دائرة من S تمر في A تتحول إلى مستقيم من المستوي P هو تقاطع المستوي P ومستوي الدائرة L.

ويكون بهذا قد برهن خاصة أساسية للإسقاط التسطيحي: تتحول الدوائر التي لا تمر في القطب إلى دوائر، والدوائر التي تمر في القطب إلى خطوط مستقيمة.

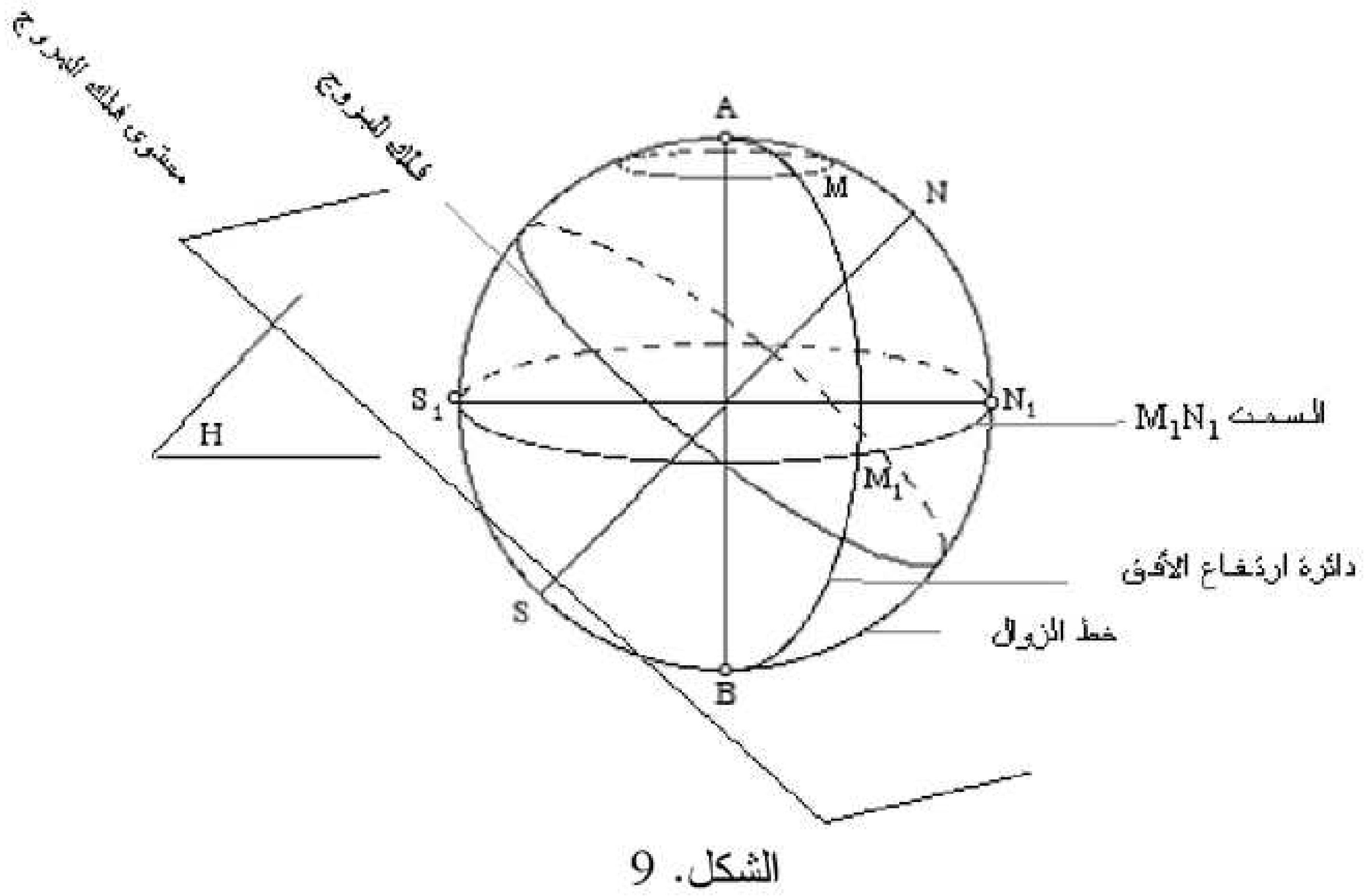
لم يعلق ابن سهل على هذه الفقرة من القوهي في الإسقاط التسطيحي معتبراً هذه النتيجة معروفة، مع أن هذا الإسقاط هو الأكثر استعمالاً في دراسة الأصطرلاب. إن عدم اهتمام ابن سهل النسبي يؤكد ما كنا نعرفه: ينصب اهتمامه على المسألة الأعم في الإسقاطات.

2.1. إن الفصل الأول من كتاب القوهي – المعاد كتابته بشكل أو بآخر من قبل ابن سهل – مكرس بكامله للمفاهيم الإسقاطية؛ ولا يتطلب أي معرفة بالأصطرلاب أو بعلم الفلك. ولا يختلف الوضع إلا قليلاً، باستثناء

[10] اختير المستوى ABCD في الشكل محتوياً قطب الدائرة BC وقطب الإسقاط A.

المصطلحات، في الفصول اللاحقة. وقد كان هدف القوهي، كما أشرنا، حل المسائل الهندسية التي يمكن أن تطرح أثناء صنع الأصطرلاب. ويعطي تسلسل الفصول فكرة عن اهتماماته. فقد خصص الفصل الثاني من المقالة الأولى للتعريف بالمصطلحات اللازمة لصياغة هذه المسائل ولتحديد مواضع النقاط على الكرة السماوية. ويعالج الفصلان الثالث والرابع من هذه المقالة إسقاط دائرة من الكرة السماوية. أما المقالة الثانية فمخصصة للمسائل الهندسية التي ذكرناها.

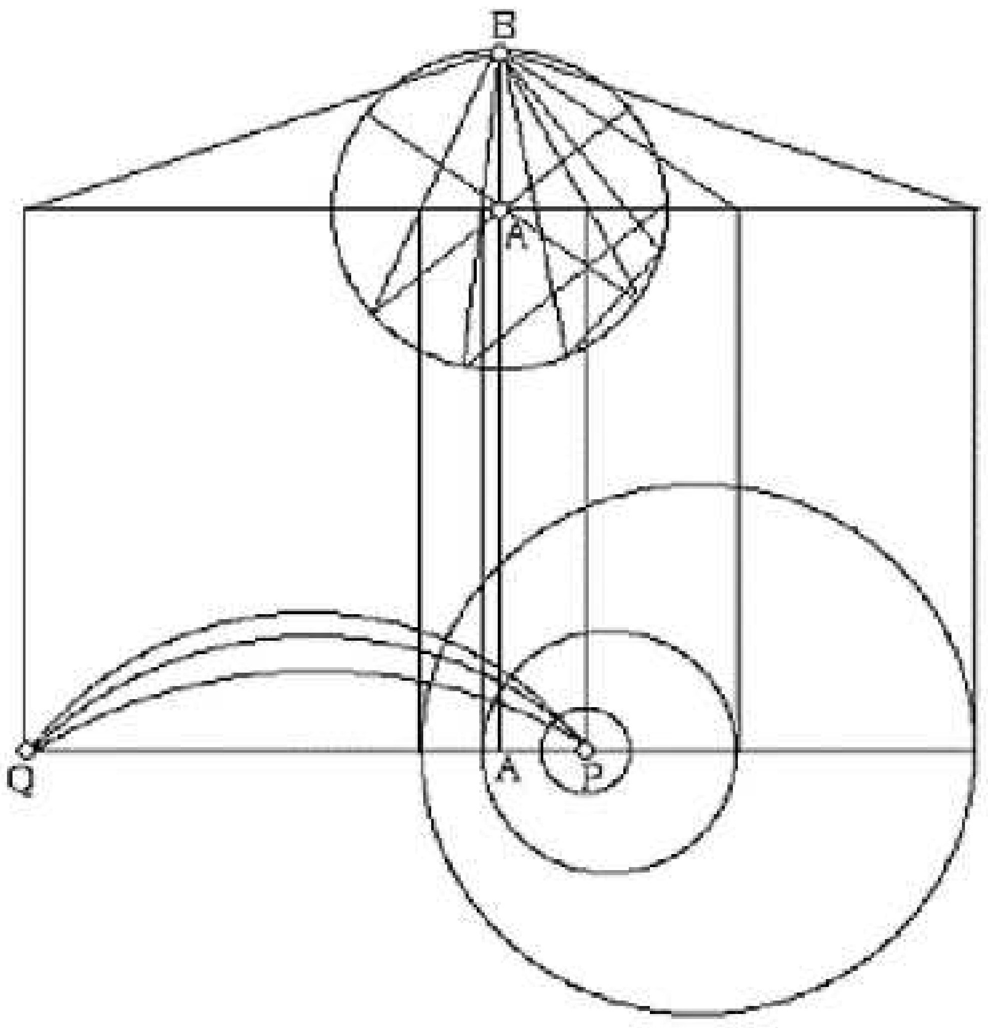
إن المصادرة المقبولة عند المهندسين هي مصادرة الفلكيين: للكرة السماوية مركز هو مركز الأرض، وتدور حول خط القطبين الشمالي والجنوبي وليكن المستقيم NS. نسمي أفقاً أي مستو H مار من المركز وهو أفق كل النقاط الواقعة على العمود المقام من مركز الكرة عليه. تسمى النقطتان A و B التي يقطع فيهما هذا العمود الكرة قطبي الأفق H. وتسمى الدائرة الكبرى التي تمر على القطبين الشمالي والجنوبي خط الزوال لـــ H <دائرة نصف نهار الأفق>. والأفق معلوم إذا علم القوس AN ويسمى مسافة القطبين. تسمى كل دائرة تمر في القطبين A و B دائرة ارتفاع الأفق H. وتعرف هذه الدوائر، الدائرة AMB على سبيل المثال، ببعدها عن خط الزوال، أي بالقوس M_1N_1 الذي يعرف الآن باسم السمت. تميز الدوائر الموازية لـــ H بارتفاعها المقاس على دائرة ارتفاع الأفق. فارتفاع الدائرة الموازية M هو القوس MM_1. يحدد القوسان M_1N_1 وM_1M وضع النقطة M بالنسبة للأفق H؛ وهذه هي الإحداثيات الأفقية. وهكذا يطلق القوهي اسم دائرة السمت أو السمت على دائرة الارتفاع أحياناً وعلى مسقطها على مستوى الأصطرلاب أحياناً أخرى.



الشكل. 9

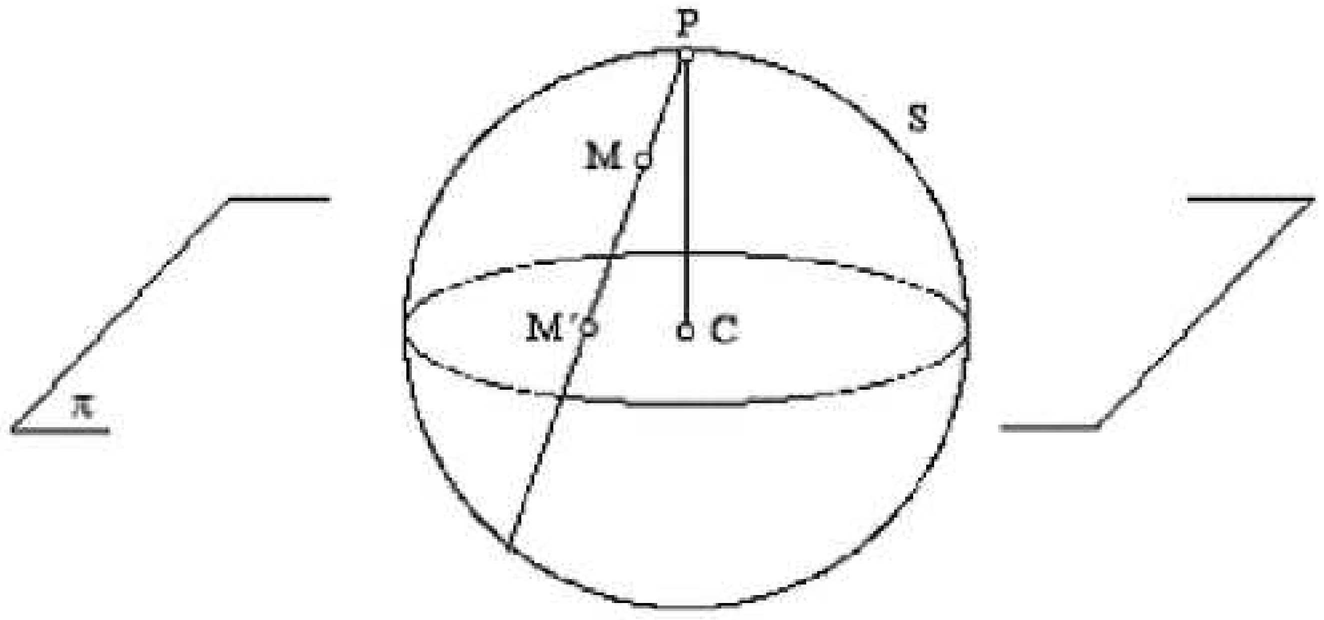
يقطع مستوى فلك البروج الكرة على دائرة كبيرة، فهي أفق خاص. ويسمى إسقاطها على الأصطرلاب بدائرة البروج. يتعين وضع نقطة ما بالنسبة لمستوى البروج، بقوسين هما الإحداثيان البرجيان على غرار الإحداثيات الأفقية لأفق ما H. ويمكن اعتبار فلك البروج مقسماً بنقاط تقابل مختلف السموت فعلى سبيل المثال تتوافق صور البروج الأثني عشر مع تقسيم السموت إلى مجالات تساوي °30.

يُنشأ الأصطرلاب في مكان معين بحسب خط عرض هذا المكان. ونمثل على مستوى الأصطرلاب أفق هذا المكان والدوائر الموازية لهذا الأفق والتي تشكل باقة نقطتاها الحدوديتان هما مسقطا قطبي الأفق؛ كما نمثل دوائر الارتفاع التي تمر كلها من مسقطي القطبين. ودوائر باقتين مختلفتين متعامدة كل واحدة من الأولى مع كل واحدة من الأخرى. لا يمكن التمثيل الكلي للدوائر الأفقية إلا للقريبة منها من أحد قطبي الأفق. أما بقية الدوائر فلا تتمثل في الإسقاط إلا بقوس منها. ويصح الأمر نفسه على دوائر الارتفاع لأن الكرة السماوية لا تُسقط كاملة على الأصطرلاب.



الشكل. 10

لا يتعرض القوهي بعد هذه التمهيدات إلا للمسائل الهندسية ابتداء من الفصل الثالث من المقالة الأولى. لكننا نود قبل البدء بتفحصها الإشارة إلى خطة عمله. تمثل الكرة السماوية بكرة S مركزها C وقطبها P ومستوى الأصطرلاب هو المستوى الاستوائي π المقابل لهذا القطب.



الشكل. 11

تتعلق كل المسائل التي طرحها القوهي بـــ S و π حيث π هو مستوى الإسقاط التسطيحي للكرة S من القطب P؛ أو بتعبير آخر، غريب على القوهي، فإن π هو صورة S في القلب ذي المركز P والقوة $2R^2$ حيث R شعاع الكرة.

وهكذا فـــ S و π معلومان في الفصلين الثالث والرابع من المقالة الأولى ويشرح القوهي كيفية إسقاط دائرة من S على π، دائرة موازية في البدء ومن ثم دائرة ارتفاع أفق معين.

أما في المقالة الثانية فالمستوى π معلوم[11]، والمطلوب هو تحديد الكرة S بمعرفة مركزها وشعاعها.

نعرف في الفصل الأول من المقالة الثانية النقطة A من المستوى π والمسافة الزاوية من نظيرتها إلى قطب الكرة؛ ولدينا أيضاً معطية ثالثة قد تكون نقطة – قطب أو مركز الكرة – أو طولاً – شعاع الكرة أو المقطع الذي يصل بين نظير النقطة التي نعرف بعدها الزاوي عن القطب وبين مركز أو قطب الكرة. والمعطية الثالثة في المسألة السادسة من الفصل الأول هي نقطة B على المستوى π والبعد بين نظيرها وبين قطب الكرة. والخلاصة أن كل مسائل الفصل الأول هذا ترجع إلى إيجاد نقطة.

نعرف في الفصل الثاني من المقالة الثانية دائرة في المستوى π، البعد الزاوي بين قطب نظيرها وقطب الكرة، ومعلومة ثالثة قد تكون قطب الكرة ومركزها أو شعاعها أو طولاً هو المسافة بين نقطتين من π أو بين نقطة من الكرة ونقطة E من π. والمعلومة الثالثة في المسألة السادسة من هذا الفصل هي نقطة E من π والمسافة بين نظيرها وقطب الكرة. ويستعمل القوهي أحياناً إنشاءً مساعداً ليعيد إحدى مسائل هذا الفصل إلى مسألة سبقت دراستها.

إن الفصول الثالث والرابع والخامس مفقودة في النسخة التي بين أيدينا. ويتألف الفصل السادس من مسألة وحيدة لا نعرف فيها لا المستوى π ولا S. والمعطيات هي القطب B لـــ S والنقطة A في π ونظيرها بالنسبة إلى أفق معين. أي أننا نعلم البعد الزاوي بين قطب هذا الأفق وقطب الكرة، كما نعلم مسافتين أخريين هما الإحداثيان الأفقيان – السمت والارتفاع – لنظير A بالنسبة إلى الأفق المعين.

وهكذا يتضح تماماً أن هذه الفصول كلها تعالج مسائل هندسية تتعلق بالإسقاطات. يخصص القوهي الفصل السابع لمقدمات أخذها من كتابين آخرين له وأعاد هنا برهانها بالتحليل.

3.1. سننتقل الآن إلى تحليل أكثر تفصيلاً لحلول القوهي وابن سهل كي نتبين على نحو أفضل فحوى مفاهيمها الإسقاطية وحدود هذه المفاهيم. وسنتناول المسألتين الأساسيتين المعروضتين في الفصلين الثالث والرابع ومن ثم ننتقل

---

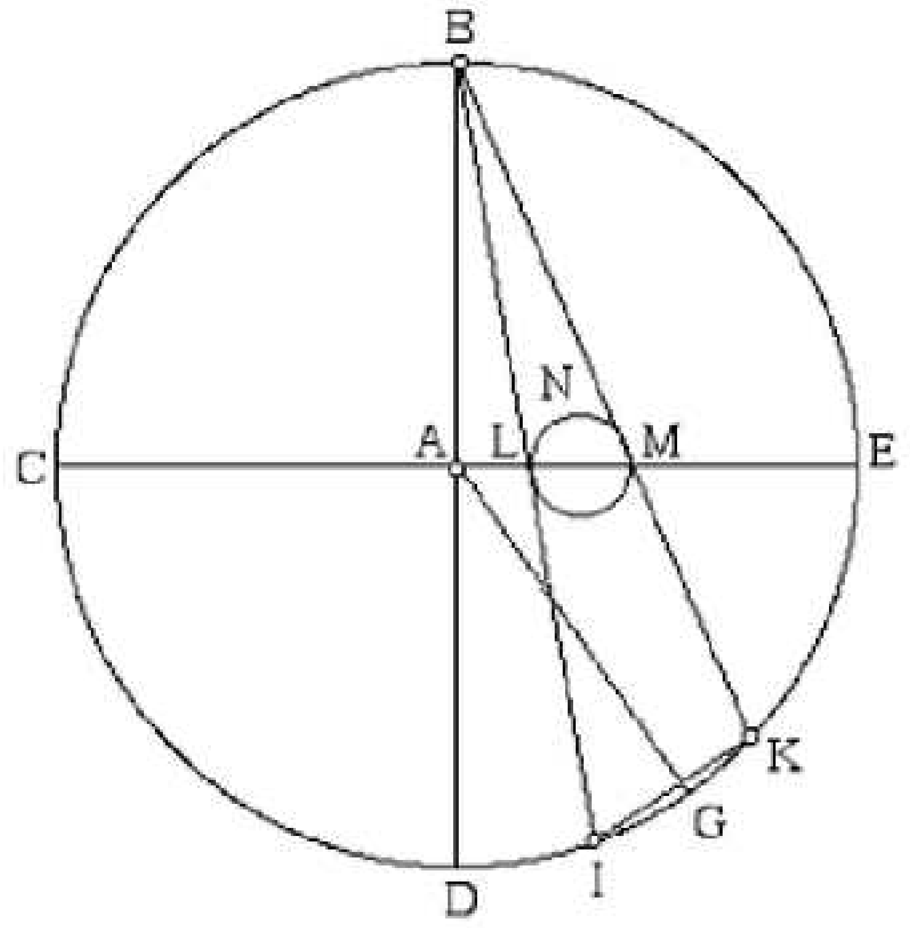
[11] المستوى π وهو مستوى الأصطرلاب، عمودي على مستوى الزوال. تقاطعه مع هذا المستوى في الفصل الأول إما معلوم أو من الممكن الحصول عليه مباشرة من المعطيات. ويتميز π في الفصل الثاني بتحويفه على مستوى الزوال (rabattement) [دائرة معطاة من π محوفة على مستوى الزوال].

إن مستوى الأصطرلاب عند القوهي هو مستوى مجرد ينطبق على المستوى الاستوائي كما ينطبق على مستوى الزوال بفضل مفهوم التحويف الجديد. ومع أنه يكتب براهينه في مستوى الزوال إلا أنه وضوحاً يتصورها في الفضاء.

إلى الفصل السادس من المقالة الثانية الذي عالجه كلا الرياضيين. وسنرجئ مناقشة بقية المسائل إلى الملاحظات الإضافية كي لا نثقل العرض هنا.

إن موضوع الفصل الثالث من مقالة القوهي الأولى هو إسقاط دائرة مقنطرة موازية لأفق معلوم على مستوى الأصطرلاب.

لتكن الدائرة التي مركزها A هي سطح الأصطرلاب وليكن BD و CE قطرين متعامدين. يحدد الأفق المعلوم بالقوس DG حيث G هي قطب الأفق و D قطب الكرة. نريد تمثيل دائرة يوازي مستواها الأفق المعلوم؛ يعرف هذا المستوى بالقوس GI أي بالمسافة بين نقاط الدائرة وقطب الأفق. إنها الدائرة ذات القطر IK. يرسم القوهي الشكل في المستوى π مستوى خط زوال الأفق المعلوم. تمثل الدائرة BCDE في نفس الوقت خط الزوال والتحويف على π للمستوى الاستوائي حسب الخط EC.

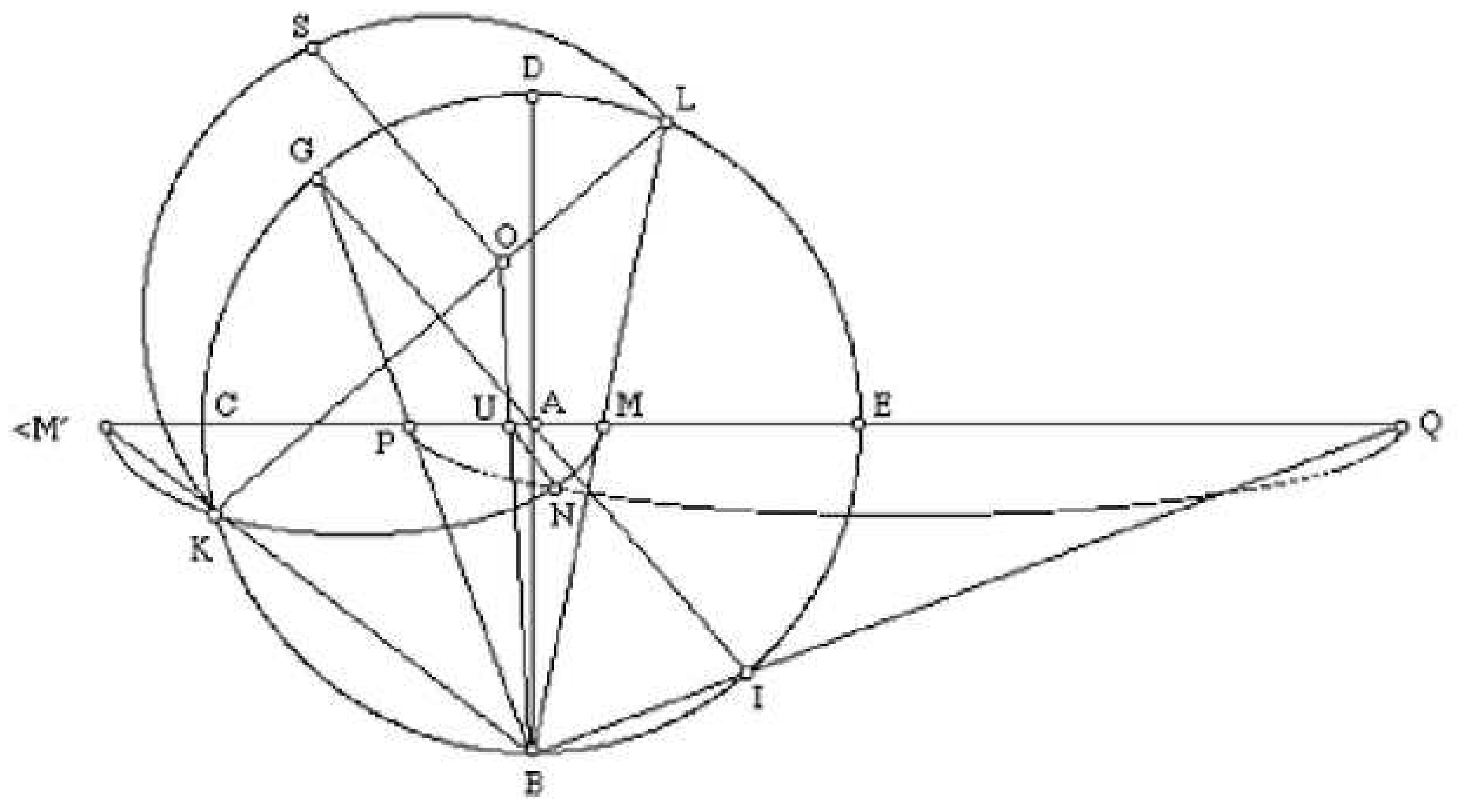


الشكل. 12

يقطع المستقيمان BI و BK المستقيم CE في L و M. والدائرة ذات القطر LM هي الإسقاط التسطيحي من القطب B للدائرة التي قطرها IK على المستوى الاستوائي، وتحويفها هو الدائرة المطلوبة. وهو بالتالي دائرة ارتفاعها معلوم بالنسبة للأفق المعلوم.

يعالج القوهي في الفصل الرابع إنشاء دائرة سمتيه أي الإسقاط التسطيحي لدائرة تمر من القطبين.

لتكن الدائرة BCDE التي مركزها A هي سطح الأصطرلاب، B و D يمثلان قطبي الكرة. G و I هما قطبا الأفق المعلوم. نريد أن نسقط على سطح الأصطرلاب دائرة تمر من G و I ومن نقطة أخرى معلومة S من الأفق أو أن نسقط دائرة موازية للأفق أحد أقطارها هو KL.



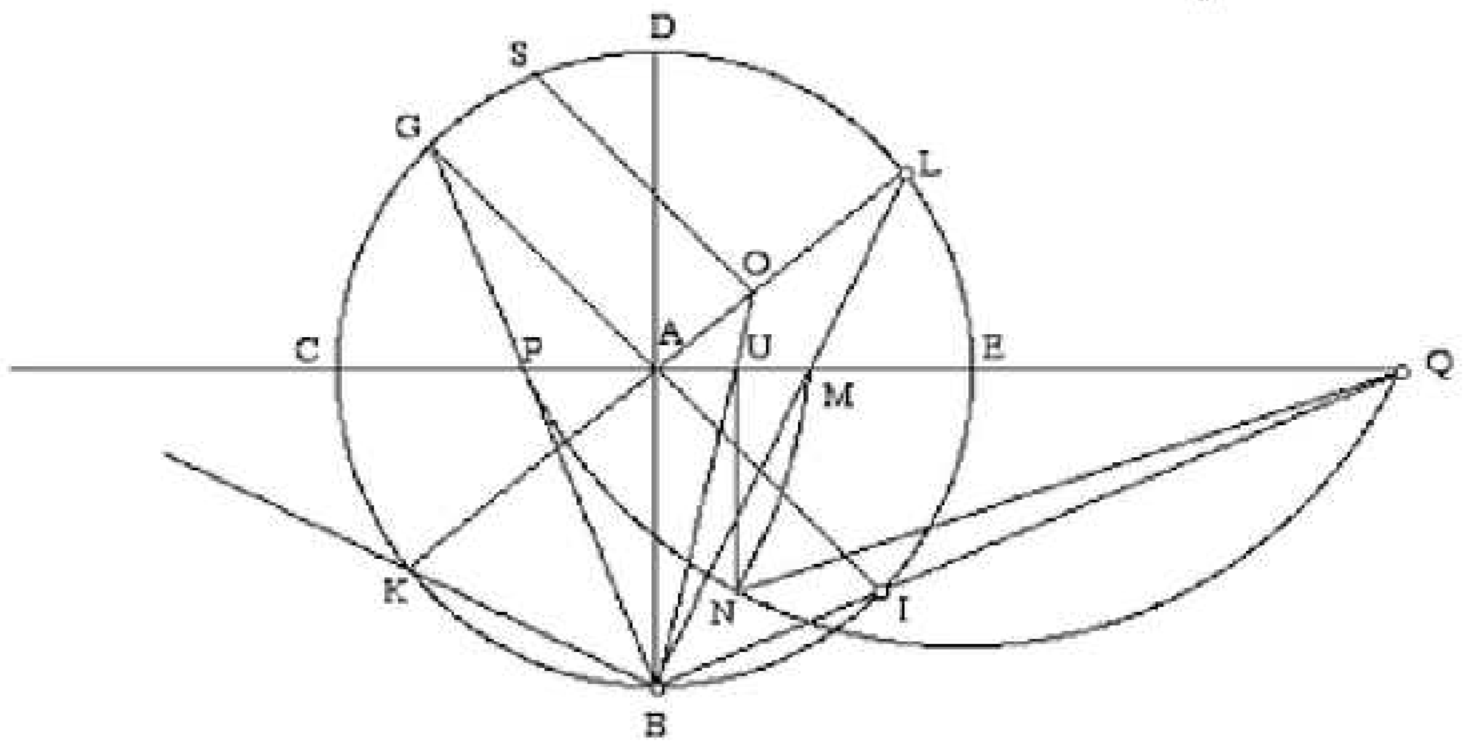
الشكل. 13

تمثل الدائرة BCDE كما في الحالة السابقة خط الزوال للأفق المعلوم والتحويف على مستواه للمستوى الاستوائي.

فإذا كانت الدائرة KL لا تمر بالنقطة B فالإسقاط دائرة NM مركزها على CE في المستوى الاستوائي.

وإذا كانت KL لا تمر بـ A، نأخذ عندئذ التحويف KSL للدائرة التي قطرها KL على مستوى الشكل حيث القوس SL هو المسافة بين S وخط الزوال. نسقط العمود SO على KL. تقطع الخطوط BG، BI، BO المستقيم CE في P، Q، U على الترتيب. نرسم UN العمودي على CE حيث N مسقط S؛ فالدائرة PNQ هي دائرة السمت، مسقط الدائرة المارة بـ G، S، I.

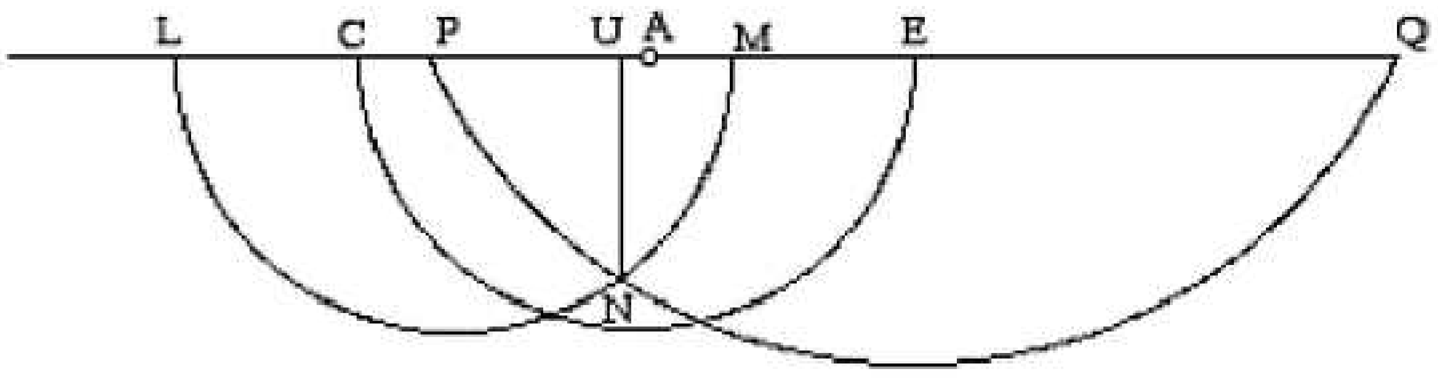
إذا مر المستقيم KL بالنقطة A فالدائرة KL دائرة كبرى للكرة، ويمكن تحويفها على مستوى الشكل وفق الدائرة BCDE. تقع النقطة S عندئذ على الدائرة التي يحددها القوس SL. تنشأ النقاط O، U، N كما في السابق وكذلك P و Q. والدائرة المطلوبة هي الدائرة PNQ.



الشكل. 14

إذا كانت KL تمر بالقطب B فمسقطها على المستوى الاستوائي هو مستقيم تقاطع هذا المستوى مع مستوى الدائرة وهو بالتالي عمودي على المستوى BLD وتحديداً على المستقيم BL.

لنلاحظ أننا سنحصل في هذه الحالة على الشكل التالي في المستوى الاستوائي الذي هو مستوى الأصطرلاب أيضاً:

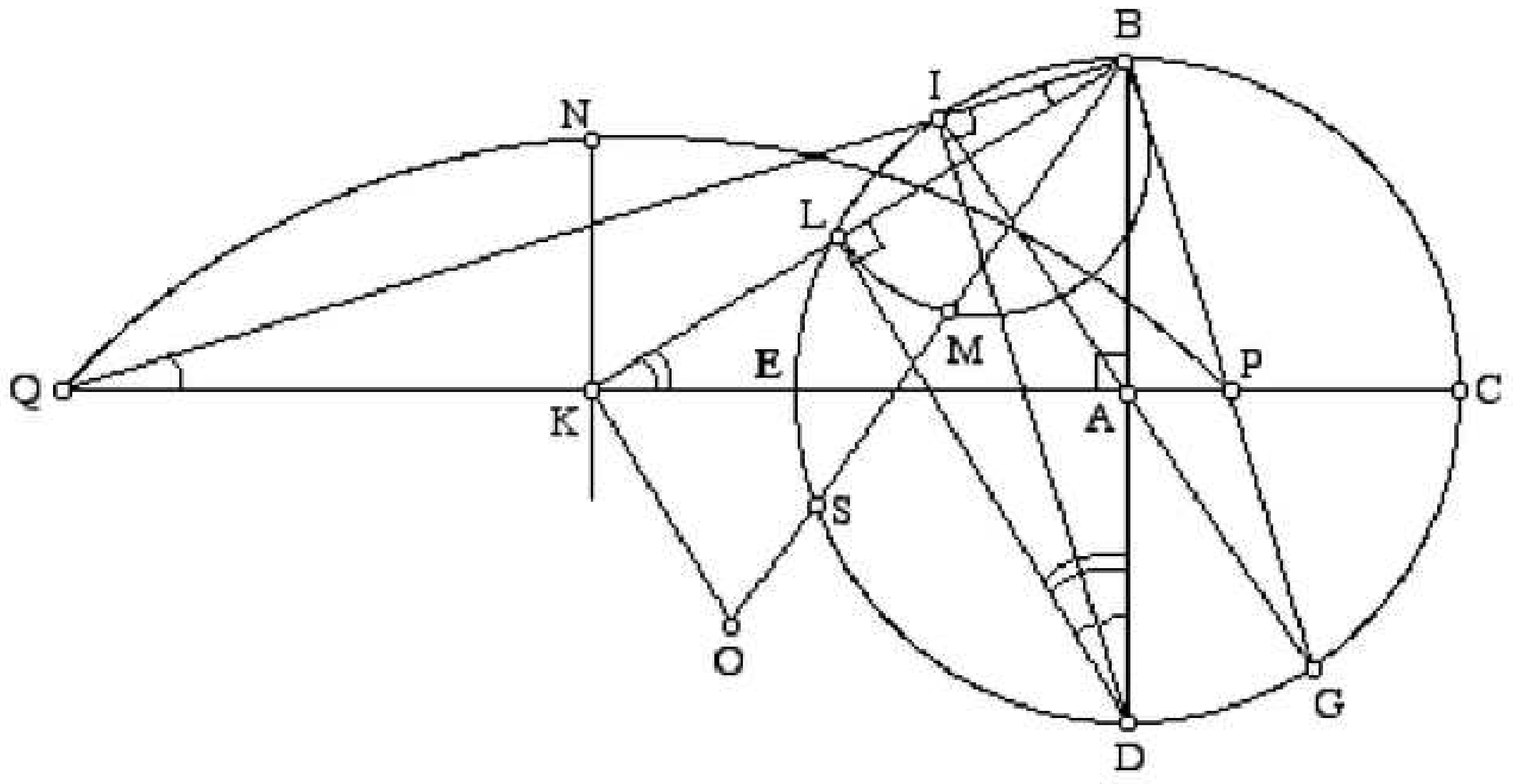


الشكل. 15

وهكذا تقابل كل دائرة مارة بالنقطتين G و I، قطبي الأفق، دائرة على الأصطرلاب مارة بالنقطتين P و Q، مسقطي G و I. والنقطة N مسقط S، اختيرت على الدائرة التي قطرها KL لتعيين الدائرة GSI.

يمكن القيام بكل الإنشاءات الضرورية لإتمام الأصطرلاب في حالة معرفة مركز وقطر الكرة في مستوى الأصطرلاب.

لنعد الآن إلى الحالة التي يمر فيها KL بالنقطة B ولنفحص إسقاط دائرة مارة بالقطبين G و I للأفق المعلوم. ليكن BL قطر دائرة موازية لمستوى الأفق ذي القطبين G و I ولتكن K نقطة تقاطع BL و AC، و S نقطة تحقق تساوي القوس LS مع المسافة المعطاة. يلقى العمود المقام من K على BK المستقيم BS في O. نأخذ على العمود المقام من K على CE النقطة N بحيث يكون KN = KO. يقطع المستقيمان BG وBI المستقيم CE في P و Q؛ فالدائرة PNQ هي الدائرة المطلوبة. لأن الدائرة التي قطرها BL في مستوى الشكل هي تحويف الدائرة الموازية للأفق على مستوى خط الزوال؛ تتقاطع هذه الدائرة مع BO في النقطة M. إن القوسين LS و LM متشابهان لأنها محصوران بنفس الزاوية المحوطة التي رأسها B. ولذا فإن الدائرة IMG على الكرة هي دائرة السمت المطلوب إسقاطها على مستوى الأصطرلاب.



الشكل. 16

إن مسقط M هو O وتحويف هذا الأخير على مستوى الشكل هو N. ومسقطا G و I هما P و Q. على الترتيب؛ والدائرة PNQ هي بالتالي مسقط الدائرة IMG على المستوى BCDE.

إن مساقط كل الدوائر المارة بـــ I و G هي دوائر تمر بـــ P و Q. لنبين وقوع مراكز هذه الدوائر على المستقيم KN. لدينا

$$D\hat{I}B = Q\hat{A}B = \frac{\pi}{2}$$

وبالتالي

$$A\hat{Q}B = I\hat{D}B$$

وكذلك

$$D\hat{L}B = K\hat{A}B = \frac{\pi}{2}$$

وبالتالي

$$L\hat{D}B = A\hat{K}B$$

وبما أن I هي وسط القوس BL فإن $L\hat{D}B = 2I\hat{D}B$؛

وبالتالي

$$A\hat{K}B = 2A\hat{Q}B$$

وأخيراً

$$A\hat{Q}B = K\hat{B}Q \quad \text{و} \quad KQ = KB$$

ثم إن PBQ مثلث قائم الزاوية في B، ولذا فـــ KQ = KP. إن KN وسيط المستقيم PQ ويقع مركز كل دائرة تمر من هاتين النقطتين على المستقيم KN.

وهكذا لكي نسقط نقطة μ منسوبة إلى الأفق H المعلوم، فإننا نسقط الدائرة الموازية لـ H المارة بـ μ على مستوى الأصطرلاب كما نسقط عليه الدائرة IμG المارة بقطبي الأفق H، النقطتين I وG. نحصل في الأصطرلاب على الدائرة الموازية ذات الارتفاع المعلوم وعلى دائرة السمت. تمر هذه الأخيرة في نقطتين من الأصطرلاب لا تتوقفان إلا على الأفق H. مسقط النقطة μ هو إحدى نقطتي تقاطع الدائرتين المذكورتين.

هاتان هما المسألتان اللتان ترجع إليهما بصورة عامة المسائل المطروحة في المقالة الثانية.

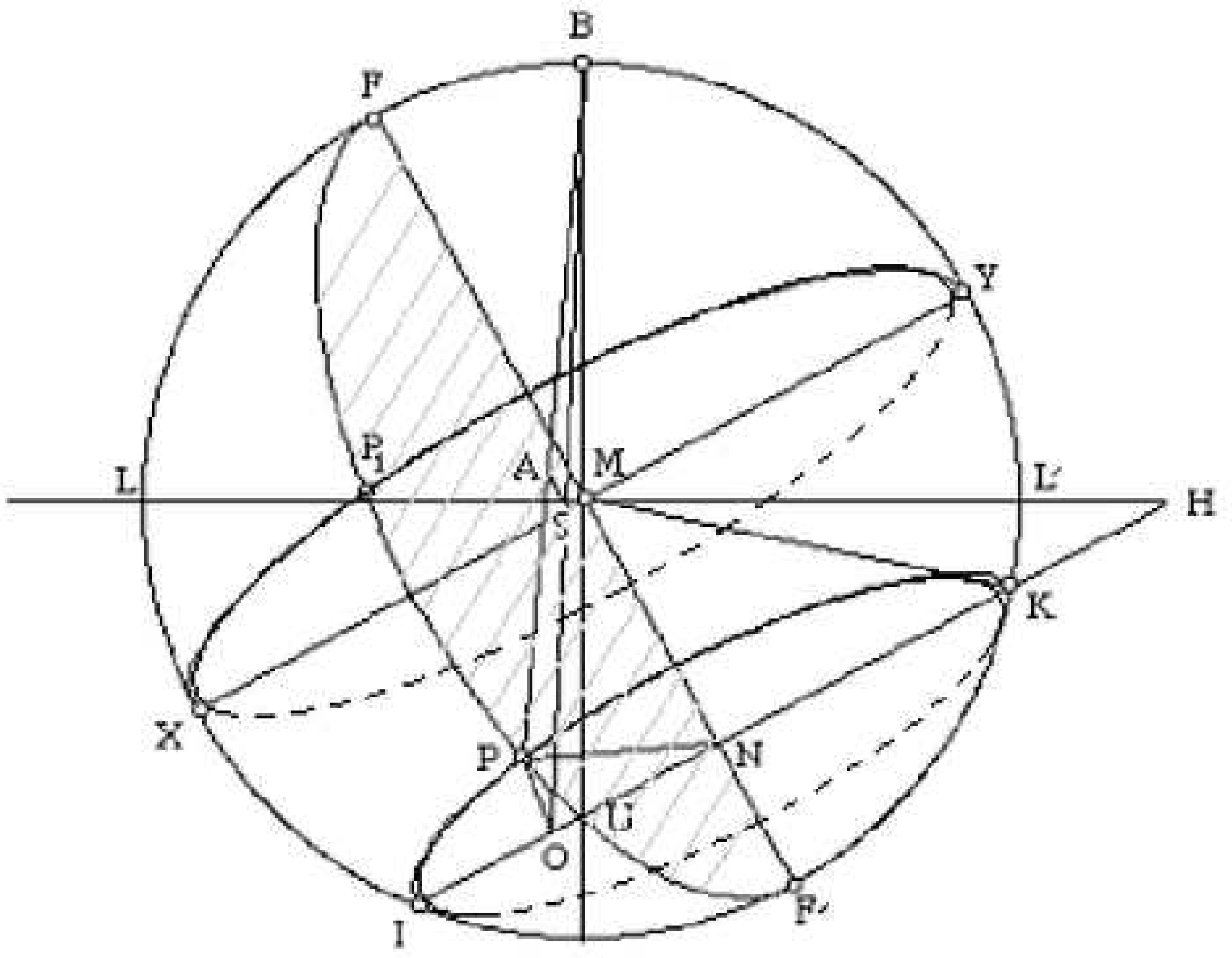
لنتناول الآن دراسة الفصل السادس من هذه المقالة المقتصر على مسألة وحيدة: نأخذ بعين الاعتبار الأصطرلاب الموافق لأفق معلوم. A مسقط نقطة معلومة P بالنسبة لهذا الأفق – أي بسمتها وارتفاعها – نعرف القطب B، وهو مركز الإسقاط ونريد عمل الأصطرلاب.

لننظر في الشكل في الفراغ (الشكل. 17) لتحديد معطيات المسألة.

لتكن P نقطة على الكرة ذات المركز M والقطب B منسوبة لأفق معلوم XY. P هي نقطة تقاطع دائرتين: الدائرة ذات الارتفاع المعلوم h والقطر IK ودائرة السمت التي قطرها F'F، حيث F وF' قطبا الأفق. نعرف إذاً مستوى خط الزوال BFLIK والقوس IP المقيس بالزاوية $I\hat{N}P = \alpha$ المحدد بالسمت. لدينا $\widehat{P_1P} = \widehat{XI} = \widehat{YK}$ المقيسة بالارتفاع $M\hat{K}N = h$، ارتفاع النقطة P؛ و

$$Y\hat{M}H = M\hat{H}N = B\hat{M}F = \beta$$

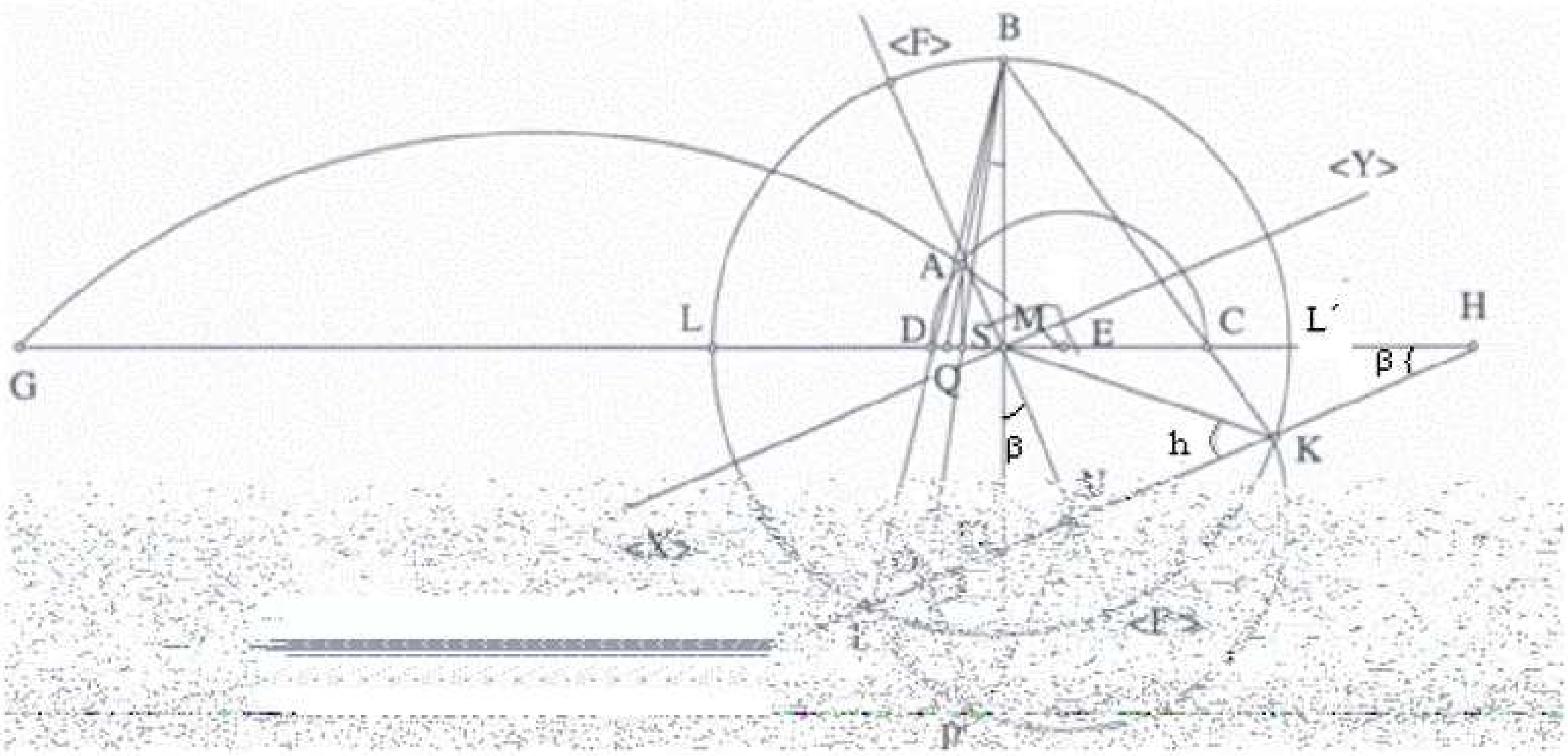
البعد الزاوي بين القطبين.



الشكل. 17

وهكذا فإن ما يهدف إليه القوهي في هذه المسألة هو تبيان أن معرفة النقطة A، مسقط P على المستوى الاستوائي، والنقطة B والقيم الثلاث α، h، β تحدد النقطة M وتتيح بالتالي إنشاء الدائرتين CAD و EAG مسقط الدائرة ذات الارتفاع المعلوم ومسقط دائرة السمت.

لنفترض بالتحليل معرفة هاتين الدائرتين CAD و EAG في مستوى الأصطرلاب. إنهما الإسقاط ذو المركز B للدائرتين IPK و FPF'. إن مستوى الشكل هو مستوى خط الزوال BLIK ذي المركز M والذي حُوِف عليه مستوى الاستواء وفق المستقيم LM والمستوى IPK وفق الخط IK.



الشكل. 18

إن الزاوية $M\hat{K}N = h$ معلومة؛ لذا

$$\frac{IK}{MK} = \frac{2NK}{MK} = 2 \cos h$$

و

$$\frac{MN}{MK} = \sin h$$

والزاوية $M\hat{H}N = \beta$، زاوية الأفق المعلوم مع مستوى الاستواء، معلومة. إنها مكملة لارتفاع القطب فوق الأفق أي لخط عرض المكان.

تقع النقطتان S و O – وهما مسقطا العمودين من A و P على CD و IK على الترتيب– على استقامة واحدة مع B لأن AS و PO في الفراغ هما العمودان المسقطان من A و P على خط الزوال. والقوس IP معلوم، مقيس بالزاوية $I\hat{N}P = \alpha$. إذاً

$$\frac{NO}{KN} = \frac{NO}{NP} = \cos \alpha$$

ولكن

$$\frac{KN}{NM} = \text{cotg } h$$

ولذا فإن

$$\frac{ON}{NM} = \cos\alpha \, \text{cotg}\, h$$

لدينا $N\hat{M}U = M\hat{H}N = \beta$ ؛ فإن

$$\frac{MN}{NU} = \text{cotg}\, \beta$$

وبالتالي

$$\frac{ON}{NU} = \frac{\cos\alpha \, \text{cotg}\, h}{\text{tg}\, \beta} = k$$

ومنه

$$\frac{OU}{UN} = \frac{ON}{NU} - 1 = k - 1$$

و

$$\frac{OU}{ON} = \frac{OU}{UN} \cdot \frac{UN}{ON} = \frac{k-1}{k}$$

لدينا

$$\frac{OU}{UM} = \frac{OU}{UN} \cdot \frac{UN}{UM} = (k-1) \cdot \sin\beta$$

ومن جهة أخرى

$$\frac{OU}{MB} = \frac{OU}{ON} \cdot \frac{ON}{NK} \cdot \frac{NK}{MB} = \frac{k-1}{k} \cos\alpha \cdot \cos h$$

نستنتج من ذلك أن $\frac{UM}{MB}$ و $\frac{UB}{OU} = \frac{MU}{OU} + \frac{MB}{OU}$ هما نسبتان معلومتان. لكن الزاوية OUB معلومة، $O\hat{U}B = \frac{\pi}{2} + \beta$ ؛ وشكل المثلث OUB معلوم إذاً. ومعلوم بالتالي كل من النسبة $\frac{UB}{OB}$ والزاوية $U\hat{B}O$. شكل المثلث قائم الزاوية BMS معلوم. ومعلوم بالتالي كل من النسبتين $\frac{MB}{BS}$ و $\frac{MS}{MB}$؛ نستنتج أن النسبتين

$$\frac{UB}{BS} = \frac{UB}{MB} \cdot \frac{MB}{BS} \quad \text{و} \quad \frac{OB}{BS} = \frac{OB}{UB} \cdot \frac{UB}{BS}$$ معلومتان

لكن

$$\frac{OP}{AS} = \frac{OB}{BS} \quad \text{و} \quad \frac{OP}{BM} = \frac{OP}{NP} \cdot \frac{NK}{MK} = \sin\alpha \cdot \cos h$$

فالنسبة $\frac{BM}{AS}$ معلومة. يأخذ القوهي بعين الاعتبار تحويف A على مستوى خط الزوال. يقطع المستقيم BA القطر 'LL في النقطة Q [الشكل. 18] ولدينا في هذا الشكل

$$\frac{BM}{AS} = \frac{BQ}{AQ}$$

وإذاً $\frac{BA}{AQ}$ معلومة. وبما أن A و B معلومتان فالنقطة Q معلومة. النسبة $\frac{QB}{AB}$ معلومة ومساوية لـ $\frac{QM}{MS}$؛ نستنتج أن

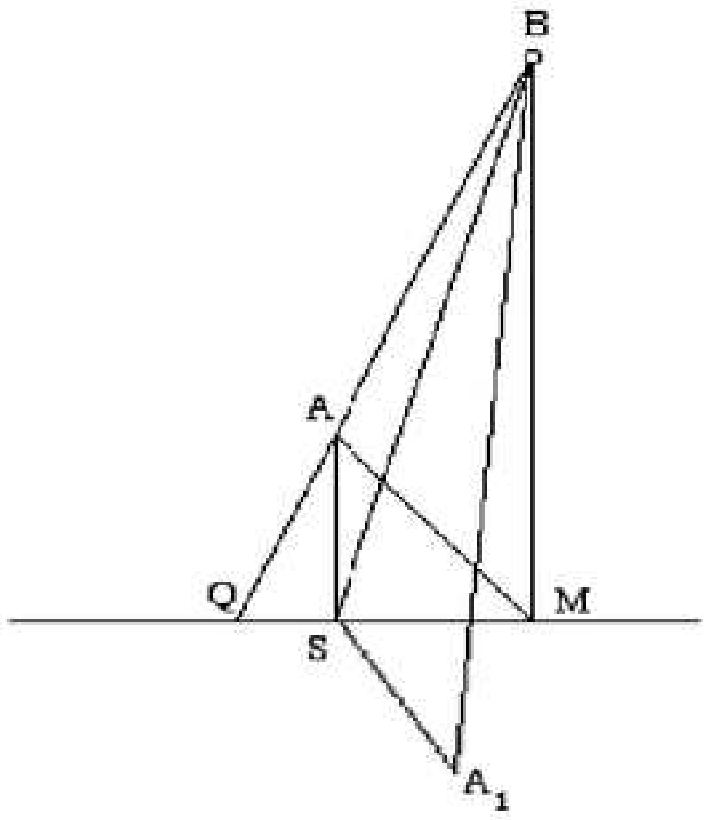
$$\frac{QM}{MB} = \frac{QM}{MS} \cdot \frac{MS}{MB}$$

معلوم؛ الزاوية BQM معلومة نتيجة لذلك، والزاوية BMQ زاوية قائمة والنقطة M معلومة.

وهكذا بين القوهي بالتحليل أنه إذا عرفت في مستوى الشكل – وهو هنا مستوى خط زوال الأفق المعلوم – نقطتان A و B والأبعاد الزاوية الثلاثة α، h، β التي تعين المعطيات، فإن وضع النقطة Q على المستقيم AB يصبح معلوماً نظراً لمعرفتنا للنسبة $\frac{AQ}{AB}$، وكذلك وضع النقطة M لأن $B\hat{M}Q = \frac{\pi}{2}$ ولأن النسبة $\frac{MB}{MQ}$ معلومة.

ولما كانت الدائرة (M, MB)، حيث M مركز الكرة، والشعاع MQL معلومين، فإن الأعمال الباقية معلومة من أجل أي نقطة أخرى ينسب نظيرها إلى نفس الأفق.

لنلاحظ أن القوهي في تحليله افترض الشكل في مستوى خط زوال الأفق المعلوم وحصل على A انطلاقاً من نقطة معطاة في مستوى الأصطرلاب – ولنرمز لها بـ A_1 – بتحويفها على مستوى خط الزوال (انظر أدناه). يجب اعتبار النقطتين A_1 و B في نصه معلومتين وبالتالي المسافة A_1B. ولكن القوهي يفترض معرفة المقطع AB. لنبين إذاً أن معرفة A_1B تؤدي إلى معرفة AB وأن محاكمة القوهي سليمة كذلك.



الشكل. 19

لدينا $SA = SA_1$، $SA \perp MS$ و $SA_1 \perp BS$.

لقد بينا أن النسبتين $\frac{BM}{AS}$ و $\frac{BM}{BS}$ معلومتان. فالنسبتان $\frac{BS}{AS}$ و $\frac{BS}{A_1S}$ معلومتان أيضاً. والمثلث BSA_1 قائم الزاوية في S، معلوم الشكل كذلك. إن الطول BA_1 معطى وهذا ما يعطينا الطول BS. ومن جهة أخرى $\frac{BS}{AS}$

معلومة و $B\hat{S}A = S\hat{B}M$، و $S\hat{B}M$ زاوية معلومة لأن المثلث BSM ذو شكل معلوم؛ فالمثلث BAS معلوم الشكل كذلك. وبما أن BS معلوم فإن الطول BA معلوم أيضاً.

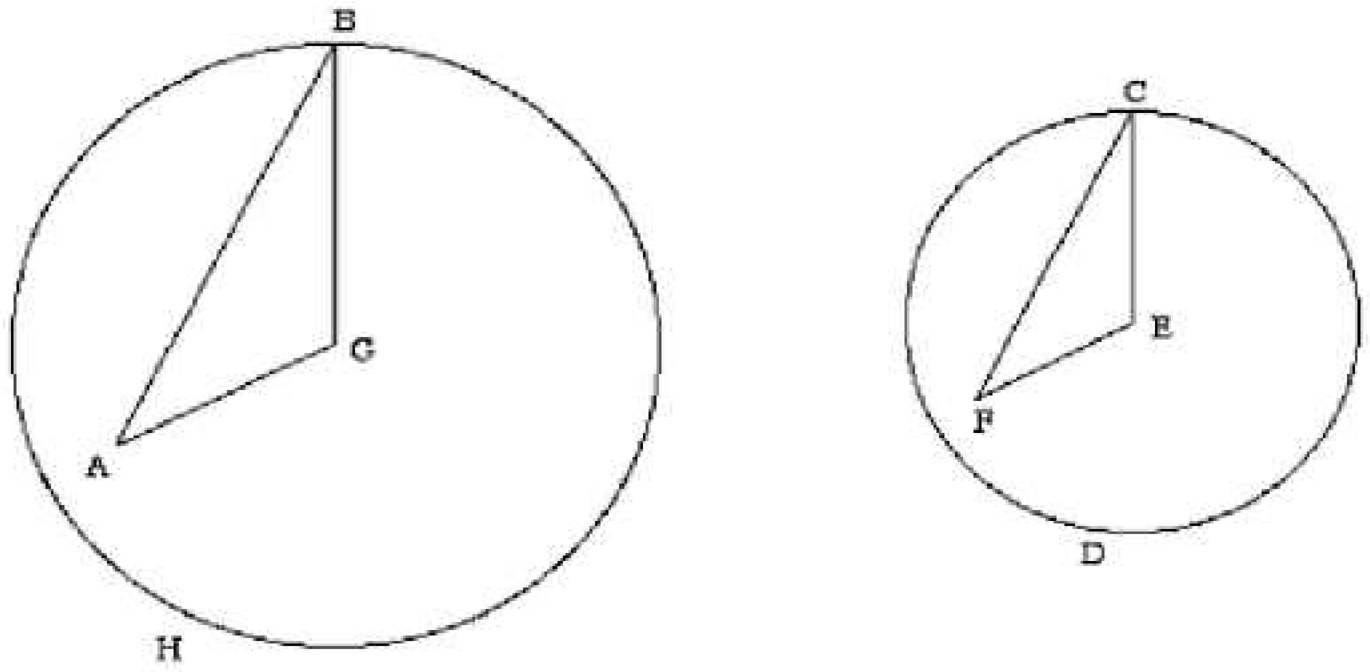
يمكننا أيضاً تحويف مستوى خط الزوال على مستوى الأصطرلاب؛ تمثل النقطة B من الشكل عندئذ تحويف القطب. وتقع النقطتان A و B في مستوى الأصطرلاب ويصبح طول المقطع AB معلوماً. وهذه هي بالتحديد المعطيات التي يستعملها ابن سهل في تركيبه لتحليل القوهي.

يعود التركيب لابن سهل كما وسبق أن قلنا. فهو يبدأ بمثلث ما MAB ويفترض شكله معلوماً. ومن الواضح أن هذا الافتراض آت من النتائج التي أثبتها القوهي: $\frac{BA}{BQ}$ معلومة وشكل BMQ معلوم.

لنتفحص هذا التركيب كما جاء في نص ابن سهل.

نستنتج من تحليل القوهي أنه إذا كان B هو القطب و A المسقط المعلوم و G مركز الأصطرلاب[12] فإن شكل المثلث ABG معلوم، أي أنه محدد بتشابه ما. يبتدأ ابن سهل بأخذ دائرة مركزها E وعليها نقطة C تمثل القطب، وينشئ من أجل أفق ذي خط عرض معلوم، أفق النقطة P، المسقط F لنقطة P_1 لها نفس إحداثيات P – أي نفس السمت والارتفاع بالنسبة للأفق – إن المثلث المنشأ على هذا النحو CFE مشابه للمثلث ABG المطلوب، وذلك حسب تحليل القوهي. يصبح إنشاء النقطة G مركز الأصطرلاب مباشراً: A و B معلومان، كما أن $A\hat{B}G = F\hat{C}E$ و

$$\frac{AB}{BG} = \frac{CF}{CE}$$



الشكل. 20

فما أن نعرف الدائرة (G, GB) والنقطة B التي تمثل القطب حتى نعرف تمثيل الإسقاط على الأصطرلاب لكل نقطة من الكرة السماوية.

ويعطي ابن سهل، بالإضافة إلى تركيب هذه المسألة، برهاناً بالتركيب للمقدمات التي برهنها القوهي بالتحليل وحده.

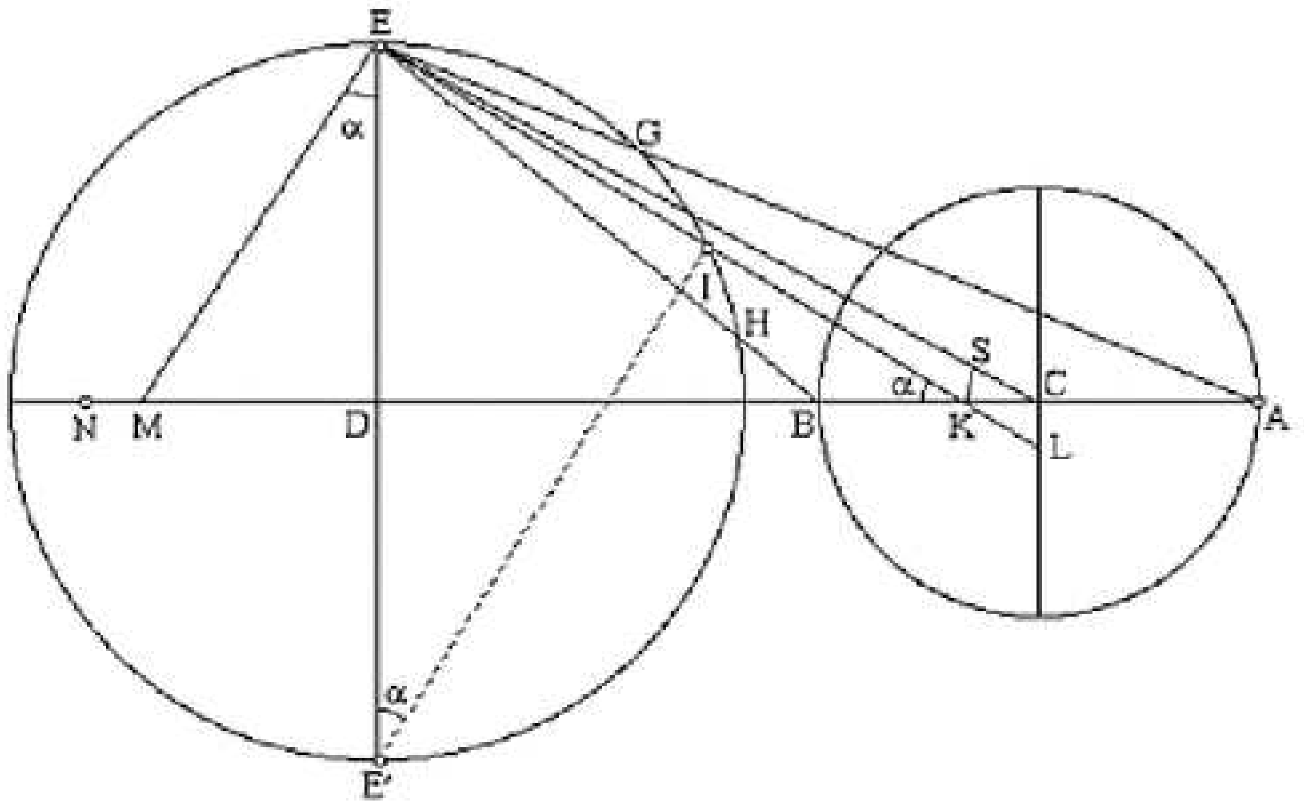
---

[12] كما في تحليل القوهي، إذا كان المستوى هو مستوى الأصطرلاب فإننا نحصل على النقطة B من القطبين بتحويف مستوى خط الزوال على مستوى الأصطرلاب.

2. ابن سهل والإسقاط التسطيحي

رأينا أن ابن سهل في شرحه لرسالة القوهي لم يعر انتباهاً للإسقاط التسطيحي مع أنه جوهري في عمل الأصطرلاب. إلا أن السجزي في كتابه *مسائل مختارة أثيرت بينه وبين مهندسي شيراز وخراسان* أعاد مقاطع من عمل لابن سهل يعالج تحديداً هذا النوع من الإسقاط. لم يشر السجزي إلى مصدره، تماماً كما فعل مع مقاطع أخرى أعاد نشرها. هل أتى ذلك من شرح ابن سهل لعمل القوهي وهو ما يعني أن هذا الشرح كان أغنى بكثير من النسخة التي وصلت إلينا؟ أو لعله من عمل آخر في الإسقاطات قد ضاع الآن؟ لا نملك في الوقت الحاضر أي وسيلة للبت مكتفين بفحص محتوى هذه المقتطفات في الإسقاط التسطيحي.

إن مستوى الأصطرلاب هو المستوى الأفقي المار بـــ D، مركز الكرة فـــ D هي مركز دائرة الزوال و E هي سمت D.



الشكل. 21

إن نظير الدائرة التي قطرها AB ومركزها C في مستوى الأصطرلاب في الإسقاط ذي القطب E هو الدائرة التي قطرها HG في مستوى عمودي على مستوى الزوال؛ وقطب هذه الدائرة على الكرة هو I. نفترض أن النقط A، B و C معلومة، 2α هي البعد الزاوي بين القطب I وقطب الكرة، أي القوس IE ونفرضه معلوماً. يقطع المستقيم EI، منصف الزاوية $A\hat{E}B$، المستقيم AB في K، والقطر العمودي عليه في L. تقع النقاط E، A، B على دائرة واحدة

$$AK \,.\, KB = KE \,.\, KL \quad \text{و} \quad AK \,.\, KB + CK^2 = CB^2$$

ومنه

$$KE \,.\, KL + KC^2 = BC^2$$

ليكن $EL \perp EM$؛ تقع النقاط L، C، E، M على الدائرة التي قطرها LM، ولذا

$$KE \,.\, KL = KC \,.\, KM$$

ومنه

$$KC \,.\, KM + KC^2 = BC^2$$

$$KC\ (KM + KC) = KC\ .\ MC = BC^2$$ [13]

والجداء $KC\ .\ MC$ معلوم إذاً.

ليكن 'E قطب الكرة الثاني، فالقوس EI محصور بالزاوية المحيطية $E\hat{E}'I$، المساوية للزاوية $E\hat{K}D$ لأن لكلتيهما نفس المكملة.

الزاوية $E\hat{K}D$ معلومة. لنسمها $E\hat{K}D = \alpha$. المثلث EKM قائم الزاوية وارتفاعه ED. لدينا

$$MD = ED\ .\ tg\alpha \qquad \text{و} \qquad ED = DK\ tg\alpha$$

ومنه

$$MD = DK\ tg^2\alpha \qquad \text{،} \qquad \frac{MD}{DK} = tg^2\alpha$$

نفترض أن

$$\frac{MD}{DK} = \frac{MN}{CK}$$

لدينا

$$tg^2\alpha = \frac{DM}{DK} = \frac{MN}{CK} = \frac{DN}{DC} = \frac{CN - DC}{DC} = \frac{CN}{DC} - 1$$

وبالتالي

$$CN = DC\ (\ 1 + tg^2\alpha)$$

(1) المستقيم CN معلوم وبالتالي النقطة N معلومة، ثم إن

$$CM\ .\ KC = BC^2 \qquad \text{و} \qquad \frac{MN}{CK} = tg^2\alpha$$

فلذا

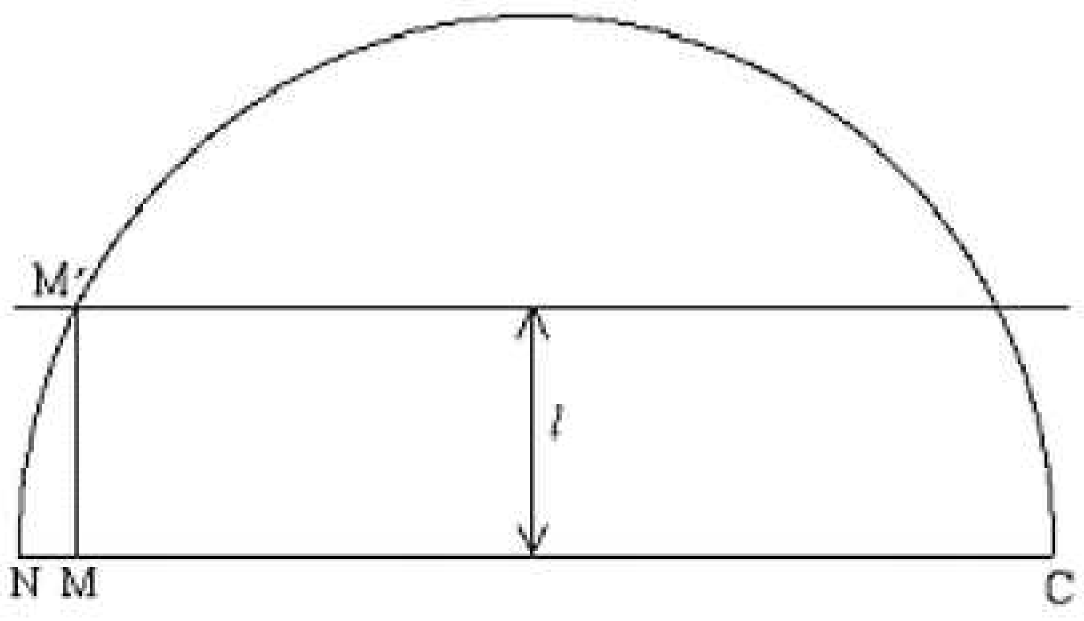
(2) $\quad CM\ .\ MN = BC^2\ .\ tg^2\alpha$ هي معلومة.

وهكذا نحصل على النتيجة التي يعلنها المؤلف حسب (1) و(2): إن النقطة M معلومة. يمكننا أن نفصل ذلك بإنشاء هندسي بسيط: نفرض $\ell^2 = BC^2\ .\ tg^2\alpha$ و ℓ بالتالي طول معلوم. نرسم الدائرة التي قطرها CN وخطاً موازياً لـ CN، على مسافة ℓ منه، يقطع الدائرة في نقطتين إحداهما 'M، الأقرب إلى N؛ ونسقط منها العمود M'N على CN.

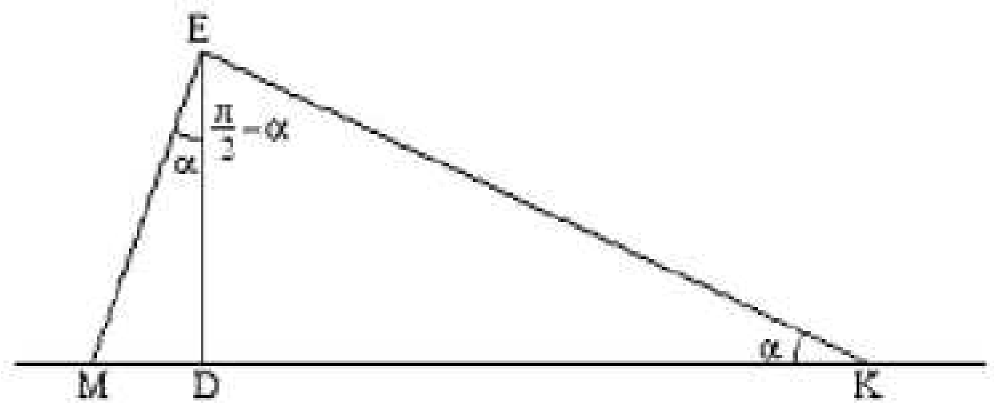
إن M هي النقطة المطلوبة لأن $\ell^2 = MM'^2 = MC\ .\ MN$. ومن هنا يمكننا إنشاء النقطة E لأن ميل المستقيم ME معلوم وتصبح كل خطوط الأصطرلاب معلومة.

---

[13] (A, B, K, M) قسمة توافقية.



الشكل. 22



الشكل. 23

نفترض أن الدائرة التي مركزها C، والزاوية α وقيمة شعاع الكرة ED كلها معلومة. فالنقطتان A و B معلومتان خلافاً للنقطة D. لكننا نعلم أن $CK = CB^2$. CM أي أن الجداء معلوم. نعرف أيضاً أن شكل المثلث قائم الزاوية EMK ذا الارتفاع ED معلوم، فالنسبة $\frac{ED}{KM}$ وقيمة ED معلومتان؛ فطول KM معلوم، وبالتالي الطول CK والنقطة K معلومان.

نفترض أن الدائرة التي مركزها C، والشعاع CB، والزاوية α، والقطب E معلومة؛ خلافاً للمستقيم AB. لدينا كما في السابق $CM . CK = CB^2$ و $\alpha = E\hat{K}M$ زاوية معلومة.

لتكن S نقطة على EC تحقق العلاقة $CM . CK = CE . CS$ فـــ S محددة وتقع النقاط E، S، M، K على محيط دائرة واحدة، ولذا فإن

$$C\hat{S}K = C\hat{M}E = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

كلتا الزاويتين مكملتان للزاوية المحيطية التي تحصر القوس EMK.

وضع المستقيم SK مع معلوم إذاً، ويقطع القوس CEK في النقطة K التي أصبحت معلومة. يحاول ابن سهل في هذا النص إعادة بناء الكرة المسقطة على الأصطرلاب بالإسقاط التسطيحي انطلاقاً من المعطيات التي لا غنى عنها: أي الأصطرلاب بذاته، قطره AB، الزاوية α التي يصنعها المستقيم EI مع الأفق، وهو الذي يسقط I من الكرة؛ مركز الدائرة التي قطرها GH، نظيرة الدائرة في الأصطرلاب على الكرة؛ وعنصر مكمل آخر. هذا العنصر في الحالة الأولى هو مركز الكرة D؛ ونصف قطرها ED في الحالة الثانية؛ وهو في الحالة الثالثة قطب الإسقاط E.

الأقسام المعلومة: الدائرة الموازية للأفق في مستوى الأصطرلاب.

I) مركزها C في مستوى خط الزوال (انظر الشكل. 21)، ويمكننا عندئذ تمييز الحالات التالية:

1) القوس IG معلوم: a) D معلومة

b) ED معلوم

c) E معلومة

2) القوس IE معلوم : a) D معلومة

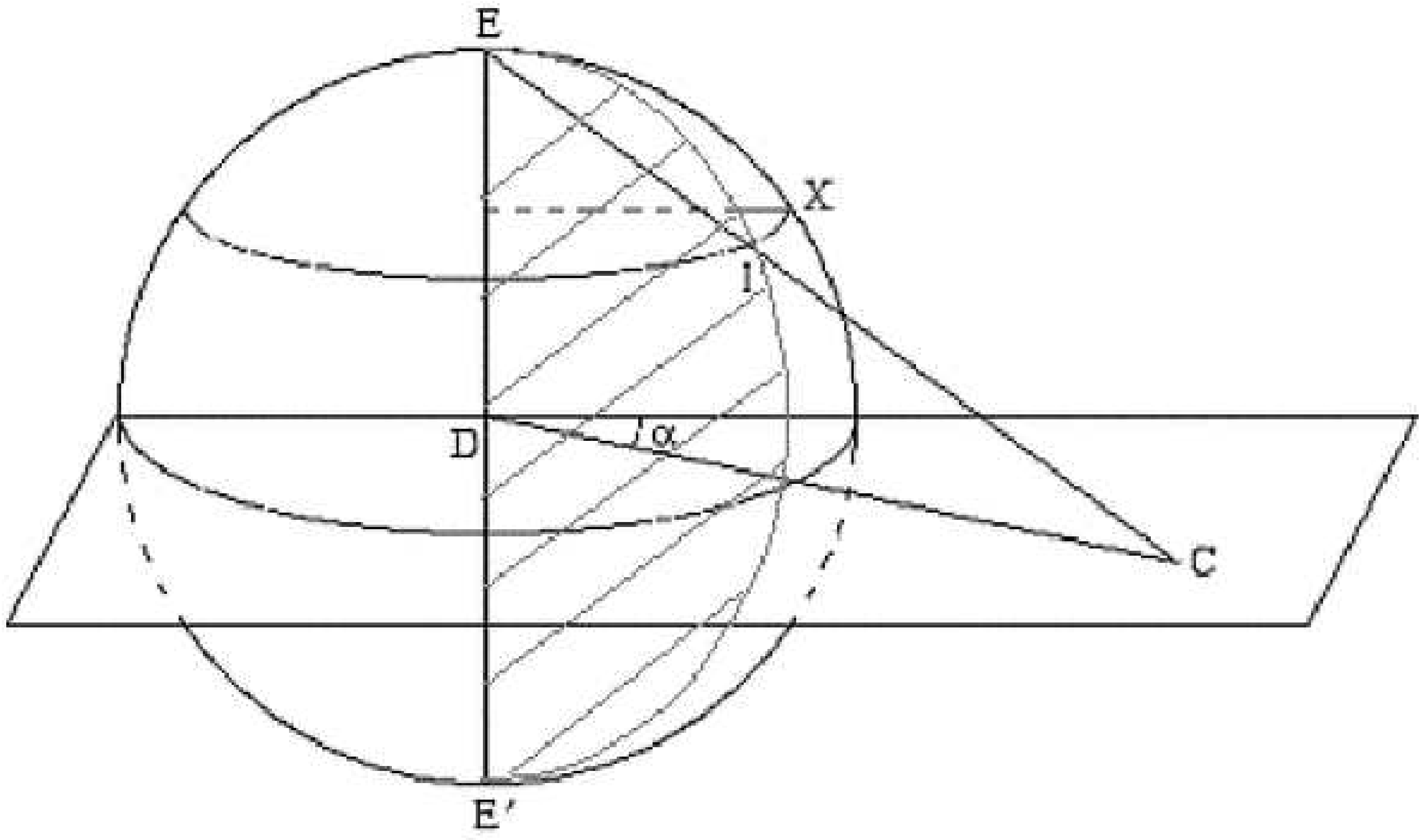
b) ED معلوم

c) E معلومة

يأخذ المؤلف هنا بعين الاعتبار الحالات الثلاث a، b، c بمعرفة القوس IE.

II) مركز الدائرة في مستوى الأصطرلاب C ليس في خط الزوال ونعرف سمته α. إن النقطة I هي مركز الدائرة على الكرة نظيرة دائرة الأصطرلاب.

يذكرنا هذا التعداد الشامل والقبلي لكل الحالات الممكنة على نحو توافيقي بما هو معمول به في الجبر.



الشكل. 24

تقاس المسافة بين I ودائرة الزوال بالقوس IX = α ويقاس بعدها عن القطب E بالقوس IE على الدائرة EIE'. وسنحصل كما في السابق على ثلاث حالات مرتبطة بالقوس المعلوم IX وثلاث حالات أخرى مرتبطة بالقوس المعلوم IE ولدينا في المجموع اثنتا عشرة حالة.

وكما رأينا فقد كان عمل الأصطرلاب والمسائل النظرية والتقنية التي أثارها التمثيل الدقيق للفلك نقطة انطلاق البحوث الأولى في الإسقاطات بدءاً من القرن التاسع. وقد قادت هذه البحوث النشيطة والواسعة رياضيي ما قبل نهاية القرن العاشر إلى تصور فصل جديد في الهندسة. لقد توصل هؤلاء الرياضيون، بتوضيحهم للعناصر الهندسية الكامنة في إنشاء الأصطرلاب، وبمقارنتهم مختلف الإنشاءات بعضها بعضاً، وبتساؤلهم عن تواءم الإسقاطات المتنوعة إلى تكريس الإسقاطات كموضوع دراسة وكمجال خاص للبحث. يمثل القوهي وابن سهل نهاية المرحلة الأولى من هذه السيرورة. هل كانا المبادرين بتحديد هذا المجال في اكتشافهما للمقاربة الإسقاطية على هذا النحو الواضح؟ قد يكون الأمر كذلك. وأياً كان الحال فإن رسالة العالم الأول هندسية محضة وضوحاً؛ ولا يقل شرح الثاني كما لا تقل مقتطفاته عن الأول شيئا في هذا المضمار.

ولكن ماذا تعني كلمة "هندسي" في هذا السياق؟ لقد أشرنا للتو إلى اكتشاف المقاربة الإسقاطية. وكان معنى هذا كما تحققنا من ذلك دراسة الإسقاطات الأسطوانية والمخروطية للكرة وللكرة وحدها، أي لنقطها وأقطارها ودوائرها وللأشكال المرسومة عليها. رأينا أن رسالة القوهي، وعلى غرارها شرح ابن سهل، تبدأ بعرض لهذه الإسقاطات ولخصائصها، بمعزل عن الأصطرلاب، لتنتقل بعدها إلى المسائل المحلولة بالإسقاط التسطيحي والتي يمكن طرحها – نظرياً على الأقل – في معرض عمل واستخدام هذه الآلة. إن فصل هذا العرض إلى قسمين اقتصر أولهما على الإسقاطات، وتحديداً للكرة دون سواها، والثاني على المسائل المتعلقة بالأصطرلاب، يبين بجلاء مدى استقلال هذا المجال وابتعاده عن نقطة انطلاقه. إن من مخلفات نقطة الانطلاق هذه تلك العناية التي حظيت بها المسألة العكسية: فبدلاً من الانطلاق من الكرة المسقطة ننطلق من تمثيلها. وهي الطريقة التي اتبعها القوهي وابن سهل.

فمن الواضح إذا أن كلمة "هندسي" تشير إلى هذه الدراسة الإسقاطية للكرة التي كونت منذئذ فصلاً جديداً في الهندسة يتميز بلغته وبوسائل البرهان المستعملة فيه؛ فاللغة مزيج تختلط فيه مفردات نظرية القياسات، أي لغة الهندسة التقليدية، مع تعابير تدل على المفاهيم الإسقاطية. تحتوي البراهين على مقارنات بين النسب وعلى إسقاطات وتحويلات. فعندما يثبت القوهي على سبيل المثال الخاصة التالية: يقابل كل دائرة مرسومة على الكرة لا يحتوي مستواها على القطب في الإسقاط التسطيحي دائرة في مستوى الإسقاط والعكس بالعكس، فإنه يستعمل القضية I.5 من *مخروطات* أبلونيوس التي تدرس تقاطع مخروط دائري القاعدة مع مستو قاطع مضاد التوازي مع مستوى القاعدة. لم تكن فكرة القلب لتقلق ابن سهل كما لم تقلق القوهي قبله، وكذا فكرة كون الإسقاط التسطيحي قصر القلب في الفراغ. إلا أن تقنية التحويف استعملت مراراً وتكراراً من قبل القوهي وحُلت المسائل التي طرحها دون اللجوء إلى خصائص القلب في أغلب الأحيان – أي إلى انحفاظ الزوايا ولاسيما التعامد، كالحالة التي نحن بصددها هنا – لقد حلت باستعمال الخاصة التالية: تقع نقطة ما مع نظيرتها ومع قطب الإسقاط على استقامة واحدة. ويلجأ القوهي مرات عديدة إلى التحويفات لإتاحة الإنشاءات في الهندسة المستوية.

وهكذا فنحن في واقع الأمر، من حيث الموضوع واللغة ووسائل البرهان، أمام فصل في هندسة الإسقاطات ابتدعه القوهي وابن سهل. وهو فصل انبثق من مسائل طُرحت في شأن الأصطرلاب وبُدئ بالإجابة عليها قبل ما ينوف عن القرن من هذا الابتداع، الذي لم يتوان خلفاء هذين الرياضيين، كالبيروني، عن أخذه على عاتقهم والاستمرار فيه.

لقد شهدنا ظهور وجه لم يكن معروفاً من قبل: إنه ابن سهل المهندس والعالم. وتشهد الصورة التي رسمنا ملامحها هنا، عبر تبيان أهمية إسهامه في الانكساريات، على مدى جهلنا بتاريخ المناظر في حقبة من الزمن كنا نظن أننا نعرفها على نحو جيد نسبياً. قد لا يبدو للوهلة الأولى إسهام ابن سهل في الرياضيات مقارنة بما حققه في الانكساريات بالغ الأثر، لكن هذا الانطباع لا يلبث أن يتلاشى عندما نتفحص بعناية كتاباته الهندسية. فالآثار المتبقية من كتاباته المفقودة وما وصلنا من رسائله أو من التي استطعنا إعادة تكوينها تنم كلها عن شخصية مركزية في النصف الثاني من القرن العاشر. تتيح لنا هذه النصوص التعرف على أهم مجالات البحث الهندسي وعلى أكثرها تقدماً في تلك

الحقبة كما تتيح تصور كوكبة من الرياضيين تضم أسماء مرموقة كالقوهي والسجزي. كما أنها تضع في موضعها التاريخي الصحيح أعمال الخلفاء المباشرين، خاصة منها أعمال ابن الهيثم.

لقد عني ابن سهل، كونه أرخميدسياً، في التحديدات المتناهية في الصغر. وتابع، في التقليد الآبولوني، بحوثه في نظرية المخروطات وفي التحليل الهندسي. وساهم في تأسيس فصل الإسقاطات الهندسية للكرة. وهذه المجالات كلها كانت مسرح نشاط أكثر الرياضيين تقدماً في ذلك الزمان من أمثال القوهي. إلا أن تألق أعمال ابن سهل يعود إلى الأفكار العميقة والمبدعة التي جاء بها وعالجها في هذه الكتابات القصيرة أكثر منه إلى اتساع هذه الأعمال.

تضيف أعمال ابن سهل في التحديدات المتناهية في الصغر – وإن كنا لم نعثر عليها إلى اليوم – اسماً جديداً إلى قائمة كنا نظنها قد أغلقت: هي قائمة الأرخميدسيين العرب. إن عناوين هذه الأعمال، وأسلوب ابن سهل ذاته، ووضعها التاريخي تجعلنا نتساءل عما يمكن أن يكون محتواها. لماذا عاد ابن سهل إلى قياس القطع المكافئ بعد علماء بمكانة ثابت بن قرة والماهاني وإبراهيم بن سنان؟ ترى هل وجد برهاناً مختصراً وأنيقاً مستعيناً بالجموع التكاملية كما فعل معاصره القوهي وخليفته ابن الهيثم في منحنيات أخرى؟ لدينا ما يكفي من العناصر لتحبيذ هذا التخمين. ويتبادر إلى ذهننا تساؤل مماثل فيما يخص مركز الثقل نظراً لاهتمامه واهتمام أسلافه ومعاصريه بالمسائل المتعلقة به.

لقد أراد ابن سهل فيما يخص نظرية القطوع المخروطية التقدم على عمل أبلونيوس في مسألة واحدة هي القسمة التوافقية. وقام، كمعاصريه القوهي والسجزي، بدراسة الرسم المتصل للقطوع المخروطية واهتم بالخواص المناظرية للمخروطات. لقد حللنا بالتفصيل مساهمته في التحليل الهندسي ولاسيما برهانه على مقدمة أرخميدس التي كانت كما رأينا موضع نقاش اشترك فيه معاصروه، أبو الجود بن الليث، السجزي والشني. كما بينا أخيراً كيف شارك هذا المهندس، المهتم بصورة رئيسية بنظرية القطوع المخروطية وبالتحليل الهندسي، في إنجاز فصل طرق الإسقاطات.

هناك سمتان أخريان لإكمال هذه الصورة لمهندس من مدرسة بغداد في النصف الثاني من القران العاشر. أولاهما هذه الروابط الوثيقة، التي ما فتئنا نلح عليها، والتي تجمع بين البحث الهندسي والبحث في علوم أخرى، المناظر والفلك في هذه الحالة. لقد وضعت دراسات الرسم المتصل للمنحنيات والخواص المناظرية للمخروطات في خدمة المناظر، في حين أثيرت الدراسة الإسقاطية من مسائل طرحت في عمل الأصطرلاب والساعات الشمسية. لكن هذا الوجه التطبيقي للهندسة، إذا صح القول، لم يكن مقتصراً على ابن سهل: إننا نراه في أعمال المهندسين المعاصرين الآخرين، البوزجاني والقوهي والصاغاني على سبيل المثال. ولقد تجسد هذا الوجه لاحقاً على نحو أساسي وباهر في أعمال ابن الهيثم.

والسمة الثانية تتصل "بالوسط" الهندسي الذي انغمس فيه ابن سهل. فكل ما كان يجري في هذا الوسط من تحديات ومراسلات وتعاون بمحض الإرادة تارة وبالإكراه تارة أخرى يذكر بشكل مدهش بالسمات التي اتصف بها الوسط العلمي الأوربي الذي جاء بعد الأول بنحو سبعة قرون. إلا أن الدراسات المجتمعية لعلم ذلك الزمان ما تزال غير كافية لإعطاء أي حكم نهائي. لنذكر ببساطة، في الحالة التي تعنينا هنا، أن عملين من أعمال ابن سهل الثلاثة التي وصلت إلينا، قد أعدا للإجابة عن سؤال طرحه طرف ثالث. فقد قام بدراسة المسبع المنتظم بناء على طلب من

السجزي، ويبدو أن هذه الدراسة كانت متداولة في تراسل الرياضيين. لقد أكمل عمل ابن سهل هذا معاصروه، كابن الليث والقوهي والصاغاني فيما تابع هو نفسه بحث القوهي في موضوع آخر. فكل شيء يدل إذاً أن بحث ابن سهل الهندسي قد تطور في قلب حاضرة علمية، غاصة بالسكان ونشيطة وأنه كان مدعوماً بسلطة البويهين.

بسم الله الرحمن الرحيم

كتاب صنعة الأصطرلاب بالبرهان

تأليف

أبي سهل ويجن بن رستم القوهي

وهو مقالتان

المقالة الأولى: أربعة فصول

الفصل الأول

في صفة الأصطرلاب والرسوم عليه

الأصطرلاب آلة مرسومٌ عليها مثالُ سطحين، أحدهما متحرك على الآخر باستدارة، والآخر ساكن؛ إن كان كريًا فكرتين، وإن كان مسطحًا فسطحين، وتَعَلّمُهما من علم النجوم بمقدار ما هو عليه من الأعمال حسب ما تحكمه الصنعة ويبلغه الحسّ. والغرض في صنعتها حسنها وصحتها باختيار الناس في زمانهم لها. وصحتها بمقارنتها للأشياء الحقيقية. فأما من جهة الحسن، فواجب أن تكون حسنة الجسم والمقدارِ والثخنِ والرقة والتصقّل وما أشبهها مع السطوح والخطوط والنقط المرسومة والكتابة؛ ومن جهة الصحة فأن تكون السطوحُ والخطوطُ التي عليها صحيحةً ووضعُ الخطوط والنقط على السطوح صحيحًا

2 الأصطرلاب: يكتبها بالصاد أو بالسين، وكلاهما مستعمل – 4 ويجن: ويحى – 9 مرسوم: مرسومة – 10 فكرتين ... فسطحين: هذا صواب محض، ويجوز النصب والرفع، فالنصب على إضمار الفعل والرفع على تقدير خبر لمبتدأ محذوف – 11 والغرض: والعرض – 12 لها: قد يبدو لأول وهلة أن المقصود لهما أي الحسن والصحة، وهذا خطأ؛ فالصحة ليست متوقفة على الزمان – 13 حسنة: حسن – 15 صحيحًا: صحيحة.

أيضًا. والوضع الصحيح في مثال الأصطرلاب قسمان: أحدهما معلوم بالحقيقة والآخر معلوم بالرصد. أما المعلوم بالحقيقة، فيكون على السطح الساكن؛ وأما المعلوم بالرصد، فيكون على السطح المتحرك. فواجب على صانع الأصطرلاب أن يكون عارفًا بما هو معلوم بالحقيقة عند أصحاب هذه الصناعة وبالمعلوم بالرصد، وأن يعرف من أمر الرصد ما يُوجد به المقدار الذي يحتاج إليه في هذه الآلة أو يرجع في أمرها إلى رصد أحد أُصحاب الإرصاد فيتقرر عنده. فإن أراد عمل أصطرلاب كري، فليعمل حكاية ما تقرر عنده حسب ما وصفنا؛ وإن أراد مسطحًا، احتاج إلى علم تسطيح الكرة.

والكرة تتسطح على سطوح مختلفة الأجناس من مواضعَ مختلفة، لكن لا يتحرك أحد السطحين منها على الآخر بحركة الكرة إلاّ أن يكون ‹على› السطوح المخروطية أو الأسطوانية أو ما / أشبهها من ذوات المحور، التي محورها محور الكرة، والمستوية التي يكون ٢٥٥ محور الكرة عمودًا عليها. أما على السطوح المخروطية أو الأسطوانية، فإن تسطيح الدوائر التي على الكرة يكون فصولاً مشتركة للمخروطية وللأسطوانية أو للمخروطين أو للأسطوانيين، لأن تسطيح الكرة على قسمين: أحدهما أسطواني والآخر مخروطي. والأسطواني هو الذي يكون عن الدوائر التي على الكرة أساطين متوازية المحاور على السطح الذي تتسطح الكرة عليه وعن الخطوط والنقط التي على تلك الكرة سطوحًا وخطوطًا موازية لتلك المحاور على ذلك السطح.

والمخروطي هو الذي يكون عن الدوائر التي على الكرة مخروطات رؤوسها نقطة واحدة وقواعدها على السطح الذي تتسطح الكرة عليه؛ وكان كلُّ السطوح والخطوط والنقط التي على الكرة على مقابلة كلِّ السطوح والخطوط والنقطة التي على ذلك السطح الذي تتسطح عليه الكرة، بعضها لبعض، ولنقطة واحدة، وهذه النقطة هي رأس المخروطات.

وإذا كان تسطيح الكرة أسطوانيًا موازي المحور لمحور الكرة، أو مخروطيًا رأسه على المحور على غير قطب الكرة، فإنه ينطبق سطحان من الكرة أحدهما على الآخر في ذلك

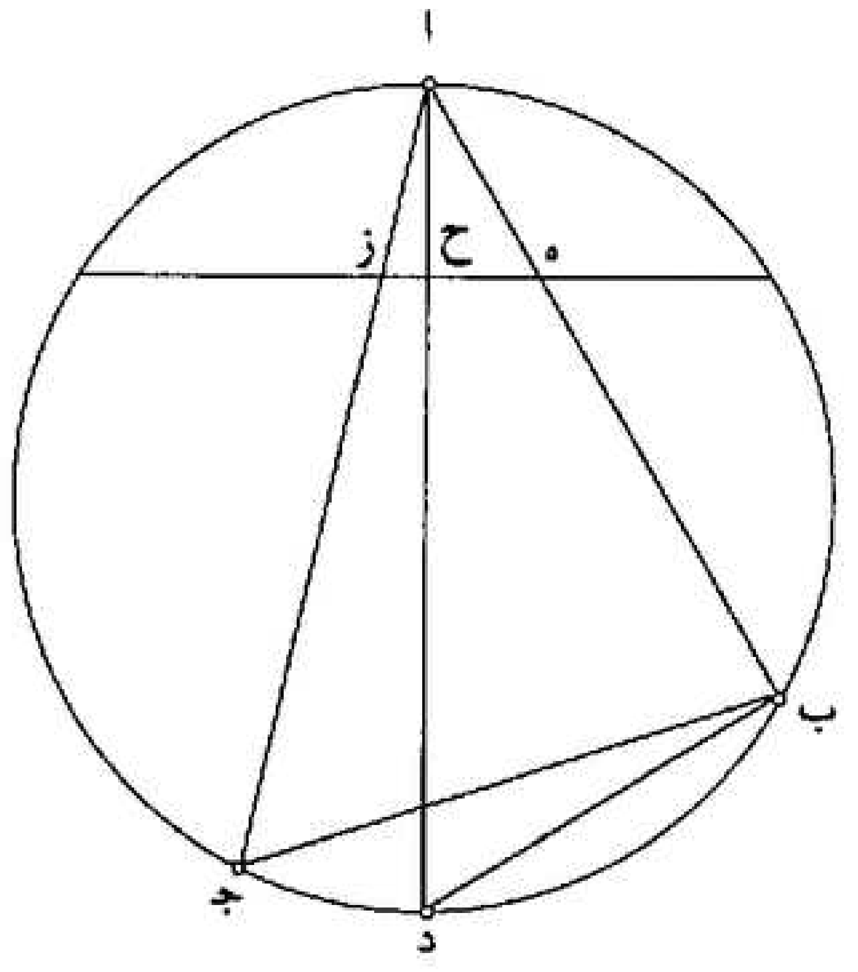
1 أحدهما: احداهما – 6 فيتقرر: فيقرر / أصطرلاب: اصطرلابا – 7 أراد: ارد – 9 الكرة: الكل / ‹على›: نجدها فيما نقله ابن سهل ولكن لا نجدها في مخطوطة القوهي؛ في حين سنجدها في سطر 11 ولا نجدها فيما نقله ابن سهل؛ وربما كانت المخطوطة الأم في غير موضعها فأهملها ناسخ مخطوطة ليدن – 12 للمخروطية وللأسطوانية: للمخروط واللأسطوانة [س] / وللأسطوانية: والاسطوانية – 13 للأسطوانيين: كتب «للاسطوانيتين»، ثم «الاسطوانيتين» في الهامش [ق] للاسطوانين [س]؛ ومن الواضح أن «للمخروطين وللأسطوانيين» هما نعتان للسطحين – 14 أساطين: بأساطين [س] – 15-16 سطوحًا وخطوطًا: سطوح وخطوط، وجب النصب لأن الاسمين معطوفان على أساطين؛ بسطوح وخطوط [س] – 16 موازية: متوازية – 18 وكان: او كان – 19 النقطة: النقط.

السطح، وتكون الدوائر التي على الكرة – غير الدوائر التي محور الكرة عمود عليها – ليست تقع دوائرَ في ذلك السطح، لكنها قطوع المخروط أو غيرها. وإذا كان التسطيح على غير السطح المستوي الذي محور الكرة عمود عليه، فإنه يمكن ألاّ تتسطح الكرة أو شيء منها.

وإن كان التسطيح أسطوانيًا غير موازي المحور لمحور الكرة أو مخروطيًا رأسه على غير المحور، فإن لتسطيحها أحوالاً سوى ما وصفناه، وتركنا ذكرها إذ ليس ذلك غرضنا في هذا الكتاب.

وإذا كان مخروطيًا رأسه على قطب الكرة وتسطيحها على سطح مستوٍ، محور الكرة عمود عليه، لم يكن له شيء من هذه الأحوال البتّة، ولم يبق شيء من الكرة لا يتسطح، ولم ينطبق سطحان من الكرة أحدهما على الآخر في ذلك السطح، ولم تكن الدوائر التي على الكرة على ذلك السطح قطوع المخروط، بل كانت دوائر أو خطوطًا مستقيمة، إذا كان التسطيح من/ الدوائر التي تمرّ على ذلك القطب بعينه. ٢٥٦

نريد أن نبيّن أنه إذا كان رأس المخروطات على قطب الكرة، فإن تسطيح الدوائر التي على الكرة دوائرُ أو خطوطٌ مستقيمة على السطح المستوي الذي محور الكرة عمود عليه، وتكون خطوطًا مستقيمة عن الدوائر المارّة بذلك القطب بعينه.



1 غير: إلا [س] / عمود: عمودا – 2 التسطيح: السطح – 3 الذي: كتبها «التي» ثم صححها عليها / محور الكرة: مكررة / الكرة (الثانية): كل رسوم الكرة [س]. يأخذ القوهي بهذا التعبير، وهو يعني الرسوم التي على الكرة، وهذا ما انتبه إليه ابن سهل عندما كتب: يعني «شيء من الكرة» شيئًا من رسوم الكرة (انظر ص. 955، سطر 13)؛ وتفسير ابن سهل هنا يبين أن النص كان أصلاً دون كلمة «رسوم» – 8 وإذا: فإذا [س] / وتسطيحها: تسطيحًا [س] / مستوٍ: مستوي – 15 وتكون: ويكون.

مثال ذلك: أن دائرة ا ب جـ د هي الدائرة التي تمرّ بمحور الكرة وهو ا د، وبقطب الدائرة التي على الكرة ‹والتي يكون على سطحها تسطيح الكرة›، وهو ا. وسطح ه ز هو الذي محور الكرة – وهو ا ح – عمود عليه. وليتوهم أن هذا السطح في السَمْك وخط ه ز الفصل المشترك لهما ونصل خطوط ا ب ا جـ ب د ب جـ. فمثلث ا ب جـ قائم على سطح ه ز وعلى الدائرة التي قطرها ب جـ، لأنه في السطح الذي يمرّ بمحور الكرة وبقطب تلك الدائرة. ولأن زاوية ا ب د مساوية لزاوية ا ح ه، لأن كل واحدة منهما قائمة، وزاوية د ا ب مشتركة في هذا المثال، ‹فمثلث ا ب د شبيه بمثلث ا ح ه، فزاوية ا د ب مثل زاوية ا ه ح، ولكن زاوية ا د ب مثل زاوية ا جـ ب، فزاوية ا ه ح مثل زاوية ا جـ ب، وزاوية ز ا ه مشتركة في هذا المثال›، فمثلث ا ب جـ شبيه بمثلث ا ز ه. وقد بيّن أبلونيوس في *المخروطات* أنه إذا كان ذلك كذلك وكان أحد السطحين القائم عليهما المثلث دائرة، كان السطح الآخر دائرة أيضًا. ولكن أحد هذين السطحين في الكرة دائرة؛ فإن فرضناها في المخروط الذي رأسه نقطة ا، كان السطح الباقي وهو ه ز في المخروط دائرة، وخط ه ز قطر تلك الدائرة. وقد بيّن أبلونيوس أيضًا أن غير هذين السطحين أو السطوح الموازية لهما ليست بدوائر في المخروط لكنها قطوع مخروط. وأما الدوائر التي تمرّ على ذلك القطب بعينه، فلأن ذلك القطب على السطح المستوي الذي عليه تلك الدائرة. والسطح الذي تتسطح الكرة عليه مستوٍ، والفصل المشترك / للسطحين المستويين – ٢٥٧
وهو تسطيح تلك الدائرة – خط مستقيم. فالخطوط المستقيمة تكون عن الدوائر المارّة بذلك القطب بعينه. فتسطيح الدوائر التي على الكرة دوائر وخطوط مستقيمة على السطح المستوي الذي محور الكرة عمود عليه؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

الفصل الثاني
في تسمية ما يحتاج إليه في عمله وأن أعماله صنفان

فإذا كان تسطيح الكرة على ما وصفنا في الفصل الأول، فالدوائر والخطوط والنقط التي على الكرة تسمّى نظائر الدوائر والخطوط والنقط التي على ذلك السطح، بعضها لبعض.

2 ا: د – 11 أيضًا. ولكن: وايضا لكن – 13 بيّن: تبيّن – 23 تسمّى: سمى.

والكرة التي تتسطح على سطح الأسطرلاب مثال الكرة التي مركزها مركز الأرض وتدور حول قطبين بالحركة الأولى. ويسمّى أحد هذين القطبين الشمالي والآخر الجنوبي. ونصف الكرة، من السطح الذي يمرّ عليه مركز الشمس بحركتها الوسطى، إلى جهة القطب الشمالي يسمّى الشمالي والنصف الآخر يسمّى الجنوبي وذلك السطح يسمّى منطقة البروج. والسطح المستوي الذي يمرّ على مركز الأرض يسمّى أفق الموضع الذي ينتهي إليه العمود من المركز على ذلك السطح. والنقطتان اللتان على الكرة على ذلك العمود تسمّيان قطبي ذلك الأفق. والدائرة التي تمرّ بقطبي الكرة وعلى أقطاب الآفاق تسمّى دائرة نصف نهار تلك الآفاق. والدوائر التي تمرّ على قطبي الأفق تسمّى دوائر ارتفاع ذلك الأفق. والأفق، الذي بُعدُ قطبه من أحد قطبي الكرة على دائرة نصف نهار ذلك الأفق معلومٌ، يُسمّى أفقًا معلومًا. وإذا كان تسطيح الكرة على سطح الأسطرلاب من القطب الجنوبي، يسمّى الأسطرلاب شماليًا، وإنما سمّي شماليًا لأن نصف الكرة الشمالي يتسطح بالتمام والنصفَ الآخر لا يتسطح بالتمام على سطح الأسطرلاب، وإذا كان تسطيحًا من القطب الشمالي يسمّى الأسطرلاب جنوبيًا، وإنما سمّي جنوبيًا لأن نصف الكرة الجنوبي يتسطح بالتّمام والنصفَ الآخر لا يتسطح بالتّمام، كما ذكرناه في الشمالي.

فلا فرقَ بين الدوائر المرسومة على الأسطرلاب الشمالي وبين الدوائر / المرسومة على ٢٥٨ الأسطرلاب الجنوبي، غير أن التسطيح منها عليه أحدهما من القطب الجنوبي والثاني من القطب الشمالي، لأن الدوائر المرسومة على كل واحد منهما، في السطح الساكن، تسطيحُ أفق معلوم. والدوائر الموازية له في الكرة المعلومة الأبعادِ منه – على دوائر ارتفاعه – تسمّى مقنطرات معلومة لذلك الأفق. وتسطيح دوائر الارتفاع، المعلومة الأبعاد من دائرة نصف نهاره على تلك الدوائر المتوازية، تسمّى سموتًا معلومة لذلك الأفق، والفصولُ المشتركة لمحيطات كلِّ دائرتين ‹من› دوائر هذين الجنسين ‹تسمّى› نقطًا معلومة لذلك الأفق. وفي السطح المتحرك، تسطيح أفق ينطبق عليه تسطيح منطقة البروج يسمّى دائرة البروج، ومقنطراته تسمّى الدوائر الموازية لدائرة البروج، وسموته على ذلك الأفق تسمّى أقسام دائرة البروج؛ والفصول المشتركة لمحيطات كل دائرتين من دوائر هذين الجنسين تسمّى نقطًا معلومة من دائرة البروج. فظاهر من ذلك أن الرسم الذي على السطح المتحرك هو أحد الرسوم التي يمكن أن تكون على السطح الساكن، وعمل ذلك أحد أعماله.

1 تتسطح: يتسطح – 6 العمود: مكررة – 7 تسميان: يسميان – 8 تسمّى (الثانية): يسمي – 9 نهار: النهار – 16 عليه: على – 20 نهاره: النهار، ثم ضرب على اللام ألف بالقلم – 22 السطح: تسطح / تسطيح (الثانية): سطح / يسمّى: تسمى – 23 تسمّى: يسمى – 24 تسمّى: يسمي – 26 تكون: يكون.

فأما بعض تلك النقط فهي مراكز الكواكب، لأنها معلومة من دوائر ‹هذين الجنسين ودائرة› البروج برصد أصحاب الإرصاد، وكذلك دائرة البروج، وكذلك ما قلنا آنفًا إن الرسوم التي على السطح المتحرك معلومة بالرصد. فتبيّن أن تسطيح الدوائر من الكرة على هذين السطحين، المتحرك والساكن، للأسطرلابين الشمالي والجنوبي، من هذين الجنسين — أعني المقنطرات والسموت.

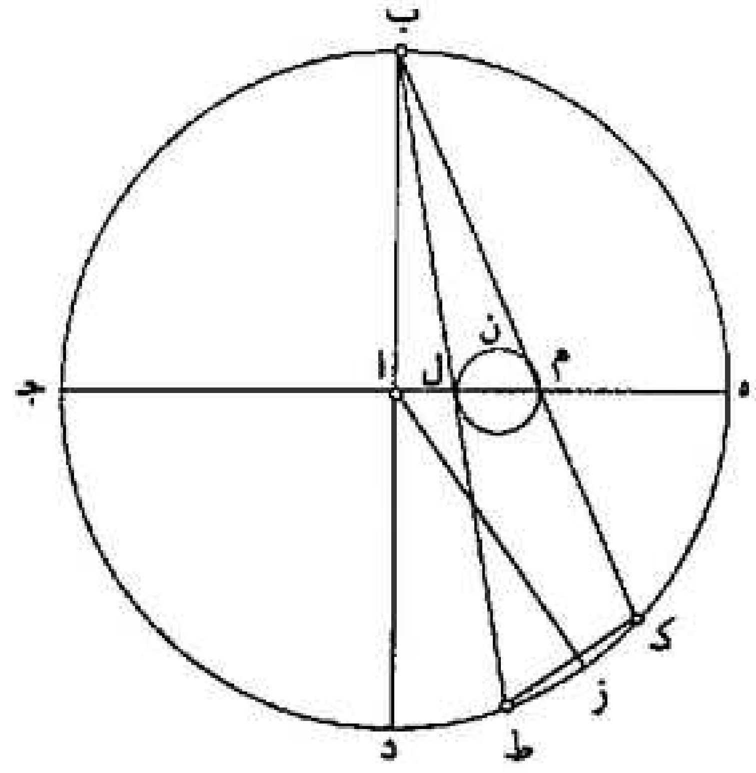
الفصل الثالث
في عمل أحد الصنفين وهو المقنطرات

نريد أن نرسم على سطح الأسطرلاب، على مركزه نقطة ا، مقنطرات معلومات لأفق معلوم شماليًا كان أو جنوبيًا.

فليكن سطح الأسطرلاب عليه ‹دائرة› ب جـ د ه ومركزها ا، وخطا ب د جـ ه يتقاطعان على زوايا قائمة؛ ونريد أن نرسم مقنطرات معلومات الأفق بُعد قطبه من القطب الشمالي من الدائرة التي تمرّ بهذين القطبين بمقدار قوس د ز المعلومة، من محيط دائرة ب جـ د ه. فنجعل ‹قوس› ز ط من محيط دائرة ب جـ د ه بمقدار / ما أردنا أن يكون ٢٥٩
بعد أول المقنطرات من قطبه ز، ز ك مساويًا لـ ز ط.

فإن كان الأسطرلاب شماليًا، فإنا نصل خطي ب ط ب ك، وإن كان جنوبيًا فإنا نصل د ط د ك حتى يلقيا خط جـ ه على نقطتي ل م. ونجعل خط ل م قطر دائرة ل ن م.

فأقول: إن دائرة ل ن م مقنطرة، تسطيحها من الدائرة التي تمرّ بنقطتي ك ط وقطبها نقطة ز من الكرة، التي مركزها نقطة ا ومحورها خط ب د، على سطح الأسطرلاب.



3 معلومة: معلوم / بالرصد: الرصد – 4 للأسطرلابين: والاسطرلابين – 14 ز، ز ك: رر ك.

برهان ذلك: أنا إن فرضنا أن نقطة د القطب الشمالي ونقطة ب القطب الجنوبي، وكل واحدة من هاتين النقطتين رأس المخروط الذي يمرّ بالدائرة، التي تمرّ بنقطتي ك ط وقطبها نقطة ز، فتسطيح هذه الدائرة في السطح القائم على سطح ب جـ د ه من ‹خط› ه ا يكون دائرة عن المخروط، كما بيّنا في الشكل المتقدّم، لأن محور الكرة عمود على ذلك السطح. فإذا توهمنا سطح ب جـ د ه ثابتًا ودار سطح الأسطرلاب حول نقطتي جـ ه حتى ينطبق ذلك ‹السطح على› السطح القائم على سطح ب جـ د ه على خط ه ل، انطبقت دائرة ل ن م على المقنطرة التي تتسطح عن الدائرة التي تمرّ بنقطتي ك ط وقطبها نقطة ز على ذلك السطح، عن المخروط، لأن قطرهما واحد بعينه وهو ل م. فدائرة ل ن م مقنطرة تسطيحها من الدائرة، التي قطبها نقطة ز وتمرّ بنقطتي ك ط، في سطح الأسطرلاب، وكذلك نرسم باقي المقنطرات حتى يُنتهى إلى الأفق؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

الفصل الرابع

في عمل الصنف الآخر وهو السموت

نريد أن نرسم على سطح أسطرلاب، مركزه نقطة ا، ‹دوائر› تسطيحها سموت معلومة / لأفق معلوم. ٢٦٠

فليكن سطح الأسطرلاب عليه دائرة ب جـ د ه، ومركزها نقطة ا. وخطا ب د جـ ه قطران يتقاطعان على زوايا قائمة، وقطبا الأفق المعلوم نقطتا ز ط. ونريد أن نرسم على سطح الأسطرلاب تسطيح الدائرة التي تمرّ بنقطتي ز ط وبنقط من الأفق أو الدوائر الموازية له، وبعدها من دائرة نصف نهاره معلوم.

فنجعل خط ك ل قطر أفق، قطبه نقطة ز، أو قطر أحد الدوائر الموازية له. فإن لم يكن خط ك ل قطر الدائرة التي تمرّ على ذلك القطب بعينه، وهو ب، فإن تسطيح تلك الدائرة على سطح الأسطرلاب دائرة، ولتكن ن م؛ وإن كان خط ك ل ليس بقطر الأفق، فإنا نخط على خط ك ل نصف دائرة ك س ل، ونجعل قوس ل س بالمقدار الذي نريد أن يكون بُعد سمته من دائرة نصف نهاره. ونجعل س ع عمودًا على خط ك ل، ونصل

1 ذلك: مكررة / د: كتب تحتها ب / ب: كتب تحتها د – 4 ه ا: ه ل – 5 ثابتًا: ثانيا – 7 انطبقت: انطبق / تسطح: يتسطح – 14 مركزه: مركز – 18 الموازية: المتوازية – 19 له: مكررة – 22 ولتكن: وليكن.

خطوط ب ع ب ز ب ط حتى تلقى خط جـ ه على نقط ص ف ق؛ ونجعل ص ن عمودًا على خط جـ ه ونخط على نقط ف ن ق دائرة ف ن ق.

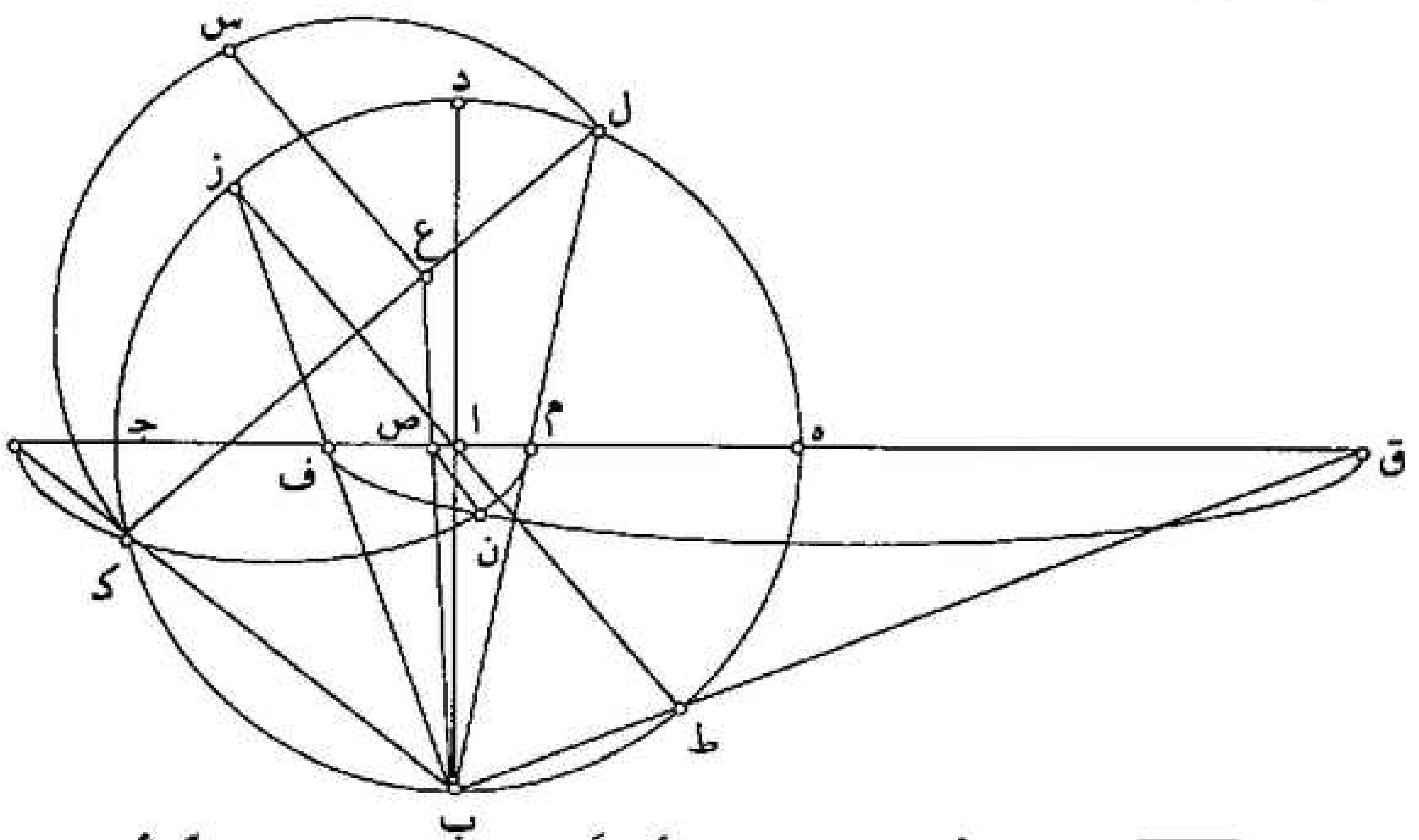
فأقول: إن هذه الدائرة تسطيح دائرة السمت الذي يمرّ بنقطتي ز ط وبنقطة من الأفق – أو من الدوائر الموازية له – وبعدها من دائرة نصف نهاره بمقدار قوس ل س من دائرة كـ س ل.

برهان ذلك: أنا إن فرضنا نقطتي ب د قطبي الكرة، كانت دائرة ب جـ د ه نصف نهار الأفق الذي قطباه نقطتا ز ط. وإن توهمنا خط س ع عمودًا على سطح ب جـ د ه على نقطة ع، كانت س على محيط الدائرة التي قطرها خط كـ ل وقطباها نقطتا ز ط، لأن تلك الدائرة قائمة على سطح ب جـ د ه وكـ ل قطرها. فبُعد نقطة س من نصف نهاره – ب جـ د ه – على تلك الدائرة بمقدار قوس ل س. فالسمت المعلوم في الكرة هو الدائرة التي تمرّ بنقط ز ط س، إذا كانت نقطة س في السمك وفي السطح القائم على سطح ب جـ د ه من خط كـ ل. أما نظير نقطة ز فنقطة ف، وأما نظير نقطة ط فنقطة ق. وأما نظير نقطة س، فلأنها على محيط الدائرة التي قطرها / كـ ل، فهو الفصل ٢٦١
المشترك للمقنطرة التي تتسطح عن تلك الدائرة على السطح القائم على سطح ب جـ د ه من خط جـ ه والعمود الخارج من نقطة ص على سطح ب جـ د ه. فتسطيح الدائرة التي تمرّ بنقط ز ط س – إذا كانت نقطة س في السمك – هو الدائرة التي تمرّ بنقطتي ف ق وبالفصل المشترك لخطين، أحدهما عمود خارج من نقطة ص على سطح ب جـ د ه، والآخر محيط المقنطرة التي تتسطح عن الدائرة التي قطرها كـ ل على السطح القائم على سطح ب جـ د ه من خط جـ ه. فإذا توهمنا أن سطح ب جـ د ه ثابت ودار سطح الأسطرلاب حول نقطتي جـ ه حتى ينطبق على السطح القائم على سطح ب جـ د ه، انطبقت دائرة ن م على الدائرة التي تتسطح عن تلك الدائرة، و‹تسطيح› عمود س ع على العمود الخارج من نقطة ص على سطح ب جـ د ه، و‹تسطيح› نقطة س على ذلك الفصل المشترك ‹– ن – للعمود الخارج من نقطة ص ولدائرة› ف ن ق، فالدائرة التي تمرّ بنقط ف ن ق تنطبق على الدائرة التي تتسطح من الدائرة التي تمرّ بنقط ز ط س، إذا كانت نقطة س على محيط تلك الدائرة. والدائرة التي تمرّ بنقط ز ط س فهي السمت

1 تلقى: يلقى / ص ف ق: و ص ق – 2 نقط: نقطة / ف: و – 3 بنقطتي: نقطتي – 10 الدائرة: الدايرا / هو: هي – 11 التي: اللتي – 12 كـ ل: حـ ه – 14 المشترك: المشتركة – 15 والعمود: والعامود – 16 س (الأولى): ش – 22 س: د – 23 ف ن ق: فوق السطر – 24 بنقط: بنقطة / بنقط: بنقطة – 25 بنقط: بنقطة.

المعلوم، لأنها تمرّ بنقطتي ز ط المعلومتين وبالنقطة التي بُعدها من دائرة نصف نهاره بمقدار قوس ل س المعلومة، فدائرة ف ن ق تسطيح السمت المعلوم من الكرة على سطح الأسطرلاب.

وكذلك رسم باقي دوائر السموت.



فإن كان خط ك ل قطر الأفق، فاعمله أيضًا بهذا التدبير، إلاّ أنه لا يحتاج إلى عمل نصف دائرة ك س ل الآخر.

فإن كان خط ك ل قطر الدائرة التي تمرّ على ذلك القطب بعينه، وهو ب، فإن تسطيح تلك الدائرة على السطح القائم على سطح ب جـ د ه يكون خطًا مستقيمًا كما بيّنا قبل.

ونجعل خط / ب ل قطر دائرة موازية لدائرة الأفق، قطبها نقطة ط، ونخرجه على ٢٦٢ الاستقامة إلى نقطة ك، ونجعل خط ك ع عمودًا على ب ك، ونجعل قوس ل س من دائرة ب جـ د ه بمقدار ما أردنا أن يكون بعد سمتها من دائرة نصف نهاره، ونصل خط ب س ونخرجه حتى ينتهي إلى نقطة ع، ونجعل خط ك ن عمودًا على خط جـ ا ق، ونجعل ك ن مساويًا لخط ك ع، ونخط على نقط ف ن ق دائرة.

فأقول: إن دائرة ف ن ق تسطيح للدائرة التي تمرّ على نقطتي ز ط وبنقطة من الدائرة التي تمرّ بقطب ب، كما وصفنا، وبُعدها من دائرة نصف نهارها بمقدار قوس ل س من دائرة ب جـ د ه.

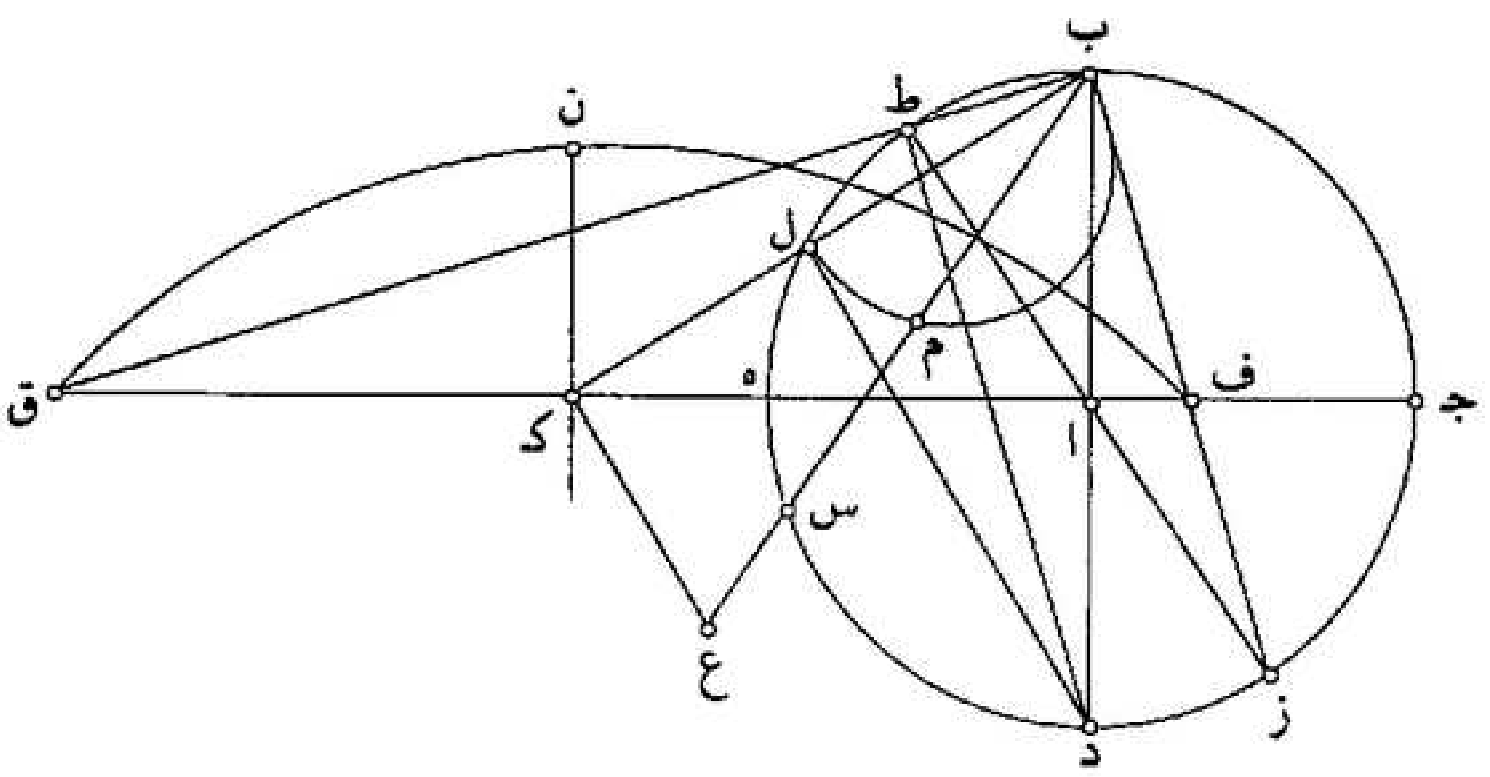
2 تسطيح: سطح – 11 عمودًا: عمود – 12 سمتها: بسمتها – 13 عمودًا: عمود – 14 ق: ب – 15 ف ن ق: فيق.

برهان ذلك: أنا نخط على خط ب ل نصف دائرة ب م ل، فقوس م ل شبيهة بقوس ل س المفروضة من دائرة ب جـ د ه، لأن زاوية ل ب م مشتركة على محيطي الدائرتين. فإن توهمنا أن سطح ب جـ د ه ثابت ودار نصف دائرة ب م ل مع مثلث ب كـ ع حول نقطتي ب كـ حتى ينطبق على الدائرة التي قطبها ط، انطبق خط كـ ع على العمود الخارج من نقطة كـ على سطح ب جـ د ه، لأن تلك الدائرة قائمة على سطح ب جـ د ه وزاويةَ ب كـ ع قائمة. فالسمت المعلوم في الكرة هو الدائرة التي تمرّ على نقط ط م ز، إذا كانت نقطة م في الكرة وفي السطح القائم على سطح ب جـ د ه من خط جـ ه. أما نظير نقطة ز فنقطة ‹ف›، وأما نظير نقطة ط فنقطة ق، وأما نظير نقطة م فنقطة ع، لأن خط كـ ع عمود على سطح ب جـ د ه، فتسطيح الدائرة التي تمرّ على نقط ز ط م هو ‹الدائرة› التي تمرّ على نقط ف ع ق، لأن نقطة ع في السطح القائم على سطح ب جـ د ه من خط جـ ه.

وإن توهمنا أيضًا أن سطح ب جـ د ه ثابت ودار السطح الذي عليه نقط ف ع ق، حول نقطتي ف ق حتى ينطبق على سطح ب جـ د ه، انطبقت نقطة ع على نقطة ن لأن خط كـ ع مساوٍ لخط كـ ن. والدائرة التي تمرّ على نقط ف ع ق تنطبق على الدائرة التي تمرّ على ف ن ق لأن وترهما واحد بعينه، وهو ف ق. فالدائرة التي تمرّ على نقط ف ن ق تسطيح الدائرة التي تمرّ على نقط ط م ز؛ / والدائرة التي تمرّ على نقط ط م ٢٦٣ ز هي السمت المعلوم، لأنها تجوز ‹على› نقطتي ط ز ‹و›على النقطة التي بُعدها من دائرة نصف نهاره بمقدار قوس ل س المفروضة من دائرة ب جـ د ه. فالدائرة التي تمرّ على نقط ف ن ق ‹هي› تسطيحُ دائرةِ السمتِ المطلوبُ، ورسمها بحسب الدائرة التي تمرّ على قطب ب الموازية للأفق التي قطباها ز ط. وكذلك نرسم ‹تسطيح› باقي دوائر السموت؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وفي هذا الشكل أيضًا نقول: إن مراكز الدوائر التي تمرّ على نقطتي ف ق تكون على خط كـ ن.

1 شبيهة: شبيه – 5 العمود: العامود – 7 كانت: كان – 10 نقط: نقطة / هو: هي – 13 ينطبق: تنطبق / انطبقت: انطبق – 14 تنطبق: ينطبق – 15 ف ق: بق – 16 ف ن ق: ب ر ق – 17 ‹على›: تصح العبارة دونها، ولكن أضفناها اتساقًا مع لغة المؤلف / على: مكررة – 20 دوائر: كتبها الدوائر، ثم حكّ اللام ألف – 22 ف: ب / تكون: يكون.



برهانه: أنا نصل خطي ل د ط د. فلأن زاوية د ط ب مساوية لزاوية ق ا ب – لأن كل واحدة منهما قائمة – وزاوية د ب ط مشتركة، فزاوية ب د ط الباقية مساوية لزاوية ب ق ا الباقية. وبمثل هذا البرهان، تكون زاوية ا ک ب مساوية لزاوية ل د ب. وزاوية ل د ب ضعف زاوية ط د ب لأن قوس ل ب ضعف قوس ط ب، فزاوية ا ک ب ضعف زاوية ب ق ا، ولكن زاوية ب ک ا مساوية لزاويتي ک ب ق ک ق ب لأن زاوية ب ک ا خارجة من مثلث ک ب ق. فزاوية ک ق ب مساوية لزاوية ک ب ق، فخط ک ق مساوٍ لخط ک ب، فنقطة ک مركزٌ للدائرة التي تمرّ على نقط ف ب ق لأن زاوية ف ب ق قائمة، فخط ک ف مساوٍ لخط ک ق. فمراكز الدوائر التي تمرّ على نقطتي ف ق تكون على خط ک ن لأن خط ک ن عمود على خط ف ق؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فقد علمنا رسم نقطة معلومة لأفق معلوم لأن نظيرها فصل مشترك لسمت ومقنطرة معلومة لأفق معلوم. فقد رسمنا تسطيح الدوائر التي / ذكرناها في سطح الأسطرلاب ٢٦٤ بالتّمام مع نقط معلومة لأفق معلوم، بَعدَ أن فرضنا مركز الكرة ومحورها في سطح الأسطرلاب، أعني مركز الأسطرلاب وقطر دائرته؛ فبيّن من ذلك أنه إذا كان مركز الكرة وقطرها على سطح الأسطرلاب معلومين، فإن أعمال تسطيح الدوائر والنقط، التي ذكرناها على ذلك السطح، بتمامها معلومة.

تمت المقالة الأولى، والحمد لله وحده.

1 د ط ب: ط ب – 4 وزاوية: فزاوية – 6 مثلث: مثل – 7 ف ب ق: و ن ق – 8 ف ب ق: ق ب ق – 9 تكون: يكون – 11 نقطة: نقط.

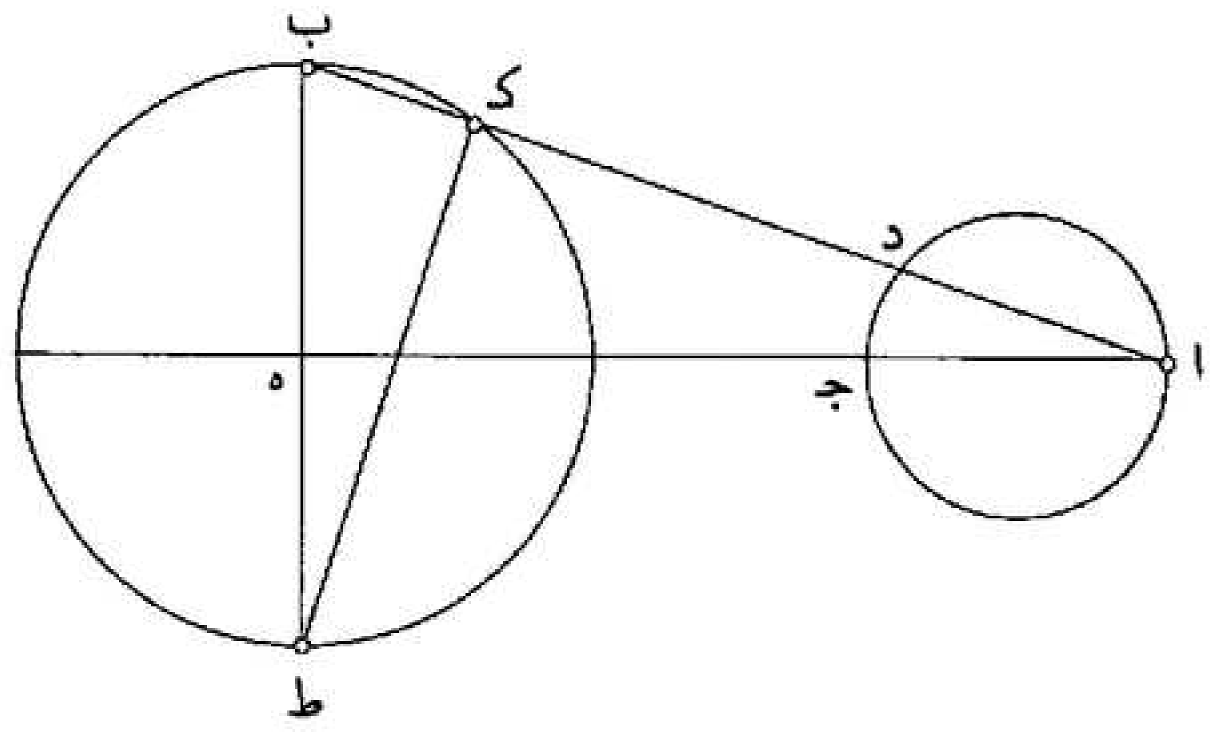
المقالة الثانية: سبعة فصول

الفصل الأول
في عمل الأسطرلاب
من جهة فرض نقطة بُعد نظيرها من قطب الكرة معلوم

‹اَ› إذا كان في سطح الأسطرلاب نقطة اَ معلومة، وفرضنا بُعد نظيرها من قطب الكرة معلومًا؛ وقطبُ الكرة – وهو بَ – معلومٌ؛ ونريد أن نعمل باقي الأعمال بتمامه.

فنصل خط ا ب، وندير على نقطة اَ دائرة ا جـ د، ونجعل قوس جـ د من دائرة ا جـ د بمقدار بُعد نظير النقطة المفروض من قطب بَ. ونجيز على نقطتي اَ جَـ خطًا مستقيمًا، وهو ا جـ ه، ونجعل ب ه ط عمودًا على خط ا جـ ه.

فأقول: إن نقطة هَ في سطح الأسطرلاب مركز الكرة التي نصف قطرها خط ه ب، وبعد نظير نقطة اَ من قطب بَ بمقدار قوس جـ د من محيط دائرة ا جـ د.



برهان ذلك: أنا نخط على مركز هَ وببعد ه ب دائرة ب ك ط، ونصل خط ك ط. فلأن زاوية ب ك ط مساوية لزاوية ب ه ا – لأن كل واحدة منهما قائمة – وزاوية ك ب ه مشتركة لمثلثي ا ب ه ط ب ك، فزاوية ب ط ك الباقية مساوية لزاوية ب ا ه الباقية، فقوس ب ك شبيهة بقوس د جـ؛ وقوس د جـ بمقدار البعد المفروض الذي أردنا أن يكون نظير نقطة اَ، وهو كَ، من قطب بَ. فقوس ب ك بمقدار البعد المفروض ونقطة كَ نظيرة

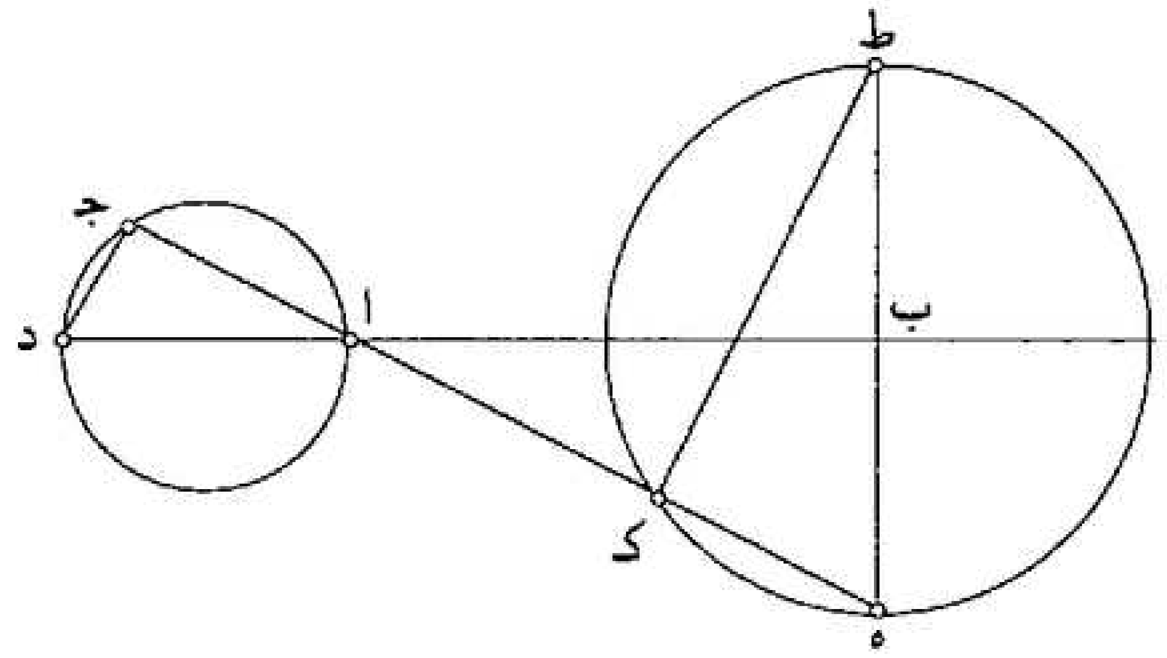
6 أن: ا / بتمامه: وهو جائز، وفي مواضع أخرى نجد «بتمامها»، وآثرنا ترك النص كما هو – 10 التي: الي – 12 وبعد: وبعد / ب ك ط: مكط – 15 شبيهة: شبيه.

نقطة آ. فنقطة ه مركز الكرة / التي نصف قطرها خط ه ب وبعد نظير نقطة آ، وهو ک، ٢٦٥
من قطب ب بمقدار قوس د جـ المفروضة من دائرة ا جـ د. فلأن مركز الكرة، وهو ‹ه›، في سطح الأسطرلاب ونصف قطرها، وهو ه ب، معلومان فإن الأعمال الباقية بالتمام معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

‹ب› إذا كان في سطح الأسطرلاب نقطة آ معلومة، وفرضنا بُعد نظيرها من قطب الكرة معلومًا؛ ومركزُ الأسطرلاب، وهو ب، معلومٌ؛ ونريد أن نعمل باقي الأعمال بتمامها.

فنجيز على نقطتي ا ب خطًا مستقيمًا ونخط على نقطة آ دائرة ا جـ د. ونجعل قوس د جـ من محيط دائرة ا جـ د بمقدار البُعد المفروض لنظير نقطة آ من قطب الكرة. ونجيز على نقطتي جـ آ خطًا مستقيمًا، وهو جـ ا ه، ونجعل ه ب ط عمودًا على خط ا ب.

فأقول: إن خط ب ه نصف قطر الكرة التي مركزها ب، وإن بعد نظير نقطة آ من قطب ه بمقدار قوس جـ د المفروضة من محيط دائرة ا جـ د.



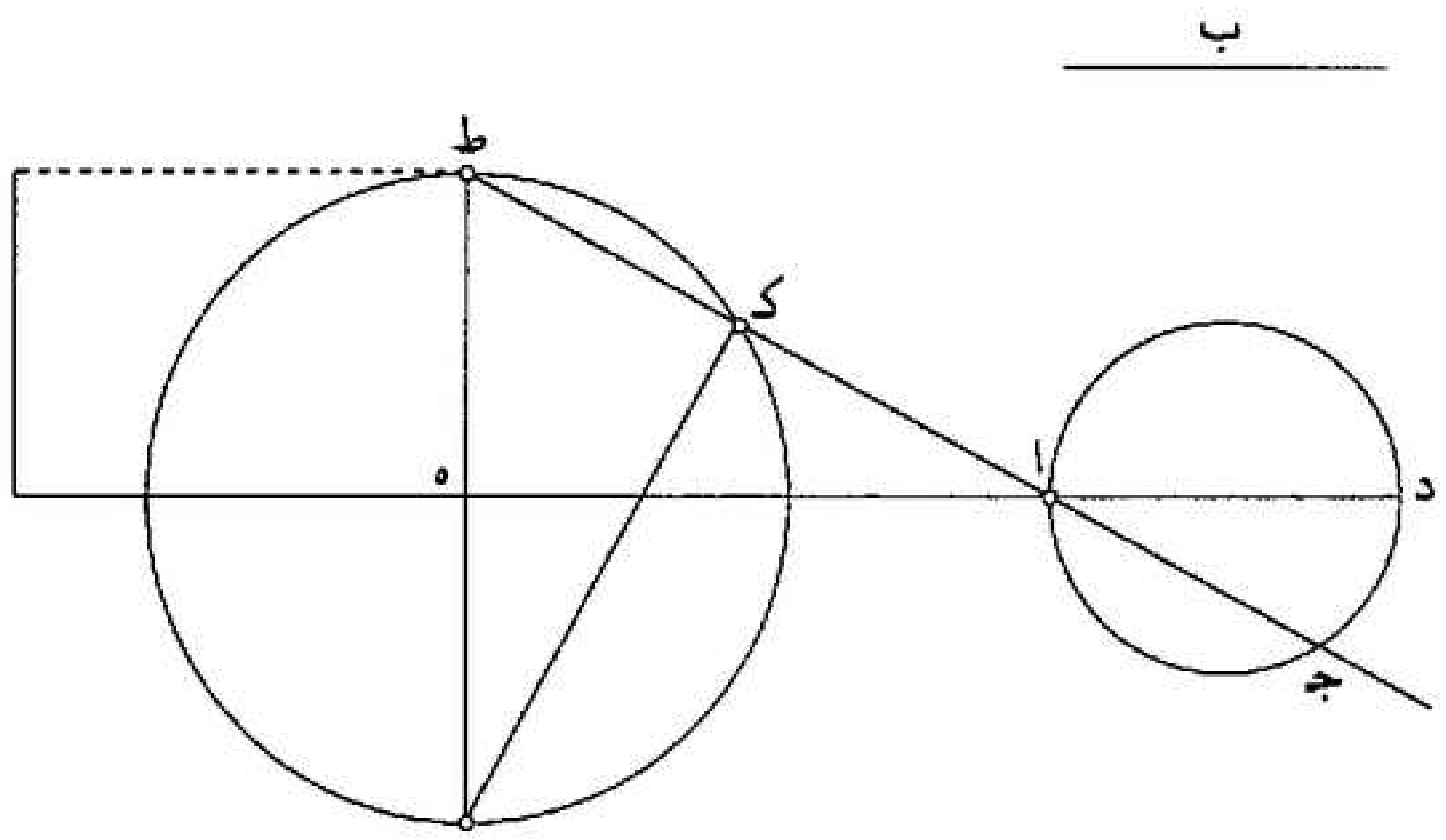
برهانه: أنا نخط على مركز ب وببعد ب ه دائرة ه ک ط ونصل خط ک ط. فلأن زاوية ه ب ا مساوية لزاوية ه ک ط – لأن كل واحدة منهما قائمة – وزاوية ا ه ط مشتركة لمثلثي ک ه ط ا ه ب، فزاوية ه ط ک الباقية مساوية لزاوية ه ا ب الباقية؛ وزاوية ه ا ب مساوية لزاوية جـ ا د لأنهما متقابلتان، فزاوية ه ط ک مساوية لزاوية جـ ا د، فقوس ه ک تشبه قوس جـ د. لكن قوس جـ د بمقدار البعد المفروض، فقوس ه ک بمقدار البعد المفروض لنظير نقطة آ من قطب ه، فنقطة ک نظير نقطة آ. فخط ب ه نصف قطر الكرة التي مركزها نقطة ب، وبعد نظير نقطة آ، وهو ک، من قطب ه بمقدار قوس / جـ د ٢٦٦

5 الأسطرلاب: الاسطراب – 6 ونريد: وتريد – 11 جـ د: لم تكن الجيم واضحة فعاد الناسخ وأثبتها تحتها – 14 ه ط ک: ه ک ط – 16 تشبه: يشبه – 17 فنقطة: ونقطة – 18 آ: كتب باءً عليها آ.

المفروضة من دائرة ا جـ د. ولأن نصف قطر الكرة – وهو ب ه – ومركزها – وهو ب – في سطح الأسطرلاب معلومان، فإن الأعمال الباقية بتمامها معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

‹جـ› إذا كان في سطح الأسطرلاب نقطة ا معلومة، وفرضنا بُعد نظيرها من قطب الكرة معلومًا؛ ونصفُ قطر الكرة مساوٍ لخط ب المعلوم، ونريد أن نعمل باقي الأعمال بتمامها.

فنديرعلى نقطة ا دائرة ا جـ د ونجعل قوس د جـ من محيط دائرة ا جـ د بمقدار البعد المفروض لنظير نقطة ا من قطب الكرة. ونصل خطي د ا جـ ا ونخرجهما على الاستقامة وهما جـ ا ط د ا ه؛ ونجعل فيما بين خطي جـ ا ط د ا ه عمودًا على أحد هذين الخطين مساويًا لخط ب، وليكن ه ط، وهو عمود على خط د ا ه.

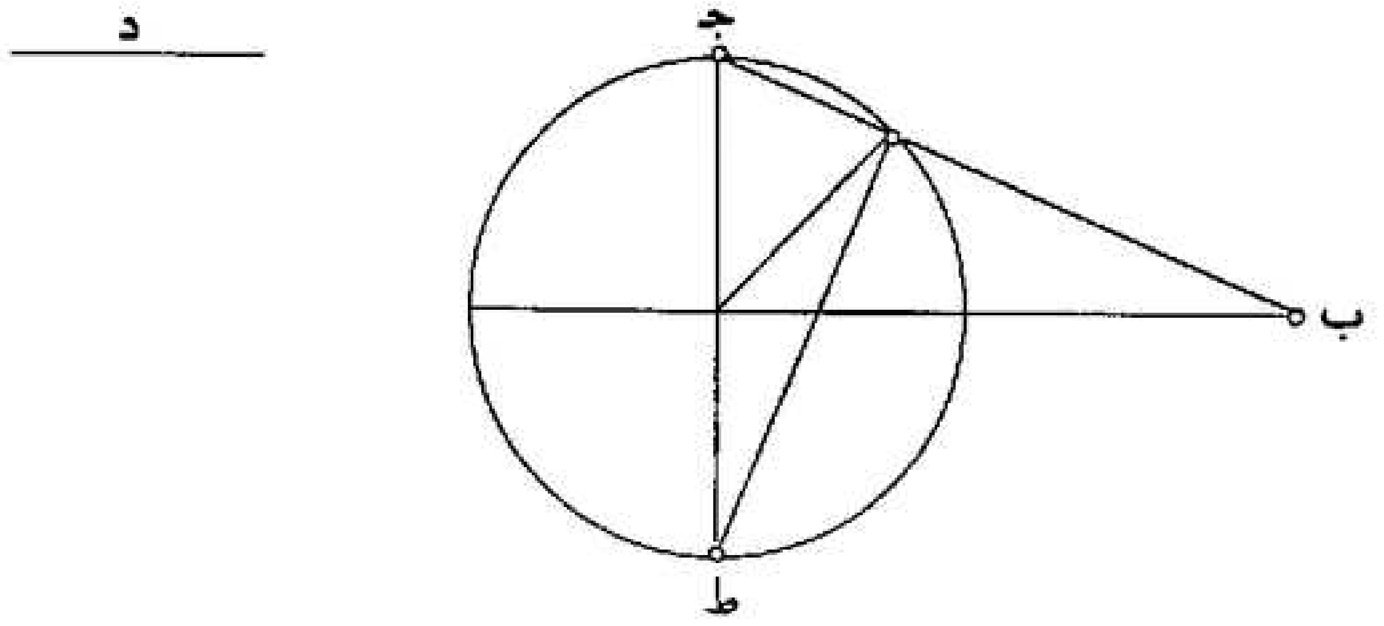


فأقول: إن نقطة ه مركز الكرة التي نصف قطرها مساوٍ لخط ب وبُعدَ نظير نقطة ا المعلومة من قطب ط بمقدار قوس جـ د المفروضة من محيط دائرة ا جـ د.

وبرهانه في ذلك كما بيّنا في الشكلين اللذين قبله. ولأن مركز الكرة – وهو ه – ونصف قطرها – وهو ه ط – معلومان، فالأعمال الباقية معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

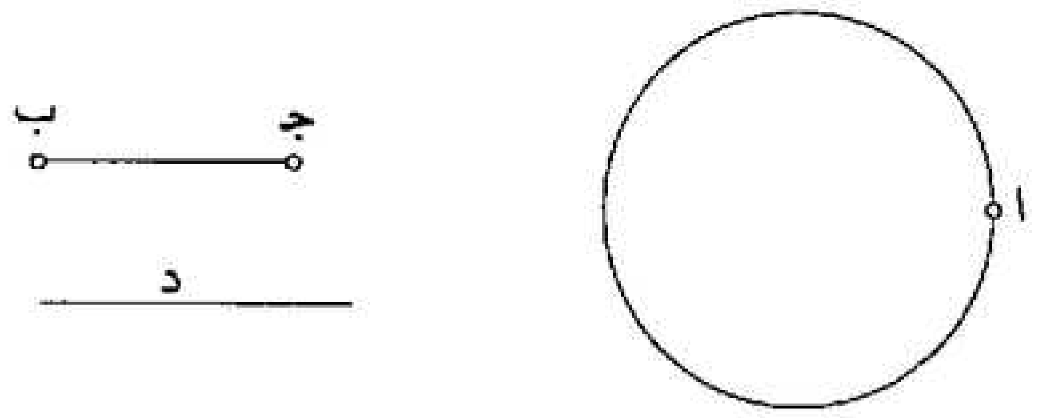
‹د› إذا كان في سطح الأسطرلاب نقطة ا معلومة، وفرضنا بُعد نظيرها من قطب ٢٦٧
الكرة معلومًا؛ والخطُّ – الذي فيما بين قطب الكرة والنقطة التي بعد نظيرها من ذلك القطب معلوم – مساوٍ لخط ب جـ المعلوم، ونريد أن نعمل باقي الأعمال.

1 من دائرة: مكررة في السطر التالي / ولأن: فلان – 5 الأعمال: الاعمل ل – 12 ا جـ د: ا حـ ذ – 15 سطح: أضافها تحت السطر.



فنجعل نقطة جـ قطب الكرة وب النقطة التي بعد نظيرها من قطب جـ بالمقدار المعلوم. فإن عملنا ذلك، صار نصف قطر الكرة، وليكن ‹خط› د، معلومًا من الشكل الأول في هذا الفصل. فلأن بعد نظير ا من قطب الكرة معلوم، ونصف قطر الكرة، وهو خط د، معلوم، ‹فمركز الكرة معلوم› من الشكل الذي قبله. فلأن مركز الكرة ونصف قطرها يكونان معلومين، فالأعمال الباقية معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

‹هـ› إذا كان في سطح الأسطرلاب نقطة ا معلومة، وفرضنا بُعد نظيرها من قطب الكرة معلومًا؛ والخطُّ – الذي فيما بين مركز الأسطرلاب والنقطة التي بعد نظيرها من قطب الكرة معلوم – مساوٍ لخط ب جـ المعلوم، ونريد أن نعمل باقي الأعمال بالتّمام.



فنجعل نقطة جـ مركز الأسطرلاب، ونقطة ب النقطةَ التي بعد نظيرها من قطب ه معلومٌ. فإن عملنا ذلك، صار نصف قطر الكرة، وليكن د، معلومًا من الشكل الثاني في هذا الفصل. فلأن بعد نظير نقطة ا من قطب الكرة معلوم ونصفَ قطر الكرة – وهو د –

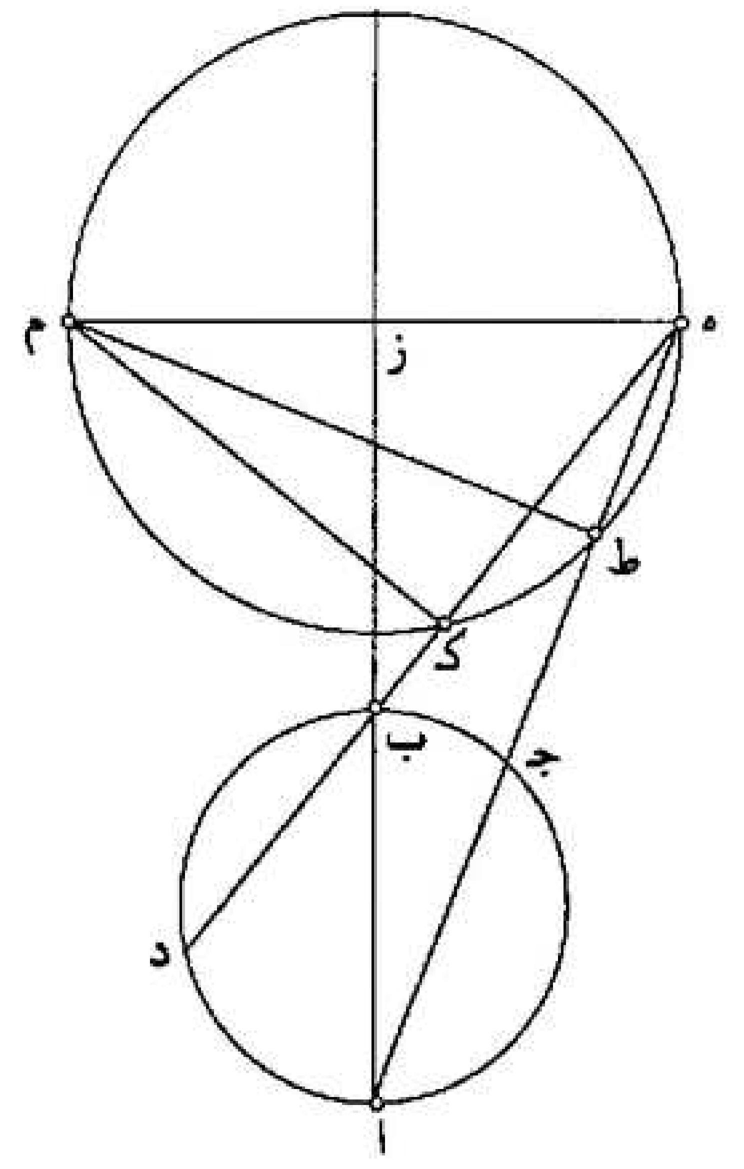
2 صار: صا / قطر: أثبتها في الهامش – 9 ه: حـ – 10 معلوم: معلومة / عملنا: علمنا.

معلوم، فمركز الكرة معلوم. ‹و›لأن مركز الكرة ونصف قطرها معلومان، فالأعمال الباقية معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

‹و› إذا كان في سطح الأسطرلاب نقطتا ا ب معلومتين، وفرضنا بعد نظير كل واحدة ٢٦٨
منهما من قطب الكرة معلومًا، ونريد أن نعمل باقي الأعمال بالتّمام.

فنديرعلى نقطتي ا ب دائرة ا ب د، ونجيز على نقطتي ا ب خطًا مستقيمًا، ونجعل قوس ب جـ من محيط دائرة ا ب د بالمقدار الذي أردنا أن يكون بعد نظير نقطة ا من قطب الكرة، ونجعل قوس ا د بمقدار ما أردنا أن يكون بعد نظير نقطة ب من ذلك القطب. ونخرج على نقطتي ب د خطًا مستقيمًا وعلى نقطتي ا جـ خطًا مستقيمًا، فيلتقيان وليكن ذلك على نقطة ه. ونجعل خط ه ز عمودًا على خط ا ب.

فأقول: إن نقطة ز مركز الكرة التي نصف قطرها خط ز ه وبُعدَ نظير كل واحدة من نقطتي ا ب من قطب الكرة – وهو ه – بمقدار كل واحد من قوسي ب جـ ا د: أما بعد نظير نقطة ا فمقدار قوس ب جـ، وأما بعد نظير نقطة ب فمقدار قوس ا د.



1 قطرها: قطراها، ثم حك الألف – 2 نبيّن: كتب بعدها «تم تم تم بلغ» – 6 ا ب د: ا د – 7 ونجعل: ويجعل – 12 ب: ا ب.

برهان ذلك: أنا نخط على مركز ز وببعد ز ه دائرة ه ط ك، ونصل خطي م ط م ك. فلأن زاوية م ط ه مثل زاوية ا ز ه – لأن كل واحدة منهما قائمة – وزاوية ط ه ز مشتركة، فزاوية ط م ه الباقية مساوية لزاوية ه ا ز الباقية، فقوس ه ط تشبه قوس ب جـ. وبهذا التدبير، فإن قوس ه ك تشبه قوس ا د. ونقطة ط نظير نقطة ا ونقطة ك نظير نقطة ب، فنقطة ‹ز› مركز الكرة التي بُعد نظير نقطة ا من قطب الكرة – وهو ه – بمقدار قوس ب جـ ‹المفروضة من محيط دائرة ا جـ د›، وبعد نظير نقطة ب من ذلك القطب بمقدار قوس ا د المفروضة من محيط دائرة ا جـ د. فلأن مركز الكرة – وهو ز – ونصفَ قطرها – وهو ز ه – معلومان، فالأعمال الباقية معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

الفصل الثاني

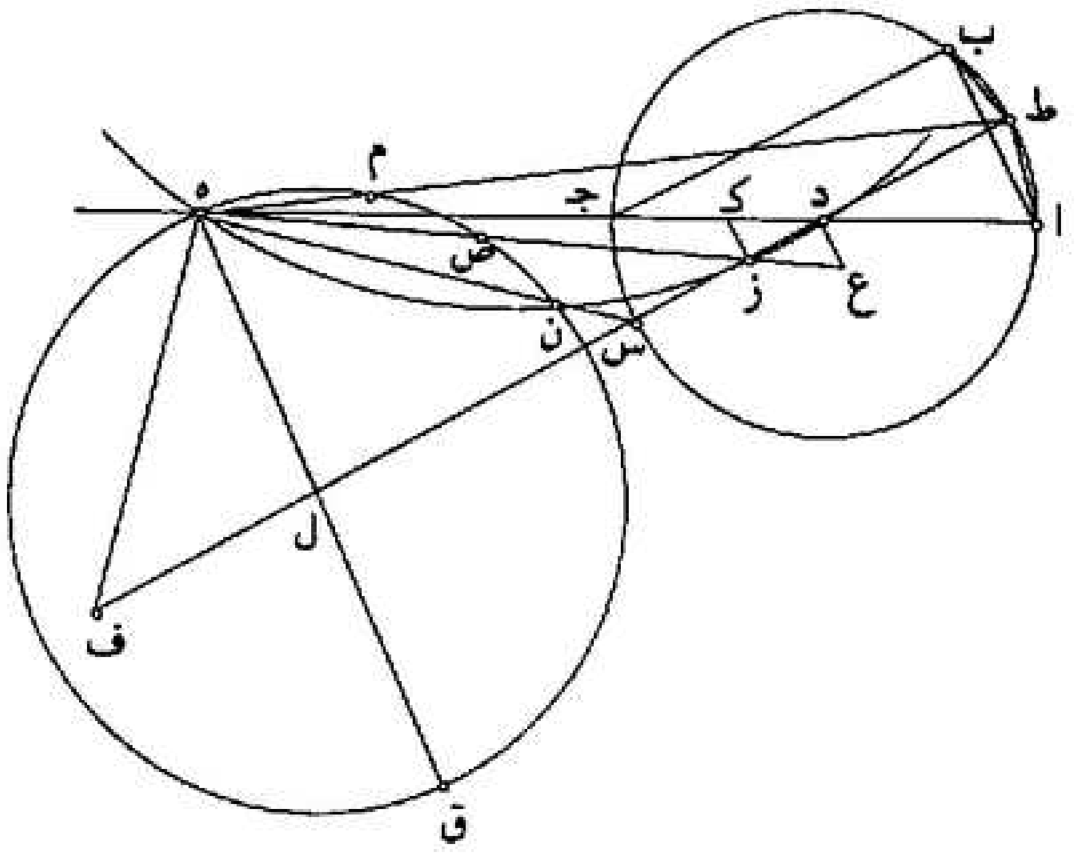
في عمل الأسطرلاب من جهة فرض دائرة من دوائر المقنطرات بُعد قطب نظيرها من قطب الكرة معلوم

‹ا› إذا كان في سطح الأسطرلاب دائرة ا ب جـ التي مركزها د معلومة، وفرضناها واحدة من دوائر المقنطرات، بُعد قطب نظيرها من قطب الكرة معلوم؛ وقطبُ الكرة – وهو ه – معلوم؛ ونريد أن نعمل باقي الأعمال بتمامه.

فنصل خط ه د ونخرجه حتى ينتهي إلى نقطة ا، ونجعل / قوس ا ب من محيط ٢٦٩
دائرة ا ب جـ بمقدار البُعد المفروض، ونجعل قوس ه ز د شبيهة بقوس ا ط ب. ونجعل سطح ه د في د ك مساويًا لمربع نصف قطر دائرة ا ب جـ، ونجعل خط ك ز موازيًا لخط ا ب. ونجيز على نقطتي د ز خطًّا مستقيمًا، وهو د ز ل، ونجعل خط ه ل عمودًا على خط ط د ل.

فأقول: إن نقطة ل مركز الكرة، التي نصف قطرها خط ل ه، وبُعدَ قطب نظير دائرة ا ب جـ من قطب ه بمقدار قوس ا ط ب المفروضة من دائرة ا ب جـ.

1 ز: ه – 3 ه ا ز: ه ا د / تشبه: يشبه – 4 تشبه: يشبه – 8 نعمل: كتب بعدها «تم تم تم بلغ» – 12 ا ب جـ: ا د – 16 شبيهة: شبيه – 17 ه د: ه ر – 21 قطب ه: قطبه / بمقدار: مقدار.



برهان ذلك: أنا نخط على مركز ل وببعد ل ه دائرة ه م ن. ونصل خطوط ه ط ه ز ه س، ونخرج د ع عمودًا على خط ط د ز وخطًّ د ع على استقامة ‹إلى› خط ه ز. ونجعل زاوية ز ه ف قائمة. فلأن قوس ه ز د شبيهة بقوس ا ط ب، فزاوية ه ز د مساوية للزاوية التي تقبلها قوس ا ط ب. والزاوية التي قَبِلتها قوس ا ط ب مع زاوية ا جـ ب جميعًا مساويتان لقائمتين لأنهما في دائرة. فزاوية ه ز د مع كل واحدة من زاويتي ا جـ ب ه ز ل مساويتان لقائمتين، فزاوية ه ز ل مساوية لزاوية ا جـ ب. وزاوية ه ل ز مساوية لزاوية ا ب جـ – لأن كل واحدة منهما قائمة – فزاوية ز ه ل الباقية مساوية لزاوية جـ ا ب الباقية. وزاوية جـ ا ب مساوية لزاوية د كـ ز لأنهما متبادلتان، فزاوية د كـ ز مساوية لزاوية ز ه ل. وزاوية ز ه ل مساوية لزاوية ه ف ل من جهة تشابه المثلثين، فزاوية ه ف ل مساوية لزاوية د كـ ز، وزاوية ز د كـ مشتركة، فمثلث ه د ف شبيه بمثلث كـ د ز، فنسبة ف د إلى د ه كنسبة كـ د إلى د ز، فسطح ف د في د ز مساوٍ لسطح ه د في د كـ. لكن سطح ه د في د كـ جعلناه مساويًا لمربع د س لأنه نصف قطر الدائرة، فسطح ف د في د ز مساوٍ لمربع د س؛ ومربع د س مساوٍ لسطح ط ز في ز س مع مربع د ز، لأن خط ط س مقسوم بنصفين على نقطة د وبقسمين مختلفين على ز، فسطح ط ز في ز س مع مربع د ز مساوٍ لسطح ف د في د ز. وسطح ف د / في د ز مساوٍ لسطح ف ز في ز د مع مربع ٢٧٠

4 للزاوية: لزاوية / تقبلها: يقبلها / قبلتها: قبلها – 8 د كـ ز (الأولى): د كـ – 9 ه ف ل: هبل / المثلثين: المثلين / ه ف ل: ه ق د – 10 د كـ ز: د كـ ن / ف د: ق د – 11 ف د: قد – 12 ف د: ق د / مساوٍ: مساويا – 15 ف د (الأولى والثانية): ق د.

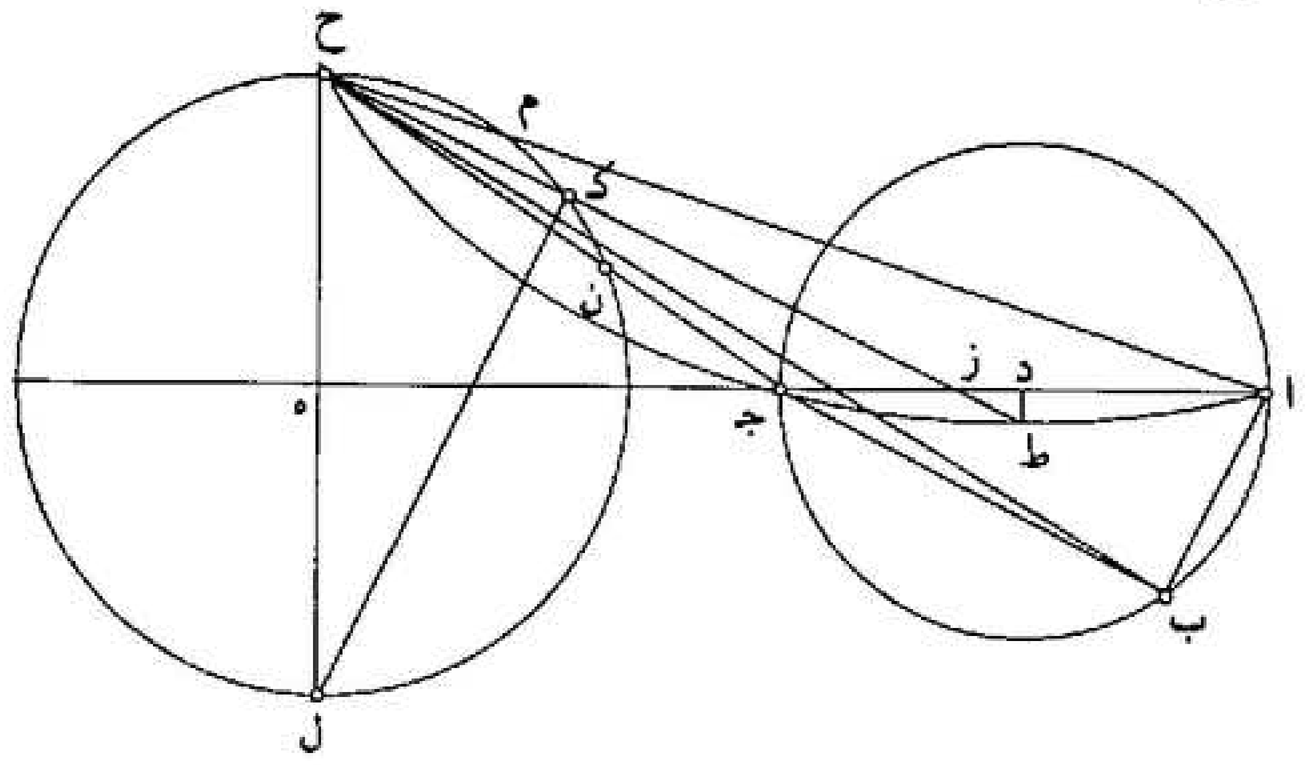
د ز. فسطح ط ز في ز س مع مربع د ز مساوٍ لسطح ف ز في ز د مع مربع د ز؛ ‹و›نلقي مربع د ز المشترك، يبقى سطح ط ز في ز س مساويًا لسطح ف ز في ز د. وأيضًا لأن مثلثي ف ز ه د ز ع متشابهان، فنسبة ه ز إلى ز ف كنسبة د ز إلى ز ع، فسطح ه ز في ز ع مساوٍ لسطح ف ز في د ز، فسطح ط ز في ز س مساوٍ لسطح ه ز في ز ع، فنقطة ه على محيط الدائرة التي تمرّ على نقط ط ع س. فالقوس التي فيما بين نقطتي س ع مساوية للقوس التي فيما بين نقطتي ط ع لأن ع د عمود على خط ط س وقد قسمه بنصفين على نقطة د، فزاوية ط ه ز مساوية لزاوية س ه ز. فقوس م ص مساوية ‹لـ› ص ن، فنقطة ص قطب نظير دائرة ا ب جـ، لأن نظير دائرة ا ب جـ هو الدائرة التي تمرّ على نقطتي م ن من قطب ص. وأيضًا لأن زاوية ص ه ل مساوية لزاوية ب ا جـ، فقوس ق ص شبيهة بقوس جـ ب. وقوس ق ص ه شبيهة بقوس ا ب جـ لأن كل واحدة منهما نصف محيط الدائرة، فقوس ه ص الباقية شبيهة بقوس ا ب الباقية، فنقطة ل مركز الكرة التي نصف قطرها خط ل ه، وبُعد [نظير] نقطة ص – التي هي قطب نظير دائرة ا ب جـ – من قطب ه بمقدار قوس ا ب المفروضة من دائرة ا ب جـ. فلأن نصف قطر الكرة – وهو ل ه – معلومٌ ومركزَها – وهو ل – معلومٌ، فباقي الأعمال بتمامه معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

‹ب› إذا كان في سطح الأسطرلاب دائرة ا ب جـ التي مركزها نقطة د ‹معلومة›، وبُعد قطب نظيرها من قطب الكرة بمقدار معلوم؛ ومركزُ الأسطرلاب – وهو ه – معلومٌ؛ ونريد أن نعمل الأعمال الباقية / بتمامها. ٢٧١

فنصل خط د ه ونخرجه إلى نقطة آ. ونجعل قوس ا ب من دائرة ا ب جـ بمقدار البُعد المفروض. ونصل خطي ا ب ب جـ، ونحدث على خط د جـ نقطة، ولتكن ز، حتى تكون نسبة السطح الحادث من نقطتي آ جـ – أعني ا ز في ز جـ – إلى السطح الحادث من نقطتي د ه – أعني د ز في ز ه – كنسبة مربع ا جـ إلى مربع جـ ب المعلومة، كما بيّنا في كتابنا في *إحداث النقط على الخطوط في نسب السطوح*. ونخرج على نقطة ز خطًا موازيًا لخط ب جـ – وهو ط ز ح – ونقيم من نقطة ه عمودًا على خط د ه، وليكن ح ه.

1 ف ز: ه ر – 3 متشابهان: متشابهين – 8 هو: هي – 10 شبيهة: شبيه – 15 نبيّن: كتب بعدها «بلغ» – 16 د: حـ – 19 آ: الف – 20 ولتكن: وليكن – 23 المعلومة: معلومة / نسب: نسبة – 25 ح ه: كتب الناسخ جـ ه د ثم أثبت الصواب في الهامش.

فأقول: إن خط ه ح نصف قطر الكرة، التي مركزها نقطة ه، وبُعد قطب نظير دائرة ا ب جـ من قطب ح بمقدار قوس ا ب من دائرة ا ب جـ.



برهان ذلك: أن نخط على نقطة ه وببعد ه ح دائرة ح ك ل، ونصل خطي ح ا ح جـ، ونجعل د ط عمودًا على خط ا جـ. فلأن زاوية ا جـ ب مساوية لزاوية ا ز ط – لأن خط ب جـ موازٍ لخط ط ز – وزاوية ا ب جـ مساوية لزاوية ط د ز لأنهما قائمتان، فالزاوية الباقية مساوية للزاوية الباقية، فمثلث ط د ز شبيه بمثلث ا ب جـ. فنسبة مربع ط ز إلى مربع ز د كنسبة مربع ا جـ إلى مربع جـ ب. ونسبة مربع ا جـ إلى مربع جـ ب جعلناها كنسبة سطح ا ز في ز جـ إلى سطح د ز في ز ه، فنسبة سطح ا ز في ز جـ إلى سطح د ز في ز ه كنسبة [سطح] مربع ط ز إلى مربع ز د. لكن نسبة مربع ط ز إلى مربع ز د كنسبة سطح ط ز في ز ح إلى سطح د ز في ز ه ‹فنسبة كل واحد من سطحي ا ز في ز جـ وط ز في ز ح إلى سطح د ز في ز ه› واحدة، فسطح ا ز في ز جـ مساوٍ لسطح ط ز في ز ح. فنقطة ح على محيط الدائرة التي تمرّ بنقط ا ط جـ. فيكون القوس، التي فيما بين ا ط، مساوية للقوس التي فيما بين ط جـ، لأن ط د عمود على خط ا جـ وقد قسمه بنصفين على نقطة د، فزاوية ا ح ز مساوية لزاوية جـ ح ز، فقوس م ك مساوية لقوس ك ن، فنقطة ك قطب نظير دائرة ا ب جـ، لأن نظير دائرة ا ب جـ ‹يمرّ› بنقطتي م ن من / قطب ك. وأيضًا لأن زاوية ح ك ل مساوية لزاوية ز ه ح – لأن كل واحدة ٢٧٢ منهما قائمة – وزاوية ل ح ز مشتركة، فزاوية ح ل ك الباقية مساوية لزاوية ح ز ه الباقية؛ وزاوية ح ز ه مساوية لزاوية ب جـ ا لأنهما متبادلتان، فزاوية ح ل ك مساوية لزاوية

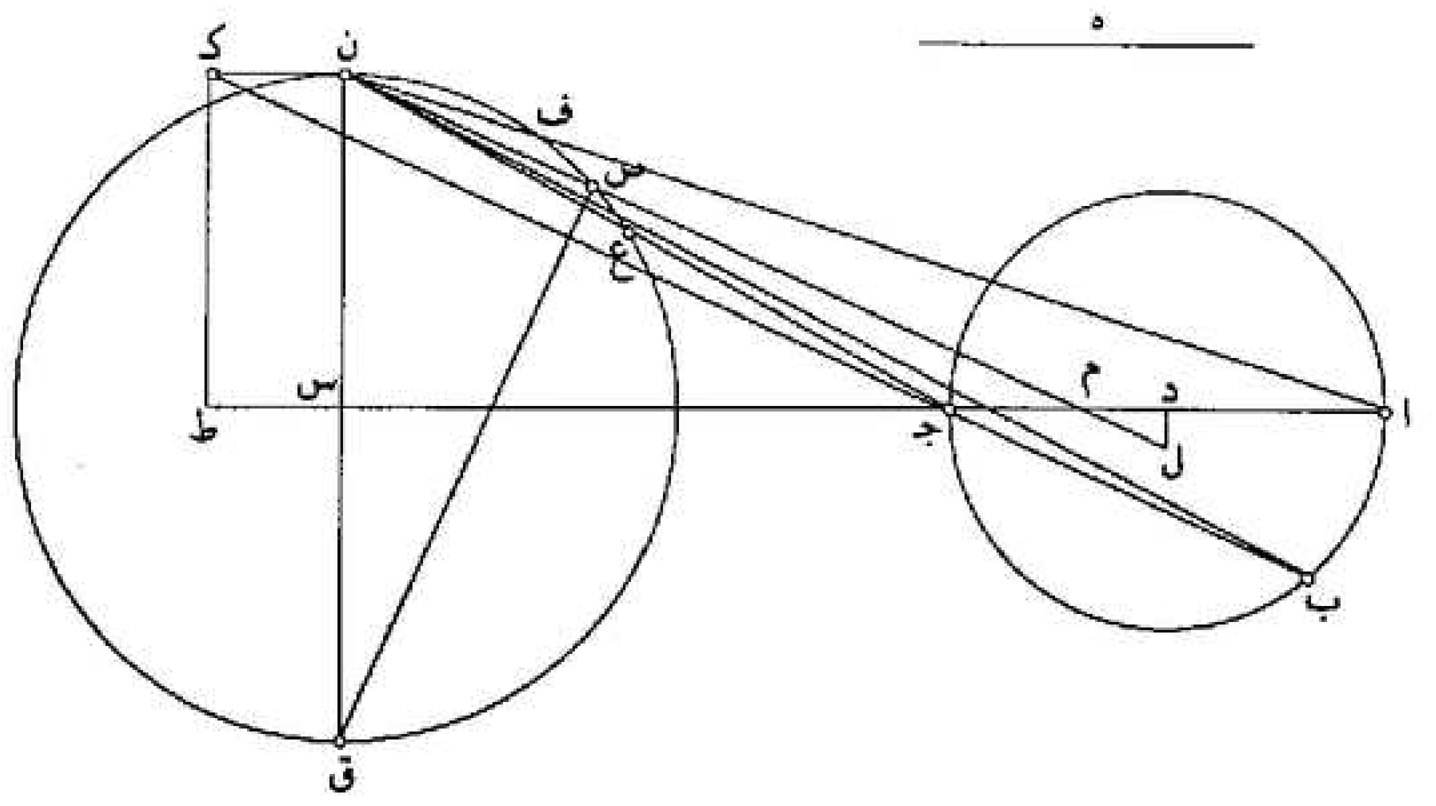
1 ه ح: غالبًا ما يكتبها الناسخ «ه جـ»، ولن نشير إليها فيما بعد – 8 ز جـ (الأولى): ز ح – 12 بنقط: بنقطة – 17 ل ح ز: ل ح د.

ا جـ ب، فقوس ح ك شبيهة بقوس ا ب. وقوس ا ب بمقدار البعد المفروض، فقوس ح ك بمقدار قوس ا ب المفروضة من دائرة ا ب جـ. فخط ه ح نصف قطر الكرة التي مركزها نقطة ه، وبُعد قطب نظير دائرة ا ب جـ، وهو ك، من قطب ح بمقدار قوس ا ب المفروضة من دائرة ا ب جـ. فلأن نصف قطر الكرة – وهو ه ح – معلوم ومركزَها – وهو ه – معلوم في سطح الأسطرلاب، فباقي الأعمال بتمامها معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

‹جـ› إذا كان في سطح الأسطرلاب دائرة ا ب جـ معلومة، ومركزها نقطة د، وفرضناها واحدة من دوائر المقنطرات، بُعد قطب نظيرها من قطب الكرة معلوم؛ ونصفُ قطر الكرة مساوٍ لخط ه المعلوم؛ ونريد أن نعمل باقي الأعمال بتمامها.

فنجيز على نقطة د الخط المستقيم، الذي ‹عليه› نريد أن يكون مركز الأسطرلاب، فليكن ا د جـ؛ ونجعل قوس ا ب بمقدار البعد المفروض، ونجيز على نقطتي ب جـ خطًا مستقيمًا، وهو ب جـ ك، ونجعل خط ط ك عمودًا على خط ا جـ ط ومساويًا لخط ه. فنسبة سطح ا د في جـ ط إلى مربع جـ ك معلومة لأن كل واحد منهما معلوم. ونحدث على خط د جـ نقطة م حتى تكون نسبة سطح ا د في د م إلى سطح ا م في م جـ / كنسبة سطح ا د في جـ ط إلى مربع جـ ك المعلومة، كما بيّنا في كتاب *إحداث النقط* ٢٧٣ *على الخطوط في نسب السطوح*. ونخرج من نقطة م خطًا موازيًا لخط ب جـ ك، وهو ل م ن. ونجعل ك ن موازيًا لخط جـ ط، ونجعل ن س عمودًا على خط جـ ط.

فأقول: إن نقطة س مركز الكرة التي نصف قطرها مساوٍ لخط ه، وإن بُعدَ قطب نظير دائرة ا ب جـ من قطب الكرة بمقدار قوس ا ب من دائرة ا ب جـ.

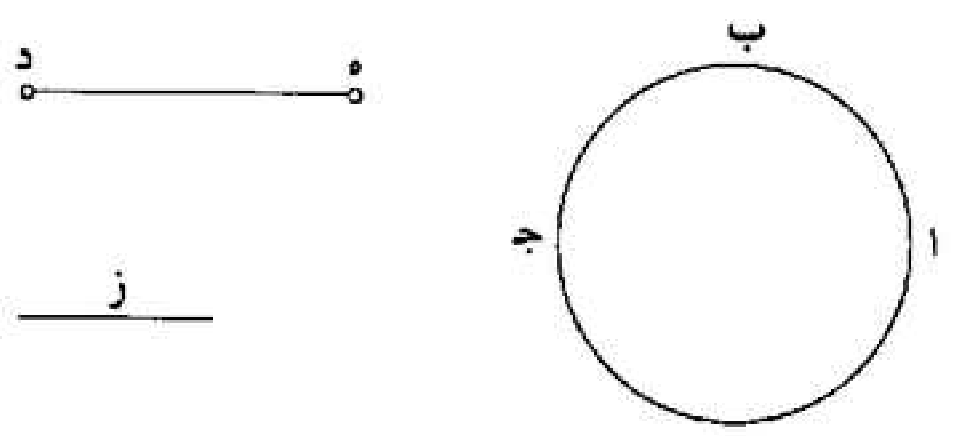


5 فباقي: وباقي / نبيّن: كتب بعدها «بلغ».

برهان ذلك: أنا نخط على مركز س وببعد س ن دائرة ن ق ع، ونصل خطي ن ا ن جـ ونجعل د ل عمودًا على خط ا جـ. فلأن نسبة سطح ا د في د م إلى سطح ا م في م جـ كنسبة سطح ا د في جـ ط إلى مربع جـ ك، وخط م ن مساوٍ لخط جـ ك وخط م س مساوٍ لخط جـ ط، فإن نسبة سطح ا د في د م إلى سطح ا م في م جـ كنسبة سطح ا د في م س إلى مربع م ن. ونسبة سطح ‹ا د› في م س إلى مربع م ن مؤلفة من نسبة خط ا د إلى خط م ن ومن نسبة خط م س إلى خط م ن، ونسبة خط س م إلى م ن كنسبة خط د م إلى م ل من جهة تشابه المثلثين. فنسبة سطح ا د في د م إلى سطح ا م في م جـ مؤلفة من نسبة خط ا د إلى خط م ن ومن نسبة خط د م إلى م ل. لكن النسبة المؤلفة من خط ا د إلى خط م ن ومن نسبة خط د م إلى خط م ل هي كنسبة سطح ا د في د م إلى سطح ن م في م ل. فنسبة سطح ا د في د م إلى كل واحد من سطحي ا م في م جـ ول م في م ن واحدة، فسطح ا م في م جـ مساوٍ لسطح ن م في م ل. فنقطة ن على محيط الدائرة التي تمرّ على نقط ا ل جـ. فيكون القوس التي فيما بين نقطتي جـ ل مساوية للقوس التي فيما بين نقطتي ا ل، لأن ل د عمود على وتر ا جـ وقسمه بنصفين على نقطة د. فزاوية ا ن م مساوية لزاوية م ن جـ، فقوس ف ص مساوية لقوس ص ع، فنقطة ص قطب نظير دائرة ا ب جـ، لأن نظير دائرة ا ب جـ يجوز على نقطتي ف ع وقطبه ص. وأيضًا لأن زاوية ن ق ص مساوية / لزاوية ن م س من جهة ٢٧٤ تشابه المثلثين، وزاوية ن م س مساوية لزاوية ا جـ ب لأنهما متبادلتان، فإن زاوية ن ق ص مساوية لزاوية ا جـ ب، فقوس ن ص شبيهة بقوس ا ب المفروضة من دائرة ا ب جـ. وخط ن س مساوٍ لخط ه، لأن كل واحد منهما مساوٍ لخط ك ط، فنقطة س مركز الكرة، التي نصف قطرها مساوٍ لخط ه، وبعد قطب نظير دائرة ا ب جـ من قطب ن بمقدار قوس ا ب المفروضة من دائرة ا ب جـ. فلأن نصف قطر الكرة – وهو س ن – ومركزَها – وهو س – معلومان، فباقي الأعمال بتمامها معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

‹د› إذا كان في سطح الأسطرلاب دائرة ا ب جـ معلومة، وفرضناها واحدة من دوائر المقنطرات، بُعد قطب نظيرها من قطب الكرة معلوم، والخطُّ – الذي فيما بين قطب الكرة والنقطة التي بُعد نظيرها من ذلك القطب معلوم – مساوٍ لخط د ه المعلوم؛ ونريد أن نعمل الأعمال الباقية بتمامها.

2 د ل: د ك – 15 ص ع: صنع / يجوز: تجوز – 16 ن ق ص: ن ف ض – 18 ن ص: ب ص – 22 س: س ن.



فنجعل من نقطة د قطب الكرة، ونقطة ه هي التي بُعد نظيرها من قطب د بالمقدار الذي فرضناه معلومًا. فإن عملنا ذلك، صار نصف قطر تلك الكرة معلومًا من الشكل الرابع من هذا الكتاب، وليكن خط ز. ولأن بُعد قطب نظير دائرة ا ب جـ من القطب معلوم ونصفَ قطر الكرة – وهو ز – معلوم، فإن الأعمال الباقية بتمامها معلومة من الشكل المتقدم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

‹هـ› إذا كان في سطح الأسطرلاب دائرة ا ب جـ معلومة، وفرضناها واحدة من دوائر المقنطرات، بُعد قطب نظيرها من قطب الكرة معلوم، والخطُّ – الذي فيما بين مركز الأسطرلاب والنقطة التي بُعد / نظيرها من قطب الكرة معلوم – مساوٍ لخط د ه المعلوم؛ ٢٧٥ ونريد أن نعمل الأعمال الباقية بتمامها.

فنفرض نقطة د مركز الأسطرلاب ونقطة ه التي بُعد نظيرها من قطب الكرة بالمقدار المعلوم، وإن عملنا ذلك، صار نصف قطر تلك الكرة معلومًا من الشكل الخامس من هذا الكتاب، وليكن خط ز. ولأن بُعد قطب نظير دائرة ا ب جـ من قطب الكرة معلوم ونصفَ قطر الكرة – وهو ز – معلوم، فالأعمال الباقية بالتّمام كلها معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

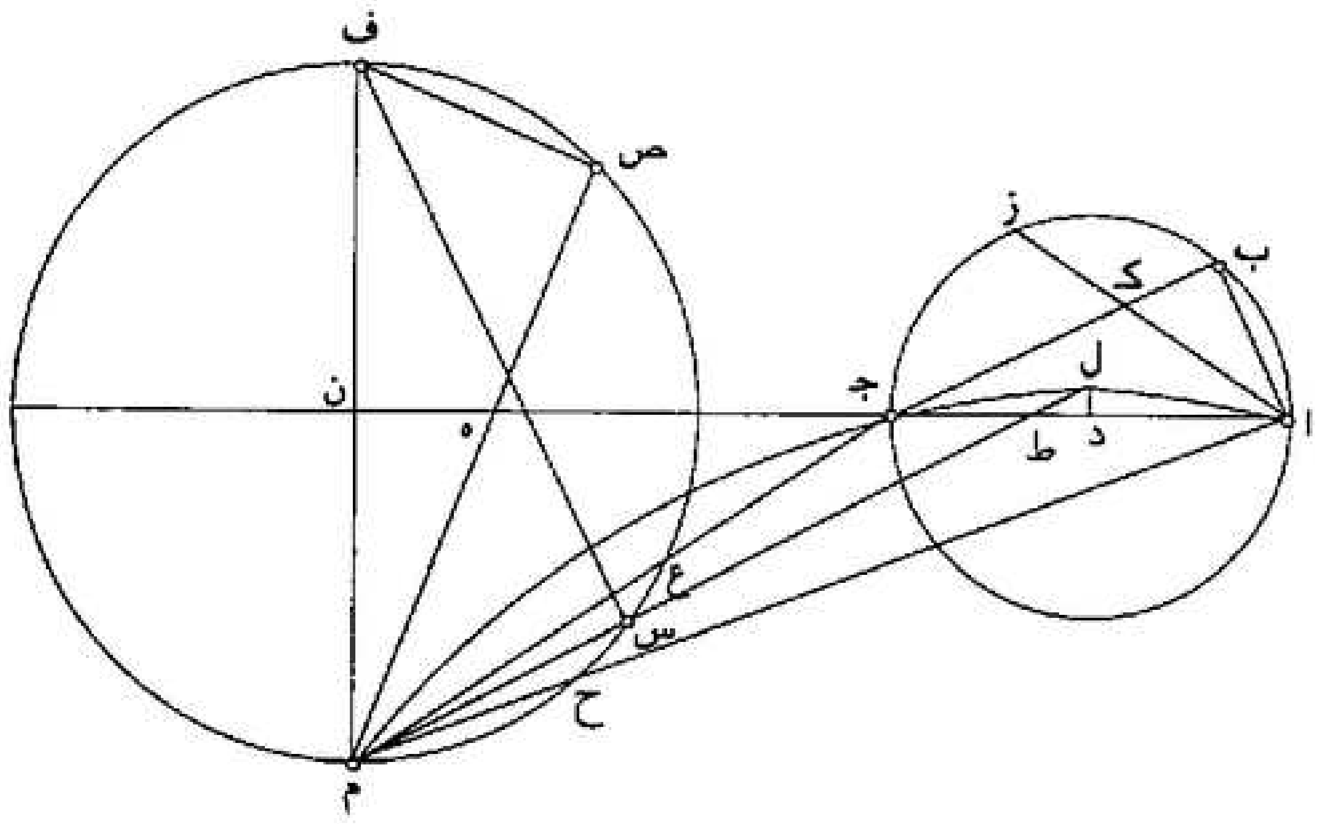
‹و› إذا كان في سطح الأسطرلاب دائرة ا ب جـ، التي مركزها د، معلومة ونقطة ه عليه معلومة؛ وفرضناها دائرة واحدة من دوائر المقنطرات، بُعد قطب نظيرها من قطب الكرة معلوم، وبُعدُ نظير نقطة ه أيضًا من ذلك القطب معلومٌ؛ ونريد أن نعمل الأعمال الباقية بتمامها.

فنجيز على نقطتي د ه خطًا مستقيمًا، وهو ه د ا، ونجعل قوس ا ب من دائرة ا ب جـ بمقدار بُعد قطب نظير دائرة ا ب جـ المفروض ‹من قطب الكرة›. ونجعل قوسي

1 التي: اللتي – 2 عملنا: علمنا – 3 الرابع: الخامس / ز: ب – 11 الخامس: السادس – 12 ز: د.

ا ب جـ ز جميعًا بمقدار بعد [قطب] نظير نقطة ه المفروض من القطب. ونصل خطوط ا ب ا ز ب جـ ونحدث على خط د جـ نقطة، ولتكن ط، ‹حتى› تكون نسبة سطح ا ط في ط جـ إلى سطح د ط في ط ه كنسبة مربع ا جـ إلى سطح ب جـ في جـ ك، كما بيّنا في كتابنا في *إحداث النقط على الخطوط في نسب السطوح*. ونجيز على نقطة ط خطًا موازيًا لخط ب جـ – وهو ل ط م – ونجعل زاوية د ه م مساوية لزاوية ا ك جـ، ونخرج من نقطة م، التي التقى الخطان عليها، عمودًا على خط د ه، وهو م ن.

فأقول: إن نقطة ن مركز الكرة، التي نصف قطرها خط ن م، وإن بُعد قطب نظير دائرة ا ب جـ من قطب م بمقدار قوس ا ب المفروضة من دائرة ا ب جـ، وإن بُعد نظير نقطة ه من هذا القطب بمقدار قوسي ا ب جـ ز جميعًا من دائرة ا ب جـ.



برهان / ذلك: أنا نخط على مركز ن وببعد ن م دائرة م س ع، فنقطة ص نظير ٢٧٦ نقطة ه ونقطة س نظير نقطة ط. ونجعل د ل عمودًا على خط ا جـ. فلأن نسبة سطح ا ط في ط جـ إلى سطح د ط في ط ه كنسبة مربع ا جـ إلى سطح ب جـ في جـ ك، ونسبة مربع ا جـ إلى سطح ب جـ في جـ ك مؤلفة من نسبة ا جـ إلى جـ ك ومن نسبة ا جـ إلى جـ ب، ونسبة ا جـ إلى جـ ك كنسبة م ط إلى ط ه من جهة تشابه المثلثين، ونسبة ا جـ إلى جـ ب كنسبة ل ط إلى ط د – لأن مثلث ا ب جـ شبيه بمثلث د ل ط – فنسبة سطح ا ط في ط جـ ‹إلى سطح د ط في ط ه كنسبة سطح م ط في ل ط إلى سطح د ط في ط ه، فسطح ا ط في ط جـ مساوٍ لسطح م ط في ل ط؛ فنقطة م على محيط الدائرة التي تمرّ بنقط ا ل جـ. ويكون القوس التي بين ل ا مساوية للقوس التي فيما بين ل جـ، لأن د ل عمود على خط ا جـ وقد قسمه بنصفين على نقطة د،

2 نسبة: تشبه – 16 فنسبة: ونسبة.

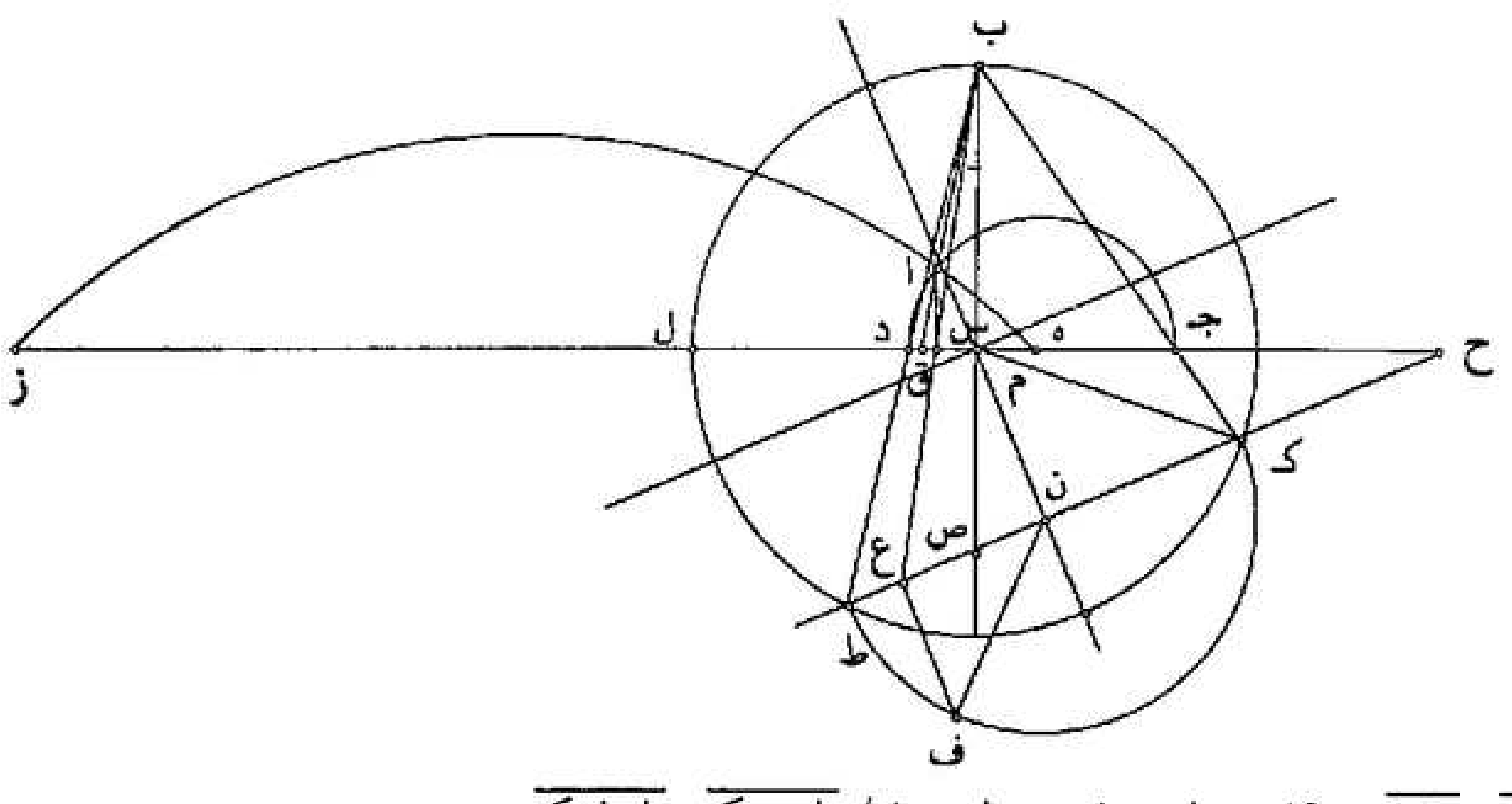
فزاوية ا م ل مساوية لزاوية ل م جـ، فقوس س ح مساوية لقوس س ع، فنقطة س قطب نظير دائرة ا ب جـ، لأن نظير دائرة ا ب جـ يمرّ بنقطتي ح ع من قطب س. ولأن زاوية م س ف مساوية لزاوية ط ن م – لأن كل واحدة منهما قائمة – وزاوية ط م ن مشتركة، فزاوية م ف س الباقية مساوية لزاوية م ط ن الباقية؛ وزاوية م ط ن مساوية لزاوية ا جـ ب لأنهما متبادلتان، فزاوية م ف س مساوية لزاوية ا جـ ب، فقوس م س شبيهة بقوس ا ب؛ وقوس ا ب بمقدار البعد المفروض، فقوس م س بمقدار قوس ا ب المفروضة من دائرة ا ب جـ. وأيضًا لأن زاوية م ص ف مساوية لزاوية ه ن م – لأن كل واحدة منهما قائمة – وزاوية ه م ن مشتركة، فزاوية م ف ص الباقية مساوية لزاوية م ه ن الباقية. وزاوية م ه ن مساوية لزاوية ا ک ب، فزاوية م ف ص مساوية لزاوية ا ک ب، فقوس ص م شبيهة بقوسي ا ب جـ ز جميعًا؛ وقوسا ا ب جـ ز جميعًا بمقدار البُعد المفروض، فقوس ص م بمقدار بُعد قطب الكرة المفروض من نظير نقطة ه، وهو نقطة ص. فلأن نصف قطر الكرة – وهو ن م – معلوم، ومركزَها – وهو ن – معلوم في سطح الأسطرلاب، فباقي الأعمال بتمامها معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.〉

الفصل السادس

في عمل الأسطرلاب من جهة فرض واحدة من نقط معلومة لأفق معلوم

إذا كان في سطح الأسطرلاب نقطة آ معلومة، وفرضنا نظيرها لأفق معلوم معلومًا؛ وقطب الكرة وهو ب معلومٌ، ونريد أن نحدث باقي الأعمال بتمامها.

فننزل على التحليل أن نقطة آ هي الفصل المشترك لمقنطرة جـ ا د ولسمت ه ا ز، وتسطيحهما من 〈قطب〉 الكرة ط ب ک.



18 ه ا ز: ه ا د – 19 وتسطيحهما: ويسطيحهما / ط ب ک: ط ف ک.

وقطر نظير مقنطرة جـ ا د خط كـ ط، ومركز الكرة نقطة م، والدائرة المارّة بقطبيها ب كـ ط ل. وليخرج فيها قطران يتقاطعان على زوايا قائمة، وهما ب م ص ل م جـ؛ ولنخرج ل م جـ في الجهتين جميعًا إلى نقطتي ح ز. ولنخرج خط ط كـ حتى يلقى خط ل م جـ على نقطة ح ولنوصّل خط م كـ، فنسبة ط كـ إلى كل واحد من نصف قطر الكرة – وهو م كـ – ومن بُعده – وهو م ن – من مركز الكرة – وهو م – معلومة، لأن قوس ط كـ من دائرة ب كـ ط ل معلومة. وأيضًا، لأن خطًّ ن كـ موازٍ لقطر أفقٍ بُعد قطبه من قطب الكرة معلوم، فزاوية ن ح م معلومة، وزاوية ح ن م قائمة، فمثلث ح ن م معلوم الصورة. وأيضًا نفرض ا س عمودًا على خط ہ ل، ونصل ب س ونخرجه إلى نقطة ع، ونجعل ع ف عمودًا على خط كـ ط، فقوس ط ف من نصف دائرة كـ ف ط معلومة لأنها بمقدار بُعد نظير سمت ہ ا ز من دائرة نصف نهاره، كما بيّنا قبل. فنسبة ن ع إلى كل واحد من خطي كـ ن كـ ع معلومة، لأن كـ ن نصف كـ ط، فنسبة ع كـ إلى كـ ن معلومة. وإذا فصلنا، كانت نسبة ع ن إلى ن كـ معلومة، ونسبة كـ ن إلى ن م ‹معلومة› – لأن مثلث كـ ن م معلوم الصورة – فنسبة ع ن إلى ن م / معلومة. ونسبة م ن إلى ن ص ٢٧٧ معلومة، فنسبة ع ن إلى ن ص معلومة. وبالتفصيل نسبة ع ص إلى ص ن معلومة؛ ونسبة ن ص إلى ص م معلومة، ‹فنسبة ع ص إلى ص م معلومة›. وأيضًا لأن نسبة ع ص إلى ع ن ونسبةَ ع ن إلى ن كـ ونسبةَ ن كـ إلى نصف قطر الكرة – وهو ب م – معلومة، فنسبة ع ص إلى م ب معلومة، فنسبة ع ص إلى ص ب معلومة. وزاوية ع ص ب معلومة، فمثلث ع ص ب معلوم الصورة، فنسبة ص ب إلى ب ع معلومة، وزاوية ص ب ع معلومة. وزاوية ب م س قائمة، فمثلث ب م س معلوم الصورة، فنسبة م ب إلى ب س معلومة. ونسبة ص ب إلى ب م معلومة، فنسبة ص ب إلى كل واحد من خطي ب س ب ع معلومة. فنسبة ع ب إلى ب س معلومة وهي كنسبة ع ف إلى ا س كما بيّنا قبل. فنسبة ف ع إلى ا س معلومة ونسبة ف ع إلى ب م معلومة، فنسبة ب م إلى ا س معلومة وهي كنسبة ب ق إلى ق ا، فنسبة ب ق إلى ق ا معلومة. وبالتفصيل نسبة ب ا المعلوم إلى ا ق معلومة، فخط ‹ا ق› معلوم ونقطة ا معلومة، فنقطة ق معلومة.

1 بقطبيها: بنقطتيها – 2 وليخرج: ولنخرج / ب م ص: ل م ص – 3 ط كـ: ط ل – 5 م كـ: ط كـ / بعده: بعدها – 6 قطبه: قطبها – 7 ح ن م: حـ م ز / ح ن م: جـ ن م – 9 معلومة: معلوم – 10 ہ ا ز: ہ ا د – 11 كـ ن (الأولى والثانية والثالثة): كـ ى – 12 فصلنا: فصلنا كما، ثم ضرب على «كما» بالقلم – 16 قطر: قد تقرأ قطره / ب م: ن م – 19 ب م س (الأولى والثانية): ن م س – 20 ب س: ل س / إلى: مكررة / ب م: ن م – 22 ب م (الثانية): ن م – 24 المعلوم: المعام.

وأيضًا لأن نسبة ق م إلى م س معلومة ونسبة م س إلى م ب معلومة، فنسبة ق م إلى م ب معلومة، وزاوية ق م ب قائمة، فمثلث ق م ب معلوم الصورة، فزاوية ب ق م معلومة، فخط ق م معلوم الوضع، لأن خط ب ق معلوم الوضع ونقطة ق معلومة، فخط ق م معلوم الوضع. ‹و›أيضًا لأن زاوية ب م ق قائمة، فنقطة م معلومة وهي مركز الكرة التي نصف قطرها خط م ب. ولأن مركز الكرة – وهو م – ونصف قطرها – وهو م ب – معلومان، فالأعمال الباقية معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وبهذا التدبير، إذا كان في سطح الأسطرلاب نقطة ا معلومة، وفرضنا نظيرها لأفق معلوم معلومًا ومركزَ الأسطرلاب، أو نصفَ قطر الكرة أو الخطَّ الذي فيما بين قطب الكرة والنقطة التي بعد نظيرها من ذلك القطب معلومٌ، أو الخطَّ الذي فيما بين مركز الأسطرلاب والنقطة التي بُعد نظيرها من قطب الكرة معلومٌ، أو وضعَ نقطة أخرى بُعد نظيرها من قطب الكرة معلومٌ، أو وضعَ نقطة أخرى بُعد نظيرها من قطبٍ أفقه معلومٌ، أو وضعَ نقطة أخرى نظيرها لأفق معلومٍ معلومٌ / أو وضعَ نقطة أخرى معلومة لأفق معلومٍ، ٢٧٨ معلومًا، فإن مركز الكرة ونصف قطرها معلومان. فإذا كان كذلك، فإن الأعمال الباقية معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

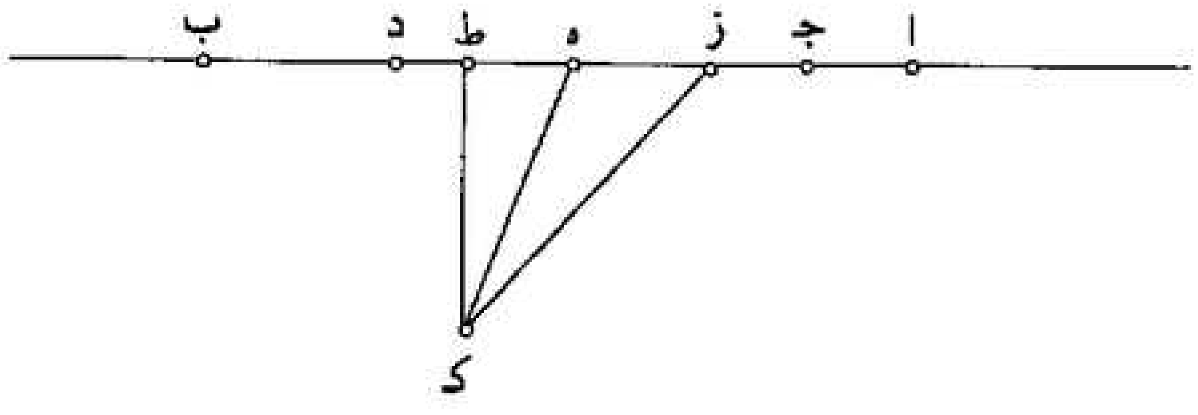
الفصل السابع
في ذكر الأشكال التي أحلناها على كتابيّ: إحداث النقط وإخراج الخطين

وقد كنا أحلنا في الفصل الثاني من المقالة الثانية من هذا الكتاب على أشكال من كتاب: *إحداث النقط على الخطوط في نسب السطوح*.

فلنذكر ذلك وهو شكلان، أحدهما:

إذا كان على خط ا ب المعلوم الوضع والقدر نقطتا جـ د معلومتين، ونريد أن نحدث على خط جـ د نقطة ‹ه› حتى يكون نسبة سطح ا ه في ه د ‹إلى› سطح جـ ه في ه ب معلومة.

6 معلومان: معلومين – 7 نظيرها: نظيره – 9 بعد: يبعد – 12 معلومٌ: معلوما / معلومة: معلوم – 13 معلومًا: معلوم / معلومان: معلوم – 18 إحداث: كتبها الاحداث ثم حكّ الحرفين الزائدين / نسب: أثبتها فوق السطر – 21 ه ب: هجب، ثم حكّ الجيم.

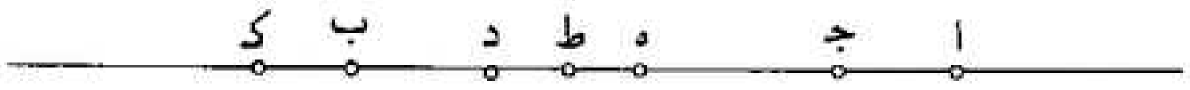


فعلى التحليل يُنزل ذلك. فلأن مربع نصف خط ا د – وهو د ز – معلوم ومساوٍ لسطح ا ه في ه د مع مربع ز ه – لأنه قد قسم بنصفين وبقسمين مختلفين – فسطح ا ه في ه د مع مربع ز ه معلوم. وأيضًا لأن مربع نصف خط جـ ب، وهو جـ ط، معلومٌ وهو مساوٍ لسطح جـ ه في ه ب مع مربع ه ط، فسطح جـ ه في ه ب مع مربع ه ط معلوم. ونسبة سطح ا ه في ه د إلى سطح جـ ه في ه ب معلومة. فإما نسبة مربع ز ه الباقي إلى مربع ه ط الباقي معلومة، وإما مربع أحدهما أعظم من سطح نسبته إلى مربع الآخر معلومة، بسطح معلوم، كما بيّن أقليدس / في كتابه في *المعطيات*. فإن كانت نسبة مربع ٢٧٩ ز ه إلى مربع ه ط معلومة، فنسبة ز ه إلى ه ط معلومة، فنقطة ه معلومة. وإن كان مربع أحدهما أعظم من سطح نسبته إلى مربع الآخر معلومة، بسطح معلوم. فليكن الأعظم مربع ز ه، ونجعل نسبة ذلك السطح المعلوم إلى مربع ط ك كتلك النسبة المعلومة، فمربع ط ك معلوم، فخط ط ك معلوم. ونقطة ط معلومة فنقطة ك معلومة. فنصل خط ك ز فهو معلوم القدر والوضع. فلأن نسبة بعض مربع ز ه إلى مربع ه ط كنسبة بعض الآخر المعلوم إلى مربع ط ك، فنسبة جميع مربع ز ه إلى مجموع مربعي ه ط ط ك كنسبة ‹كل› واحد إلى قرينه المعلومة. فنسبة مربع ز ه إلى مربعي خطي ه ط ط ك معلومة. ومربعا خطي ه ط ط ك مثل مربع ه ك لأن زاوية ه ط ك قائمة. فنسبة مربع ز ه إلى مربع ه ك معلومة، فنسبة خط ز ه إلى ‹خط› ه ك معلومة، وزاوية ه ز ك معلومة لأن كل واحد من خطي ا ب ك ز معلوم الوضع، فمثلث ه ز ك معلوم الصورة، فنسبة خط ك ز المعلوم إلى ‹خط› ز ه معلومة، فخط ز ه معلوم؛ ونقطة ز معلومة، فنقطة ه معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

2 ز ه: د ه – 3 ز ه: د ه – 5 معلومة: معلوم / ز ه: د ه – 6 سطح: كتبها «نسب»، ثم صححها عليها – 8 ز ه (الأولى): د ه – 9 نسبته: نسبة – 10 ز ه: د ه – 12 ز ه: كتب بعدها «مجموع مربعي ه ط ط ك»، ثم ضرب عليها بالقلم – 13 واحد: واحده – 14 قرينه: قرينة – 15 مثل: جائزة على تقدير «المجموع» / قائمة: مكررة – 19 نبيّن: كتب بعدها «بلغ».

الشكل الآخر:

إذا كان على خط ا ب المعلوم القدر ‹والوضع› نقطة جـ معلومة؛ ونريد أن نحدث على خط جـ ب نقطة، ولتكن د، حتى تكون نسبة سطح ا جـ في جـ د إلى سطح ا د في د ب معلومة.



فعلى التحليل يُنزل ذلك. فلأن نسبة سطح ا جـ في جـ د أيضًا إلى سطح ب جـ في جـ د معلومة – لأنها كنسبة ا جـ إلى جـ ب المعلومة – فنسبة سطح ب جـ في جـ د إلى سطح ا د في د ب معلومة. ومربع نصف خط ا ب – وهو ه ب – معلوم، وهو مساوٍ لسطح ا د في د ب مع مربع ه د؛ ومربع ب جـ معلوم ومساوٍ لسطح ب جـ في جـ د وسطح جـ ب / في ب د؛ ونسبة سطح ا د في د ب إلى سطح ب جـ في جـ د معلومة. ٢٨٠
فإما أن يكون نسبة مربع ه د الباقي إلى سطح جـ ب في ب د الباقي معلومة، وإما أن يكون أحدهما أعظم من سطح نسبته إلى الآخر معلومة بسطح معلوم.

فإن كانت نسبة مربع ه د إلى سطح جـ ب في ب د معلومة، ونسبة سطح جـ ب في ب د إلى سطح ه ب في ب د معلومة، لأنها كنسبة جـ ب المعلوم إلى ب ه المعلوم، كانت نسبة مربع ه د إلى سطح ه ب في ب د معلومة. فإن كانت كذلك فنقطة د معلومة، لأن نسبة مربع نصف خط ه د – وهو مربع ط د – إلى سطح ه ب في ب د معلومة. وإذا ركبنا، كانت نسبة مربع ط د إلى سطح ه ب في ب د مع مربع ط د معلومة؛ لكن سطح ه ب في ب د مع مربع ط د مثل مربع ط ب، لأن ط د نصف خط ه د وخط د ب زيادة. فنسبة مربع ط ب إلى مربع ط د معلومة، فنسبة خط ط ب إلى خط ط د معلومة. وإذا فصلنا، فنسبة خط ب د إلى ‹خط› د ط معلومة، فنسبة ب د إلى ضعف د ط، وهو د ه، معلومة، فنقطة د معلومة لأن خط ب ه معلوم لأنه نصف خط ا ب المعلوم.

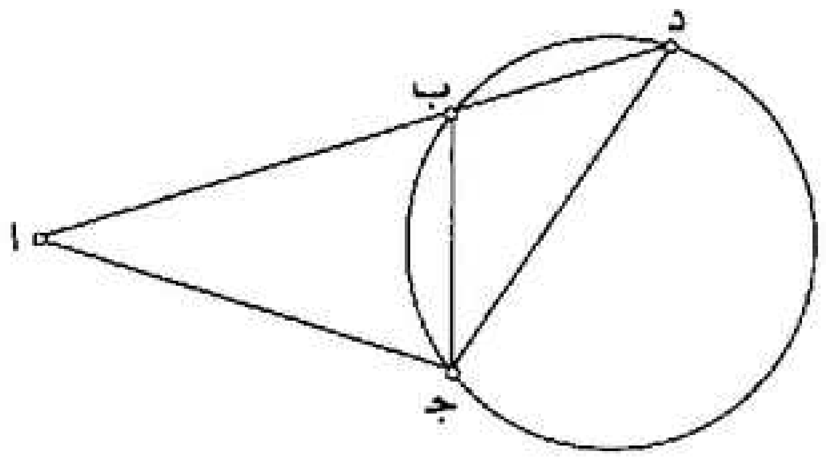
وإذا كان أحدهما أعظم من سطح نسبته إلى الآخر معلومة بسطح معلوم، فليكن الأعظم مربع ه د. فنجعل نسبة ذلك السطح المعلوم إلى سطح آخر وهو جـ ب في ب ك تلك النسبة بعينها. فسطح جـ ب في ب ك معلوم وخط جـ ب معلوم، فخط ب ك

2 ‹والوضع›: نجدها في نص ابن سهل – 6 فنسبة: ونسبة – 7 د ب: د ر / ه ب: مب – 8 ومساوٍ: ومتساو – 10 ه د: هذا / الباقي: الباقية / ب د: يد، ويكتب عادة الباء ياءً، ولن نثبتها فيما بعد / الباقي: الباقية – 20 ب ه: ن ه.

معلوم. فنسبة مربع ه د إلى سطح جـ ب في ب د وإلى ‹سطح› جـ ب في ب ك مجموعين، أعني جـ ب في ك د معلومة. ونسبة سطح جـ ب في ك د إلى سطح ه ك في ك د معلومة لأنها كنسبة ب جـ إلى ه ك، فنسبة مربع ه د إلى سطح ه ك في ك د معلومة، فخط ك د معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وكنّا قد أحلنا أيضًا في برهان شكلين من هذا الكتاب على كتابنا: *في إخراج الخطين من نقطة على زاوية معلومة*. فلنذكرهما وهما شكلان، أحدهما:

إذا كانت نقطة ا معلومة ومحيطُ دائرةِ ب جـ معلومَ الوضع؛ ونريد أن نخرج من نقطة ا خطين مستقيمين، وليكونا ا ب ا جـ، حتى يكون زاوية ب ا جـ / معلومة ونسبة ب ا ٢٨١
إلى ا جـ معلومة.



فعلى التحليل يُنزل أن زاوية ب ا جـ معلومة ‹الوضع› ونسبة ب ا إلى ا جـ معلومة؛ فنصل خطي ب جـ جـ د. فمثلث ا ب جـ معلوم الصورة، فزاوية ا ب جـ معلومة، فزاوية جـ ب د معلومة، فخط جـ د معلوم القدر، فمربعه معلوم. وأيضًا لأن نسبة ب ا إلى ا جـ معلومة، وهي كنسبة سطح ا ب في ا د إلى سطح جـ ا في ا د، لكن سطح ب ا في ا د معلوم، فسطح جـ ا في ا د معلوم، فنسبة سطح جـ ا في ا د إلى مربع جـ د معلومة. وزاوية د ا جـ معلومة، فمثلث جـ ا د معلوم الصورة، فنسبة د جـ – المعلوم القدر – إلى جـ ا معلومة، فخط جـ ا معلوم القدر. ومحيط الدائرة معلوم الوضع ونقطة ا معلومة، فخط ا جـ معلوم الوضع، فنقطة جـ معلومة، ونقطة ب معلومة لأن زاوية ب ا جـ معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

3 ب جـ إلى ه ك: ه ك إلى ب جـ – 4 فخط: فنسبة / معلوم: معلومة – 7 معلوم: معلومة، وهي أيضًا جائزة على تقدير الدائرة – 8 وليكونا: وليكن – 12 جـ ب د: جـ د – 14 معلوم (الأولى): معلومة – 17 ب ا جـ: ب ا ح – 18 نبيّن: كتب بعدها «بلغ».

والآخر:

إذا كانت نقطة آ معلومة ومحيط دائرة ب جـ د معلوم الوضع ؛ ونريد أن نخرج من نقطة آ خطين، وليكونا ا ب ا جـ، حتى يكون ب جـ معلوم القدر ‹وزاوية ب ا جـ معلومة›.

فعلى التحليل يُنزل أن زاوية ‹ب ا جـ› معلومة وخط ب جـ معلوم القدر. فلأن خط ب جـ معلوم القدر، فزاوية ب د جـ معلومة؛ وزاوية ب ا جـ معلومة، فمثلث ا د جـ معلوم الصورة. فنسبة خط د ا إلى ا جـ وهي كنسبة سطح د ا في ا ب إلى سطح جـ ا في ا ب ‹معلومة›، لكن سطح د ا في ا ب معلوم، فسطح جـ ا في ا ب معلوم، فنسبته إلى مربع ب جـ معلومة؛ وزاوية ب ا جـ معلومة، فمثلث ا ب جـ معلوم الصورة، فنسبة ب جـ، المعلوم القدر، إلى كل واحد من خطي ا جـ ا ب معلومة، فكل واحد من خطي ا ب ا جـ معلوم القدر؛ / ومحيط الدائرة معلوم الوضع ، فكل واحد من خطي ا ب ا جـ ٢٨٢ معلوم الوضع ، فكل واحدة من نقطتي ب جـ معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

تـمّ الكتاب في عمل الأسطرلاب بالهندسة
والحمد لله ربّ العالمين وصلى الله على سيدنا محمد وآله

3 وليكونا: وليكن – 6 وزاوية: فزاوية – 7 إلى (الأولى): آلى – 10 معلومة: معلوم / فكل: وكل.

مؤسســـة الملــك عبد العــزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

العلاء بن سهل
‹شرح كتاب صنعة الأصطرلاب لأبي سهل القوهي›

بسم الله الرحمن الرحيم
رب يسّر وأعن

وجدت في صدر كتاب الأَصطُرْلاب المنسوب لأبي سهل ويجن بن رُستَم القوهي كلامًا غلِقًا يحتاج إلى تفسير، ويتضمن معاني أجمل أبو سهل ذكرها، وسلك فيها طريق العلماء الذين عزمتهم إفهام أكفائهم [في]، فيشتبه لذلك كلامهم على من دونهم، وينغلق على أفهام من لم يبلغ شأوهم. فسألت الشيخ أبا سعد العلاء بن سهل إيضاح ذلك بشرحٍ يسبق معناه إلى قلب القارئ له ويفتح به المنغلق من كلامه، فأملى في تفسير فصول منه ما قرنته بآخر هذا الكتاب ليتكامل معناه وترك الاشتباه فيه، ويشترك في المعرفة العالم الماهر والمتعلم والمبتدئ، وبالله التوفيق، وهو حسبنا.

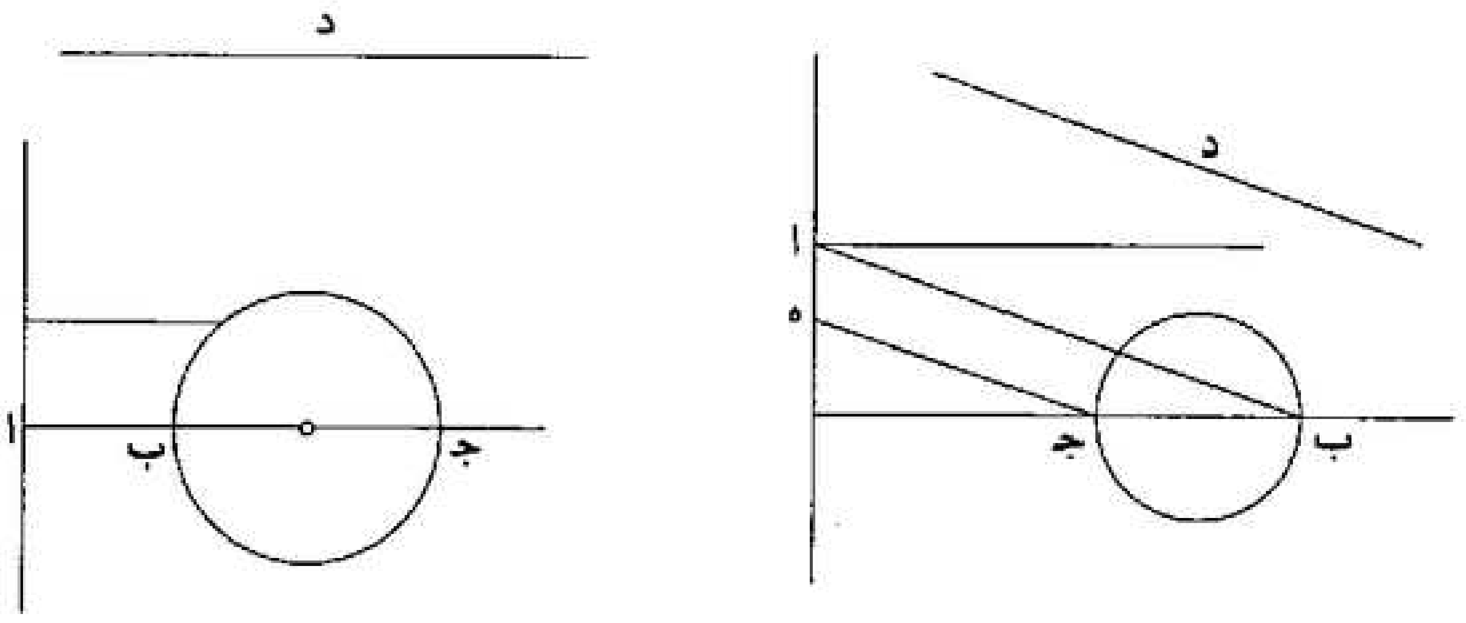
قال أبو سهل: والكرة تتسطح على سطوح مختلفة الأجناس من مواضعَ مختلفة، لكن لا يتحرك أحد السطحين منها على الآخر بحركة الكرة، إلا أن يكون على السطوح المخروطية والأسطوانية أو ما أشبهها من ذوات المحور التي محورها محور الكرة، أو المستوية التي يكون محور الكرة عمودًا عليها.

التفسير: كل سطحين متطابقين من سطوح الأسطرلاب، فإما أن يكونا من السطوح الحادثة من إدارة خط حول المحور، أو لا يكونا منها.

5 الأصطرلاب: يكتبها بالصاد أو بالسين، وكلاهما مستعمل / ويجن: ويحيى – 6 أجمل: المقصود أن أبا سهل قد ساق الكلام موجزًا عند ذكره لهذه المعاني فغمضت. وربما كانت «أهمل» لأنها تتفق أيضًا مع السياق، فلقد ترك أبو سهل الكثير من هذه المعاني ولم يذكرها، وسيأتي بها ابن سهل – 7-8 وينغلق على أفهام: كتبت هكذا «ويتقلق سفلى الافهام» والكلمة الثانية مهملة، ولذا يمكننا أيضًا قراءتها على هذه الصورة «ويتعلق بسفلى الأفهام» وهو يتمشى أيضًا مع سياق الكلام إلا أنه لا يتمشى مع عبارات أبي سهل في هذه المقالة – 13 على (الثانية): ناقصة [ق] – 14 والأسطوانية: أو الأسطوانية [ق] / أو المستوية: والمستوية [ق] – 15 عمودًا: عمود – 16 يكونا: يكون – 17 من: مكررة.

فإن كان السطحان المتطابقان من السطوح الحادثة من إدارة خط حول محور –
والمعروف من هذه السطوح: السطح المستوي، والسطح الكري، وجوانب الأسطوانة
والمخروط القائمين، وسطوح تقويرات المجسمات المكافئة والزائدة والناقصة القائمة – فليكن
السطح المتحرك منها آ ومحور الكرة التي يراد تسطيحها / على سطح آ هو ب جـ، فإما أن ٢٨٣
يكون محور ب جـ مسامتًا لمحور سطح آ أو لا يكون مسامتًا له.

‹آ› فإن كان محور ‹ب جـ› مسامتًا لمحور سطح آ، فإما أن يكون التسطيح على موازاة أو مسامتةِ خط مستقيم أو يكون على مقابلة نقطة. فإن كان التسطيح على موازاة أو مسامتة خط مستقيم، فإما أن يكون على موازاة أو مسامتة محور ب جـ أو لا يكون على موازاته أو مسامتته. فإن ‹كان› التسطيح على موازاة أو مسامتة محور ب جـ، أمكن أن يدور سطح آ على السطح الآخر. فليلق محور ب جـ سطح آ على نقطة آ. فلأن التسطيح على موازاة أو مسامتة محور ب جـ فنقطة آ ساكنة، فيمكن أن يدور سطح آ حول نقطة آ على السطح الآخر؛ لأنه إن دار حولها فإنما يدور حول محور ب جـ؛ فلزم جملة سطح آ في جميع أوقات دورانه مكانه الأول، وفي هذا المكان يطابق سطح آ السطح الآخر، فإذًا يطابقه في جميع أوقات دورانه، فلذلك يمكن أن يدور عليه.

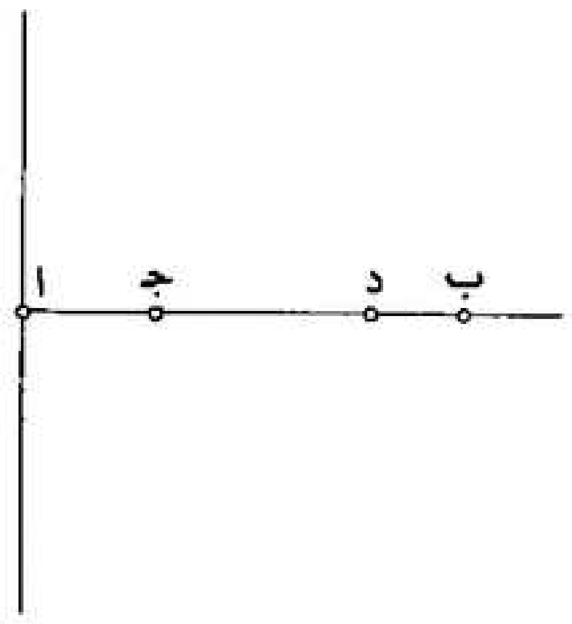


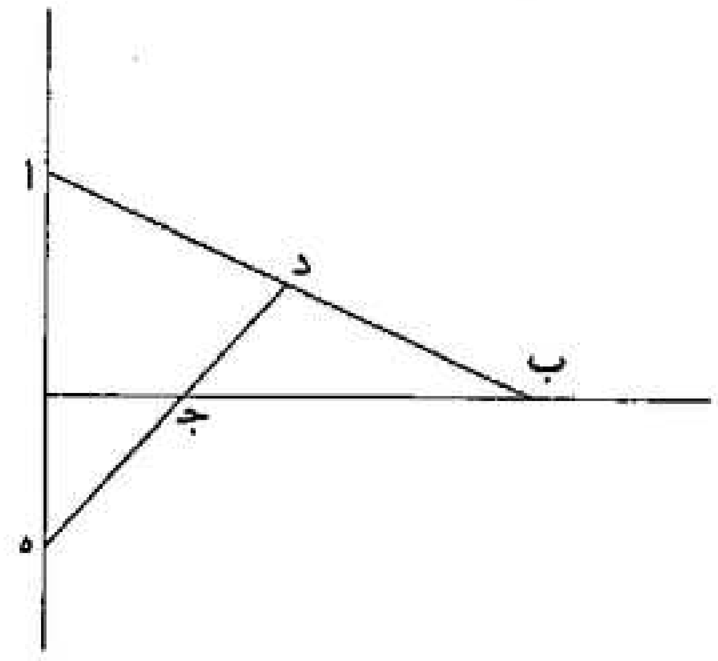
وإذا لم يكن التسطيح على موازاة أو مسامتة محور ب جـ، لم يمكن أن يدور سطح آ على السطح الآخر. فليكن التسطيح على موازاة أو مسامتة خط د، ونخرج خطي ا ب جـ ه موازيين لخط د، ويلقيا سطح آ على نقطتي آ ه، فنقطة آ تسطيح قطب ب، ونقطة

1 حول: مكررة – 4 يراد: يزاد / تسطيحها: مكررة / هو: وهو – 6 فإما: مكررة – 7 أو (الأولى): في مثل هذا الاستعمال تعبر عن مطلق الجمع كالواو – 10 السطح: سطح – 12 السطح: سطح – 13 يطابق: تطابق / آ: الالف – 14 يطابقه: تطابقه – 16 ونخرج: ويخرج – 17 لخط: مكررة / ويلقيا: ويلتقيا / ونقطة: وقطب.

ه تسطيح قطب جـ. وقطبا ب جـ ساكنان، فنقطتا ا ه ساكنتان، وهما على سطح ا، فلا يمكن أن يدور سطح ‹ا› على السطح الآخر.

وإن كان تسطيحٌ على مقابلة نقطة، فلتكن تلك النقطة د. فإما أن تكون نقطة د على محور ب جـ أو لا تكون عليه. فإن كانت نقطة د على محور ب جـ، أمكن أن يدور سطح ا على السطح الآخر. فليلق محور ب جـ سطح ا على نقطة ا./ فلأن نقطة د على ٢٨٤ محور ب جـ، فنقطة ا تسطيح أحد قطبي ب جـ إن وافقت نقطة د القطب الآخر، وهي تسطيحهما جميعًا إن لم توافق نقطة د واحدًا منهما. وقطبا ب جـ ساكنان فنقطة ا ساكنة، فيمكن أن يدور ‹سطح ا› على السطح الآخر كما بيّنا في القسم الأول.

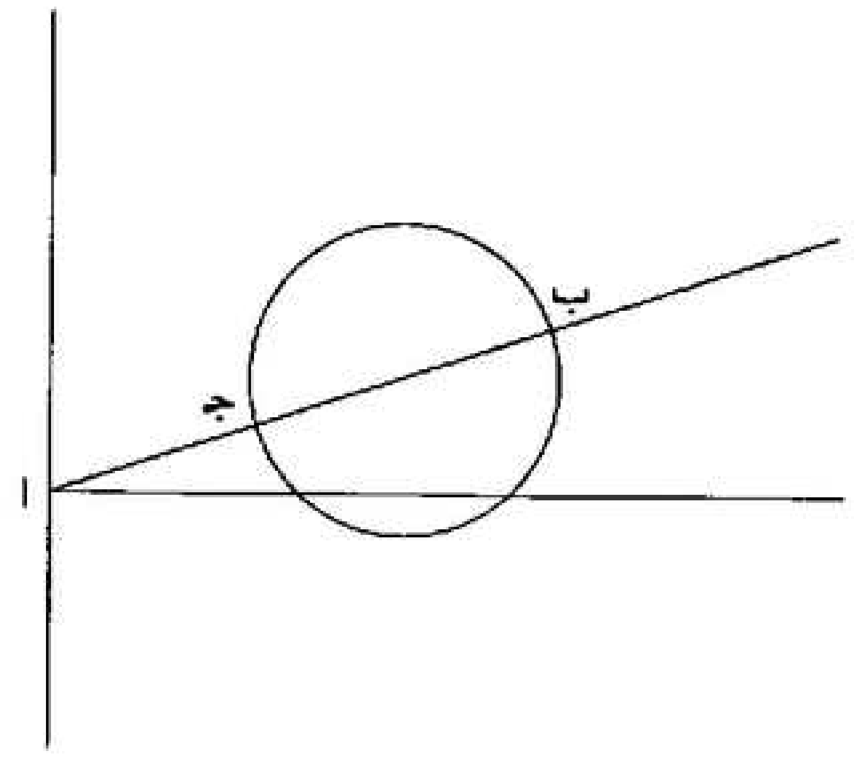




وإن لم يكن نقطة د على محور ب جـ، لم يمكن أن يدور سطح ا على السطح الآخر. وذلك أنا نخرج خطي ب د جـ د، وليلقيا سطح ا على نقطتي ا ه، فنقطة ا تسطيح قطب ب، ونقطة ه تسطيح قطب جـ. وقطبا ب جـ ساكنان، فنقطتا ا ه ساكنتان، وهما على سطح ا، فلا يمكن أن يدور سطح ا على السطح الآخر.

‹ب› وإن لم يكن محور ب جـ مسامتًا لمحور سطح ا، لم يمكن أن يدور سطح ا، على السطح الآخر. وذلك أنه إن دار عليه، فإنما يدور بدوران الكرة المتسطحة عليه، وهذه الكرة تدور حول محور ب جـ، فسطح ا يدور حول محور ب جـ، وليس محور ب جـ يسامت لمحور سطح ا. فلا تلزم جملة سطح ا في جميع أوقات دورانه مكانه الأول، وفي هذا المكان يطابق سطح ا السطح الآخر. فإذًا لا يطابقه في جميع أوقات دورانه، فلذلك لا يمكن أن يدور عليه.

1 ساكنتان: ساكنان – 2 السطح: سطح – 3 فلتكن: فليكن / تكون: يكون – 4 تكون: يكون / دَ: دال – 7 واحدًا: واحد – 10 نقطتي: قطبي – 13 مسامتا لمحور: الأفصح «مسامتا محور» لأن الفعل يتعدى بنفسه؛ ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 16 سطح: تسطيح / سطح: لسطح – 17 فلذلك: ولذلك.



وإن لم يكن السطحان المتطابقان من السطوح الحادثة من إدارة خط حول محور، لم يمكن أن يدور أحدهما على الآخر. وذلك أنه إن دار عليه، انتقل جزء من المجسم المتحرك إلى مكان جزء من المجسم الساكن، فوجدا معًا وهذا محال؛ فإذًا لا يمكن ‹أن يدور› أحدهما على الآخر.

عَبّرَ أبو سعد هذا الفصل إلى هذه الحكاية: وذلك أنه إن دار لم تلزم جملته في جميع أوقات دورانه مكانه الأول، لأنه لم يحدث من إدارة خط حول خط مستقيم؛ وفي مكانه الأول يطابق السطح الآخر. فإذًا لا يطابقه في جميع أوقات دورانه، فلذلك لا يمكن أن يدور أحدهما على الآخر.

قال أبو سهل: أما السطوح المخروطية أو الأسطوانية، فإن تسطيح الدوائر التي على الكرة يكون / فصولاً مشتركة للمخروط وللأسطوانة أو للمخروطين أو للأسطوانتين. ٢٨٥

تفسير: يعني بالفصول المشتركة للمخروط وللأسطوانة أو للمخروطين أو للأسطوانتين الفصولَ المشتركة لسطح الأسطرلاب وللسطوح المارّة بدوائر الكرة. ومرورهم بها على وجهين: أحدهما أن يكون على موازاة أو مسامتة خط مستقيم وقد سمّاه الأسطواني، ويصح ما حكم به عند ذلك على شرط وهو ألاّ توازي سطوح هذه الدوائر هذا الخط ولا تمرّ به؛ والآخر أن يكون على مقابلة نقطة وقد سمّاه المخروطي، ويصح ما حكم به عند

2 المجسم: الجسم – 3 المجسم: الجسم – 7 يطابق: تطابق – 9 أما: أما على [ق] – 10 للمخروط وللأسطوانة: للمخروطية وللأسطوانية [ق] / للأسطوانتين: للسطوانين، وهي «للأسطوانيين» في [ق] – 11 وللأسطوانة: والاسطوانة – 12 وللسطوح: ولسطوح / ومرورهم: ومروره – 14 توازي: يوازي.

ذلك على شرط وهو ألاّ تمرّ سطوح هذه الدوائر بهذه النقطة. وهذا بيّن، وإنما ‹ترك› ذكره للتساهل. فإذا كان سطح الأسطرلاب جوانب مخروط أو جوانب أسطوانة، والسطوحُ التي يكون بها التسطيح جوانب أساطين أو جوانب مخروطات، كان تسطيح دوائر الكرة على الأسطرلاب فصولاً مشتركة للمخروط والأسطوانة أو للمخروطين أو الأسطوانتين.

قال أبو سهل: والأسطواني هو الذي يكون عن الدوائر التي على الكرة بأساطين متوازية المحاور على السطح الذي تتسطح الكرة عليه.

تفسيره: إنما يصح ما حكم به على شرط وهو ألاّ توازي سطوح هذه الدوائر الخط الذي يكون التسطيح على موازاته أو مسامتته ولا تمرّ به؛ فإنها إن وازته أو مرّت به، كان تسطيح هذه الدوائر بسطوح مستوية؛ وإنما ترك ذكر ذلك للتساهل.

قال أبو سهل: الخطوط والنقط التي على الكرة ‹فإن تسطيحها يكون› بسطوح وخطوط موازية لتلك المحاور على ذلك السطح.

تفسيره: إنما يصح ما حكم به في الخطوط على شرط وهو ألاّ يوازي أو يسامت ‹سطوح› هذه الخطوط الخطُّ الذي يكون التسطيح على موازاته أو مسامتته؛ فإنها إن وازته أو سامتته كان تسطيحها بخطوط ‹مستقيمة›؛ وإنما ترك ذكره للتساهل.

قال أبو سهل: والمخروطي هو الذي يكون عن / الدوائر التي على الكرة مخروطات ٢٨٦ رؤوسها نقطة واحدة وقواعدها على السطح الذي تتسطح الكرة عليه.

تفسيره: إنما يصح ما حكم به على شرط وهو ألاّ تمرّ سطوح هذه الدوائر بالنقطة التي يكون التسطيح على مقابلتها، وتركه للتساهل.

قال أبو سهل: وإذا كان تسطيح الكرة أسطوانيًا موازي المحور لمحور الكرة، أو مخروطيًا رأسه على المحور على غير قطب الكرة، فإنه ينطبق سطحان من الكرة أحدهما على الآخر في ذلك السطح.

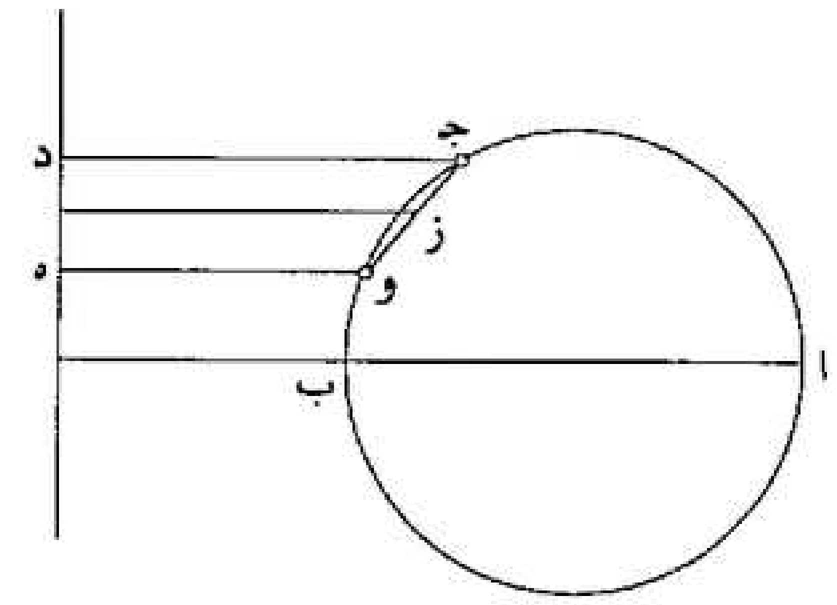
تفسيره: هذا صحيح لأنه عند ذلك تمرّ كل أسطوانة أو مخروط لا يماسان الكرة أو مخروطين متقابلين بدائرتين في جهتين مختلفتين، ويكون الفصل المشترك لسطح الأسطرلاب ولسطح الأسطوانة أو المخروط – اللذين لا يماسان الكرة – أو المخروطين المتقابلين تسطيحَ الدائرتين جميعًا.

1 تمرّ: يمر – 5 عن: من، وهي «عن» في [ق] / بأساطين: أساطين [ق] – 6 تتسطح: يتسطح – 7 توازي: يوازي – 8 تمرّ: يمرّ / وازته: وازيه – 10-11 بسطوح وخطوط: سطوح وخطوط [ق] – 12 ما: انما – 13 وازته: قارنت – 14 تسطيحها: المقصود هنا تسطيح الخطوط، وتركنا العبارة كما هي عليه – 16 تتسطح: يتسطح – 17 ألا: لا – 24 الأسطوانة: الاسطرلاب.

قال أبو سهل: وتكون الدوائر التي على الكرة – إلاّ الدوائر التي محور الكرة عمود عليها – ليست تقع دوائر في ذلك السطح، لكنها قطوع المخروط أو غيرها.

تفسيره: إنما يصح ما حكم به إن كان التسطيح أسطوانيًا على شرط وهو ألاّ توازي سطوح هذه الدوائر الخط الذي يكون التسطيح على موازاته أو مسامتته ولا تمرّ به؛ وإن كان التسطيح مخروطيًا على شرط وهو ألاّ تمرّ سطوح هذه الدوائر بالنقطة التي يكون التسطيح على مقابلتها؛ وقد ‹ترك› ذكره للتساهل.

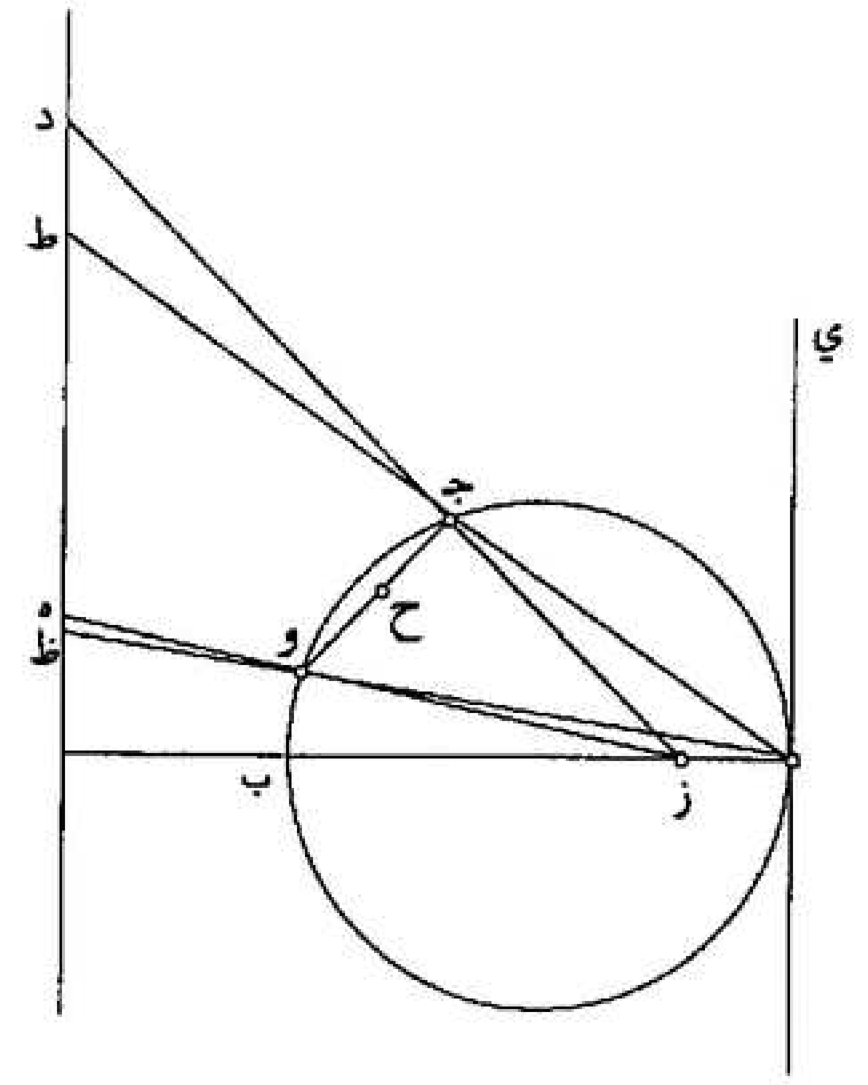
فإن كان سطح الأصطرلاب مستويًا، كان تسطيح هذه الدوائر قطوع مخروط. وذلك، أنا إن جعلنا الكرة ا ب جـ ومحورها ا ب وسطح الأصطرلاب د ه وبعض دوائر كرة ا ب جـ التي ليس محور ا ب بعمود على سطوحها، ‹مثل› دائرة جـ و. فإن كان التسطيح على موازاة أو مسامتة محور ا ب – فلتكن الأسطوانة المارّة بدائرة جـ و هي جـ د ه و، والفصلُ المشترك لها ولسطح د ه قطعَ د ه، ومركز دائرة جـ و نقطة زَ؛ ونخرج سطح ا ب ز ولتحدث عنه في سطح دائرة جـ و خط جـ ز و وفي سطح قطع د ه خط د ه، وفي جوانب أسطوانة جـ د ه و خط و ه ‹وخط جـ د› / وليسا بعمودين على سطح ٢٨٧ جـ ز و. فخط جـ د عمود على سطح د ه وليس بعمود على سطح جـ ز و، فزاوية جـ د ه قائمة، وليست زاوية د جـ و بقائمة، وليست زاوية جـ د ه مثل زاوية د جـ و. وقطع جـ و دائرة، فليس قطع د ه بدائرة، وهو قطع مخروط كما بيّنه ثابت بن قرّة في كتابه في *قطع الأسطوانة*؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

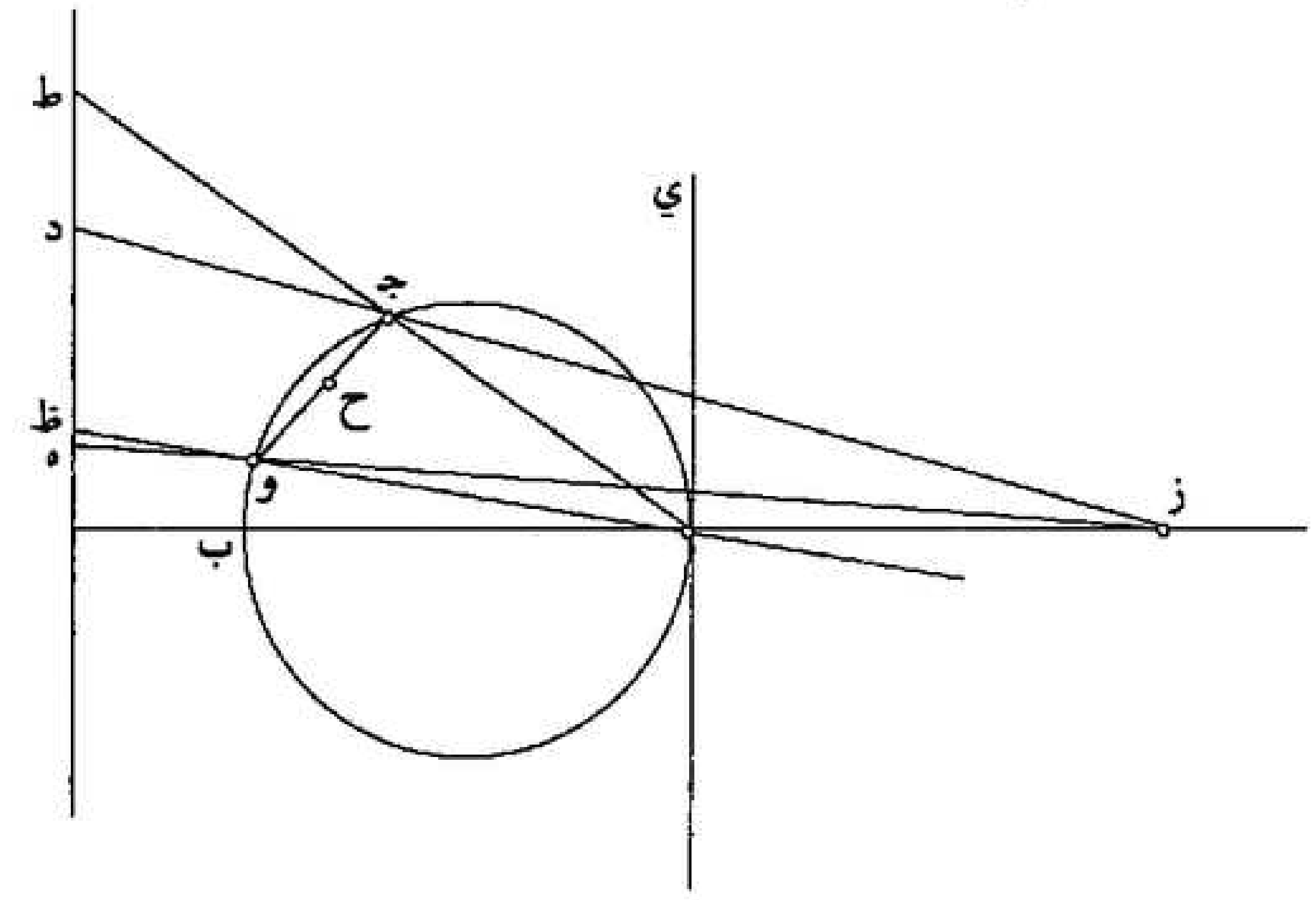


وإن كان التسطيح على مقابلة نقطة، فليكن المخروط المارّ بدائرة جـ و ه ز جـ ورأسه نقطة زَ، والفصل المشترك له ولسطح د ه قطع د ه، ومركز دائرة جـ و نقطة حَ. ونخرج

1 إلا: غير [ق] / الكرة (الثانية): الكورة – 3 التسطيح: السطح / توازي: يوازي – 5 يكون: تكون – 7 سطح: صح – 12 ا ب ز: ا ر / ولتحدث: ولنحدث / جـ ز و: جـ ز د – 13 و ه: د ه / وليسا بعمودين: وليس بعمود – 15 وليست: ليست – 18 ه ز جـ: هو.

سطح ا ب ح، وليحدث عنه في سطح دائرة جـ و وخط جـ ح و وفي سطح قطع د ه خط د ه وفي جوانب مخروط ز جـ د ه خطا ز جـ د ز و ه. ونصل خط ا جـ ط، وليلق خط د ه على نقطة ط، ونصل خط ا و؛ فزاوية ز و جـ أعظم من زاوية ا و جـ في الصورة الأولى وأصغر منها في الثانية. ونخرج ا ي مماسًا لدائرة ا ب جـ، فزاوية ا و جـ مثل زاوية ط ا ي. وخط ا ب عمود على خطي ا ي د ه، فخط ا ي موازٍ لخط د ه، فزاوية ط ا ي مثل زاوية ا ط ه؛ وزاوية ا ط ه أعظم من زاوية ز د ه في الصورة الأولى وأصغر منها في الثانية؛ وقطع جـ و دائرة، فليس قطع د ه – وهو قطع مخروط – / دائرة كما ٢٨٨
بيّنه أبلونيوس في *المخروطات*؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.





1 وليحدث: ولنحدث – 2 وليلق: وليكن.

وإن لم يكن سطح الأسطرلاب مستويًا، لم يكن تسطيح هذه الدوائر قطوع مخروط. والكلام في هذا يطول ولذلك تركناه.

قال أبو سهل: وإذا كان التسطيح على غير السطح المستوي الذي محور الكرة عمود عليه، فإنه يمكن ألاّ تتسطح كل رسوم الكرة أو شيء منها.

تفسيره: هذا صحيح، وذلك أنه إذا كان التسطيح على غير السطح المستوي الذي محور الكرة عمود عليه، فإنه يمكن أن يكون التسطيح على مقابلة أحد قطبي الكرة، فلا يتسطح ذلك القطب؛ ويمكن أن يكون التسطيح على موازاة أو مسامتة محور الكرة، ويكونَ سطح الأسطرلاب جوانب أسطوانة يسامت محورها محور الكرة فلا يتسطح شيء من رسوم الكرة.

قال أبو سهل: فإذا كان مخروطيًا رأسه على قطب الكرة وتسطيحًا على سطح مستوٍ، محور الكرة عمود عليه، لم يكن له شيء من هذه الأحوال البتّة ولم يبق شيء من الكرة لا يتسطح.

تفسيره: يعني «شيء من الكرة» شيئًا من رسوم الكرة. ومعلوم أنه لا يبقى عند ذلك شيء منها لا يتسطح إلاّ القطب الذي يكون التسطيح على مقابلته. وقد ذكر ذلك في الفصل الثاني، فتركه هاهنا للتساهل.

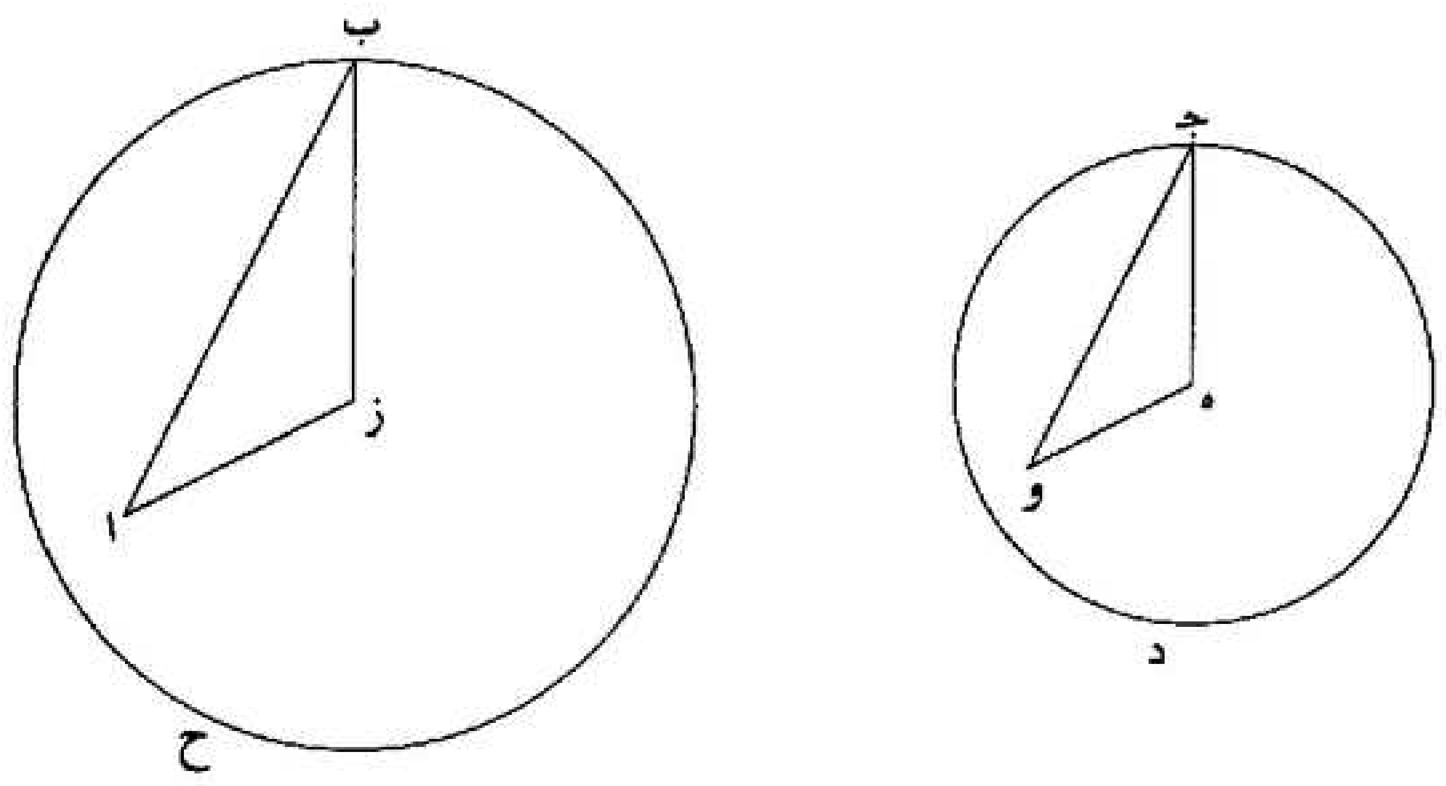
ووجدت في هذا الكتاب أشكالاً عملها أبو سهل على جهة التحليل، فسألت أبا سعد العلاء بن سهل شَرْعَ تركيبها، ففعله. ومن هذه الأشكال:

‹آ› إذا كان في سطح الأسطرلاب نقطة آ معلومة، وهي تسطيح نقطة معلومة من الكرة ونقطةُ ب معلومة وهي قطب الكرة؛ وأردنا أن نسطح فيه سائر رسوم الكرة، فإنا نخط في سطح مستوٍ دائرة – ولتكن جـ د ومركزها ه – ونعلم على محيطها نقطة ولتكن

3 السطح: كتبها التسطيح، ثم صححها عليها – 4 كل رسوم: ناقصة [ق] – 7 يتسطح: تسطح – 8 يسامت: تسامت – 10 فإذا: وإذا [ق] / وتسطيحًا: وتسطيحها [ق] – 11 هذه: هذ / ولم: لم – 20 دائرة: دادير.

جـ، ونسطح في سطح جـ د عن قطب جـ ودائرة جـ د النقطة المعلومة من الكرة؛ وليكن ‹تسطيحها› نقطة و. ونصل خطوط جـ ه جـ و ا ب، ونجعل زاوية ا ب ز مثل زاوية و جـ ه ونسبةَ خط ا ب إلى خط ب ز كنسبة خط جـ و إلى خط جـ ه. ونخط حول نقطة ز وببعد ب ز دائرة ولتكن ب ح، ونسطح في سطح ا ب ز عن قطب ب ودائرة ب ح سائر رسوم الكرة /.

أقول: إن سائر رسوم الأسطرلاب تسطيح سائر رسوم الكرة عن قطب ب ودائرة ٢٨٩ ب ح.

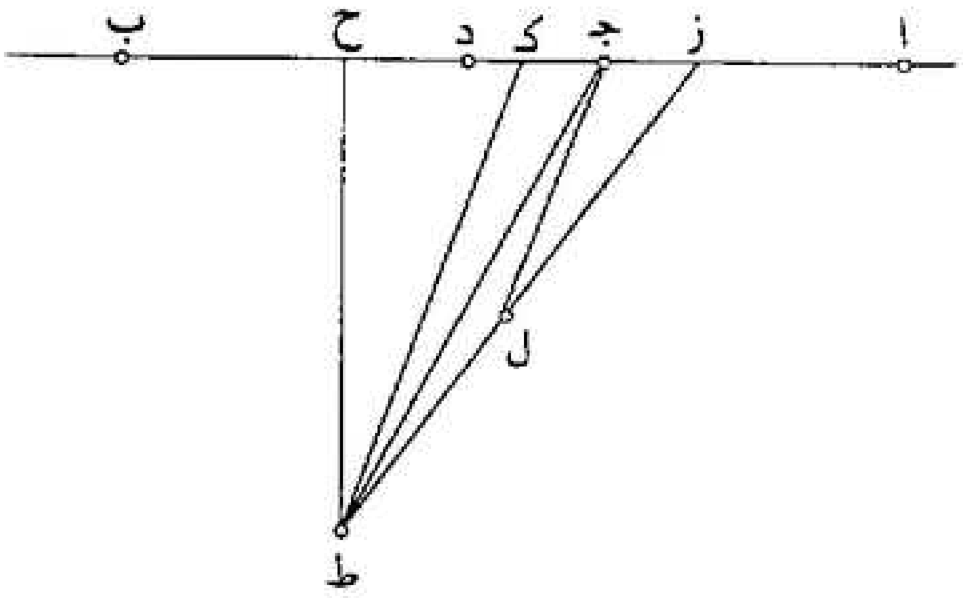


برهان ذلك: أنا نصل خطي ا ز و ه. فلأن نسبة خط ا ب إلى خط ب ز كنسبة خط جـ و إلى خط جـ ه وزاويةَ ا ب ز مثل زاوية و جـ ه، فمثلث ا ب ز شبيه بمثلث و جـ ه؛ فنسبة خط ا ز إلى خط ب ز كنسبة خط و ه إلى خط جـ ه؛ فموقع نقطة ا من قطب ب ودائرةِ ب ح كموقع نقطة و من قطب جـ ودائرة جـ د. ونقطة و تسطيح النقطة المعلومة من الكرة عن قطب جـ ودائرة جـ د، فنقطة ا تسطيح تلك النقطة عن قطب ب ودائرة ب ح، فسائر رسوم الأسطرلاب تسطيح سائر رسوم الكرة عن قطب ب ودائرة ب ح؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

‹ب› إذا كان على خط ا ب المعلوم الوضع والقدر نقطتا جـ د معلومتين، وأردنا أن نحدث على جـ د نقطة حتى يكون نسبة ‹سطح› أحد الخطين المنتهيين من نقطتي ا د

1 ونسطح: وتسطح – 4 ولتكن: وليكن / ونسطح: وتسطح – 10 ا ز: ا ب – 11 تسطيح: وتسطيح.

إلى تلك النقطة في الآخر إلى سطح أحد الخطين المنتهيين من نقطتي ب جـ إلى تلك النقطة في الآخر كنسبة ه إلى و، فإنا نقسم خط ا د بنصفين على نقطة ز وخطًّ ب جـ بنصفين على نقطة ح؛ ونخرج خط ح ط عمودًا على ا ب، ونجعل نسبة مربع د ز إلى مربع خط يخرج من نقطة جـ وينتهي إلى خط ح ط – وهو خط جـ ط – كنسبة ه إلى و. ونصل خط ز ط، ونجعل نسبة مربع جـ ز إلى مربع خط يخرج من نقطة جـ وينتهي إلى خط ز ط – وهو جـ ل – كنسبة ه إلى و. ونخرج خط ط ك موازيًا لخط جـ ل، وليلق خط جـ د على نقطة ك.



أقول: إن نسبة سطح ا ك في ك د إلى سطح ب ك في ك جـ كنسبة ه إلى و.

برهان ذلك: أن خط ط ك موازٍ لخط جـ ل، فنسبة مربع ز ك إلى ‹مربع› ط ك ٢٩٠ كنسبة مربع / جـ ز إلى مربع جـ ل. ونسبة مربع جـ ز إلى مربع جـ ل كنسبة ه إلى و؛ وخط ا د مقسوم بنصفين على ز وبقسمين آخرين على نقطة ك، فمجموع سطح ا ك في د ك ومربع ز ك مثل مربع د ز؛ وخط ب جـ ‹مقسوم› بنصفين على ح وبقسمين آخرين على ك، فمجموع سطح ب ك في جـ ك ومربع ح ك مثل مربع جـ ح؛ ومربع ح ط مشترك، فمجموع سطح ب ك في جـ ك ومربعي ح ك ح ط، وهو مجموع سطح ب ك في جـ ك ومربع ط ك، مثل مجموع مربعي جـ ح ح ط، وهو مربع جـ ط. ونسبة مربع د ز إلى مربع جـ ط كنسبة ه إلى و، فنسبة مجموع سطح ا ك في د ك ومربع ز ك إلى مجموع سطح ب ك في جـ ك ومربع ط ك كنسبة ه إلى و. وكنّا بيّنا أن نسبة مربع ز ك إلى مربع ط ك كنسبة ه إلى و، فنسبة سطح ا ك في د ك الباقي إلى سطح ب ك في جـ ك الباقي كنسبة ه إلى و؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

3 عمودًا: عمود – 8 و: واو – 11 ز: ب – 12 ز ك: بك – 13 جـ ح: حـ ح ك – 14 ب ك (الثانية): ه ك – 18 ب ك: الى ك.

‹جـ› إذا كان على خط ا ب المعلوم القدر والوضع نقطة جـ معلومة، وأردنا أن نحدث على خط جـ ب نقطة حتى تكون نسبة سطح ا جـ في الخط المنتهي من نقطة جـ إلى تلك النقطة إلى سطح أحد الخطين المنتهيين من نقطتي ا ب إلى تلك النقطة في الآخر كنسبة د إلى ه، فإنا نقسم خط ا ب بنصفين على نقطة ك، ونجعل نسبة سطح ا جـ في جـ ز إلى مربع ب ك كنسبة د إلى ه، ونسبةَ خط ا جـ إلى خط ك ز كنسبة د إلى ح، ونسبة مربع ز ط إلى مربع ك ط كنسبة مجموع ح وربع ه، إلى ربع ه ونجعل خط ط ل مثل خط ك ط.

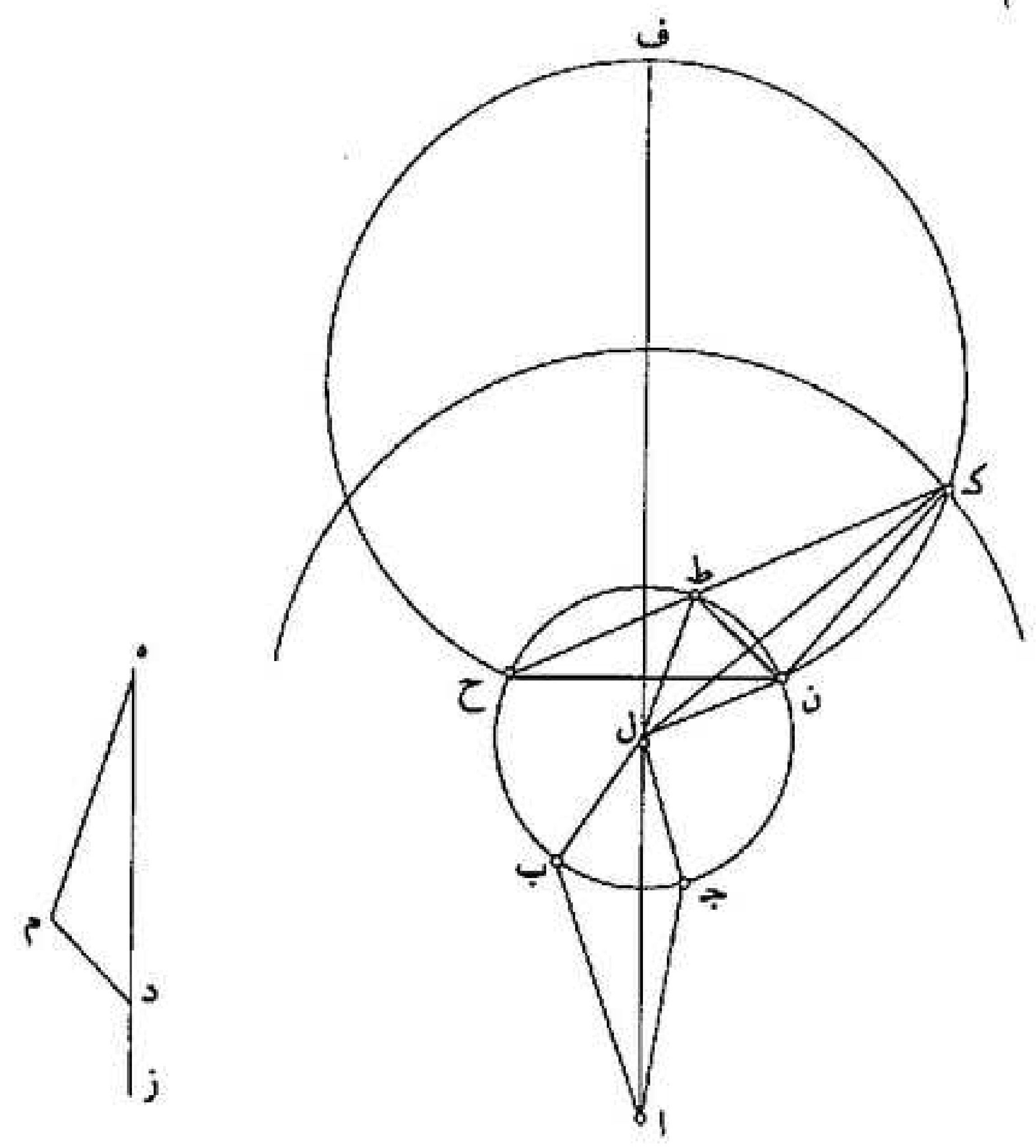
أقول: إن نسبة ‹سطح› ا جـ في جـ ل إلى سطح ا ل في ب ل كنسبة د إلى ه.

برهان ذلك /: أن خط ط ل مثل خط ط ك، وخط ز ل زيادة، فمجموع سطح ٢٩١
ك ز في ز ل ومربع ك ط مثل مربع ز ط. ونسبة مربع ز ط إلى مربع ك ط كنسبة مجموع ح وربع ه إلى ربع ه، وكنسبة مجموع سطح ك ز في ز ل ومربع ط ك إلى مربع ك ط، وكنسبة مجموع ح وربع ه إلى ربع ه. وإذا فصلنا، فنسبة سطح ك ز في ز ل إلى مربع ك ط كنسبة ح إلى ربع ه. ومربع ك ط ربع مربع ك ل، فنسبة سطح ك ز في ز ل إلى [ربع] مربع ك ل كنسبة ح إلى ه؛ ونسبة سطح ا جـ في ز ل إلى سطح ك ز في ز ل كنسبة ا جـ إلى ك ز، ونسبة ا جـ إلى ك ز كنسبة د إلى ح، فنسبة سطح ا جـ في ز ل إلى سطح ك ز في ز ل كنسبة د إلى ح. فبالمساواة إذًا نسبة سطح ا جـ في ز ل إلى مربع ك ل كنسبة د إلى ه. ومجموع سطحي ا جـ في قسمي جـ ل ز ل مثل سطح ا جـ في جـ ز؛ ومجموع سطح ا ل في ب ل ومربع ك ل مثل مربع ب ك. ونسبة سطح ا جـ في جـ ز إلى مربع ب ك كنسبة د إلى ه، فنسبة مجموع سطحي ا جـ في قسمي جـ ل ز ل إلى مجموع سطح ا ل في ب ل ومربع ك ل كنسبة د إلى ه. وكنّا بيّنا أن نسبة سطح ا جـ في ز ل إلى مربع ك ل كنسبة د إلى ه، فنسبة سطح ا جـ في جـ ل الباقي إلى سطح ا ل في ب ل الباقي كنسبة د إلى ه؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

1 نقطة: ونقطة – 9 ز ل: ر ك – 10 ز ل: ر ك / مثل: مكررة – 11 ز ل: ر ك / ط ك: ك ك – 12 وكنسبة: كنسبة / مجموع: أثبتها في الهامش / ز ل: ر ك – 14 ز ل: ر ا / ز ل: ر ك – 15 كنسبة: نسبة / ز ل: ر ك – 18 ا ل: ا ب.

‹د› إذا كانت نقطة ا معلومة ومحيط دائرة ب جـ معلوم الوضع، وأردنا أن نخرج من نقطة ا خطين ينتهيان إلى محيط دائرة ب جـ ويحيطان بزاوية مثل زاوية د ه م ويكون نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة خط د ه إلى خط م ه، فإنا نصل خط د ه ونخرجه إلى نقطة ز؛ ونفصل من دائرة ب جـ قطعة ح ط ن حتى تقبل زاوية مثل زاوية م د ز؛ ونعمل على خط ح ن قطعة دائرة ح كـ ن حتى تقبل زاوية مثل زاوية د ه م؛ ونحد مركز دائرة ب جـ، وليكن ل؛ ونخط حول نقطة ل وببعد ا ل دائرة؛ ولتلق قوس ح كـ ن على نقطة كـ. ونصل خطي ح كـ ن كـ. وليلق خط ‹ح كـ› دائرة / ب جـ على نقطة ط. ونصل ٢٩٢ خطوط كـ ل ط ل ب ل؛ ونجعل زاوية ا ل ب مثل زاوية كـ ل ط وزاوية ا ل جـ مثل زاوية كـ ل ن، ونصل خطي ا ب ا جـ.

أقول: إن زاوية ب ا جـ مثل زاوية د ه م، ونسبة خط ا ب إلى خط ا جـ كنسبة خط د ه إلى خط ه م.



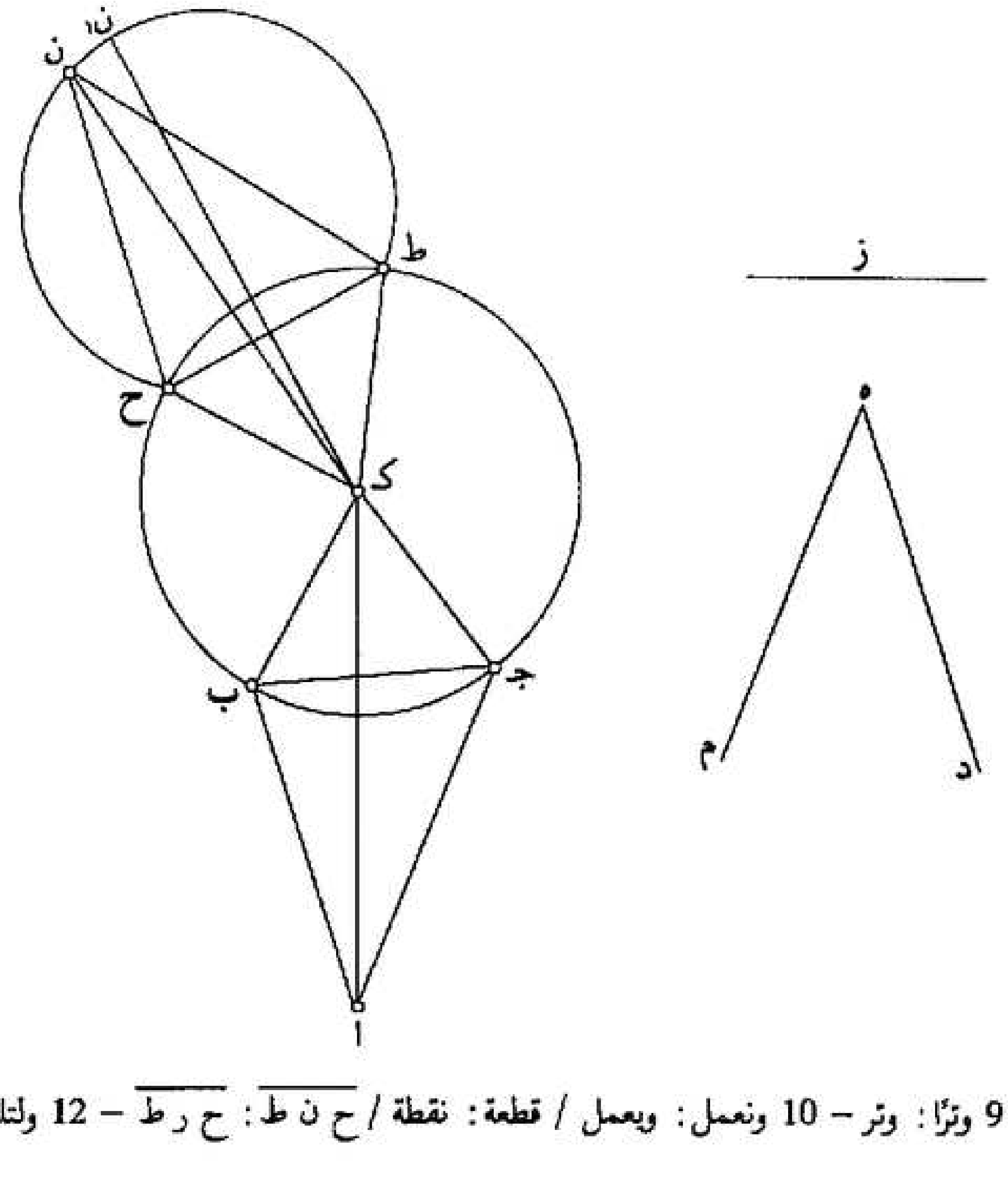
برهان ذلك: أن زاوية ا ل ب مثل زاوية كـ ل ط، ونقطة ل مركز دائرة ا كـ كما أنها مركز دائرة ب جـ، فخط ا ل مثل خط كـ ل. وخط ب ل مثل خط ط ل، فزاوية ب ا ل مثل زاوية ط كـ ل، وخط ا ب مثل خط ط كـ. وكذلك يتبيّن أن زاوية جـ ا ل مثل زاوية ن كـ ل وأن خط ا جـ مثل خط ن كـ. فزاوية ب ا جـ مثل زاوية ط كـ ن،

1 معلوم: معلومة – 4 تقبل: يقبل / ونعمل: ويعمل – 5 تقبل: يقبل / ونحد: ويجد – 6 ونخط: ويخط / ولتلق: وليلق – 8 وزاوية: فزاوية – 13 ب جـ: ا ب جـ.

ونسبة خط ا ب إلى خط ا جـ كنسبة خط ط ك إلى خط ن ك. وزاوية ط ك ن مثل زاوية د ه م، فزاوية ب ا جـ مثل زاوية د ه م. ونصل خط ط ن، فزاوية ح ط ن مثل زاوية م د ز، فزاوية ن ط ك مثل زاوية ه د م، وزاوية ط ك ن مثل زاوية د ه م. فمثلث ط ن ك شبيه بمثلث د ه م، فنسبة خط ط ك إلى خط ن ك كنسبة خط د ه إلى خط ه م. وكنّا بيّنا أن نسبة خط ا ب إلى ا جـ كنسبة خط ط ك إلى خط ن ك، فنسبة خط ا ب إلى خط ا جـ كنسبة خط د ه إلى خط ه م؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

‹ه› إذا كانت نقطة آ معلومة ومحيط دائرة ب جـ معلوم الوضع، وأردنا أن نخرج من
نقطة آ خطين / ينتهيان إلى محيط دائرة ب جـ ويحيطان بزاوية مثل زاوية د ه م ويكون ٢٩٣
وتر القوس التي بينهما مثل خط ز، فإنا نخرج في دائرة ب جـ وترًا مثل خط ز، وليكن
ح ط، ونعمل على خط ح ط قطعة دائرة ح ن ط تقبل زاوية مثل زاوية د ه م. ونحدّ
مركز دائرة ب جـ، وليكن نقطة ك، ونصل خط ا ك، ونخط حول نقطة ك وببعد خط
ا ك دائرة؛ ولتلق قوس ح ن ط على نقطة ن، ونصل خطوط ك ن ك ح ك ط، ونجعل
زاوية ا ك ب مثل زاوية ن ك ح وزاوية ا ك جـ مثل زاوية ن ك ط، ونصل خطوط ا جـ
ا ب ب جـ.

أقول: إن زاوية ب ا جـ مثل زاوية د ه م وخطًا ب جـ مثل خط ز.



7 معلوم: معلومة – 9 وترًا: وتر – 10 ونعمل: ويعمل / قطعة: نقطة / ح ن ط: ح ر ط – 12 ولتلق: وليلق / ك ن: ك ر.

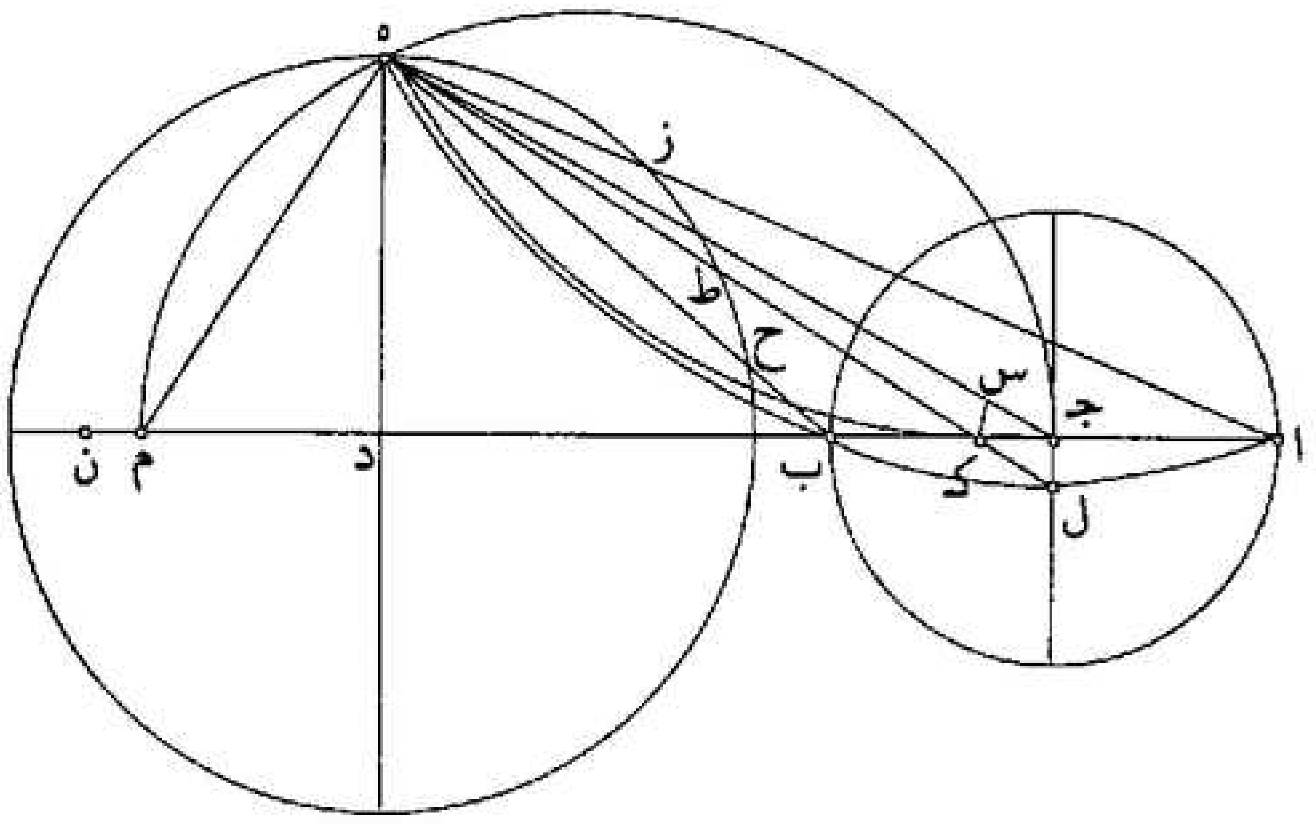
برهان ذلك: أنا نصل ح ن ط ن. فلأن زاوية ا ک ب مثل زاوية ن ک ح وخطاً ا ک مثل خط ن ک وخطاً ب ک مثل خط ح ک، فزاوية ب ا ک مثل زاوية ح ن ک وخط ا ب مثل خط ح ن. وكذلك يتبيّن أن زاوية جـ ا ک مثل زاوية ط ن ک وأن خط ا جـ مثل خط ط ن، فزاوية ب ا جـ مثل زاوية ح ن ط وخطاً ب جـ مثل خط ح ط. لكن زاوية ح ن ط مثل زاوية د ه م وخطاً ح ط مثل خط ز؛ فزاوية ب ا جـ مثل زاوية د ه م وخطاً ب جـ مثل خط ز؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

والحمد لله ربّ العالمين وصلى ⟨الله⟩ على سيّدنا محمد وآله أجمعين

وحسبنا الله ونعم الوكيل.

〈فقرة لابن سهل: في التسطيح〉

ا-٤١-و ب-٤٢-ظ لأبي سعد العلاء بن سهل: إذا كانت مقنطرة ا ب ومركزها نقطة جـ على سطح الأسطرلاب معلومة، ومركز الكرة على هذا السطح، وهو نقطة د معلومة، وأردنا أن نعلم باقي رسوم الأسطرلاب، فنجيز على نقطتي جـ د خط جـ د، وليلق دائرة ا ب على نقطتي ا ب.



ولننزل دائرة هـ ز ح دائرة نصف النهار، ونجيز على نقطة د خط د هـ قائمًا على خط ا د، ونصل خطي ا ز هـ / ب ح هـ، ونقسم قوس ز ح بنصفين على نقطة ط. فنقطة ط ب-٤٣-و قطب نظير مقنطرة ا ب في الكرة، وقوس ط هـ بعد هذا القطب من قطب الكرة، وهو معلوم. ونجيز على نقطتي هـ ط خط هـ ط، وليلق خط ا ب 〈على نقطة كـ. فنخرج خط جـ ل عمودًا على خط ا ب〉 وليلق خط هـ كـ على نقطة ل. فلأن قوسي ز ط ح ط متساويتان، فزاويتا ا هـ ل ب هـ ل متساويتان. فنقط ا هـ ب ل على محيط دائرة. فسطح

3 الأسطرلاب: للاسطرلاب [ا، ب] / وهو: وهي [ا، ب] / وأردنا: فاردنا [ا، ب] – 6 د هـ: حـ [ب] – 7 ا د: ا ر [ا، ب] / ب ح هـ: ب حـ هـ [ا، ب] / ز ح: بح [ا] بحـ [ب] – 8 هو: ناقصة [ب] – 10 هـ كـ: كتبت الكاف لامًا، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد [ا، ب] – عدلنا الشكل الذي في المخطوطة، وهو رياضيًا صحيح، حتى يتفق مع علم الهيئة.

ا ک في ب ک مساوٍ لسطح هـ ک في ل ک. لكن سطح ا ک في ب ک مع مربع جـ ک معلوم، لأنه مساوٍ لمربع ب جـ، فسطح هـ ک في ل ک مع مربع جـ ک معلوم. ولنجز على نقطة هـ خط هـ م قائمًا على خط هـ ل؛ وليلق خط ا ب على نقطة م. فلأن كلٍ واحدة من زاويتي ل جـ م ل هـ م قائمة، فنقط ل جـ هـ م على محيط دائرة [ا هـ]. فسطح هـ ک في ل ک مساوٍ لسطح م ک في ک جـ. ولكن سطح هـ ک في ل ک مع مربع جـ ک معلوم، فسطح م ک في جـ ک مع مربع جـ ک، أعني سطح م جـ في جـ ک، معلوم. ولأن قوس ط هـ معلومة وتوتّر على المحيط زاوية مساوية لزاوية هـ ک د، فزاوية هـ ک د معلومة. وزاوية ک د هـ معلومة لأنها قائمة، فمثلث هـ ک د معلوم الصورة؛ وكذلك مثلث هـ د م. فنسبة خط م د إلى خط د ک معلومة، ونجعلها / كنسبة خط م ن إلى خط جـ ک. فنسبته ا-٤١-ظ إليه معلومة، وهي كنسبة ‹خط› د ن إلى خط د جـ، فنسبته إليه معلومة. وخط د جـ معلوم، فخط د ن معلوم، فخط جـ ن معلوم. وسطح م جـ في جـ ک معلوم، ونسبة خط جـ ک إلى خط م ن معلومة، فسطح م جـ في م ن معلوم. وخط جـ ن معلوم، فنقطة م معلومة، فباقي رسوم الأصطرلاب معلوم.

ولتكن الصورة بعينها. فإذا كان نصف قطر الكرة، وهو خط هـ د، معلومًا، وأردنا أن نعلم باقي رسوم الأصطرلاب، فإنّا نبيّن أن سطح م جـ في جـ ک معلوم وأن نسبة خط هـ د إلى خط ک م معلومة، من عملنا صورة مثلثي هـ د ک هـ د م. فلأن خط هـ د معلوم ونسبته إلى خط ک م معلومة، فخط ک م معلوم. وسطح م جـ في جـ ک معلوم، فنقطة ک معلومة، فباقي رسوم الأصطرلاب معلوم، ‹إذ› كان خط ا د معلوم الوضع.

ولنبق الصورة بعينها. فإذا كان قطب/ الكرة على السطح، وهو نقطة هـ، معلومًا، ب-٤٣-ظ وأردنا أن نعلم باقي رسوم الأصطرلاب، فإنّا نبيّن أن سطح م جـ في جـ ک معلوم وأن كلّ واحدة من زاويتي هـ ک م هـ م ک معلومة. ولنجز على نقطتي هـ جـ خط هـ جـ. وليكن

2-1 لكن ... ل ک: مكررة [ا، ب] – 1 لكن: ولكن [ب] / سطح: ناقصة في التكرار [ا، ب] – 2 في ل ک: كتبها «في ذلك» في التكرار [ا، ب] – 3 واحدة: واحد [ا، ب] – 6-4 فسطح ... معلوم (الأولى): مكررة [ا، ب] – 5 م ک: هـ ل [ب] وهو صحيح في التكرار / ک جـ: بحـ [ا، ب] – 6 م ک: هل [ا، ب] – 9 فنسبة ... إلى خط جـ ک: مكررة [ا، ب] / م د: به [ا، ب] بد، في التكرار [ا، ب] – 10 د ن: د ر [ب] / د جـ (الأولى): رحـ [ا، ب] – 11 د ن: د م [ا، ب] / جـ ن: جـ ر [ا، ب] – 12 معلومة: معلوم [ا، ب] – 13 معلوم: معلومه [ا، ب] – 16 معلومة: معلوم [ب] / هـ د ک: هـ د ب [ا، ب] – 20 نعلم: نعمل [ب] – 21 واحدة: واحد [ا، ب] / هـ ک م: کم [ب].

سطح م جـ في جـ كـ مساويًا لسطح هـ جـ – المعلوم – في جـ س، ‹فـ جـ س› معلوم، فنقطة س معلومة. ولنجز على نقطتي كـ س خط كـ س، فزاوية جـ س كـ مساوية لزاوية جـ م هـ المعلومة، فزاوية جـ س كـ معلومة، فخط س كـ معلوم الوضع. ولنجز على نقط هـ جـ كـ دائرة. فلأن زاوية هـ كـ م معلومة، فزاوية هـ كـ جـ، وهي التي تقبلها قوس هـ كـ جـ، معلومة. فقوس هـ كـ جـ معلومة الوضع؛ وكذلك خط س كـ. فنقطة كـ معلومة، فباقي رسوم الأصطرلاب معلوم.

الأقسام: إذا كانت مقنطرة معلومة على سطح الأصطرلاب، فبُعْد نظيرها في الكرة من قطب ذلك النظير، أو بُعْد قطب نظيرها من قطب الكرة، معلوم؛ وعلى كل واحد من هذين الوجهين، فمركز الكرة على سطح الأسطرلاب، أو نصف قطرها أو قطبها، معلوم؛ فذلك ستة أوجه. وكذلك إذا ‹كان› سمت معلومًا على سطح الأصطرلاب – أعني أن يكون أوّلاً ‹تسطيح دائرة السمت على سطح الأصطرلاب معلومًا› – فبُعْد نظيره من نصف النهار أو بُعْد القطب الذي يجوز به من قطب الكرة، معلوم؛ وعلى كل واحد من الوجهين، فمركز الكرة أو نصف قطرها أو قطبها على السطح معلوم؛ فذلك اثنا عشر وجهًا.

3 جـ س كـ: حسه [ا، ب] / الوضع: الموضع [ا، ب] / نقط: نقطة [ا، ب] – 4 جـ: د [ا، ب] / هي: كتبها فوق السطح [ا] – 6 معلوم: معلومه [ا، ب] – 7 الأصطرلاب: الاصطر [ب] – 8 معلوم: معلومًا [ا، ب] – 10 معلومًا: معلوم [ا، ب] / الأصطرلاب: للاصطرلاب [ا، ب] – 12 قطب: قطر [ا، ب] / معلوم: معلومًا [ا، ب] – 13 قطرها: قطر [ا، ب] / معلوم: معلومًا [ا، ب].

الهندسة وعلم المناظر
في
ضحى الإسلام

الملحــق الأول

رشدي راشد

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz
منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

الملحق الأول

الهندسة والميكانيك

القوهي مقابل أرسطو: في الحركة

إن الاستعانة بالرياضيات لحل مسألة ما من مسائل الفيزياء النظرية مسلك لم يتردد بعض الفلاسفة والرياضيين من سلوكه. فقد بينا حديثا كيف عالج نصير الدين الطوسي مسألة الفيض من الواحد مستعيناً بالتحليل التوافقي[1]. وليس هذا المثل الميتافيزيائي – المنطقي بالمثل الوحيد بل على العكس فهناك في الميتافيزيقا وفي فلسفة الرياضيات أعمال أخرى ما تزال تنتظر الدراسة الخليقة بها. إن إسهام الطوسي، وغيره من الأعمال الأخرى الكثيرة، شرع للبرهان الفلسفي والبرهان العلمي معاً. إن أهمية هذا المجهود الذي بذله الطوسي، وغيره من الجهود الأخرى في المسائل التي تقع على الحدود الفاصلة بين هذين الفرعين من المعرفة، لا تقتصر على البحث الميتافيزيائي الذي شرع به، وإنما تمتد كذلك إلى التطور الرياضي الذي نشطه فقد لعب في حقيقة الأمر دوراً حيوياً في تطوير التحليل التوافقي.

لا يتعلق الأمر في الرسالة التي نناقشها هنا بالميتافيزيقا وإنما بالفيزياء. وأمامنا عوضاً عن الطوسي رياضي من القرن العاشر: أبو سهل ويجن القوهي. إن ما نريد تبيانه هو كيف أدت محاولة اليونانيين وشراحهم العرب لحل المسائل المرتبطة بالحركة في كتاب *الطبيعة* لأرسطو مستعينين بالهندسة إلى فتح بحث جديد في علم الحركات وبشكل أعم في الميكانيك. لقد رأينا سابقاً أعمال ابن الهيثم من هذا المنظور عندما قام بدراسة الديناميك الأرسطوطاليسي هندسياً. وبينا أن هذا "التطبيق" للرياضيات أتاح نقل المفاهيم والأفكار إلى المستوى التجريبي[2]. وتوضح أيضاً كيف حول هذا التطبيق مفاهيم الحركة القطرية، الحركة المماسة وقوة المقاومة الخ[3]. لم يرتبط هذا التحول بالمفاهيم وحدها وإنما بقواعد فهم الأشياء ميكانيكياً بالذات. ولم يكن ابن الهيثم الوحيد ولا الأول الذي قام بذلك؛ فقد حاول سلفه القوهي

---

[1] R. Rashed, 'Metaphysics and Mathematics in Classical Islamic Culture : Avicenna and his Successors', in Ted Peters and Muzaffar Haq (eds.), *God, Life, and the Cosmos : Christian and Islamic Perspectives* (Aldershort, 2002), pp. 151-171.

[2] See R. Rashed, 'Optique géométrique et doctrine optique chez Ibn al-Haytham', *Archive for the History of Exact Science*, 6 (1970), pp. 271-298; and id. 'Lumière et vision : l'application des mathématiques dans l'optique d'Alhazen', in R. Taton (ed.), *Roemer et la vitesse de la lumière* (Paris, 1978), pp. 19-44. Both papers are reproduced in *Optique et Mathématiques : Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe*, Variorum Reprints (Aldershot, 1992).

[3] نفس المصدر أيضاً م نظيف، *ابن الهيثم بحوثه وكشوفه البصرية* (القاهرة 1942) جزء 1، ص. 135–121. وكذلك آراء "الفلاسفة الإسلاميين في الحركة" *مجلة الجمعية المصرية لتاريخ العلوم 2* (1943) ص. 64–45.

على طريقته الخاصة حل المسائل الحركية بطريقة هندسية ونظم في كل مرة وصفاً تجريبياً – تجربة ذهنية أو وصفاً مثالياً – يقدم فيه المستوى الوجودي أو المحيط الحقيقي لمفاهيمه. لا بد لنا قبل التعليق على دراسات القوهي من الإلحاح على أهمية التقليد عند الرياضيين في معالجة الحركة هندسياً. تُظهر إسهامات القوهي وابن الهيثم (وآخرين مستقبلاً) لمن يتمعن فيها أن تاريخ الميكانيك بالعربية لم يكن منحصراً بمذاهب الفلاسفة على الإطلاق، وإنما احتوى على هذا التقليد في البحث الرياضي، ويعود أحد أشكال هذا البحث في القدم إلى التقليد الأرخميدسي.

يتضمن إسهام القوهي في الشكل الذي وصل إلينا نصاً قصيراً ومراجع محدودة نسبياً. يتعلق النص الأول بمسألة الحركة اللامنتهية في زمن منته. ويعالج الثاني مسألة "السكون" بين حركتين متضادتين. تُرى هل كان هذا هو كل ما عمله القوهي في الميكانيك؟ لا يمكننا في الوقت الحاضر الإجابة عن هذا السؤال. إلا أن إسهام القوهي، على قصره، يستحق أكثر بكثير من اهتمام عابر نظراً لشخصية المؤلف، لمحاكمته الواضحة والنقدية وأخيراً للوسط المتقبل لفيزياء أرسطو الذي عاش فيه. لقد أسهم المهندس البارز، القوهي[4]، بأعمال مبتكرة في تطوير الرياضيات المتناهية في الصغر وكذلك في هندسة الإسقاطات – أصبحت دراسة الإسقاطات بفضله فرعاً قائماً بذاته من الرياضيات. وكانت هذه الدراسات، في كلتا الحالتين، تقع في مجالي البحث الرياضي الأكثر تقدماً في ذلك الزمان، أضف إلى هذا أن القوهي ينتمي إلى مجموعة من العلماء تميل إلى النظر إلى الأبحاث الميتافيزيائية بحذر كبير، هذا إذا صدقنا معاصره الأديب الموهوب التوحيدي[5]. وقد اختلطت هذه المجموعة مع مجموعات أخرى، تتضمن الفلاسفة الميتافيزيائيين في البلاط الملكي لعضد الدولة ولولديه صمصام الدولة وشرف الدولة في بغداد.

كانت الفلسفة سواها سوى الرياضيات أو الفلك من المواضيع التي تطرح على بساط البحث وكان من بين من كانوا يُستقبلوا بالترحاب في هذا البلاط الفيلسوف الأرسطوطاليسي وعضو مدرسة الفلسفة الشهيرة في بغداد أبو الفرج بن الطيب. وهو الذي كتب الشروح على *ما بعد الطبيعة* لأرسطو كما كتب الشروح على *الطبيعة* أيضاً مبتدئاً بالنصف الثاني من الكتاب السادس (هذا هو ما بقي على الأقل[6]). تجدر الإشارة أن الطرحين الأرسطوطاليسيين اللذين نقدهما القوهي موجودان في القسم من *الطبيعة* الذي شرحه أبو الفرج. فليس من المستبعد والحال هذه أن تكون هذه الطروح موضوع نقاشات مجالس البلاط وأن يكون مسعى القوهي فيها إظهار ضعف الأسس التي تقوم عليها فيزياء الفلاسفة الأرسطوطاليسيين. لننظر إلى نقده لها.

---

[4] On the life and mathematical work of al-Qūhī, see R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle* (London, 1996), vol. 1, chap. 5.

[5] أبو حيان التوحيدي *الإمتاع والمؤانسة* تحقيق أ. أمين و أ. الزين (القاهرة استعادة بولاق n.d) الجزء 1 ص. 38.

[6] انظر الهامش 8.

I

لقد حبك القوهي، في نص لا يتجاوز نصف الصفحة[7] خيوط الرياضيات والفيزياء في شبكة معقدة لإقامة الحجة. إن هذا المشروع يتيح لمن يتبصر به إدراك الصفة المميزة الحقيقية لثقافة علمية كان يظن فيها أنها كانت تحترم الفصل بين الاختصاصات وتتقيد به.

بعد أن ناقش أرسطو في الكتاب السادس من *الطبيعة* استحالة قطع مسافة منتهية في زمن لامنته درس الحالة المعاكسة: استحالة قطع مسافة لامنتهية في زمن محدود (من قبل متحرك لا يمر دائماً بنفس النقط) وذلك سواء كانت الحركة منتظمة أو غير منتظمة[8]. يبين تحليل محاكمة أرسطو أنها تقوم على مصادرتين: (1) كل حركة تقع في زمن و(2) إن المسافة المقطوعة تتناسب مع الزمن في حالة الحركة المنتظمة وهي تابع للزمن في كل الأحوال.

يتفحص القوهي في كتيبه عكس طرح أرسطو، ويريد أن يثبت إمكانية الحركة اللامتناهية في زمن منته و أن يدحض بالتالي طرح أرسطو. وتتبدى هنا أصالة القوهي، ذلك أنه لم يخطر ببال أي واحـــد من شارحي أرسطو على ما يبدو منازعة هذه النقطة. يصح هذا على سبيل المثال على الأسكندر[9]، تيميستيوس[10]، على سنبلقيوس[11] أو أبي الفرج ابن الطيب. وهكذا فإن ما يفعله القوهي هنا هو مجابهة الرأي السائد[12].

إننا لا نزال نجهل كيف عرف القوهي نص أرسطو. إن الفرضية الأرجح هي أنه قرأ النص العربي المتداول والذي كان موضوع النقاش في الوسط الذي كان القوهي يتردد عليه. وقد يكون قد قرأ شروح الطبيعة التي ألفها

[7] Aydin Sayili, 'Al-Qūhī on the Possibility of Infinite Motion in Finite Time', Belleten, 21 (1957), pp. 489-495. The lamented Professor Sayili edited the text as well as an Enghish and a Turkish translation, thereby drawing attention to this important document. On this occasion we honor the memory of our departed friend

[8] *Physics*, Book VI, 7, 238a20-37. انظر الترجمة العربية تحقيق آ. بدوي *أرسطوطاليس الطبيعة* (القاهرة 1964–1965) الجزء 2 ص. 699 وشرح أبي الفرج بن الطيب لهذا المقطع وكذلك شرح يحيى (لعله جون فيلوبونس Johannes Philoponus) ص. 697–698.

[9] المصدر السابق الجزء 2 ص. 634. لابد من الإشارة على أننا هنا أمام أحد أطول الشروح باللغة العربية من الشروح المعزوة صراحة إلى الأسكندر.

[10] His paraphrase (*Them. In Ar. Phys. Paraphrasis*, ed. H. Schenkl [Berlin, 1900], C.A.G. V, 2, 188, 10ff) reviews practically word for word Aristotle's phrase : ἡ αὐτὴ δὲ ἀπόδειξις καὶ τὸ μῆκος ἄπειρον ὑποθοίμεθα, τὸν χρόνον δὲ πεπεραμένον.

[11] Simplicius, In *Ar. Phys. Comm.*, ed. H. Diels (Berlin, 1895), C.A.G. X, 951,22ff : Δείξας δὲ οὕτως, ὅτι ἀδύνατον ἐν ἀπείρῳ χρόνῳ τὸ πεπερασμένον μέγεθος κινηθῆναι, τοῖς αὐτοῖς χρωμένους ἔνεστιν, φησίν, δεῖξαι ὅτι μηδὲ τὸ ἄπειρον ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ διελθεῖν δυνατόν. We note that the conserved (partial) version of Philoponus' commentary does not comment upon this passage (cf. Ioan. Philop., *In Ar. Phys. Comm.*, ed. H. Vitelli [Berlin, 1888], C.A.G. XVII, p. 864).

[12] See P. Kraus, *Jābir ibn Hayyān, Contribution à l'histoire des idées scientifiques dans l'Islam, Jābir et la science grecque* (repr. Paris, 1986), pp. 320-321 : 'in the course of the 3rd/9th century the text and the ancient commentaries (Alexander, Porphyry, Themistius, Johannes Philoponus) of the *Physics* were translated many times, and paraphrases and summaries were constructed'

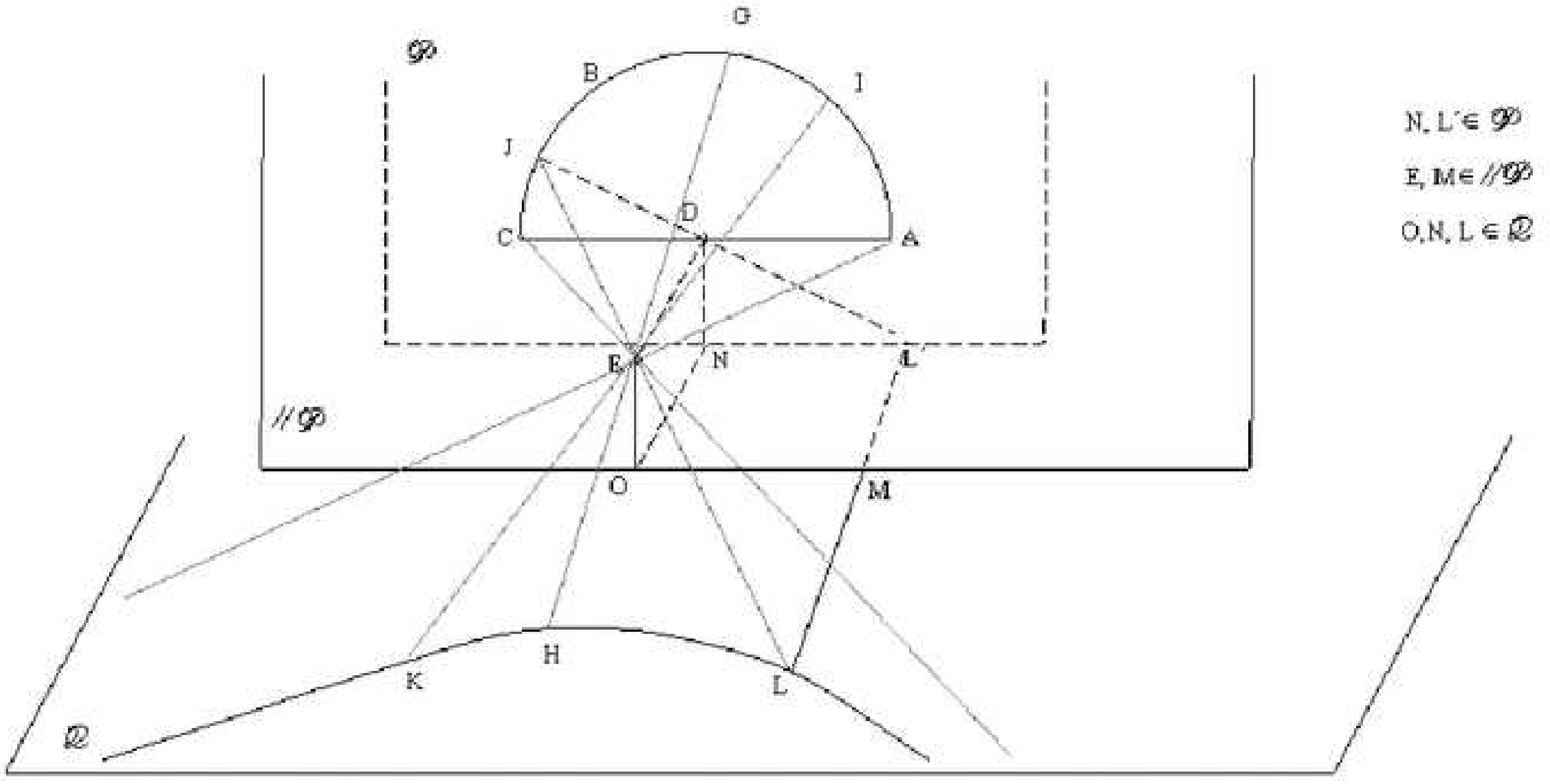
انظر أيضا الملاحظات الإضافية.

الأرسطوطاليسيون العرب الذين يعرفهم كأبي الفرج ابن الطيب مثلاً. وأخيراً لعل ما أثار اهتمامه بنص أرسطو قراءته لعناصر الفيزياء *Elements of Physics* لـــ برقلس[13] وهو كتاب ترجم إلى العربية بكل تأكيد وانتشر بين رياضيي ذلك العصر كما يشهد على ذلك أحد نصوص السجزي[14].

تصور القوهي لدحض طرح أرسطو وضعا لا تبدأ الحركة فيه ولا تنتهي – إنها لامنتهية – في زمن منته. وهو بهذا يقبل ضمناً، كما فعل ثابت بن قرة قبله اللانهاية بالفعل. لننظر إذاً إلى الوضع الذي يقترحه القوهي وإلى برهانه.

ليكن في مستو $\mathcal{P}$ نصف دائرة ABC مركزها D ويحدها القطر AC وتد DE عمودي على المستوى. يمر منبع ضوئي على محيط نصف الدائرة مبتدئاً بـــ A.

ليكن $\mathcal{Q}$ مستوى عمودياً على $\mathcal{P}$. يوازي $\mathcal{Q}$ إذاً ACE؛ والشعاعان AE وCE يوازيان $\mathcal{Q}$. وبالنتيجة عندما يكون المنبع الضوئي في A أو C فليس للنقطة E أي ظل على $\mathcal{Q}$ بينما يلقى أي شعاع آخر $\mathcal{Q}$ في نقطة هي ظل E.



الشكل.1

عندما يرسم المنبع الضوئي القوس AC تنتج الأشعة سطحاً مخروطياً قمته E ومحوره ED يقطع المستوى $\mathcal{Q}$ حسب فرع قطع زائد $\mathcal{H}$ يتحرك عليه ظل النقطة E.

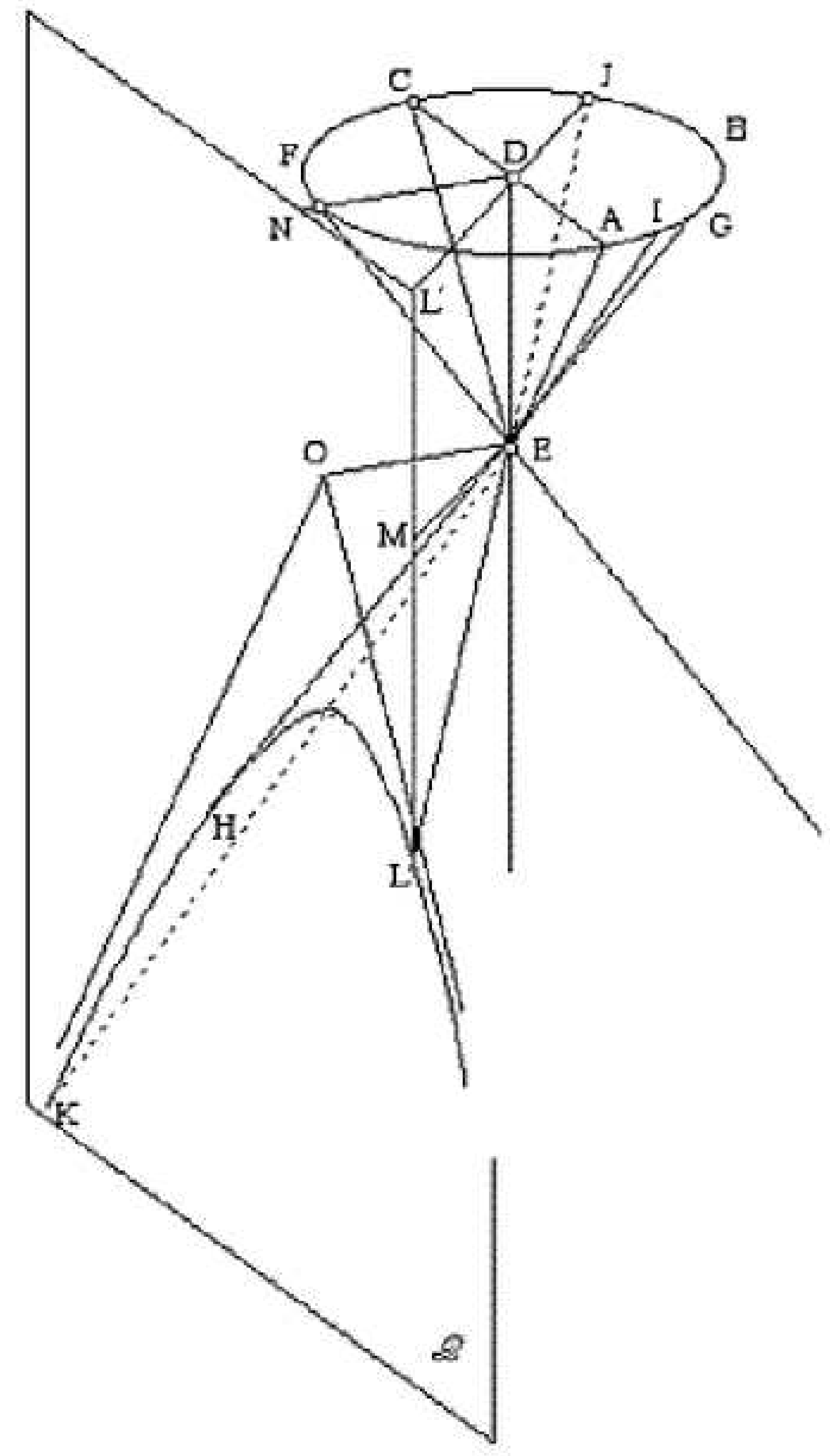
---

[13] على وجه الخصوص القضية الثانية عشر من
the *Elements of Physics* (*Procli Diadochi Lycii Elementatio Physica*, ed. A. Ritzenfeld [Leipzig, 1912] p. 37) : ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ τὸ ἄπειρον κινεῖσθαι οὐκ ἔστι.

[14] لقد أثبتنا أن الرياضي السجزي كان يعرف كتاب *عناصر الفيزياء* لبرقلس وقد ذكره: انظر
R. Rashed, 'Conceivability, Imaginability and Provability in Demonstrative Reasoning : al-Sijzī and Maimonides on II.14 of Apollonius' *Conic Sections*', *Fundamenta Scientiae*, 8, ¾ (1987), pp. 241-256. See also S. Pines, 'Hitherto Unknown Arabic Extracts from Proclus' *Stoicheiōsis Theologikē and Stoicheiōsis Physikē*', in The Collected Works of Shlomo Pines, vol. 2 : *Studies in Arabic Versions of Greek Texts and in Mediaeval Science* (Jerusalem, 1986), pp. 287-293.

هل يمكن لنقطة H من $\mathscr{H}$ أن تكون مبدأ الحركة؟ يقطع الخط HE القوس AC في G. لتكن I و J نقطتي وسط القوسين GA و GC، يقطع الشعاعان IE و JE المستوى $\mathscr{Q}$ في K و L على الترتيب. وهما نقطتان على $\mathscr{H}$ تقعان على جانبي H. فإذا انطلق المنبع من A وسار على القوس AIGJC فإن ظل E يمر في K قبل مروره بـــ H وبالتالي فإن H ليست "مبدأ".

وعلى نفس النحو لا يمكن للنقطة H أيا كانت أن تكون "نهاية": لأن الظل يمر بـــ L بعد مروره بـــ H.



الشكل. 2

يتعين فرع القطع الزائد $\mathscr{H}$ المدروس في هذه المسألة بالإسقاط المخروطي من القطب E لنصف الدائرة ABC على المستوى $\mathscr{Q}$ الموازي للمستوى ACE. وسيكون مسقط نصف الدائرة الثاني AFC الفرع الثاني لنفس القطع الزائد ذي المقاربين المنشأين من O والموازيين لـــ EA و EC حيث O تحقق $EO \perp \mathscr{Q}$.

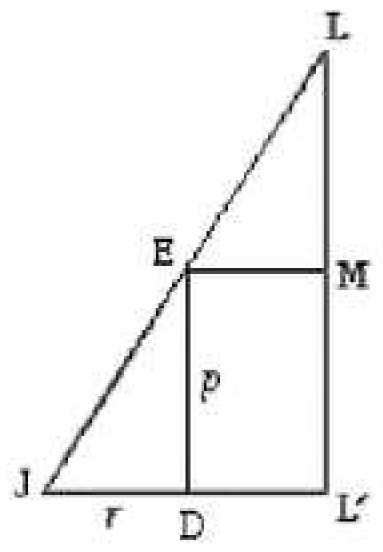
والخلاصة يبرهن القوهي بالإسقاط تقابل أي نقطة من نصف الدائرة، باستثناء النهايتين A و C، بنقطة من فرع القطع الزائد والعكس بالعكس. ويبرهن استحالة كون نقطة ما من فرع القطع الزائد نقطة بداية أو نهاية لأن نقطة ما H تنشأ من نقطة G على محيط نصف الدائرة الواقعة بين A و C، وهي نقطة تسبقها بحركتها نقطة أخرى وتتبعها كذلك نقطة أخرى ويصح الأمر نفسه إذاً على مسقطها H على فرع القطع الزائد. إن ما نفعله في هذا الإسقاط هو

تحويل مجموعة محدودة وغير مغلقة – قوس الدائرة المفتوح]AC[– على مجموعة غير محددة – فرع القطع الزائد. يمكن اجتياز قوس الدائرة]AC[في زمن محدود ولذا فإن الحركة المسقطة، فرع القطع الزائد اللامتناهي، تحدث هي كذلك في زمن محدود.

لنلاحظ أن القوهي يعتبر إسقاط الضوء آنياً؛ والحركتان على نصف الدائرة وعلى فرع القطع الزائد متزامنتان. أضف إلى ذلك أننا إذا تخيلنا حركة المنبع الضوئي منتظمة فإن للحركة المسقطة على القطع الزائد سرعة متغيرة على المنحنى وهي سرعة غير محددة: فهي تتناهى إلى اللانهاية مع تناهي المنحنى إلى اللانهاية.

اتبعت محاكمة القوهي طريقة الإسقاطات. وعلى ما يظهر فقد ظن القوهي اعتماداً على النجاح القوي الذي حازت عليه اكتشافاته الهندسية، والتي كانت هامة دون شك، أنه قد عثر على مفتاح يحل به مسائل عديدة أخرى – وهو إغواء طبيعي وكثير الوقوع في آن في تاريخ الرياضيات –، المشكلة الوحيدة هو أنه فرض الانتشار الآني للضوء[15].

وفي الواقع، في حال الفرض المضاد، فإن فترة الانتشار بين النقطة J المتغيرة الواقعة على نصف الدائرة والنقطة L المقابلة لها على فرع القطع الزائد تتناسب مع المسافة $JL = JE + EL$. فلنحسبها: JE ثابتة تساوي لـــ $\sqrt{r^2 + p^2}$ حيث r شعاع نصف الدائرة و p طول الوتد. أما $EL^2 = EM^2 + ML^2$، حيث M هي مسقط L على المستوى الموازي لمستوى نصف الدائرة والمار بـــ E.



الشكل. 3

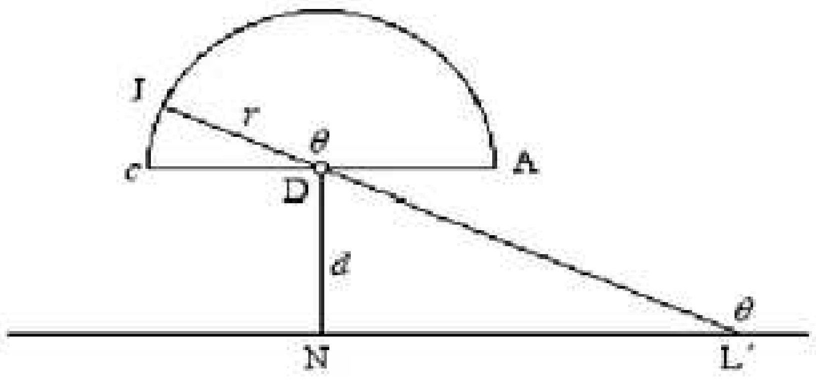
لدينا $$\frac{ML}{ME} = \frac{p}{r}$$

ولذا فإن

$$EL^2 = EM^2\left(1 + \frac{p^2}{r^2}\right) = DL'^2\left(1 + \frac{p^2}{r^2}\right)$$

حيث 'L هي مسقط L على مستوى الدائرة. يبقى علينا الآن حساب 'DL. لتكن θ الزاوية القطبية لـــ J: ADJ، $\theta \in [0, \pi]$ و d المسافة بين D والمستوى $\mathcal{Q}$ ($d = DN = OE$)، لدينا $\sin\theta = \frac{d}{DL'}$

[15] See Sayili, 'Al-Qūhi on the Possibility of Infinite Motion in Finite Time'.



الشكل. 4

ومنه $DL' = \frac{d}{\sin\theta}$ و $EL^2 = \frac{d^2}{\sin^2\theta}\left(1 + \frac{p^2}{r^2}\right)$

وكذلك $JL = \left(1 + \frac{d}{r\sin\theta}\right)\sqrt{r^2 + p^2}$

وإذا كانت C هي سرعة الضوء فإن الزمن اللازم للوصول إلى L هو

$$\left(1 + \frac{d}{r\sin\theta}\right)\frac{\sqrt{r^2 + p^2}}{c}$$

ويتناهى هذا الزمن إلى اللانهاية عندما تتناهى θ نحو الصفر أو نحو π كتناهي المقادير

$\frac{d}{c}\sqrt{r^2 + p^2} \times \frac{1}{\theta}$ ، $\left(\frac{d}{c}\sqrt{r^2 + p^2} \times \frac{1}{\pi - \theta}\right)$ على الترتيب

ولهذا فحجة القوهي باطلة.

II

يصر أرسطو في الكتاب الثامن من *الطبيعة* على وجود حالة "سكون" بين حركتين متعاكستين سواء كانت مستقيمة أو على قوس دائرة[16]. وقد وضح الأسكندر الموقف الارسطوطاليسي، على ما قاله سنبلقيوس، بكشفه عن الدور الأساسي الذي تلعبه القسمة اللامنتاهية هنا. ويعلق أبو فرج بن الطيب الآنف الذكر، والذي وقع على نص الأسكندر على أغلب الظن، تعليقاً طويلاً على هذا المقطع ويكتب على وجه الخصوص:

إن هذا الطرح الارسطوطاليسي[17] جوهري جدا ذلك أنه يطبق هنا على الحركة مبدأ أعم بكثير وهو أن "الأضداد تختلف من حيث النوع ولا يمكنها أن تكون شيئاً واحداً"[18]. وهكذا فإن دحض هذا الطرح من الطبيعة يعني

---

16 *Physics* 262a 7-8 الترجمة العربية الجزء الثاني ص. 892–893.

17 حسب سنبلقيوس في Phys. 1281, 30-1282, 31، فإن الأسكندر فصل في شرح هذا الطرح: "لا يرى الأسكندر أنه يجب أن نفهم أن "المنتصف هو بالنسبة لكل واحد معاً" (Phys. VIII 8, 262 a 20) بهذه الطريقة. ويعتقد أنه من الخطأ القول أنه يصبح الاثنين لصلته بكل واحد، ولكنه يرى أنه يصبح الاثنين معاً لأنه عندما يعارض المنتصف لكل واحد من الاثنين فهو الآخر. لكنه عندما يؤخذ كل من الطرفين كالاثنين معاً – كالبداية والنهاية (على الخط المستقيم، مثلاً، من الأعلى نحو الأسفل القمة هي البداية بالنسبة للمتحرك منها والنهاية للمتحرك نحوها ويصح الأمر بالنسبة للقاع) – فإن المنتصف سيكون هو أيضا تعريفا الاثنين في صلته لكل واحد لأنه "واحد في العدد". وطالما ننظر إلى المستقيم كواحد وكمتصل فإن لنقاطه بين طرفيه وجود بالقوة فقط. وبما أنها موجودة بالقوة فمن المستحيل عليها أن تكون منتصفات بمعنى الكلمة. يصبح المنتصف بالفعل عندما يتوقف المتحرك على المستقيم عنده مقسما بذلك المستقيم في إحدى نقاطه [. . .]. لأن ما يطرأ في شيء ما عليه أن يكون في حالة سكون فيه لفترة من الزمن، لأنه يستحيل الطروء في شيء ما ومغادرته في نفس اللحظة (كما سيقوله أدناه بعد قليل)، أو المجيء والذهاب معاً. لأن هذا سيعني أن يكون وألا يكون معاً في نفس الشيء وفي نفس الوقت. وهكذا <فإن هذا الفعل> يتم في لحظات مختلفة. فإذا كان الأمر كذلك وإذا كان هناك بين لحظتين أيا كانتا فترة من الزمن، سيبقى <أثناءها> ساكنا في المكان الذي طرأ فيه ولم يغادره.

الوقوف مباشرة ضد مبدأ الاختلاف النوعي بين الأضداد. لقد كان الطرح الأرسطوطاليسي موضوع جدل منذ القرن التاسع فقد كتب الفيلسوف ابن كرنيب، كما يروي المفهرس النديم، كتاباً يدحض فيه "نفي" أرسطو وجود السكون بين حركتين متضادتين[19]. وهذا بالتحديد ما يفعله القوهي في إسهامه الثاني.

لم يبق من هذا العمل في الوقت الحاضر إلا أثر واحد. ولكنه لا يدع مجالا للشك فيما كان يهدف هذا الرياضي إليه. وقد ذكر هذا الأثر موجزاً من قبل طبيب مشهور في بغداد ابن بطلان، أخذه عنه بعد ذلك الفيلسوف أبو البركات البغدادي. ففي سجالات كلامية طبعت العصر بينه وبين طبيب لا يقل شهرة عنه في بغداد، يشير ابن بطلان إلى مقالة للقوهي أرسلها لعضد الدولة يعرض فيها على الملك تبيان ضعف الأطروحة الأرسطوطاليسية. وهو مشهد يذكرنا على الفور بأرشميدس وملك صقلية هيرون Hieron. نعرف كذلك أن ابن بطلان تتلمذ على أبي الفرج ابن الطيب. وترسم كل هذه الأسماء والوقائع صورة عن الوسط الذي كانت فيه الطروحات الفيزيائية موضوع مناقشات البلاط وتدعم تصورنا له.

يستعين القوهي بوضع تجريبي[20] لتقويض وجهة نظر أرسطو. وهو الوضع الذي يصفه ابن بطلان. إلا أن ضياع النص وقصر ما كتبه ابن بطلان عنه يضعنا في وضع لا يحسد عليه، نعرف فيه التوصيف التجريبي بدون معرفة المبررات النظرية ونحصل على النتيجة بدون التعرف على سير المحاكمة. مما لا شك فيه أن الحجج قد وجدت: إن كل المطلعين على أعمال القوهي يعلمون جيداً أنه لم يطرح قط قضية ما من غير أن يحاول البرهان عليها. ولذا فقد كان على البرهان الذي قد يكون رافق التجربة في حالة وجوده، أن يستعين ببعض المفاهيم الصريحة أو الضمنية من

ولكنه لا "يمكن" لمتحرك "باستمرار" أن "يطرأ" في أي من نقاط المستقيم. يجب ألا يقال أنه فيها "في" "فترة زمنية" وإنما في لحظات من الفترة وهي ليست فترات وإنما حدود فترة زمنية. كما أنه ما من حاجة لمجرد وجود شيء ما في شيء ما لأن يكون فيه لفترة من الزمن. لأنه إن وجد فيه لفترة من الزمن فعليه أن يكون في حالة سكون هناك. وهكذا فلكل لحظة نقطة ما تقابلها على المستقيم الذي تقع عليه. وهكذا <يمكن> لـــ A المتحركة لا "أن تكون قد طرأت على B" ولا أن تكون غادرت <B> وإنما "أن تكون ليس إلا" "في لحظة" وليس في "فترة من الزمن". ذلك أن اللحظات المتوسطة في الفترة الزمنية تماثل النقاط المتوسطة على المستقيم. وهكذا فلما يتحرك باستمرار وجود بالقوة في النقاط المتوسطة وفي "اللحظات المتوسطة"

Simplicius : *On Aristotle Physics* 8.6-10, translated by R. McKirahan, Ancient Commentators on Aristotle [London, 2001], pp. 56-58).

[18] *Physics*, 262a5-6.

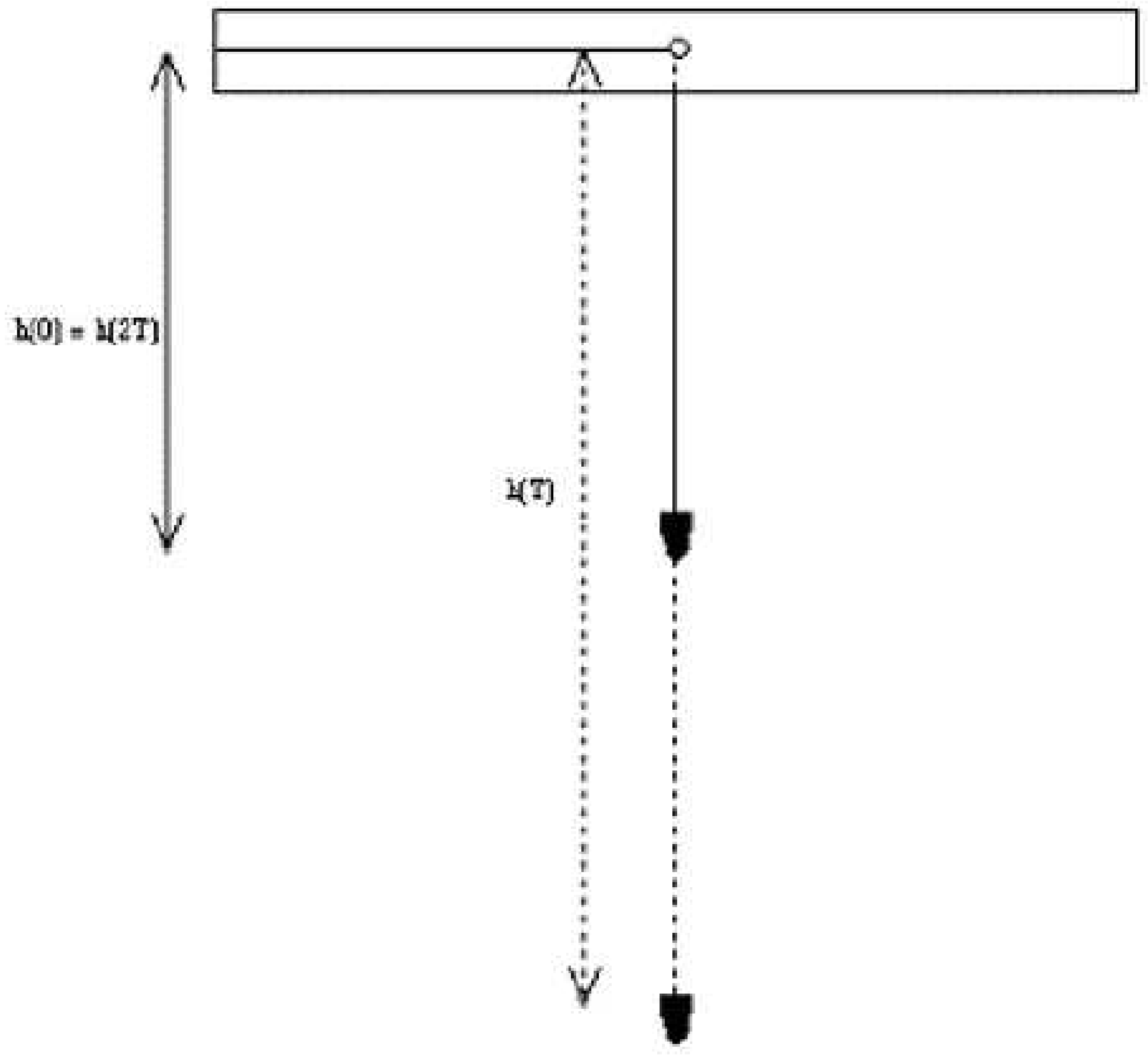
[19] شددت مصادر عديدة على أهمية عائلة كرنيب هذه سواء في الرياضيات أو في الفلسفة. إلا أننا لا نملك في الوقت الحاضر أي كتابة من كتاباتهم، فكل ما لدينا هو الاستشهادات التي رواها خلفاؤهم من أمثال إبراهيم بن سنان. وصف النديم هذا الفيلسوف الذي يعنينا هنا أبو أحمد ابن الحسين بقوله: "وكان من جلة المتكلمين ويذهب مذهب الفلاسفة الطبيعيين... فكان في نهاية الفضل والمعرفة والإطلاع بالعلوم الطبيعية القديمة وتوفي... وله من الكتب كتاب الرد على أبي الحسن ثابت بن قرة في نفيه وجوب وجود سكونين بين كل حركتين متضادتين. (النديم، كتاب *الفهرست* تدقيق، ر. تجدد [طهران، 1971]، ص. 321). يعطي القفطي هذا العنوان على نحو خاطئ على الأرجح انظر:

Morelon, 'Les deux versions du traité de Thābit b. Qurra *Sur le mouvement des deux luminaires*', MIDEO, 18 (1988), pp. 9-44, on p. 42.

[20] بشير أبو البركات البغدادي، فيلسوف القرن الثاني عشر، إلى هذه التجربة على وجه التحديد ويعزوها إلى "بعض الفضلاء" *كتاب المعتبر* [حيدر أباد، 1358] الجزء الثاني ص. 97. انظر ص. 990 أدناه.

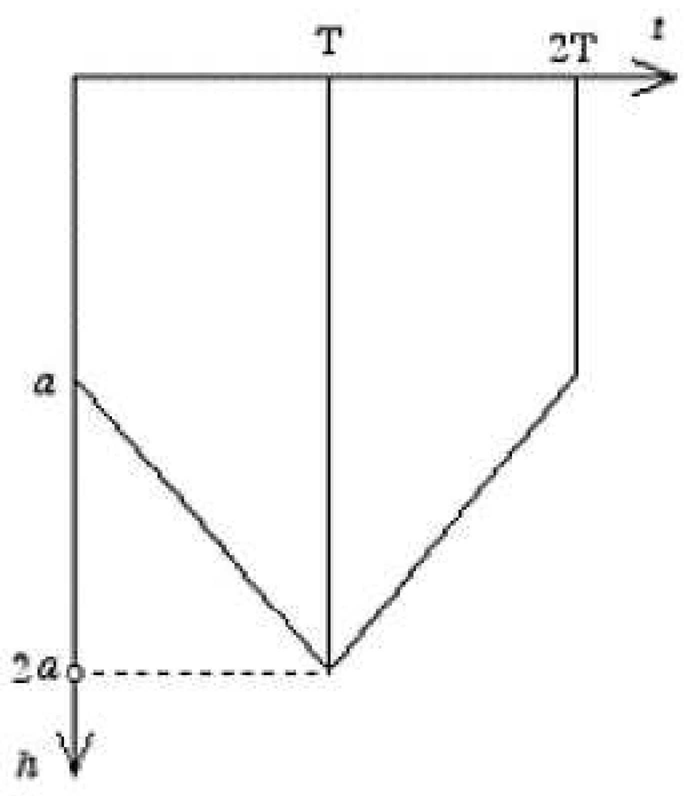
أهمها مفهوم السرعة الآنية. ولذا فإننا مضطرون على أي حال للاستعانة بهذا المفهوم لتفهم وشرح مرجع ابن بطلان على قدر الإمكان. يحتوي شرحنا بدون شك شيئاً من التخمين، إلا أننا نأمل أن يصبح أكيداً عندما يعاد اكتشاف مقالة القوهي.

يأخذ القوهي مسطرة مثقوبة في وسطها، يضعها أفقياً وينفذ من الثقب خيط شاقول بطول المسطرة. ثم يحرك طرف خيط الشاقول على طول المسطرة من أولها إلى آخرها حركة منتظمة. يتحرك رصاص الشاقول حركة عمودية مستقيمة ومنتظمة نتيجة لحركة طرف الخيط وبنفس السرعة. ينزل رصاص الشاقول في النصف الأول من الحركة حتى يصبح كل الخيط شاقوليا وطرفه العلوي عند الثقب ثم يأخذ الرصاص بالصعود في النصف الثاني من الحركة.

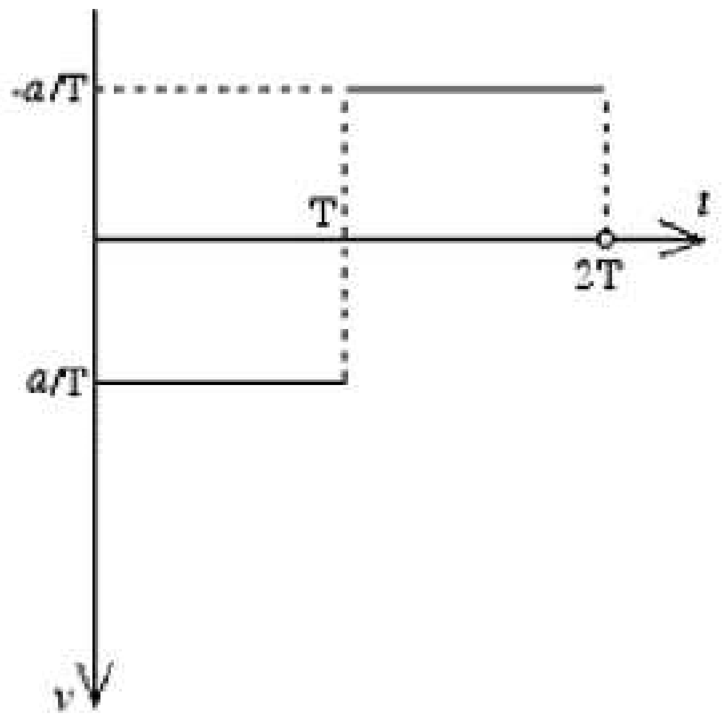


الشكل. 5

ليكن 2a طول المسطرة و 2T مدة الحركة، ولتكن المسافة بين الثقب ورصاص الشاقول h(t). إن مخططي h(t) والسرعة v(t) معطيان بالشكلين 6 و 7.



الشكل. 6



الشكل. 7

يبين مخطط السرعة انقطاع السرعة في اللحظة T، ولا يمكن بالتالي تعريف السرعة الآنية في اللحظة T وإنما السرعتين على اليمين وعلى اليسار فقط.

$$v(T_-) = +\frac{a}{T} \quad \text{و} \quad v(T_+) = -\frac{a}{T}$$

هناك إذن "قفرة" في سرعة حركة الشاقول التي تحدثها حركة اليد على المسطرة بدون أن يكون هناك توقف تصبح فيه السرعة الآنية مساوية للصفر. إلا أن الحركة مؤلفة وبكل تأكيد من حركتين متضادتين وبالتالي فطرح أرسطو خاطئ.

يمكننا أن نلاحظ أن هذه "القفزات" في السرعة تميز ظاهرة "الاصطدام" حيث تظهر فيها حركتان متضادتان. ولكنه لا يمكن الإثبات هنا بنفس السهولة أنه ما من حالة هدوء تفصل هاتين الحركتين: لا نعرف ما يحدث في لحظة الاصطدام. في حين يستطيع القوهي أن يؤكد هنا أن حركة اليد التي تقود الخيط تبقى متسقة مع نفسها. إن فكرة أرسطو التي ينتقدها في هذه المقالة تقوم على نفي إمكانية "قفز" السرعة الآنية وإن لم يكن مفهوم السرعة الآنية قد اتضح بعد[21].

---

[21] يعطي القوهي في حقيقة الأمر مثالاً مضاداً لدحض أرسطو. فقد كان يعرف بدون شك أنه توجد أمثلة عديدة لحركات متضادة بينها "سكون". إذ يمكن بنفس الإنشاء الذي استعمله إعطاء مثل لرصاص الشاقول المعرف بالنسبة إلى الثقب O بـ $y = a + a \sin t$، فسرعته $a \cos t$ وتصبح مساوية للصفر مع تغيير اتجاهها من أجل $t = \pi/2$. يمكن أن نبين بسهولة أن حركة اليد على المسطرة معرفة بالنسبة إلى الثقب O بـ

$$x = -a + a \sin t \qquad \text{من أجل} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

و

$$x = a - a \sin t \qquad \text{من أجل} \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \pi$$

فسرعة اليد موجبة دوماً وتساري لـ $|a|\cos t|$؛ وتصبح صفراً من أجل $t = \pi/2$.

III

لقد انتقد القوهي في مناسبتين على الأقل فيزياء أرسطو وذهب أبعد من مذهبه الأساسي القائل باستحالة اللانهاية بالفعل. وإنه من الأهمية بمكان على وجه الخصوص أن نلاحظ أن القوهي ينفي على وجه التحديد التصورين الأرسطوطاليسين للانهاية: لانهاية الجمع ولانهاية القسمة. ومن المستبعد جداً أن يكون مجرى الأحداث هذه محض الصدفة. ثم إن الطريقة المبتكرة لدحض أراء أرسطو أهم من النقد نفسه، لأن الرياضي هذه المرة، خلافاً للفلاسفة، لا يريد تصحيح المذهب بحجج من نفس الطبيعة، كما يفعل الذين اشتقوا مفهوم الميل "Impetus" على سبيل المثال، وإنما يسعى إلى دحض آراء أرسطو مستعيناً بالهندسة. إن تطبيقها على الأفكار الفلسفية للحركة هو الذي يسمح لنا وضع هذه الدحوض على المستوى التجريبي. وهكذا وبفضل الهندسة يمكن التقدم في ظل اختبار مزدوج: الاختبار اللغوي والاختبار التجريبي. والاختبار التجريبي في الحالة الأولى التي درسناها هو اختبار تأملي حقاً كما هو الحال في كل التجارب الذهنية. لكن هذا لا ينقص في شيء أصالة الطريقة والأسلوب في آن. أو بعبارة أخرى لقد خلق اللقاء بين الرياضيات وفلسفة الحركة موضعاً جديداً للنظر في الأفكار الميكانيكية بشكل مختلف. ومن الأرجح أن يكون هذا التقليد الذي اتبعه القوهي وخليفته ابن الهيثم أغنى بكثير مما نتخيل. وسيسمح تاريخه، الذي مازال في انتظار من يكتبه، إلقاء الضوء على هذه الحقبة من تاريخ الميكانيك.

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

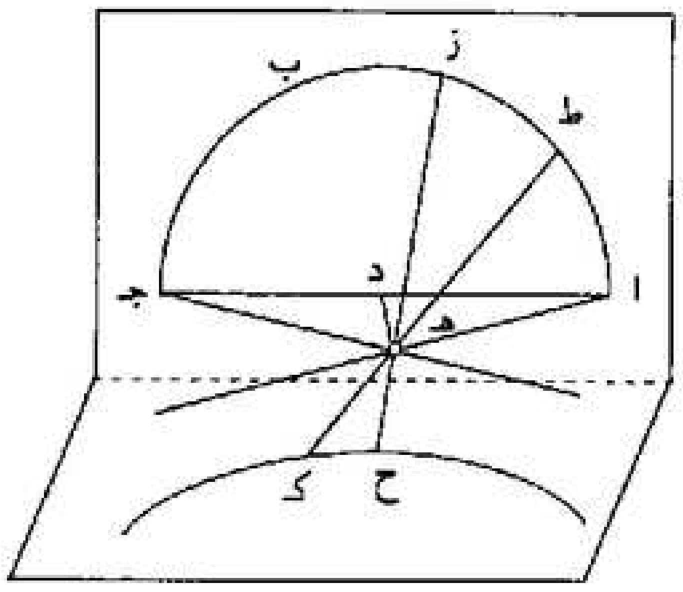
بسم الله الرحمن الرحيم ١٨٠-ظ

استعنت بالله سبحانه

قول لأبي سهل ويجن بن رستم القوهي
على أن في الزمان المتناهي حركة غير متناهية

نفرض نصف دائرة ا ب جـ على قطر ا جـ ومركزه نقطة د، ونتوهم عليه شخصًا قائمًا وهو د هـ، ونفرض شيئًا من الأشياء المضيئة قد ابتدأ بحركته في نصف دائرة ا ب جـ من نقطة ا، ووقع شعاعه على رأس الشخص على نقطة هـ.

فأقول: إن حركة ‹ظلّ› رأس الشخص بحركة الشيء المضيء في الزمان المتناهي ليس لها مبدأ ولا منتهى.



لأنا لو فرضنا مثلاً نقطة ح، مبدأ لحركة رأس الشخص، ووصلنا بينه وبين رأس الشخص بخط، وأخرجناه مثل خط ز هـ ح، لكان يقطع من نصف دائرة ا ب جـ قوسًا ما، مثل ا ز. فإذا قسمناها بنصفين على نقطة ط، وأخرجنا منها خطًا إلى رأس الشخص، مثل خط ط هـ ك، لكان يقع على نقطة قبل تلك النقطة التي في المبدأ مثل نقطة ك، وذلك محال.

وكذلك في النصف الآخر نبين أن حركة / ‹ظلّ› رأس الشخص ليس لها ‹مبدأ ولا› ١٨١-و منتهى. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

تمت الرسالة والحمد لله وحده.

8 حركة: أضاف محمد بن سرتاق المراغي – وهو من علماء القرن الثامن الهجري (النصف الأول من القرن الرابع عشر الميلادي) ومؤلف كتاب الإكمال وهو شرح لكتاب الاستكمال لابن هود – تعليقات جمة على رسائل القوهي في هذه المجموعة – بإزاء كلمة «حركة» في الهامش «ظل أو شعاع»؛ وهذا هو المعنى المتضمن – 9 لها: له – 10 مبدأ لحركة: مبدأ الحركة – 15 ‹ظلّ›: كتب محمد بن سرتاق في الهامش «ظل أو شعاع» / لها: له / ‹مبدأ ولا›: أضافها محمد بن سرتاق المراغي في الهامش.

فقرة من رسالة ابن بطلان في مناقضات علي بن رضوان

ذكرتُ أن أبا سهل الكوهي عمل مقالة أهداها في مهرجان لعضد الدولة فناخسرو رحمه الله، يرد فيها على أرسطو رأيه في أن الحركتين المتضادتين لا بدّ بينهما من سكون، بأن أخذ مسطرة وثقب في وسطها ثقبًا أنفذ فيه خيطًا بطولها شدّ في طرفه رصاصة كالشاقول وأخذ طرف الخيط الآخر بإبهامه والسبابة، ووضعه في أوّل المسطرة وحركه عليها دفعة واحدة إلى آخرها. ومعلوم أن الخيط، لما تنصفت الحركة عند الثقب، نزل نصفه بالرصاصة، ولما استتممت الحركة إلى آخر المسطرة، صعد من الخيط ما كان نزل سواء. وصعود الرصاصة ونزولها حركتان ضدان إلاّ أنهما تابعان لمحرك لم يفتر عن الحركة، وإذا كانا تابعين لمحرك غير مفتر ‹عن الحركة› لزم وجود حركتين ضدين لا سكون بينهما.

6 نزل: قرأ المحققان «تربك» ولا يستقيم المعنى بها.

وبعض الفضلاء وضع مسطرةً وجعل في وسطها ثقبًا وجعل فيه خيطًا علق فيه شاقولاً، ثم وضع الطرف الآخر من الخيط على طرف المسطرة مشدودًا في مخط، ثم أجرى ذلك المخط على خط مخطوط في المسطرة من أولها إلى آخرها مارًا إلى جنب الثقب. قال: فهذا المخط لا محالة ما دام يتوجه نحو الثقب، فإن الشاقول ينجر هابطًا حتى ينتهي إلى غاية قربه منه، ثم يعود صاعدًا إتباعًا لحركته حيث يتوجه عنه إلى الطرف الآخر، ولا يجعل لذلك الشاقول من الثقل قدرٌ ما يظن ظان أنه أوقف أيدينا والمخط عند الوسط. فتكون هاتان الحركتان المتضادتان للشاقول قد لزمتا على طريق الإتباع لحركة واحدة مستقيمة على مسافة واحدة من محرك واحد في زمن واحد متصل، فمتى كان السكون؟

2 مشدودًا: مسدودا – 3 أجرى: احرى.

الهندسة وعلم المناظر
في
ضحى الإسلام

الملحــق الثاني

رشدي راشد

مؤسســة الملــك عبد العــزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

الملحـــق الثانـــــي

القوهي: من الآثار العلوية إلى الفلك

لا يلبث من يقرأ كتاباً في الآثار العليا سواء أكان قديماً أو وسيطاً أو كلاسيكياً أن يصدم ببعض الصفات المميزة التي تبدو مفارقة للوهلة الأولى. فأرسطو يرى أنه لا يجوز الخلط بين هذا العلم وأي علم آخر، ذلك أنه يعنى بكل الظواهر المتعلقة بالعناصر الأربعة "التي يمكننا أن نعتبرها عارضة"[1]. ومع ذلك فهو علـــم يعالج طيفاً عريضاً من المواضيع بحيث يمكن القول إنه قد لا يعرف إلا بالسلب. فهو يدخل في ظواهر جد متنوعة تنتمي في الوقت الحاضر إلى علوم في غاية الاختلاف كالفلك والجغرافية والكيمياء وعلم الزلازل والبراكين والآثار العلوية. إن كل محاولة لإيجاد مبدأ موحد وراء كل هذه التنوعات – الفوح على سبيل المثال – تؤول إلى الفشل أو تستثني على أقل تقدير اعتباطياً جزءاً من كتاب أرسطو في *الآثار العلوية* باعتباره زائفاً. يبدو هذا التنوع وكأنه ينسجم مع مقاصد أرسطو الذي أراد أن يضع في الآثار العلوية كل الظواهر الأرضية التي أقصاها ولم يذكرها في كتبه الفيزيائية *في الكون والفساد، في السماء وفي الفيزياء*. وقد استمر هذا الوضع الذي خلقه الفيلسوف مدة تنوف عن ألفي عام كما يشهد على ذلك كتاب ديكارت *Les Météores*.

إن تنوع الظواهر وعددها التي يدرسها هذا العلم أكسباه بعض الشعبية. فغالباً ما اهتم الأدباء والفلاسفة بل ورجال الدين بهذه الظواهر. خذ على سبيل المثال الشهب في صدر الإسلام التي سندرسها في هذا الملحق: فقد اهتم الفلاسفة بها منذ الكندي[2] ودرسها الأدباء والفقهاء من خلال النصوص القرآنية[3]. وهكذا فإن موضوعاً وحيداً كالشهب يقود إلى عدة قراءات تاريخية حسب اهتمام الباحث: الأدب، تفسير النصوص القرآنية، الفلسفة، الخ. إنه موضوع لتأليفين على الأقل أحدهما يدخل في تاريخ المعتقدات والآخر في تاريخ العلوم. ومن الواضح أنهما تأليفان مترابطان قد يكون من السذاجة بمكان الفصل بينهما. ومع ذلك سنقتصر هنا على الدراسات المرتبطة مباشرة بتاريخ العلوم للأسباب التالية:

---

[1] Aristote, *Météorologiques*, texte établi et traduit par Pierre Louis, Collection des Universités de France (Paris, 1982), vol. 1, 338b, 20-25.

[2] يعزو المفهرسون للكندي رسالة عنوانها *في الأثر الذي يظهر في الجو ويسمى كوكباً*، انظر النديم، *كتاب الفهرست*، تحقيق تجدد (طهران 1971) ص. 319.

[3] "فمن يستمع الآن يجد له شهاباً رصداً"، سورة الجن 9؛ "إلا من استرق السمع فأتبعه شهاب مبين"، سورة الحجر 18. والشهاب شعلة في الجو ترى هابطة والجمع شهب. انظر على سبيل المثال الزمخشري: *الكشاف*، تحقيق محمد عبد السلام هارون (بيروت 1995)، الجزء 3، ص. 565 والرازي: *التفسير الكبير*، الطبعة الثالثة، بيروت (بدون تاريخ)، الجزء 10، ص. 169 والجزء 29، ص. 61.

إن الظواهر التي تعالج في *الآثار العلوية* ترتبط مباشرة بحقل الاختبار. البعض منها ينتمي إلى هذا الحقل بمعنى خاص، إذ أنه ينتمي إلى عالم ما بين السماء والأرض: فقوس قزح والشهب وغيرها من الظواهر التي لا يمكن التعامل معها مباشرة رغم كونها ظواهر تحت فلك القمر، بمعنى أنها تتطلب إنشاء نموذج لها. ويجب علينا هنا لتدارك الوضع أن نعرف كيف نرصد وقبل كل شيء كيف ندقق في الأرصاد. ولكننا ما أن نثير هذه المسألة ونبدأ بالبحث الذي يقتضيه هذا التدقيق حتى نكون قد غيرنا وضع دراستنا بالذات. وهكذا فقد بينا سابقاً فيما يخص ظاهرة قوس قزح[4] كيف أنه ما أن حلت الطرق الصارمة محل الرصد غير الدقيق والتمثيل الهندسي الساذج للظاهرة (كما هو الحال مع بحث ابن الهيثم في الكرة المحرقة ومع بحث كمال الدين الفارسي في نموذج الكرة المملوءة بالماء) حتى انفصل البحث في قوس قزح عن *الآثار العلوية* ليصبح جزءاً من حقل آخر: حقل المناظر، بعد أن أصلحت[5].

وهدفنا هنا هو نفسه: إننا نريد قبل كل شيء طرح نفس الأسئلة حول هذه الظاهرة الميتيورولوجية الثانية، ظاهرة النيازك، ونبغي أن نبين متى وكيف أدى إدخال الرصد الدقيق والطرق الصارمة بهذه الظاهرة إلى الانفصال عن *الآثار العلوية* لتصبح جزءاً من الفلك. ويلعب ابن الهيثم هنا أيضاً دوراً[6] هاماً وإنما بعد أبي سهل القوهي[7].

ولما كان اهتمام القوهي منصباً على التدقيق الرياضي للأرصاد فقد درس ظاهرة ثانية ترتبط بالآثار العلوية وإن كانت لا تنتمي إليها. وهي مسألة تحديد الجزء المرئي من البحر والسماء؛ بتحليل رياضي صارم، من أعلى بناء عمودي على المستوى (مستوى البحر مثلاً). وكان الهدف في الحالتين ابتكار طرق لغوية وتقنية في آن واحد لتدقيق الرصد.

II

لقد كان أبو سهل القوهي، الرياضي والفلكي[8]، بعيداً عن كل أشكال التفكير التأملي أو غير مبال به في أحسن الأحوال. فقد ذكر معاصره الناقد أبو حيان التوحيدي[9] بهذا الموقف المبدئي الذي لم يفهم على حقه. وكما أشرنا في

---

[4] R. Rashed, 'Le modèle de la sphère transparente et l'explication de l'arc-en-ciel : Ibn al-Haytham, al-Fārisī', *Revue d'histoire des sciences*, 23 (1970), pp. 109-140 ; reprod. In *Optique et Mathématiques : Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe*, Variorum reprints (Aldershot, 1992), III

[5] انظر الفصل III.

[6] لقد كتب ابن الهيثم في نفس الموضوع بعد القوهي انظر:

R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle*, vol. 5,.

أضف إلى ذلك أننا رجعنا إلى دراسة القوهي لتفهم إسهام ابن الهيثم.

[7] انظر أدناه.

[8] See Yvonne Dold, 'Al-Qūhī, *Dictionay of Scientific Biography* (1975), vol. 11, pp. 239-241; and R. Rashed, *Les Mathématiques infinitesimales du IX^e^ au XI^e^ siècle*, vol. 1, chap.V. Commentateurs : Banū Mūsā, Thābut ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd (London, 1996), pp. 835-838.

مكان آخر[10] فإن التوحيدي يروي نفور القوهي من المناقشات الميتافيزيائية. ولكنه كان يشعر بالغبطة حين يدحض الطروحات الأرسطوطاليسية التي كان يؤيدها الأرسطوطاليسيون في عصره ومنهم من كان يتردد على غرار القوهي على مجالس عضد الدولة ومجالس أبنائه من بعده[11]. ولقد حللنا في الملحق الأول دحضه لأطروحتين في الحركة قدمهما أرسطو في الفيزياء وبينا كيف استعان في الحالتين بالهندسة بواسطة تجربة ذهنية. وواضح أن هذه المقاربة لم تكن عرضية وإنما تعبيراً عن موقف معرفي مقصود عبر عنه القوهي مرات عديدة. فالرياضيات في نظره هي التي تقدم لنا مثل المعرفة الأعلى ويقول في المقالة التي حققناها أدناه:

"وأما القوم الذين لم يكن يقدر جالينوس ولا غيره أن يطعن عليهم ولا على علمهم، لاعتمادهم على البراهين في جميع علومهم وكتبهم وهم أصحاب التعاليم"[12].

---

[9] أبو حيان التوحيدي، كتاب *الإمتاع والمؤانسة*، تحقيق أ. أمين وأ. الزين (مستعاد بولاق) القسم الأول ص. 38.

[10] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 1, p. 835.

[11] انظر الملحق I.

[12] انظر أدناه ص. 1009. إن الحديث عن جالينوس في القرن العاشر وفي سياق التأمل في البرهان ليس بريئاً. فقد كان طبيب برغاموم مؤلف رسالة في البرهان On Demonstration (Περὶ Ἀποδείξεως) في خمسة عشر كتاباً أثارت بالغ الاهتمام انطلاقاً من القرن التاسع؛ على الأقل إذا قسنا الأمور بتحمس حنين بن إسحاق لمعرفة مكان وجودها ولتحقيقها (انظر G. Bergsträsser, *Hunain ibn Ishāq über syrischen und arabischen Galen-Übersetzungen* [=*Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes* 17] [Leipzig, 1925], pp. 47-48). إن أهم ما في الموضوع هو معرفة ما يقصد القوهي تحديداً: أن نقول إن البراهين الرياضية هي الوحيدة من بين كل أنواع البرهان الأخرى التي لا يطالها النقد، إنما هي فكرة لم يفتأ جالينوس نفسه يلح عليها. فقد تفهم منذ شبابه ضرورة "الابتعاد عما يقوله الفلاسفة والمثابرة قدر الإمكان على اتباع مواصفات البراهين الهندسية" (Scripta Minora II, 117, 14-16 : … ἔγνων δεῖν ἀποστῆναι μὲν ὧν ἐκεῖνοι λέγουσιν, ἀκολουθῆσαι δὲ τῷ χαρακτῆρι τῶν γραμμικῶν ἀποδείξεων). وتظهر نفس الفكرة في مؤلف مفقود "إن التحليل الرياضي أفضل من تحليل الرواقيين" (Scripta Minora II, 123, 17 : Ὅτι ἡ γεωμετρικὴ ἀναλυτικὴ ἀμείνων τῆς τῶν Στωϊκῶν). والأكثر أهمية أنه كان يرغب في التقرب من هذا المثل الأعلى اليقيني في *De Demonstratione* "أنصح كل الذين يريدون أن يمارسوا البراهين الهندسية أن يتعلموها أولا وأن يدرسوا بعد ذلك عملنا *De Demonstratione* الــذي قسمناه إلى خمسة عشر كتابا" (Scripta Minora II, 117, 16-20 : Ὅσοι τοίνυν ἐθέλουσι κατὰ τὰς γραμμικὰς ἀποδείξις ἀσκηθῆναι, παιδευθῆναι μὲν [ἐν] αὐτοῖς ἐν ἐκείναις συμβουλεύω, μετ᾽ ἐκείνας δὲ τὴν ἡμετέραν ἀναλέξασθαι περὶ τῆς ἀποδείξεως πραγματείαν, ἣν ἐν πεντεκαίδεκα βιβλίοις ἐποιησάμην). ويبدو إضافة إلى ذلك أن جالينوس هاجم في الكتاب الرابع من "اليقينيات" من يستعمل الرياضيات كيفما اتفق – للبرهان على سبيل المثال على خلود الروح (انظر I. von Müller, *Über Galens Werk vom wissenschaftlichen Beweis* [= *Abhandlungen der phil.-philol. Classe der k. bayerischen Ak. Der Wissenscheften* 20] [Munich, 1897], p. 464). وعلى أي حال فلم يكتف القوهي بإشارة عمومية لجالينوس وإنما استحضر نقداً محدداً له لبعض أنواع "البراهين" في الآثار العلوية.

يمكننا أن نتخيل نوعين من التفكير عند جالينوس. فقد يكون قد انتقد خطاب الكوسمولوجيين الاعتباطي عن ظواهر لا نطالها (مثله في ذلك مثل رسالة إبقراط في الطب القديم انظر Treatise *on Ancient Medicine*, 1, 36, 15-21H: "ولهذا فإني لم أر حاجة لاختراع فرضية جديدة في الطب على غرار تلك الفرضيات المريبة البعيدة عن أنظارنا، والتي ما نكاد نتعامل معها حتى نجد أنفسنا مضطرين لاستعمال فرضية أخرى : مثلاً *حول الأشياء التي في السماء أو تحت الأرض*. <فحول> هذه الأشياء وحتى لو عرّفناها على ما هي عليه فلن يكون بمقدور المتكلم أو السامع أن يرى بوضوح فيما إذا كانت <المقولة> صحيحة أم خاطئة، لأنه ما من معيار يمكن الاعتماد عليه لمعرفة ما هي الحقيقة بالضبط"). أو أنه قد استنكر الاستعمال غير الملائم للطرق الهندسية في الظواهر الجوية – ومنها معالجة الأرسطوطاليسيين لقوس قزح أو للهالة التي تعطيه فرصة مثالية (تماما كما أتاحت له نظريات المكان والزمان في الكتاب الرابع من *الفيزياء* فرصة الإصرار على ضرورة الاتساق الداخلي للتعريف). وهكذا يمكن أن يكون ما يراه القوهي، في الحالة الأولى، أن الرياضيات الفعلية (وليس المخطط الأبستمولوجي الذي اشتقه جالينوس منها) تتيح لنا الخروج من المأزق الكوسمولوجي، وأن نقد الاستعمال السيء للرياضيات من قبل بعض الميتيورولوجيين، في الحالة الثانية، لا يقضي على مشروع استعمال الرياضيات في الفيزياء، ولكنه يبين ضرورة التزامنا بأكبر قدر من الصرامة عندما نعدُّ محاضر رصدنا. وعلى أي حال فمن الراجح أن القوهي كان على معرفة

ولم يتردد القوهي في التصريح بوضوح وبصوت عال عن مثاله الأعلى الرياضي في المعرفة للملك بالذات وهذا ما كتبه:

> من بقاء علم الهندسة على وجه الدهر، ونمائه مع نفاذ العمر، وإبقائه ذكراً جميلاً لا يبلى وذخراً جزيلاً لا يفنى، ومن حسن عائداته على العلوم التعليمية، خاصة كالعدد والألحان والنجوم والأوزان وما جاراها وناسبها وسائرها وقاربها، بل على العلوم النظرية عامة، إذا كان مثالاً يحتذى في الحق وإماماً يقتفى في الصدق، فإن أصله مستقر وقياسه مطرد ومستمر لا يلحقه طعن ولا يناله وهن، ولا يعترض عليه فسخ ولا نقض، ولا يبدله إلحاد ولا رفض، فهو منقطع القرين صحة وعديم النظير عزة[13].

إن إطراء الهندسة والرياضيات هذا والذي نراه يتكرر في كل كتاباته أصبح ترداداً لموقف معرفي يتآلف مع بعض تيارات الفكر المعاصر. وإنه من غير الممكن كما سنرى مزج هذا الموقف لا بمذهب أرسطو ولا بمذهب الأرسطوطاليسيين المعاصرين للقوهي لشرح ميكانيكية النيازك. ولكن ماذا كان يعرف بالضبط من هذا المذهب؟ وما هي الظروف التي فتحت المجال لدراسة هندسية لهذه الظاهرة؟ سننظر في هذين السؤالين قبل العودة إلى إسهام القوهي.

لا يسعفنا القوهي كثيراً فيما يتعلق بالسؤال الأول فهو لم يذكر أي اسم بما في ذلك اسم أرسطو، كما لم يشر إلى أي عنوان لكتاب بما في ذلك عنوان *الآثار العلوية* لأرسطو. وليس هذا بالأمر الغــريب فقد كان طرح أرسطو معروفاً وواسع الانتشار في ذلك الزمان. وكانت الترجمة العربية من قبل ابن البطريق متاحة[14] كما كان حال *ملخص* حنين بن إسحاق[15]. وكان هناك أيضاً الترجمة العربية للشروح اليونانية لعمل أرسطو: أعمال الأسكندر[16]، أولمبيودوروس *Olympiodorus*[17]. وأولمبيودوروس المنتحل[18]. ولكن ماذا يمكن لهذه الأدبيات أن تكون قد علمت

بـــ *De Demonstratione* بشكل مباشر أو غير مباشر. ولا يجب أن نستغرب ذلك نظراً لاهتمامات الفلاسفة الذين خالطهم في مجالس القصر.

[13] See al-Qūhīs introduction to the construction of the regular heptagon in R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3 : *Ibn al-Haytham, Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique* (London, 2000), p. 766.

[14] C. Petraitis, *The Arabic Version of Aristotle's Meteorology*, A Critical Edition with an Introduction and Greek-Arabic Glossaries, Research published under the direction of the Institut de Lettres Orientales de Beyrouth, Series 1 : Pensée arabe et musulmane, vol. 39 (Beirut, 1967), esp. pp. 30-32 of the Arabic text.

[15] H. Daiber, *Ein Kompendium der aristotelischen Meteorologie in der Fassung des Hynayn ibn Ishāq*, Aristoteles Semitico Latinus 1 (Amsterdam-Oxford, 1975).

[16] حسب النديم، *الفهرست* ص. 311 فقد ترجم شرح أوليمبيودوروس إلى العربية من قبل أبو بشر وعلق عليه من قبل أبو عمر الطبري (انظر حول هذه النقطة A. Hasnawi, 'Un élève d'Abū Bišr Mattā b. Yūnus : Abū 'Amr al-Tabarī', *Bulletin d'Etudes Orientales*, 48 [1996], pp. 35-55, particularly pp. 41-42); وترجم شرح الأسكندر إلى العربية وليس إلى السريانية. جاءت ترجمته من العربية إلى السريانية بعد ذلك من قبل يحيى ابن عدي.

[17] A. Badawi, *Commentaires sur Aristote perdus en grec et autres épîtres* (Beirut, 1986), contains the critical edition of the Ps.-Olympiodorus' commentary on the books of Aristotle's Meteorologica, the translation by Hunayn ibn Ishāq, and the revision by his son Ishāq ibn Hunayn, pp. 83-190; see Ibid., p. 95, on shooting stars

[18] يمكننا أن نضيف ترجمة قسطا بن لوقا لـــ *Placita Philosophorum* الذي يعرض فيه بلورتارك آراء القدماء في النيازك انظر

القوهي عن النيازك؟ فهي حسب أرسطو ظاهرة جوية. أي أنها تحدث تحت فلك القمر ومنشؤها فوح على شكل زفير ساخن يصعد في الآثار العلوية وهو بالتالي قابل للالتهاب. وكما يكتب في *الآثار العلوية*:

> [...] بحيث تجعله حركة صغيرة يلتهب مشتعلاً، تماماً كم يفعل الدخان، ذلك أن الشعلة هي غليان الفوح الجاف. وهكذا فحينما تحرك الحركة الدائرية هذه المادة نحو الأعلى فإنها تشتعل في النقطة الأكثر قابلية للالتهاب[19].

تحدث النيازك "إذا تبعثر طول الفوح إلى أجزاء صغيرة وفي اتجاهات عديدة وكذا عرضه وعمقه على نحو سواء"[20].

وهكذا فإن النيازك في نظر أرسطو ظاهرة أرضية تفسر الأفواح شكلها. إنها جزء من الظواهر التي "تحدث تحت فلك القمر". وهذا ما تبينه سرعتها الظاهرية المساوية لسرعة الأشياء التي نقذف بها، ويبدو لنا أن سرعتها تتجاوز سرعة النجوم والشمس والقمر لأنها قريبة منا"[21].

أصبح هذا المذهب الأرسطوطاليسي الرأي السائد. فهو يناقش بل وينتقد ولكنه لا يمس باللب الذي عرضناه بإيجاز هنا والذي بقي على ما هو عليه. فالنيازك ليست أعراضاً خارجة عن الأرض وإنما ظواهر تحدث تحت فلك القمر وهكذا كتب الأسكندر في شرحه لأرسطو:

> وهو يقول (أرسطو) أن ما يسمى بالنيازك (τοὺς καλουμένους διάσσοντας ἀστέρας) تطرأ أحياناً على هذا النحو، عندما يشتعل الوقود الذي هو أساس الأجسام السماوية نتيجة لحركتها فيلهب بدوره الجسم الملاصق له. كما تطرأ أحياناً بالطريقة التالية: إن الحرارة المحبوسة في الداخل، المحاصرة بالهواء البارد المحيط بها والمتجمعة في كتلة منفردة متراصة، تجد نفسها، فور ما تشتعل وقد طردت بعنف من الهواء المكون بالتبريد (الذي يقع تحت الوقود). ويشبه مسارها عندئذ مسار بذرة الفاكهة[22] التي نعصرها بين أصابعنا، والنار باقية على حالها ومتطابقة بدون أن تشعل ما يجاورها. هذان هما على ما يبدو شكلا حدوث ما يسمى بالنيازك[23].
>
> وكون هذه التركيبات (sustaseis) والمسارات تقع تحت فلك القمر فإنه يرى أن السرعة الظاهرية لهذه الأشياء على مساراتها تثبت ذلك: فكما تبدو لنا الأشياء التي نقذفها وكأنها تتحرك بسرعة أكبر من

H. Daiber, *Aetius Arabus die Vorsokratiker in arabischer Überlieferung* (Wiesbaden, 1980), pp. 39-41. On the totality of the *Meteorologica* in Arabic, see the study by Paul Lettinck, *Aristotle's Meteorology and its Reception in the Arab World* (Leiden, 1999).

[19] مأخوذ عن الترجمة الإنكليزية لكتاب أرسطو *Meteorologica* [E.W. Webster أكسفورد 1923] 1, 4, 341 b 20 ff.

[20] نفس المصدر، 341 b 32-35.

[21] نفس المصدر، 342 a 30-33.

[22] انظر Aristotle, *Meteorolgy*, I, 4, 342 a 9-10 والملاحظة الإضافية أدناه.

[23] Alexandri In *Aristotelis Meteorologicorum libros commentaria*, GAG III, ed. M. Hayduck (Berlin, 1899), 22, 11-19 (this passage is repeated almost word for word by the Byzantine Nicephorus Blemmydes : see Nicephori Blemmidæ *Epitome Physica*, PG 142, col. 1005-1320, 1133A).

سرعة النجوم بسبب قربها منا بينما هي أبعد ما تكون في الواقع عن السير بنفس السرعة. وكذلك ما يسمى بالنيازك فهي تبدو لنا وكأنها تتحرك بسرعة أكبر من سرعة النجوم بسبب قربها (οὕτως καὶ οἱ διᾴττειν λεγόμενοι θᾶττον ἡμῖν φαίνονται τῶν ἄστρων κινούμενοι διὰ τὴν ἐγγύτητα)[24].

يؤكد أوليمبيودوس بدوره:

وبعد أن قال أن النيازك تطرأ في الأوج، يضيف وهكذا فإننا لا نعتقد أنها تطرأ فوق ذلك، في مستوى النجوم، والتمييز مستمد من سرعتها: يقول إنها لا تتحرك بنفس العجلة[25].

ويعاود أوليمبيودوروس المنتحل نفس الفكرة ويكتب :

"الكواكب المنقضة تحدث على جهتين: إحداهما بذاتها، والأخرى بالعرض. أما التي حدثت بذاتها فتتولد متى اجتمع في العلو بخار دخاني فقط وكان اجتماعه ممتدا غير مساو واشتعل بحركة الفلك وتهيؤه بذلك، وتنقل الالتهاب من جزء منه إلى جزء آخر على غير استواء حتى يرى كأنه بمنزلة ما يطفأ بحسب وضع ذلك البخار لأن تهيؤه إذا كان مختلفا فليس بقسمة إلى أجزاء صغار في الطول فقط، لكن في العرض أيضاً والعمق. ولذلك ترى هذه الأجزاء إذا اشتعلت بمنزلة الكواكب. وأما التي تحدث بالعرض فتكون إذا احتبس في الموضع القريب بخار دخاني باحتواء البخار الرطب وحصره إياه وإفلاته بغتة لتكاثف البخار، بمنزلة نواة الزيتون التي تفلت بين الأصابع، ولذلك لا يشبه تولده للنار المتوقدة، لكن للنار التي يحدث بها. وإذا أفلت ذلك البخار فإما أن يسقط إلى أسفل متى كان دفعه من فوق، وإما أن يعلو إلى فوق متى كان اندفاعه إلى فوق، وإما أن يزج به إلى الجانب الأيمن والأيسر متى كان انجذب به من أحد الجانبين المقابل لذلك الجانب، والسبب في سرعة الحركة التي ترى للكوكب المنقض قرب موضعه"[26].

حتى فيلوبونوس الذي وقف موقفاً ناقداً لأرسطو في كثير من الأحيان يرفض بسخط طرحاً قد يبدو مخالفاً للطرح الأرسطوطاليسي ويكتب:

ويمكن دحض الفرض الصبياني للذين يعتقدون أن حركات النيازك هي في حقيقة الأمر مسارات نجوم، ويعتمدون على واقع كون كل النجوم الثابتة المرئية من مراتب العظمة من واحد إلى ستة قد صنفت من قبل الفلكيين ونراها على الدوام كما هي وفي نفس الظرف وباقية بالضرورة في نفس الأمكنة. إلا أنه يبين هنا أن هذا آت من العجلة الظاهرية لحركاتها (διὰ τοῦ φαινομένου τάχους τῆς κινήσεως αὐτῶν)[27].

---

[24] Ibid., 23, 13-18. Cf. Nicephori Blemmidæ *Epitome Physica*, PG 142, col. 1005-1320, 1136A.

[25] Olympiodori In *Aristotelis Meteora commentaria*, CAG XII, ed. G. Stüve (Berlin, 1900), p. 43, 20-22.

[26] Badawi, *Commentaires sur Aristote*, p. 95.

[27] Ioannis Philoponi In *Aristotelis Meteorologicorum librum primum commentarium*, CAG XIV, ed. M. Hayduck (Berlin, 1901), p. 66, 22-27. كما أنه يقف إلى جانب أرسطو حول هذه النقطة في *De Æternitate Mundi contra Proclum*, ed. H. Rabe (Leipzig, 1899), p. 492, 5-20.

إن هذا الإجماع في غاية الندرة ولكنه مطمئن بالنسبة لنا، ذلك أنه وبدون أي شك الطرح المقبول لدى فلاسفة عصر القوهي والسائد في الوسط الفلسفي الذي كان يتردد على البلاط الملكي[28].

تختلف نظرة القوهي لظاهرة النيازك اختلافاً صريحاً عن المذهب الأرسطوطاليسي فقد طرح المسألة من وجهة نظر وضعية إن صح التعبير، فالنيزك بالنسبة له هو "شيء مضيء" لا يرغب في اتخاذ موقف فيما يتعلق بطبيعته مكتفياً ببساطة بطرح السؤال:

> أما هذا الشيء المضيء الذي يسمى الكوكب المنقض، أكوكب هو في الحقيقة، أم شعاع كوكب يظهر ويغيب، أو نار تحدث لحظة وتبطل، أو شعلة نار موجودة هناك أبداً، أو شيء تشتعل فيه نار ثم تنطفئ، أو نار تحدث من سرعة حركة شيء آخر غير النار؟[29].

ولا يقترح القوهي أدنى جواب على هذا السؤال الذي طرحه. ففي نظره يكفينا أن نعلم أن المسألة تتعلق "بشيء" – كائن مضيء أو "جسم" كما يقول فيما بعد. إن المهمة الرئيسية التي يضعها نصب عينيه هي القيام برصد مدقق وهو الوسيلة الوحيدة لتعيين هذا الشيء في السماء: اختلافه عن الأرض وأبعاده. وبعبارة أخرى فإن القوهي في دراسته للنيازك يحيد كل ما يرتبط *بالآثار العلوية* لكي يحتفظ بما يتصل بالفلك. وتستخدم هذه "الوضعية"، إن صح القول، كوسيلة معرفية تتيح القيام بمثل هذا التحول.

إلا أنه بالإضافة إلى شرط الإمكانية السابق والذي يتلخص بألا يؤخذ من الظاهرة إلا الجزء الموجود، يوجد شرط آخر، لا يقل أهمية، وهو وجوب أن ينجز الرصد في مكانين مختلفين. وهذه الطريقة طورها الفلك العربي.

فمنذ مطلع القرن التاسع نجد أثاراً واضحة لمقارنة نتائج الأرصاد المنجزة في مكانين مختلفين لنفس الظاهرة. قياس انقلاب مدار الشمس الصيفي على سبيل المثال في عام 832/217 الذي أنجز في بغداد "والذي أجمع عليه أهل البحث من علماء أهل زماننا"[30] وهي كلمات المؤلف الذي سجل هذه النتيجة في إشارة واضحة للأرصاد المتواصلة التي أنجزها في نفس الحين فلكيو دمشق. تفترض هذه المقارنة المعرفة الدقيقة المسبقة لإحداثيات كل مكان، خط عرضه وعلى وجه الخصوص فرق خطوط الطول لمعرفة الزمن المحلي.

كما أخذ البيروني على عاتقه، جيلاً بعد القوهي، مسألة الأرصاد المتآنية لنفس الظاهرة في مكانين بعيدين أحدهما عن الآخر؛ وكان الهدف هذه المرة قياس الزمن المحلي للظاهرة في كل من المكانين وبالتالي حساب الفرق في الطولين بينهما. وروى أن هذه العملية قد أنجزت بمناسبة خسوف للقمر من قبله وهو يرصده في خان (آسيا الوسطى) ومن قبل أبي الوفا البوزجاني الذي كان يرصده من بغداد[31].

---

[28] أي الفلاسفة الأرسطوطاليسيين الشهيرين في بلاط بغداد.

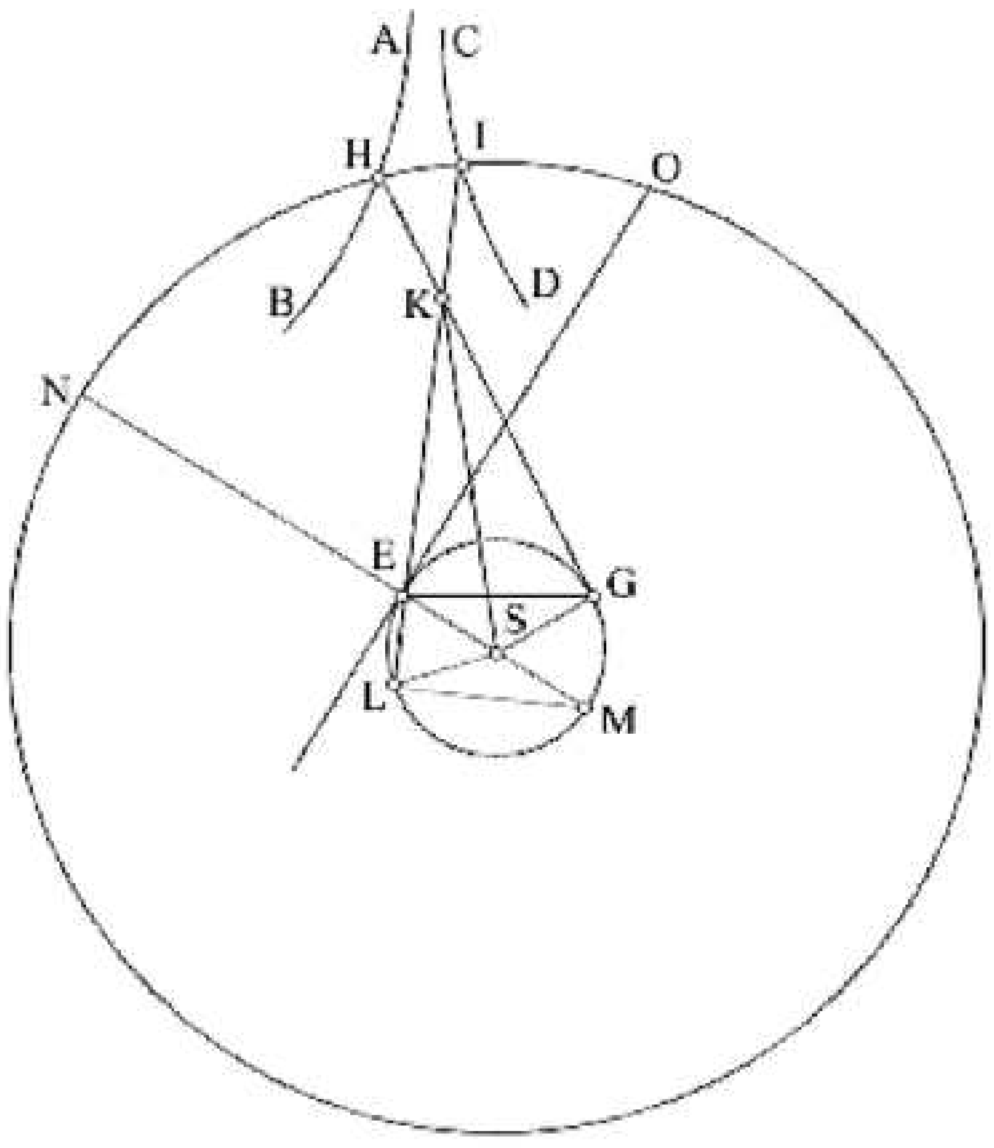
[29] انظر أسفله ص. 1009 سطر 11–13.

[30] Régis Morelon, *Thābit ibn Qurra*, *Œuvres d'astronomie* (Paris, 1987), 'Livre sur l'année solaire', texte p. 33, commentaire p. 195.

[31] انظر البيروني، *كتاب تحديد نهايات الأماكن لتصحيح مسافات المساكن*، تحقيق نقدي لـــ ب. بولكاكوف P. Boulgakov في *مجلة المخطوطات العربية* (القاهرة 1962). انظر أيضا

لقد قام القوهي هو أيضاً بأرصاد في مرصد بني في حدائق القصر الملكي في عهد شرف الدولة (372–379/ 982–989). احتوى هذا المرصد على آلات حديثة كان يستحيل نقلها، من بينها بناء دائري قطره 12,5 متراً خصص لرصد الشمس. قام كل من القوهي وأبي الوفا البوزجاني بأرصاد عليه. وعلى الرغم من ضآلة معلوماتنا في هذا الشأن فإننا نعرف ما فيه الكفاية عنه (أيضاً بفضل مرصد الري الذي بني في نفس الحقبة في عهد فخر الدولة 366–387/ 977–997) لنستخلص أن الأرصاد الفلكية قد تضاعفت مستعينة بآلات جديدة أكثر دقة وأنه كان من الممكن القيام بأرصاد متآنية لظاهرة ما من مكانين مختلفين.

وهذه هي على وجه التحديد طريقة الرصد المتآني التي يعرضها القوهي لرصد النيازك. ويقترح وجود راصدين في موضعين E و G من الكرة الأرضية بعيدين بما فيه الكفاية عن بعضهما. ويجب بطبيعة الحال أن يكون فرق التوقيت المحلي بين هذين الموضعين معروفاً وبالتالي فرق خطي الطول بينهما. ليكن S مركز الكرة الأرضية التي يقطعها المستوى SEG حسب الدائرة (S, SE). الراصدان في E و G فلكيان وعلى اطلاع بالجغرافية الرياضية أيضاً. ويجب أن ينظرا إلى النيزك في نفس اللحظة تماماً. يراه الناظر من E في اتجاه النجم الثابت I في حين يراه الناظر من G في اتجاه النجم الثابت H. ووضع النيزك في لحظة هذين الرصدين هو K نقطة تقاطع الخطين EI و GH.



الشكل. 1

يقطع الخط KE الدائرة (S, SE) في النقطة L ويقطعها الخط ES في M كما يقطع الدائرة الكبرى التي مركزها S، والتي مثلنا عليها النجمين I و H، في النقطة N. يمثل الخط EO العمودي على MN أفق الموضع E.

English translation by Jamil Ali, *The Determination of the Coordinates of Positions for the Correction of Distances between Cities* (Beirut, 1967); commentary by E.S. Kennedy, *A Commentary upon Bīrunī's Kitāb Tahdid al-Amākin* : An 11th Century Treatise on Mathematical Geography (Beirut, 1973).

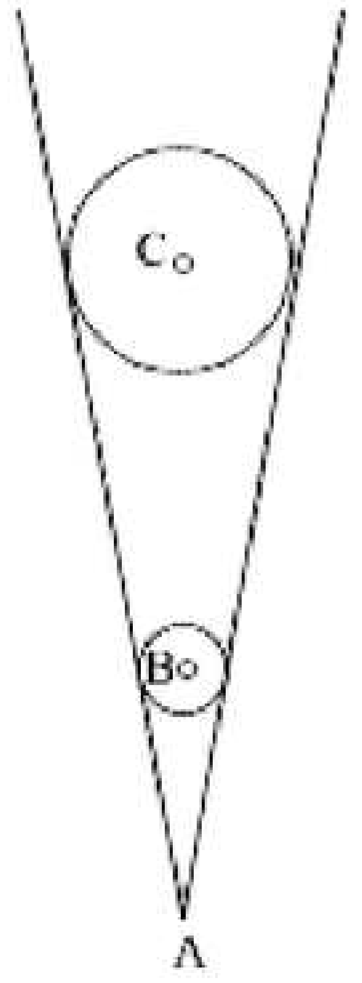
والزاوية $K\hat{E}N$ هي مكملة الزاوية $K\hat{E}O = \alpha$ ارتفاع I فوق أفق E. الزاوية α معلومة. وكذا الزاوية $M\hat{E}L = K\hat{E}N = 90° - \alpha$. المثلث MEL قائم الزاوية في L لأن EM قطر الدائرة. $K\hat{E}O = L\hat{M}E$ ارتفاع I، ولدينا إذاً $\frac{EL}{EM} = \sin\alpha$ وبالتالي فالطول $EL = EM \sin\alpha$ معلوم. وبما أن النقطتين E و G معلومتان فالقوس EG والوتر EG معلومان وبالتالي الزاوية المحيطة $O\hat{E}G$ ومعها $K\hat{E}G = \alpha + O\hat{E}G$. وعلى نفس النحو تعلم الزاوية $K\hat{G}E$. ثم إن $LK = EL + EK$ فهو معلوم. وقوة النقطة K بالنسبة للدائرة (S, SE) هي $KL \cdot KE = KS^2 - SE^2$ وإذاً فالمسافة KS بين النيزك ومركز الأرض معلومة.

يمكن القيام بنفس القياسات ونفس المحاكة من أجل أي نيزك مرأي على مسافة معينة من كلا النقطتين E و G الواقعتين على سطح الأرض المبتعدتين عن بعضهما بقدر كاف. وحساب هذه المسافة انطلاقاً من زاوية الاختلاف للنيزك.

تعالج القضية الثانية والأخيرة من رسالة القوهي تحديد حجم "الشيء" انطلاقاً من معرفة بعده عن مركز الأرض. والشيء الذي يمكن تحديد حجمه هو جسم بالضرورة. ما الذي دعا القوهي هنا إلى اختيار عبارة "الشيء" في حين تعاملت القضية الأولى مع النيازك؟ وأكثر من هذا فهو يعلن في مقدمة رسالته أنه يريد معالجة "علم استخراج مقدار البعد بين مركز الأرض وبين مكان كل كوكب ينقض في الليل ومقدار جرمه"[32]. إن منطق هذه الرسالة القصيرة وعرضها الأولي ثم هذا الإعلان الذي لا لبس فيه منذ المقدمة لا تترك مجالاً للشك في مقاصد القوهي: إن الشيء الذي يبحث عن حجمه هو جسم النيزك؛ ولكن لماذا والحال هذه يعترضنا هذا التغيير اللغوي الطفيف وذو المغزى مع ذلك؟ فلو أنه استعمل عبارة "الجسم" مرة ثانية من أجل النيزك لعنى ذلك أنه قد اتخذ موقفاً فيما يخص طبيعته وهو ما كان يريد بحذر تجنبه. ولذا فقد كان مجبراً على الحديث عن هذا "الشيء"، عن الكيان، دون أن يجازف في أمر طبيعته. وهكذا تجنب القبول صراحة أن الموضوع على بساط البحث هو سماوي وله حجم. ويبدو هذا الهروب إلى المفهوم العام "شيء" منفذاً لاختياره الموقف "الوضعي"، للوهلة الأولى على الأقل، مجنباً إياه اتخاذ الخطوة التالية والتأكيد على أن النيزك هو جسم سماوي – وهي خطوة لم يكن من الممكن للقوهي أن يخطوها دون برهان؛ وهو برهان لم يتم إلا بعد عدة قرون. إن "وضعية" القوهي هنا كما في حالات مماثلة عديدة، هي وضعية غيابية مدعاها نقص الوسائل التي تثبت طبيعة الظاهرة بصرامة.

لنفرض مع القوهي أن "الشيء" كرة مركزها B وبعده عن مركز الأرض هو $BA = d_1$، وأن هذا البعد معروف. نريد حساب نصف قطر هذه الكرة r_1 لأن حجمها $V_1(B, r_1) = \frac{4}{3}\pi r_1^3$.

[32] انظر أسفله، ص. 1009 السطر 9–10.



الشكل. 2

نفترض أن الكرة (B, r_1) تقع داخل الكرة S التي يسير عليها فلك القمر. تحجب الكرة (B, r_1) عن الراصد جزءاً من الكرة S. تتم المحاكاة كما لو جرى الرصد في الوقت الذي يحتل فيه القمر الذي مركزه C وشعاعه r_2 هذا الجزء من الكرة S. والكرتان (B, r_1) ذات الحجم V_1 و(B, r_2) ذات الحجم V_2 مرئيتان من A تحت نفس الزاوية. ينتج من التحاكي ذي المركز A أن

$$\frac{AB}{AC} = \frac{r_1}{r_2}$$

$AB = d_1$ و $AC = d_2$ بعدان معلومان و

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

ويحقق الحجمان العلاقة

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{d_1^3}{d_2^3}$$

d_1، d_2، r_2 مقادير معلومة وبالتالي r_1 و V_1 معلومان أيضاً.

يبقى أن نشير إلى أنه من الضروري أن يكون حجم "الشيء" من الكبر بحيث يخفي كل القمر كي نستطيع قياسه، وهو ما لا يتحقق في حالة النيزك. لعل هذا الواقع لم يغب عن القوهي والذي قد يكون قد تحدث عن "الشيء" عوضاً عن النيزك معطياً بذلك سبباً ثانياً للتغيير اللغوي الذي استعمله.

تنتهي الرسالة بهذه القضية. تحافظ دراسة القوهي على نفس الصرامة التي عود قارئه عليها، من وجهة النظر الهندسية – وهي هنا بسيطة نوعاً ما. إن تحقيق الرصد ممكن وإن كان صعباً. وتكمن الصعوبة في نوع النيازك. فكل شيء يدل على أن القوهي ناقش النيازك الناتجة عن مرور أجسام في الفضاء السماوي تشتعل باحتكاكها بجو الأرض.

وهي إذاً ليست تلك الناتجة عن تفكك المذنبات الدورية، لأن هذه تستمر في متابعة فلك المذنب منتجة انهمارات نيازك (بيرسيدس، ليونيدس Perseids, Leonids)؛ والمسار في هذه الحالة أهيليلجي، إلا أنه يصعب تخصيص النجم الساقط الذي نريد رصده. ولهذا السبب فإن هذه النوع من النجوم الساقطة مستبعد، وكذلك لأنه من جهة أخرى لا يدخل جو الأرض. ولذا يبقى النوع الأول من النيازك الناتجة عن مرور جسم ما في الفضاء السماوي يشتعل بالاحتكاك بجو الأرض. ومع ذلك تعترض الرصد هنا صعوبات جمة لعدة أسباب. أولها عدم إمكانية التنبؤ بظهور هذا النوع من النجوم، ولأن مدة المرور قصيرة جداً حتى ولو لم ينته اشتعال الجسم الملتهب قبل اختفائه وراء الأفق، وأخيراً لأن سرعة النيزك، المرصود في آن واحد من قبل راصدين بعيدين عن بعضهما، سرعة كبيرة جداً.

هل حاول القوهي القيام بهذا الرصد؟ لقد أعطانا على الأقل الخطة لذلك مما يتيح لنا النظر في دور الهندسة في دراسة هذه الظواهر العلوية: فهو يسمح بالانتقال في دراسة مسار النيزك وحجمه من المستوى الهندسي إلى مستوى الرصد المدقق لغوياً وتقنياً. وهو المستوى المكون لوجودها؛ إذ لا وجود للظاهرة، في هذه الحالة، إلا في إطار النموذج نفسه. ومن النتائج المترتبة على ذلك، وليس أقلها أهمية، فصل هذه الدراسة عن علم الآثار العليا وإدخالها في إطار الفلك، وبالتالي استعمال طرق الفلك وفرضياته في دراسة النيازك. وهذا، دون شك، هو ما جعل القوهي لا يتردد في مطلع رسالته عن إعلان سبقه في هذا المجال.

III

يعالج القوهي في رسالته الثانية في *معرفة مقدار ما يرى من السماء والبحر من رأس شيء مرتفع، يقع بين السماء والأرض*، صنفاً آخر من الأرصاد. تسعى هذه الأرصاد (انطلاقاً من بنية ما – برج أو صاري – منتصبة عمودياً فوق مستوى سطح البحر شريطة ألا يعيق شيء الرؤية منها) في مناسبة ما إلى تقدير القسم المرئي من البحر والأرض والسماء وكذا القسم غير المرئي في حالة السماء. وعلينا ألا نخطئ فهم مقصد القوهي هنا: ينصب اهتمامه في هذه المقالة على الأسس الهندسية للرصد أكثر منه بكثير على مسألة القياس. ولذا فإننا سنمتنع عن وضع هذا النص في إطار التقليد الشهير للبحث في القياس البصري الذي اشتهر به أقليدس في المناظر والذي طوره تطويراً فضاً ابتداء من القرن التاسع الكندي وخلفاؤه[33]. يجب أن نفهم القوهي بهذا المعنى عندما يلمح في مطلع رسالته إلى جدة بحثه معلناً أنه أول من قام به، فهو يرغب إذاً في إنشاء علم جديد. وهو علم لابد أن يكون يقينياً بالنسبة لرياضي مثل القوهي. ومع ذلك فهو حسب القوهي علم قيم لأن فيه منافع جمة – كبناء المنارات التي ترشد البواخر ليلاً نهاراً. ويلح القوهي في المقدمة على هذا الجانب النفعي للعلم الجديد معبراً بذلك عن موقف مخالف وبشكل مزدوج للتقليد الأرسطوطاليسي. يبدو أن القوهي يلتزم هنا بالمفهوم الأساسي للعلم في الثقافة الإسلامية، العلم النافع كما يدل على ذلك بوضوح حروف كلماته

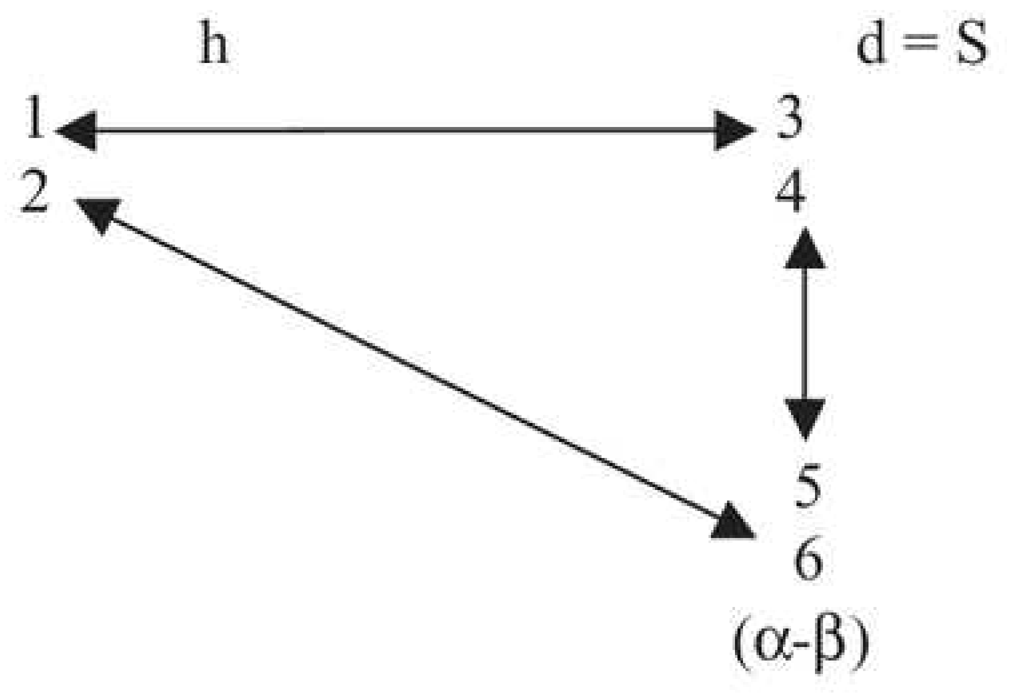
[33] Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. 3, Appendix II : Sinān ibn al-Fatḥ et al-Qabīṣī, pp. 899-908.

(المنافع) وروحها. هذا من جهة، ومن جهة أخرى، فهو يؤيد الطرح القائل إنه يمكن أن يكون للمعرفة اليقينية (العلم بالضرورة-Apodictic) أهداف خارجة عن نطاقها.

يقوم القوهي في رسالته الثانية التي لا تتعدى الأولى في الطول برصدين أوليين: القبة الكروية الأرضية التي تراها العين من قمة بناء عمودي، وقوس السماء المرئي من نفس النقطة. وينفذ هذه المهمة بلياقته المعتادة وبست قضايا. لنبدأ حتى نستوعب البنية المنطقية لهذه الرسالة، بتسمية A النقطة الواقعة على ارتفاع قدره h. سطح البحر سطح كروي قطره d، قطر الكرة الأرضية. نرمز بـــ S لسطح القبة الكروية التي تراها العين في A، بـــ α لقوس السماء المرئي و β لقوس السماء الذي تحجبه الكرة الأرضية. والقضايا الست التي يبرهنها القوهي هي:

1) إذا كان h معلوماً فـــ S معلوم.
2) إذا كان h معلوماً فـــ $(\alpha - \beta)$، الفرق بين قوسي دائرة كبرى من الكرة السماوية التي مركزها A، معلوم.
3) إذا كان S معلوماً فـــ h معلوم.
4) إذا كان S معلوماً فـــ $(\alpha - \beta)$ معلوم.
5) إذا كان $(\alpha - \beta)$ معلوم فـــ S معلوم.
6) إذا كان $(\alpha - \beta)$ معلوم فـــ h معلوم.

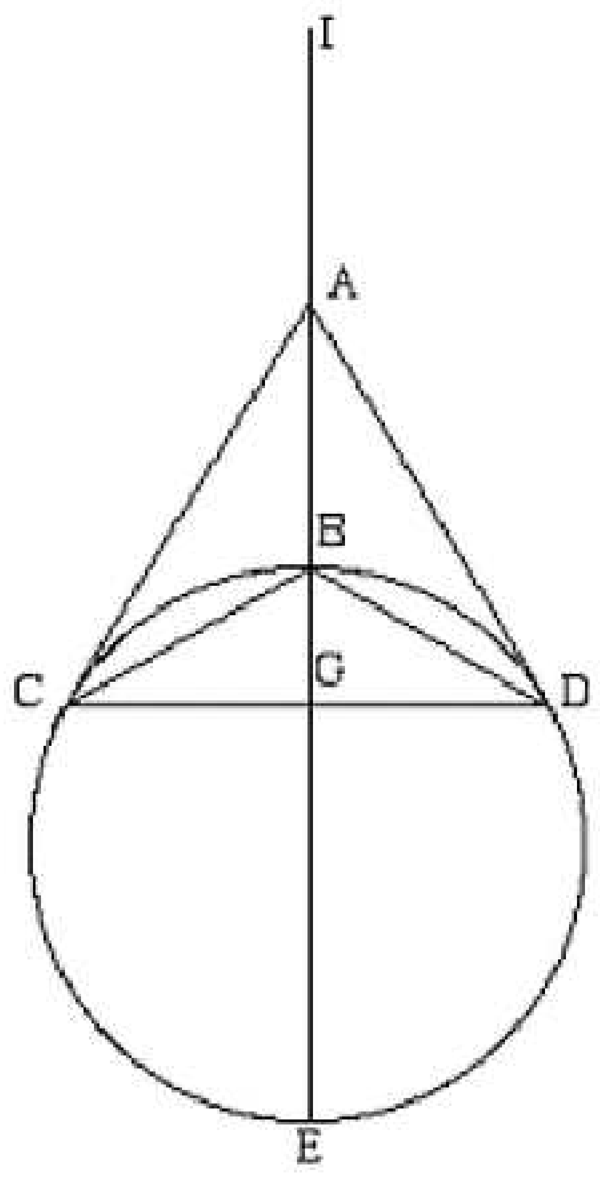
نرى على الفور أن القضايا متعاكسة زوجاً زوجاً (3 ,1)، (6 ,2) و (5 ,4) ويمكن تمثيل البنية المنطقية لهذه القضايا كما يلـــي:



ونلاحظ بجلاء الدور الرئيسي الذي يلعبه الوسيطان: الارتفاع h وقطر الأرض.

لنعد إلى القضايا. يعطي القوهي في أول قضية طريقة لحساب سطح القبة الكروية المرئية من النقطة ذات الارتفاع المعلوم h : ليكن $AB = h$ و $BE = d$، قطر الأرض، طولين معلومين و $BG = x$ طول غير معلوم. لدينا

$$AC^2 = h(h + d) \quad و \quad BC^2 = dx \quad و \quad CG^2 = x(d - x)$$



الشكل. 3

ومنه

$$GA^2 = AC^2 - CG^2 = h(h + d) - x(d - x) \qquad (1)$$

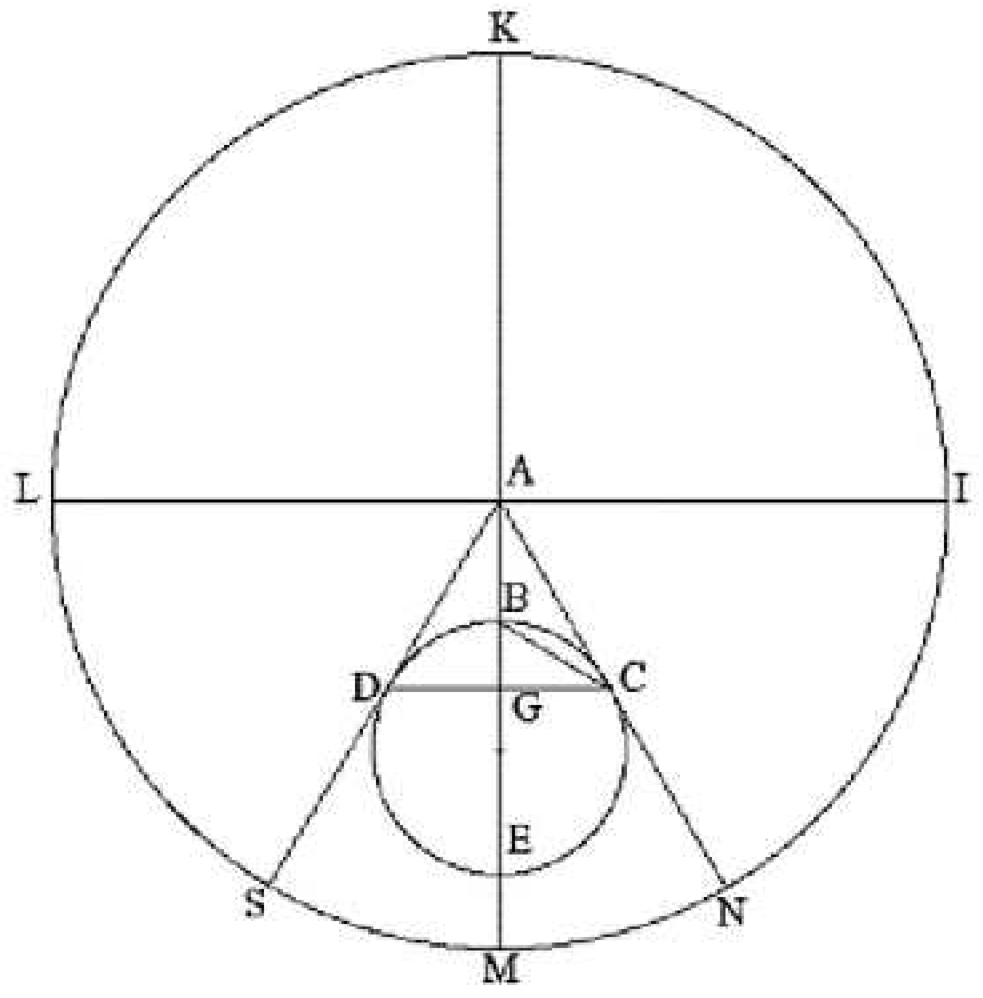
ولدينا من جهة أخرى

$$GA^2 = (x + h)^2 = (2h + x)\,x + h^2 \qquad (2)$$

يستعمل القوهي *الأصول* II.6 للحصول على سطح القبة S. ونحصل من (1) و (2) على

$$S = \pi \cdot BC^2 = \pi \cdot \frac{hd^2}{2h + d} \qquad \text{و} \qquad x = \frac{hd}{2h + d}$$

يأخذ القوهي في القضية الثانية القوسين NKS و NMS على الدائرة الكبرى، الأول منهما هو ما تراه العين عندما تكون في النقطة A والآخر هو ما تحجبه الأرض عنها. ونريد أن نبين أن الفرق $\widehat{NKS} - \widehat{NMS}$ معلوم إذا علم AB



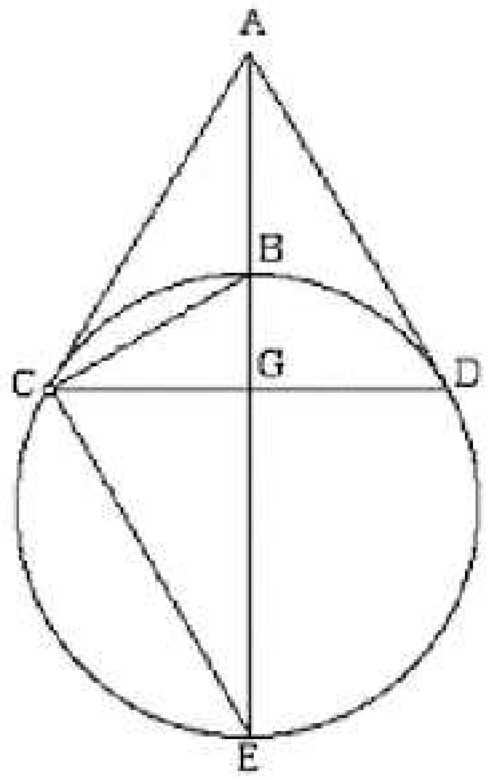
الشكل. 4

إن أطوال أضلاع المثلث ABC ، AB، AC وBC معلومة، الأول فرضاً والثانيان حسب القضية الأولى وبالتالي زواياه معلومة وخاصة الزاوية $\hat{BAC}$ ومعها الزاوية NAI والقوس NI، لأن لدينا

$$\widehat{IN} = \frac{1}{2}\left(\widehat{NKS} - \widehat{IML}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{IML} - \widehat{NMS}\right)$$

$$\widehat{IN} = \frac{1}{4}\left(\widehat{NKS} - \widehat{NMS}\right) \quad \text{و} \quad 2\widehat{IN} = \frac{1}{2}\left(\widehat{NKS} - \widehat{NMS}\right)$$

القضية الثالثة هي عكس القضية الأولى: إذا كانت أبعاد القبة الكروية CBD المرئية من A معلومة فالارتفاع AB معلوم.



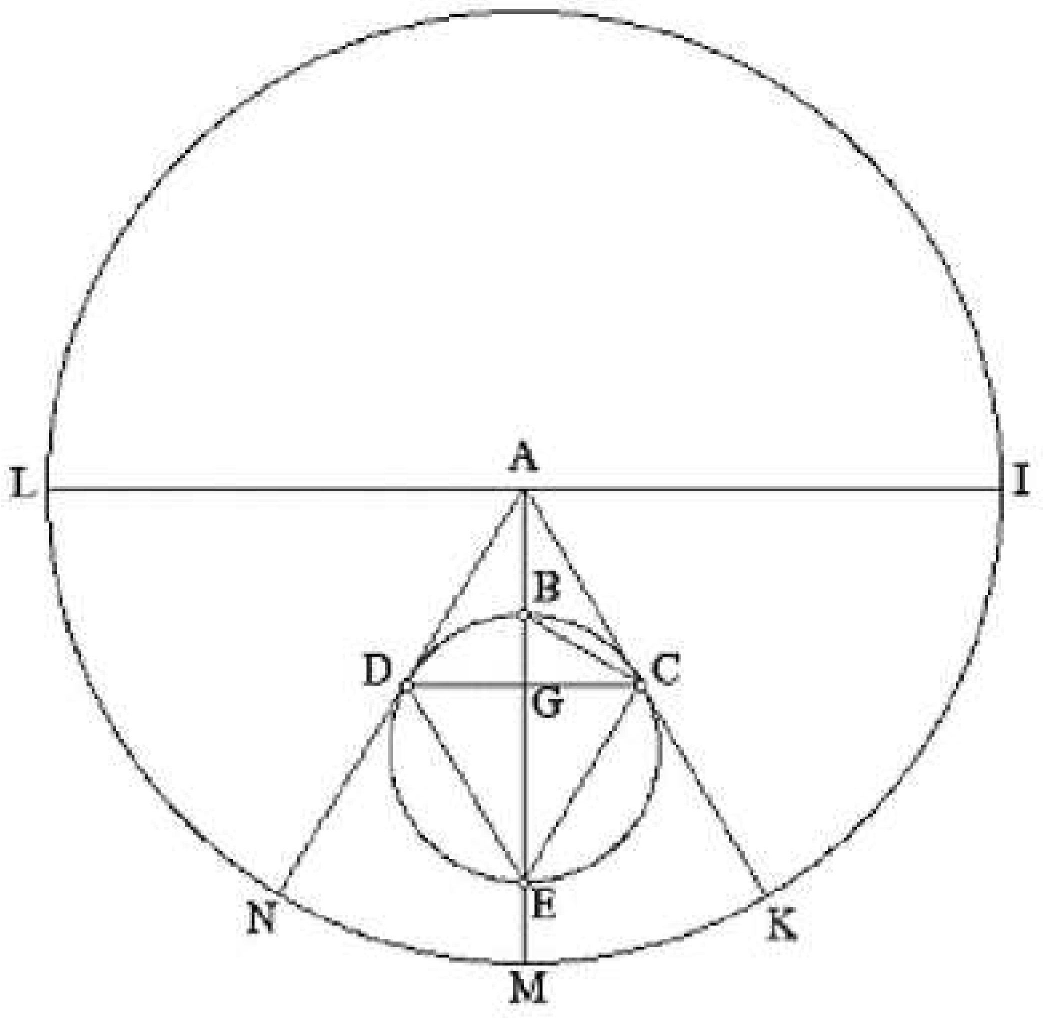
الشكل. 5

إن معرفة مساحة القبة الكروية BCD تعني معرفة مساحة الدائرة التي شعاعها BC، والطول BC معلوم وكذلك وتر المثلث ECB، إذ إنه قطر الأرض. فالنسبة $\frac{CB}{CE}$ معلومة وكذلك الزاويتان $B\hat{E}C$ و $C\hat{B}E$ ومعهما الزاويتان $B\hat{C}A$ و $C\hat{B}A$؛ وهكذا فالزاوية $B\hat{A}C$ معلومة ومعها النسبة $\frac{AB}{BC}$:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{\sin A\hat{C}B}{\sin B\hat{A}C}$$

ولما كان الطول BC معلوماً فالطول AB معلوم.

في القضية الرابعة موضع العين في A وترى القبة الكروية DBC من سطح البحر والقوس KIN من الدائرة السماوية الكبرى، ويبقى القوس KMN محجوباً عنها. يبرهن أن مساحة المقطع الكروي DBC معلومة وكذلك الفرق $\widehat{KIN}-\widehat{KMN}$ (انظر الشكل.6). والبرهان مباشر بالاستعانة بالقضايا السابقة. فإذا كانت المساحة BCD معلومة فالارتفاع AB معلوم حسب القضية السابقة، وبالتالي فالفرق الذي نبحث عنه معلوم أيضاً حسب القضية الثانية.



الشكل. 6

والقضية الخامسة هي عكس القضية الرابعة: يبرهن أنه إذا علم الفرق $\widehat{KIN}-\widehat{KMN}$ علمت مساحة CBD.

إن IK معلوم حسب القضية الثانية وبالتالي الزاوية IAK، كما أن الزاوية ACD معلومة. وإذاً فالزاوية $C\hat{E}D = A\hat{C}D$ معلومة ومعها نصفها الزاوية $C\hat{E}B$. ECB مثلث قائم الزاوية وتره BE معلوم. النسبة $\sin C\hat{E}B=\frac{BC}{BE}$ معلومة وكذلك الطول BC. وللقطاع الكروي CBD مساحة معلومة $\pi . BC^2$.

يبين القوهي في القضية السادسة أنه إذا علم الفرق $\widehat{KMN} - \widehat{KIN}$ فإن الطول AB معلوم. والبرهان مباشر بالاستعانة بالقضيتين الثالثة والخامسة: ذلك أن الخامسة بينت أن معرفة الفرق تعرف مساحة السطح CDB وبينت الثالثة أن معرفة المساحة تعرف الطول AB.

بسم الله الرّحمن الرحيم ٣٤-و

رسالة أبي سهل ويجن بن رستم القوهي
في معرفة مقدار البُعد بين مركز الأرض ومكان الكوكب
الذي ينقضّ بالليل

لما رأينا عناية مولانا صمصام الدولة بالعلماء والأدباء أكثرَ من العناية التي كانت لغيره من الملوك بهم، وذِكْرَ علوم الأوائل وغيرها من العلوم عنده أوسعَ من ذِكْرِها عند غيره من الملوك، فعلمنا أنه قد سبق الملوك كلَّهم في العلم والفضل والحلم وفي كل فضيلة يختصّ بها سائرُ ملوك زمانه دون غيره، كما قد سبق عبدُه – بدولته وعنايته وحسن رأيه وبذل ماله من خزانته، تقرّبًا إليه ومسارعةً إلى خدمته – إلى علم استخراج مقدار البُعد بين مركز الأرض وبين مكان كل كوكب ينقض في الليل ومقدار جرمه.

أما هذا الشيء المضيء الذي يسمى الكوكب المنقضّ، أ كوكب هو في الحقيقة، أم شعاع كوكب يظهر ويغيب، أو نار تحدث لحظة وتبطل، أو شعلة نار موجودة هناك أبدًا، أو شيء تشتعل فيه نار ثم تنطفئ، أو نار تحدث من سرعة حركة شيء آخر غير النار؟

فقد تكلّم فيه قوم، كان جالينوس يطعن عليهم وعلى علمهم أبدًا لكثرة كلامهم في كل شيء بلا برهان. وأما القوم الذين لم يكن يقدر جالينوس ولا غيره أن يطعن عليهم ولا على علمهم، لاعتمادهم على البراهين في جميع علومهم وكتبهم، وهم أصحاب
٣٤-ظ التعاليم، ومنهم من قد تكلّم في / معرفة علم الأبعاد والأجرام والأشياء التي تتعلق بعلم الإرصاد والكواكب؛ وألّفوا في ذلك كتبًا كثيرة، مثل أرشميدس وأرسطرخس وطيموخارس وبطلميوس وغيرهم من القدماء الذين وقعت كتبهم وأخبارهم إلينا؛ لم يذكروا في كتبهم معرفة مقدار البُعد بين مركز الأرض وبين مكان كل كوكب ينقض في الليل؛ وهذا لا يخلو

2 رستم: وستم – 3 الكوكب: الكواكب – 20 يخلو: يخلوا.

من أحد هذه الأقسام. أما أنهم لم يذكوره أو ذكروا ذلك ولم يثبتوه في الكتب أو أثبتوه وتلك الكتب التي أثبت فيها لم تقع إلينا ولا إلى إقليمنا ولا إلى أيدينا. وليس ظني بهم إلا الحسن الجميل، لأني أعرف منهم ومن استنباطهم وغوصهم وتبحرهم في استخراج العلوم الغامضة ما لا يعرفه غيري في زماننا هذا.

ونحتاج في معرفة مقدار البعد بين مركز الأرض وبين مكان الكوكب الذي ينقضّ في الليل إلى ثَبْت رَجلين عالمين بعلم البلدان وعروضها وأطوالها وسموتها وغير ذلك مما أشبهه، ويكونان مع ذلك عارفين بمعرفة الكواكب الثابتة ومواضعها وصورها وعدد كميتها من الصُور التي هي فيها، حتى لو سأل سائل مثلاً عن كوكب ما أن هذا الكوكب أي كوكب هو، يكون الجواب فيه أن هذا الكوكب خامس من صورة كذا، إذا كان خامسًا؛ أو كان عاشرًا، إذا كان عاشرًا منها، أو الخارج من صورة كذا إلى جهة كذا، إذا كان كذلك، وليكونا ماهرين جدًّا في هذا العلم والمعرفة به، ومع هذا يكونان في بلدين متباعدين، ويثبتان ما يريان / من حال كل واحد من الكواكب التي تنقضّ في الليل: مثل ابتدائه ٣٥-و
وانتهائه ووسطه، وجهة كونه إلى الشمال أو الجنوب ومقدار جرمه إلى أحد الكواكب الظاهرة، وزمان كونه من الليل أماضيًا كان ذلك أم مستقبلاً، ومروره على كوكب من الكواكب الثابتة أو على كوكبين أو على أكثر من ذلك، أو قريبًا منها ومقدار ارتفاع الكوكب الذي يبتدئ منه، والكوكب الذي ينتهي إليه، والكوكب الذي يمرّ عليه وما أشبه ذلك، نظرًا مستقصيًا جدًا. وبهذا الجنس من النظر يعرف طول البلدان. فإذا حصل ثَبْت الرجلين على ما وصفنا، نعلم حينئذٍ منهما مقدار البُعد بين مركز الأرض وبين مكان كوكب ينقض في الليل الذي حاله مثبتة في ثبتيهما على ما وصفنا، لأنه إذا كان العرض والطول والسمت لكل واحد من البلدين معلومًا، فالبعد بين البلدين يكون معلومًا. وليس يُشكل عليهما الكوكب المنقض من غيره من سائر الكواكب المنقضة من جهة الزمان الماضي من تلك الليلة إلى وقت انقضاضه، أو المستقبل منه والأحوال التي تتبعه، لأنه محصّل في ثبتيهما.

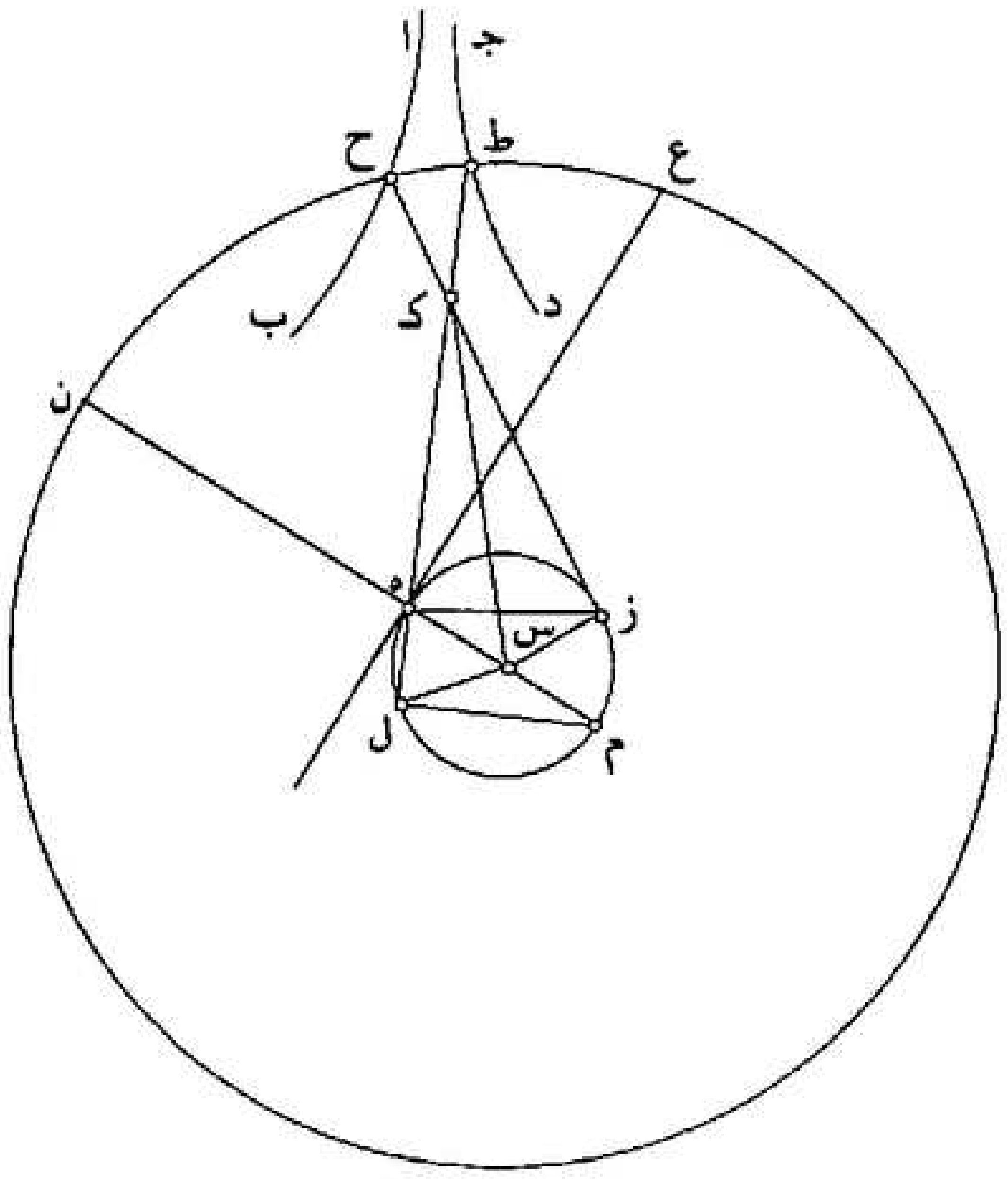
وأما الخط، الذي يحدث في فلك الكواكب الثابتة نظير الخط المارّ في فلك الكوكب المنقض، المعلوم في كل واحد من البلدين، فليس يجوز أن يكون الخط واحدًا، ولو كان

25 المعلوم: معلوم.

أيضًا نفس الكوكب المنقضّ على فلك القمر. فكيف إذا كان تحته، لأن اختلاف المنظر يقع في كل ما هو في فلك القمر؟ فكيف ما دونه؟ بل يكون خطان يحدثان / في فلك ٣٥-ظ الكواكب الثابتة لا محالة.

فليكن أحد هذين الخطين خط ا ب، والآخر خط جـ د؛ وأحد البلدين نقطة ه والآخر نقطة ز؛ ونجعل دائرة عظيمة يمرّ سطحُها على نفس البلدين اللذين عليهما علامتا ه ز ويقع من محيطها بين خطي ب ا جـ د في الموضع الذي نريد أن نعلم بُعده من مركز الأرض، قوس ح ط. ونصل خطوط ه ز ه ط ز ح. وليكن على ذلك الموضع بعينه تقاطع خطي ه ط ز ح، ولتكن نقطة كـ. فظاهرٌ بينٌ أن نقطة كـ هي الموضع الذي كان الكوكب المنقض عليه في الوقت الذي رأوه من بلد ه على نقطة ط ومن بلد ز على نقطة ح.

فأقول: إن البعد بين مركز الأرض وبين نقطة كـ معلوم، وهو على ذلك الموضع بعينه.



برهانه: أن نجعل كرة ه ل م ز كرة الأرض ومركزها نقطة س، ونخرج خط كـ ه على استقامة إلى نقطة ل، ونصل خط ه س ونخرجه على استقامة في الجهتين إلى نقطتي م ن، ونصل خطوط م ل ل س س كـ، ونخرج من نقطة ه عمود ه ع ‹على خط م ن›. فزاوية كـ ه ن معلومة لأنها تمام زاوية ارتفاع نقطة ط إلى القائمة في البلد الذي عليه نقطة ه، وارتفاع نقطة ط في البلد الذي عليه علامة ه معلوم، وهو زاوية كـ ه ع. وزاوية م ه ل

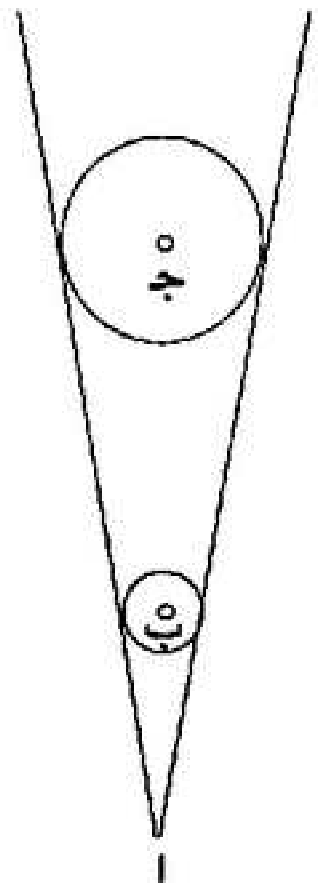
4 ا ب: ا جـ – 5 اللذين: الذين – 8 هي: هو.

معلومة لأنها مقابلة لزاوية كـ ه ن المعلومة، وزاوية ه ل م قائمة لأنها في نصف الدائرة؛ ٣٦-و فالزاوية الباقية من مثلث ه ل م معلومة، ومثلث ه ل م معلوم الصورة، فنسبة / خط م ه إلى خط ه ل معلومة. ولكن خط م ه معلوم لأنه قطر الأرض، فخط ه ل معلوم، فنسبته إلى خط ه ز معلومة، لأن خط ه ز معلوم القدر أيضًا. وأيضًا، فإن كل واحدة من زاويتي كـ ز ه كـ ه ز معلومة، لأن ارتفاع كل واحدة من نقطتي ح ط في كل من بلدي ه ز معلوم؛ وسمت كل واحد منهما معلوم، لأن الطول والعرض لكل واحد منهما معلوم. أما زاوية كـ ه ز، فلأن زاوية كـ ه ع التي ‹هي› زاوية ارتفاع نقطة ط في بلد ه معلومة، وزاوية ع ه ز معلومة أيضًا لأنها مساوية للزاوية التي تقع في قوس ه م ز المعلومة، لأنها تمام قوس ه ز المعلومة، ‹فهي معلومة›، وهكذا زاوية كـ ز ه معلومة وخط ه ز معلوم بالوضع والقدر، فالزاوية الباقية من مثلث كـ ز ه معلومة، فمثلث ز كـ ه معلوم الصورة. فنسبة ه ز إلى ه كـ معلومة وخط ه ز معلوم؛ فخط ه كـ معلوم، فخط ل كـ معلوم. فسطح خط ل كـ في خط كـ ه معلوم. فسطح ل كـ في كـ ه مع مربع ه س مساوٍ لمربع س كـ، فمربع س كـ معلوم. فخط س كـ معلوم، وهو البعد بين مركز الأرض وبين نقطة كـ. فالبعد بين مركز الأرض وبين نقطة كـ معلوم؛ وكانت نقطة كـ مكان / كوكب منقض في الليل، وكان ٣٦-ظ في بلد ه على مقابلة نقطة ط وفي بلد ز على مقابلة نقطة ح. فالبعد بين مركز الأرض وبين مكان كل كوكب ينقض معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وإذا كان بعد شيء من الأرض معلومًا، فإن جرمه أيضًا يكون معلومًا، لأن نسبة البعد إلى البعد مثلّثة كنسبة الجرم إلى الجرم.

مثال ذلك: أن مركز الأرض نقطة ا والشيء الذي بعده من نقطة ا معلوم هو ب.

فأقول: إن جرم ب معلوم أيضًا.



9-10 معلومة ... فالزاوية: أثبتها في الهامش مع «صح».

برهانه: أما إن فرضنا في كرة القمر – مثلاً – جرمًا مساويًا لجرم ب في الرؤية والمشاهدة، أعني المقدار الذي يستره من كرة القمر، وليكن ذلك الجرم جـ. فمقدار جرم جـ في فلك القمر يكون معلومًا لا محالة، لأن نفس جرم القمر معلوم، ونسبة قطر جرم جـ المعلوم إلى قطر ب هي كنسبة بعد جـ ا إلى بعد ا ب. ‹و›نسبة بعد جـ ا إلى بعد ا ب معلومة، لأن كل واحد منهما معلوم، فنسبة قطر جرم جـ إلى ‹قطر› جرم ب معلومة. وقطر جرم جـ معلوم، فقطر جرم ب معلوم أيضًا؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

تمت الرسالة بخط الحسين محمد بن علي في جـ يه ط ثمد.
والحمد لله والصلاة على النبي محمد وآله.

4 جـ ا (الأولى): جـ.

مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

بسم اللّه الرّحمن الرحيم ا-١-ظ ب-١٣

رسالة أبي سهل ويجن بن رستم القوهي في معرفة مقدار ما يرى من السماء والبحر من رأس شيء مرتفع

قال: لما رأينا همة الأستاذ الجليل في إعمال الخير أكثرَ من همة غيره من الوزراء المتقدمين، وحِرصَه في إصلاح الدنيا أكثرَ من حرص غيره من الكبراء المذكورين، ومقدارَ أهل الفضل عنده أعظمَ من مقدارهم عند غيره من الرؤساء المعروفين بالعلم والفضل، فعلمنا أنه أكبر الناس همةً، وأشرفهم نفسًا، وأصوبهم رأيًا بأمور الدنيا والآخرة؛ فلهذا يقصد إليه كلُّ صنف من أهل العلم والفضل بما هو عزيز عليهم. وقصدتُ أنا بما هو عزيز عندي، من علم لمْ يسبق إليه إليه أحدٌ من أصحابنا، تقربًا إليه، ليقف عليه ويعلمه. ومنافع العلم بما تتضمّن هذه الرسالة كثيرة، وخاصة لمن أراد أن يبني في جزيرة من البحر علمًا ليَهتدي به وبما يَشْهَرُ من رأسه من النار بالليل والدخان بالنهار رُكّابُ البحر، ويكون ذلك سببًا لخلاصهم من الغرق؛ ويبتغي بذلك القربة إلى اللّه تعالى، والثواب في الآخرة، والذكر والثناء في الدنيا. وذلك أنه يعلم بهذا العلم: بكم مقدار من البعد يُرى رأس كلّ شيء مرتفع عن سطح ماء البحر؟ ويبتدئ بعمل ما يجوز ولا يطمع فيما لا يجوز، ويكون له تَقْدُمة المعرفة بما يكون / من أمر ذلك الشيء وبما لا يكون، وغير ذلك من المنافع، ولو ب-١٤ ذكرتها لطال الكلام، وليس غرضي التطويل. فلنختصر ونقول: إن في هذه الرسالة علمٌ

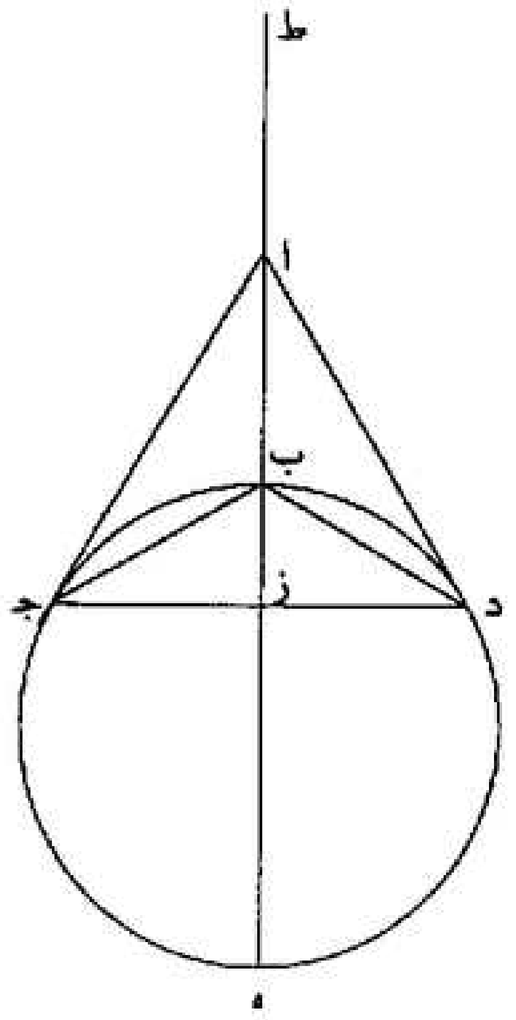
1 الرحيم: كتب بعدها «وبه استعين» [ب] ؛ كتب البسملة بعد عنوان الرسالة [ا] – 2 ويجن بن رستم: ناقصة [ا] – 3 من رأس شيء مرتفع: ناقصة [ب] نجد فوقها في الهامش «مشتملة على ستة دعاوي» [ا] – 4 الجليل: ناقصة [ا] – 5 إصلاح: صلاح [ا] – 6 الرؤساء: الرسا [ب] – 8-9 بما هو ... علم: بعلم [ب] – 9 عليه: اليه [ب] / ويعلمه: وبعلمه [ب] – 10 بما ... وخاصة: كثيرة وخاصة بعلم ما تتضمن هذه الرسالة [ا] / من البحر: ناقصة [ا] – 11 بالنهار: بالنار [ا] / رُكّاب: لركاب [ا] – 12 تعالى: عز وجل والأجر [ب] – 15 تَقْدُمة: التقدمة في الشرف: أي المضي فيه – 16 ذكرتها: ذكرناها [ا].

بمعرفة مقدار ما يرى من سطح ماء البحر من رأس شيء مرتفع عنه، ومعرفة مقدار فضل الظاهر من السماء التي عليها الكواكب الثابتة على ما هي غائبة عن رأس ذلك الشيء المرتفع، ومعرفة مقدار ارتفاع ذلك الشيء عن سطح ماء البحر.

– آ – نريد أن نبين أنه إذا كان ارتفاع شيء عن سطح ماء البحر / معلومًا، فإن ١-٢-و مقدار ما يرى من سطح ماء البحر من رأس ذلك الشيء معلوم.

مثال ذلك: أن الشيء المعلوم المرتفع من سطح ماء البحر ا ب، ومقدار سطح ماء البحر الذي يرى من نقطة آ، جـ ب د. فيقع مخروط فيما بين البصر وبين سطح ماء البحر، ورأسه نقطة آ وسطحه يماس كرة ماء البحر على دائرة الأفق، لأن ماء البحر كريّ؛ وقطر تلك الدائرة جـ د.

فأقول: إنه إذا كان ارتفاع ا ب معلومًا، فإن السطح الذي ينفصل بالدائرة – التي قطرها جـ د – من سطح ماء البحر معلومٌ.



برهان ذلك: أن الفصل المشترك فيما بين السطح المخروطي والسطح المستوي الذي يمرّ بنقطة آ ومركز الأرض خطا ا جـ ا د، وهما يماسان محيط الدائرة، التي هي / الفصل ب-١٥ المشترك فيما بين ذلك السطح المستوي بعينه وسطح كرة ماء البحر على نقطتي جـ د. وتلك

1 بمعرفة مقدار: بمقدار [ا] / ماء: ناقصة [ا] – 2 من: ناقصة [ا] – 3 الشيء: ناقصة [ب] – 4 نريد: فنريد [ب] / نبين: نتبين [ب] – 5 الشيء: كتب بعدها «من سطح الماء» [ب] – 6 المرتفع من: عادة ما يكتب «المرتفع عن»، والمعنى واحد. فعن هنا حرف بمعنى «على»، و«من» تأتي بمعنى «عن» حسب قول الكوفيين – 7 يرى: ناقصة [ا] – 8 الأفق: ناقصة [ب] – 12 برهان ذلك: برهانه [ا].

الدائرة جـ ب د ه وقطرها – وهو ه ب – معلوم، لأن قطر الأرض معلوم برصد بعض أصحاب الإرصاد. وخط ب ا معلوم، فخط ه ا معلوم؛ فضرب خط ه ا في خط ا ب معلوم، وهو مساوٍ لمربع خط ا جـ، لأنه مماس للدائرة؛ فمربع خط ا جـ معلوم. ولكن مربع خط ا جـ مساوٍ لمربعي خطي جـ ز ز ا، فمربعا خطي جـ ز ز ا معلوم. ونجعل خط ا ط مساويًا لخط ا ب. ومربع خط ز ا مساوٍ لضرب خط ط ز في ز ب مع مربع خط ا ب، لأن خط ط ب مقسوم بنصفين وخط ب ز زيادة عليه. فمربع خط جـ ز، مع ضرب خط ط ز في خط ز ب ومع مربع خط ا ب، معلوم. ونلقي مربع خط ا ب المعلوم، فيبقى مربع خط جـ ز مع سطح ط ز في ز ب معلومًا. ومربع خط جـ ز مساوٍ لضرب خط ه ز في خط ز ب، لأن خط ه ب قطر الدائرة؛ فضرب خط ه ز / في خط ز ب مع ضرب ١-٢-ظ خط ط ز في خط ز ب، أعني ضرب خط ه ط في خط ب ز، معلوم. وخط ه ط معلوم، فخط ز ب معلوم؛ فضربه في خط ز ه معلوم لأن خط ز ه الباقي من قطر الدائرة معلوم، وضرب خط ب ز في خط ز ه / مساوٍ لمربع خط ز جـ، فمربع خط ز جـ معلوم، ب-١٦ ومربع خط ز ب معلوم. ونصل خط جـ ب، فجميع مربعي خطي جـ ز ز ب مساوٍ لمربع خط جـ ب، فمربع خط جـ ب معلوم. فالدائرة التي نصف قطرها خط ب جـ معلومة، وهي مساوية للسطح المفصول بالدائرة التي قطرها جـ د من سطح ماء البحر الكريّ، كما برهن أرشميدس في كتاب *الكرة والأسطوانة*.

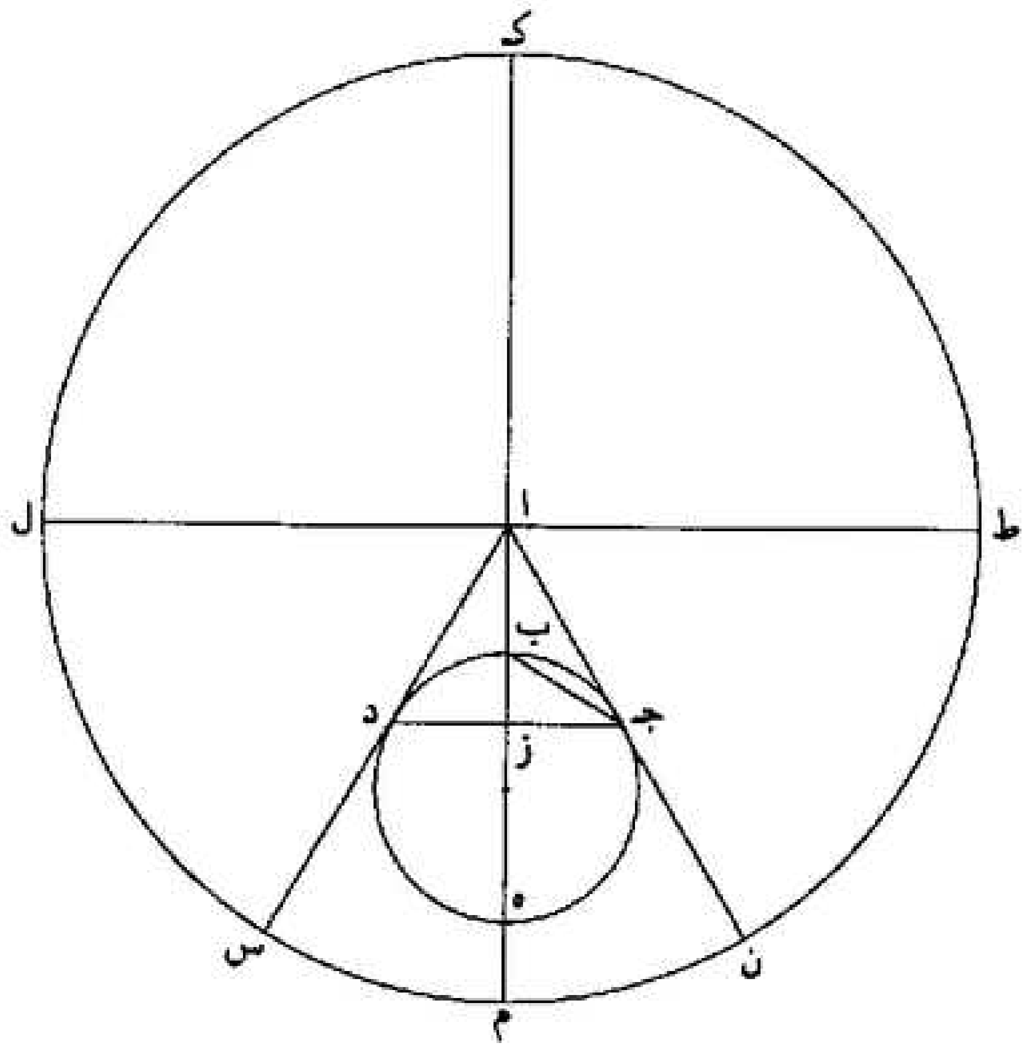
فسطح جـ ب د الكريّ من ماء البحر معلوم، وهو مقدار ما يرى من نقطة ا التي هي رأس الشيء المرتفع من سطح ماء البحر. فإذا كان ارتفاع ذلك الشيء عن سطح ماء البحر معلومًا، فإن مقدار سطح ماء البحر الذي يرى من رأس ذلك الشيء المرتفع عنه معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وكذلك يرى من كل نقطة على محيط الدائرة، التي قطرها خط جـ د، العلامة التي تكون على رأس ذلك الشيء المرتفع مثل النار بالليل والدخان بالنهار أو ما أشبه ذلك.

2-1 برصد بعض أصحاب الإرصاد: بالرصد [ا] – 2 خط (الثالثة): ناقصة [ب] – 4 معلوم: يقصد مجموع المربعين، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / ونجعل: ويجعل [ا] – 7 مع: ناقصة [ا] / ونلقي: وتلقى [ب] – 8 معلومًا: معلوم [ب] – 10 خط (الثانية): ناقصة [ا] / ه ط (الثانية): ط ه [ا] – 11-12 فخط ... الدائرة معلوم: ناقصة [ا] – 13 ونصل خط جـ ب: ناقصة [ا]؛ أثبتها في الهامش مع «صح» فوقها [ب] – 22 تكون: يكون [ا، ب] / أو ما: وما [ا] / كتب أحمد بن سليمان، وهو أحد قراء هذه المخطوطة، في الهامش إزاء الشكل اللاحق هذا التعليق: «قال في التحفة: لو جعل الأفق دائرة يرسمها الخط الخارج من البصر مماسًا للأرض منتهيًا إلى السماء، يكون الظاهر من الفلك أكثر من الخفي بأربع دقائق وست ثوانٍ إن كان قامة الشخص الخارج من بصره ثلاثة أذرع ونصفًا، على ما بينه ابن الهيثم في رسالته أن الظاهر من السماء أكثر من نصفها. من الكشكول» [ا].

– ب – نريد أن نبين أنه إذا كان ارتفاع شيء ما من سطح ماء البحر معلومًا، فإن مقدار زيادة ما يرى من السماء من رأس ذلك الشيء المرتفع عن سطح الماء، على ما لا يرى منها، معلوم.

ب-١٧ ا-٣-و مثال ذلك: أن نقطة ا / رأس الشيء المرتفع، / وصورة الشكل على حالها؛ ونجعل على مركز ا دائرة ط ك ل م، ونفرضها من الدوائر التي لا فرق بين أن يكون مراكزها على نقطة ا أو على مركز الأرض. فنجعل قطر ط ل عمودًا على قطر م ك، ونخرج خطي ا جـ ا د على الاستقامة إلى نقطتي ن س.



فأقول: إن فضل قوس ن ك س الظاهرة من نقطة ا على قوس ن م س الغائبة عنها معلوم.

برهان ذلك: أن كل واحد من أضلاع مثلث ا ب جـ معلوم، كما بينا قبل ذلك؛ فزاوية ز ا جـ معلومة، وزاوية ز ا ط معلومة لأنها قائمة، فزاوية ن ا ط الباقية معلومة، فقوس ن ط معلومة، وهي نصف فضل قوس ن ك س على نصف محيط دائرة ط ك ل م، لأن قوسي ط ن ل س متساويتان. وقوس ن ط أيضًا نصف فضل نصف محيط دائرة ط ك ل م على قوس ن م س، / فقوس ط ن المعلومة ربع فضل قوس ب-١٨ ن ك س على قوس ن م س؛ ففضل قوس ن ك س على قوس ن م س معلوم. وقوس

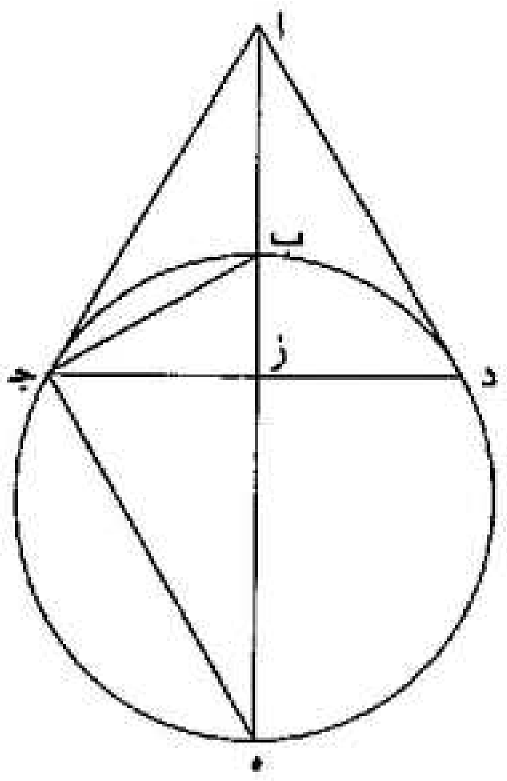
2 عن: على [ا] – 4 وصورة: وصورت [ب] – 6 فنجعل: فيجعل [ا] – 7 الاستقامة: استقامة [ب] – 10 كل: أثبتها في الهامش مع «صح» [ب] – 11 ز ا جـ: د ا جـ [ا] / ز ا ط: ب ا ط [ا] – 13 ط ك ل م: كتب بعدها «على قوس ن م»، ثم ضرب عليها بالقلم [ا] / متساويتان: مساويتين [ا] / نصف (الثانية): أثبتها في الهامش [ب].

ن ك س هي الظاهرة من نقطة ا، وقوس ن م س هي الغائبة عنها، فزيادة ما يظهر من السماء على ما لا يظهر منها من رأس شيء مرتفع من سطح ماء البحر معلومة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

– جـ – نريد أن نبيّن أنه إذا كان مقدار سطح ماء البحر الظاهر من رأس شيء مرتفع ا-٣-ظ
معلومًا، فإن ارتفاع ذلك الشيء من سطح ذلك الماء معلوم.

مثال ذلك: أن سطح ماء البحر المعلوم الظاهر من نقطة ا هو جـ ب د، والشيء المرتفع من سطح ماء البحر هو ا ب، كما في الصورة التي قبل هذا.

فأقول: إن خط ا ب معلوم.



برهان ذلك: أن نصل خط جـ ب. فلأن سطح جـ ب د المعلوم الكري من سطح ماء البحر مساوٍ للدائرة التي نصف قطرها خط جـ ب، فالدائرة التي نصف قطرها خط جـ ب معلومة، فخط جـ ب معلوم؛ وخط ب ه معلوم، لأنه قطر دائرة ب جـ ه. فنسبة أحدهما
إلى الآخر معلومة وزاوية ه جـ ب قائمة، فمثلث ب ه جـ / معلوم الصورة، فكل واحدة ا-٤-و
من زاويتي / جـ ب ه ب ه جـ معلومة، وزاوية جـ ب ه مع زاوية جـ ب ا مساويتان ب-١٩
لقائمتين؛ وزاوية ب ه جـ مساوية لزاوية ب جـ ا، لأن خط ا جـ مماس للدائرة على نقطة جـ، فكل واحدة من زاويتي ا ب جـ ا جـ ب معلومة، فمثلث ا ب جـ معلوم الصورة، فنسبة خط ب جـ المعلوم إلى خط ب ا معلومة، فخط ب ا معلوم، وهو ارتفاع الشيء عن سطح ماء البحر، فارتفاع ذلك الشيء عن سطح ماء البحر معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

3 أردنا أن نبين: أردناه [ا] – 4 نريد أن نبيّن: أثبتها في الهامش مع «صح» [ب] – 6-4 من رأس ... الظاهر: أثبتها في الهامش [ب] – 10 جـ ب: كتب بعدها «معلومة» [ا] – 11 قطر: مكررة في بداية السطر التالي [ا] – 12 وزاوية: أثبتها في الهامش مع «صح» فوقها [ا] / واحدة: واحد [ا] – 13-14 معلومة ... وزاوية ب ه جـ: ناقصة [ا] – 14 مساوية: مساو [ا] – 15 فكل: وكل [ا] / واحدة: واحد [ا] – 16 خط (الأولى والثانية): ناقصة [ا] – 17 فارتفاع ... البحر: ناقصة [ا].

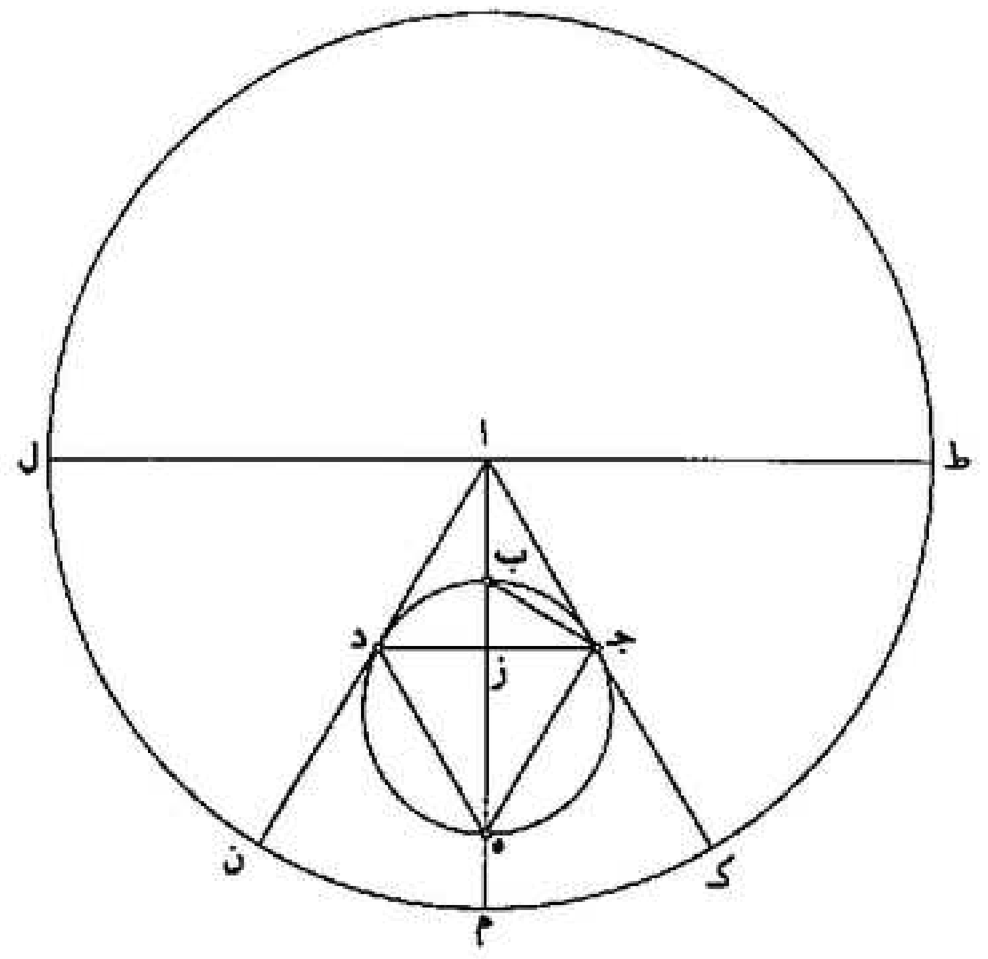
– د – نريد أن نبيّن أنه إذا كان مقدار سطح ماء البحر الظاهر من رأس شيء مرتفع عنه معلومًا، فإن مقدار زيادة ما يرى من السماء على ما لا يرى منها من رأس ذلك الشيء المرتفع، معلوم.

برهان ذلك: أنه إذا كان مقدار سطح ماء البحر ‹الظاهر› من رأس شيء مرتفع عنه معلومًا، فإن ارتفاع ذلك الشيء معلوم. وإذا كان ارتفاع ذلك الشيء عنه معلومًا، فإن مقدار زيادة ما يرى من السماء على ما لا يرى منها، من رأس ذلك الشيء المرتفع عن سطح / الماء، معلوم، كما بينا. فإذا كان مقدار سطح ماء البحر الظاهر من رأس شيء ب-٢٠ مرتفع عنه معلومًا، فإن مقدار زيادة ما يرى من السماء على ما لا يرى منها، من رأس ذلك الشيء المرتفع، معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– هـ – نريد أن نبيّن أنه إذا كان مقدار زيادة الظاهر من السماء من رأس شيء مرتفع عن سطح ماء البحر على ما غاب عنه معلومًا، فإن مقدار سطح ماء البحر الظاهر من رأس ذلك الشيء معلوم.

مثال ذلك: أن الشيء المرتفع عن سطح ماء البحر ا ب، ورأسه نقطة ا، ومقدار الظاهر من السماء، من نقطة ا، ك ط ل ن، والغائب عنها ك م ن.

فأقول: إنه إذا كان / فضل ك ط ل ن من السماء على ك م ن معلومًا، فإن سطح ا-٤-ظ جـ ب د الكريّ من سطح ماء البحر معلوم.



6 عن: على [ا] – 7 فإذا: فاذن اذا [ا] – 9 أن نبيّن: أثبتها في الهامش مع «صح» [ب] – 11 عن: على [ا] / مقدار: ناقصة [ا].

برهان ذلك: أن فضل قوس كـ ط ل ن المعلوم على قوس كـ م ن أربعة أمثال قوس كـ ط، كما بينا. فقوس كـ ط معلومة، فزاوية ط ا كـ معلومة، وهي مساوية لزاوية ا جـ د، لأنهما متبادلتان، فزاوية ا جـ د معلومة. ولكن زاوية ا جـ د مساوية لزاوية جـ ه د، لأن خط ا جـ مماس لدائرة ب جـ ه د، فزاوية جـ ه د معلومة، ونصفها، وهي / زاوية جـ ه ب، معلومة. وزاوية ه جـ ب قائمة، فالزاوية الباقية معلومة. فمثلث ه جـ ب معلوم الصورة، فنسبة خط ه ب إلى خط ب جـ معلومة. وخط ه ب معلوم برصد بعض أصحاب الإرصاد، فخط ب جـ معلوم. فالدائرة التي نصف قطرها ب جـ معلومة، وهي مساوية لسطح جـ ب د الكري من سطح ماء البحر، فسطح جـ ب د الكري من سطح ماء البحر معلوم، وهو مقدار ما يرى من رأس الشيء المرتفع عنه. فإذن، إذا كان مقدار زيادة الظاهر من السماء من رأس شيء مرتفع على ما غاب عنه معلومًا، فإن مقدار سطح ماء البحر الظاهر من رأس ذلك الشيء المرتفع معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبين./ ب-٢١

– وَ – نريد أن نبيّن أنه إذا كان مقدار زيادة الظاهر من السماء من رأس شيء مرتفع ا-ه-و عن سطح ماء البحر، على ما هو غائب عنه، معلومًا، فإن مقدار / ارتفاع ذلك الشيء ب-٢٢ المرتفع عنه معلوم.

برهان ذلك: أنه إذا كان مقدار زيادة الظاهر من السماء من رأس شيء مرتفع عن سطح ماء البحر، على ما هو غائب عنه، معلومًا، فإن مقدار سطح ماء البحر الظاهر من رأس ذلك الشيء المرتفع معلوم. وإذا كان مقدار سطح ماء البحر ‹الظاهر› من رأس ذلك الشيء المرتفع معلومًا، فإن ارتفاع ذلك الشيء عنه معلوم، كما بيناه فيما تقدم. فإذن، إذا كان مقدار زيادة الظاهر من السماء من رأس ذلك الشيء على ما هو غائب عنه معلومًا، فإن مقدار / ارتفاع ذلك الشيء عن سطح ماء البحر معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ا-ه-ظ

وعلى ذلك سطح الأرض إذا كان كسطح ماء البحر في الاستواء، أعني ألا يرتفع عنه شيء يمنع من رؤية ما وراءه كالرابية وما أشبهها.

تمت الرسالة في مقدار ما يرى من السماء والبحر من رأس شيء مرتفع عن سطح الماء.

4 ب جـ ه د: ب ه جـ د [ا] – 6-7 برصد ... الإرصاد: بالرصد [ا] – 9 فإذن، إذا: فاذا [ا] – 11 أن نبين: بيانه [ا] – 13 عن: على [ا] – 14 المرتفع: ناقصة [ب] – 18 بيناه: بينا [ب] – 20-21 وذلك ... نبين: ناقصة [ا] – 22 ألا يرتفع: انه لا يقع [ا] – 23 كالرابية: كالترابية [ا] – 24 في مقدار ... الماء: ناقصة [ا]؛ نجد بعدها في [ب]: «والله ولى التوفيق وكتب في ربيع الأول سنة اثنين وسبعين وستمائة هجرية العربية، حامدًا ومصليًا ومستغفرًا».

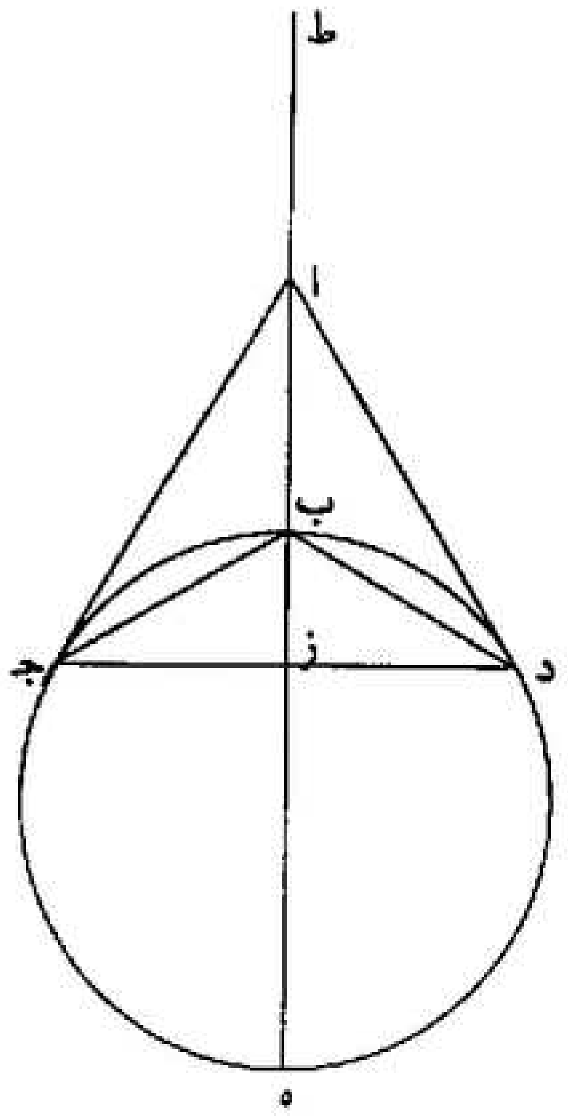
مؤسسة الملك عبد العزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

جـ-١٩٣-ظ
د-١٢٠-ظ

رسالة للقوهي في معرفة ما يرى من السماء والبحر

قال: بعد التسمية والتحميد، منافع العلم بما تتضمن هذه الرسالة كثيرة، خاصة لمن أراد أن يبني في جزيرة علمًا ليَهتدي به وبما يَشْهَر من رأسه من النار بالليل والدخان بالنهار رُكّاب البحر، إذ يعلم منها: بكم مقدار من البعد يُرى رأس الشيء المرتفع من سطح ماء البحر؟



‹ا› إذا كان ارتفاع شيء كـ ا ب عن سطح ماء البحر كـ جـ ب د المرئي من ا معلومًا، فمقدار ما يرى من سطح مائه من رأس ذلك الشيء معلوم، لأنه يحيط بالسطح المرئي مخروط رأسه ا وقاعدته دائرة قطرها جـ د. وليكن الفصل المشترك بين سطح المخروط والسطح المار برأسه ومركز الأرض ا جـ ا د المماسين لمحيط الدائرة، التي هي الفصل المشترك بين سطح كرة ماء البحر والسطح المذكور، وقطرها – وهو ه ب – معلوم، لأن قطر الأرض برصد أصحاب الإرصاد معلوم. وب ا معلوم، فكذا ه ا، فـ ه ا في ا ب، أعني مربع ا جـ، بل مربعي جـ ز ز ا، معلوم. ونخرج ا ط كـ ا ب. فمربع جـ ز، أعني ه ز في

4 رُكّاب: وركات [د، جـ].

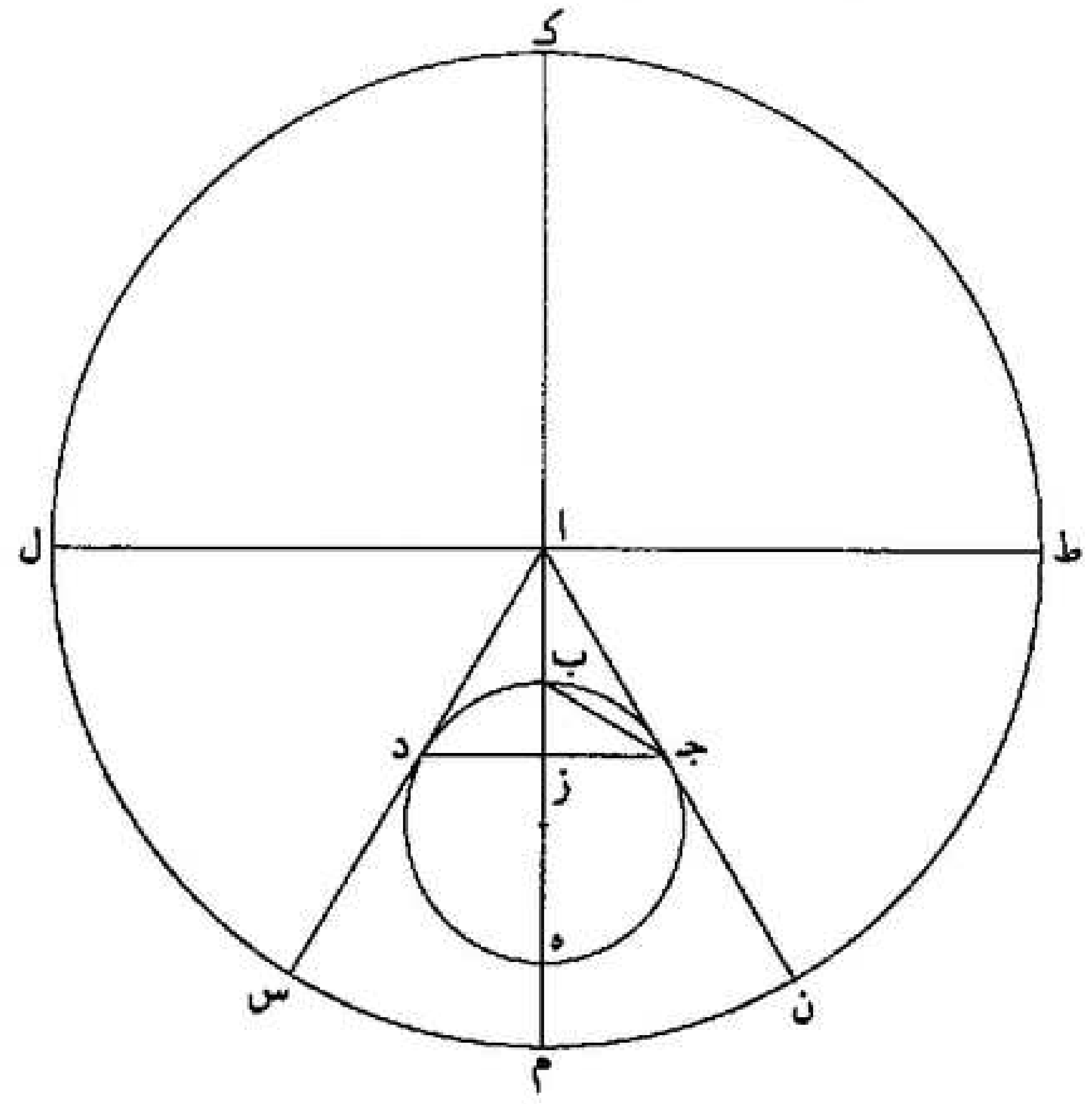
زب، مع مربع زا، أعني طز في زب مع مربع با، معلوم. ونلقي مربع اب المعلوم، فيبقى طه – المعلوم – في بز معلومًا، وبز معلوم. وضربه في زه باقي القطر المعلوم، أعني مربع جـز، بل مربع جـب المساوي لمربعي جـز زب المعلومين، معلوم. فـ جـب نصف قطر الدائرة المساوية للسطح المفصول من ماء البحر بالدائرة، التي قطرها جـد، معلوم. فالدائرة بل السطح على ما بيّن أرشميدس في *الكرة والأسطوانة* من تساويهما، معلوم.

فسطح جـبد الكري من ماء البحر المرئي من ا، رأس الشيء المرتفع منه، معلوم؛ وهو المطلوب.

وكذلك يرى من كل نقطة على محيط الدائرة التي قطرها جـد العلامة التي تكون عن رأس ذلك الشيء المرتفع كالنار بالليل أو الدخان بالنهار أو ما أشبه ذلك.

‹**ب**› إذا كان ارتفاع شيء ما من سطح ماء البحر معلومًا، فإن مقدار زيادة ما يرى من السماء من رأس ذلك الشيء المرتفع منه على ما لا يرى منها معلوم.

فليكن الشكل بحاله، ونرسم على ا طكلم من الدوائر التي لا فرق بين أن يكون مركزها ا أو مركز الأرض، ونخرج قطري مك طل على قوائم، وا جـ ا د إلى ن س.



11 أو ما: وما [جـ] – 12 زيادة: أثبتها في الهامش [جـ].

ففضل ن ك س المرئي من آ على س م ن الغائبة منه معلوم، لأن أضلاع ا ب جـ معلومة، كما تقدم. فزاوية ز ا جـ بل تمامها ن ا ط، بل قوس ن ط المساوية لـ س ل، وهي ربع فضل ن ك س على ن م س، لأن ن ك س زائد على النصف بضعف ن ط ون م س ناقص عنه بضعفه، معلومة؛ ففضل ن ك س الظاهرة من آ على ن م س الغائبة عنه معلوم؛ وهو المطلوب.

‹جـ› إذا كان سطح ماء البحر الظاهر من رأس شيء مرتفع معلومًا، / فإن ارتفاع ذلك الشيء من سطح ذلك الماء معلوم. جـ-١٩٤-و

فلنخرج في الصورة الأولى جـ ه، فلأن سطح جـ ب د الكري معلوم، فـ جـ ب نصف قطر الدائرة المساوية له معلوم، وب ه معلوم. فنسبة أحدهما إلى الآخر معلومة. وزاوية جـ قائمة، فمثلث جـ ب ه معلوم الصورة، فزاويتا ب ه معلومتان، فـ جـ ب ا تمام جـ ب ه معلومة، وب جـ ا المساوية لـ ه، لكون ا جـ مماسًا على جـ، معلومة. فمثلث ا ب جـ معلوم الصورة، فنسبة ب جـ المعلوم إلى ب ا معلومة، فـ ب ا معلوم؛ وهو المطلوب.

‹د› إذا كان مقدار سطح ماء البحر الظاهر من رأس شيء مرتفع عنه معلومًا، فإن مقدار زيادة ما يرى من السماء على ما لا يرى منها من رأس ذلك الشيء معلوم، إذ يلزم منه أن يكون ارتفاع ذلك الشيء معلومًا، ومنه أن يصير ‹مقدار› زيادة الظاهر على الخفي من السماء معلومًا؛ وهو المطلوب.

‹هـ› إذا كان مقدار زيادة الظاهر من السماء من رأس شيء مرتفع عن سطح ماء البحر على ما غاب عنه معلومًا، فإن مقدار سطح ماء البحر الظاهر من رأسه معلوم.

لأن فضل ن ك س المعلوم على ن م س أربعة أمثال ط ن، كما في الشكل المتقدم. فـ ط ن، بل ط ا ن المساوية لمبادلتها ا جـ د المساوية لـ جـ ه د، لكون ا جـ مماسًا على جـ، معلومة. فنصفها جـ ه ب معلومة، وه جـ ب قائمة. فالباقية معلومة، فمثلث ه جـ ب

1 الغائبة: يعني القوس الغائبة، وفي هذه الجملة أنّث وذكّر القوس – 4 الغائبة عنه: يأخذ بمن وعن في هذا السياق – 9 قطر: أثبتها في الهامش [جـ] / معلومة: معلوم [جـ، د] – 11 معلومة (الأولى): معلوم [جـ] – 14 مقدار: أثبتها فوق السطر [د].

معلوم الصورة، فنسبة ه ب المعلوم بالرصد إلى ب جـ معلومة، فـ جـ ب نصف قطر الدائرة المساوية لسطح جـ ب د، بل سطح جـ ب د معلوم؛ وهو المراد.

‹وَ› إذا كان ‹مقدار› زيادة الظاهر من السماء من رأس شيء مرتفع عن سطح ماء البحر، على ما هو غائب عنه، معلومًا، فإن مقدار ارتفاع ذلك الشيء عنه معلوم، إذ يصير سطح ماء البحر الظاهر من رأس ذلك الشيء منه معلومًا ومنه ارتفاعه معلومًا.

وعلى ذلك سطح الأرض إذا كان كسطح ماء البحر في الاستواء، أعني ألا يرتفع عنه شيء يمنع من رؤية ما وراءه كالرابية وما أشبهها.

تمت الرسالة بعون الله وتوفيقه.

الهندسة وعلم المناظر في ضحى الإسلام

ملاحظـــات إضافيــة

رشدي راشد

مؤسســـة المــلك عبد العــزيز
Foundation du Roi Abdul-Aziz

منظمة المجتمع العلمي العربي
Arab Scientific Community Organization

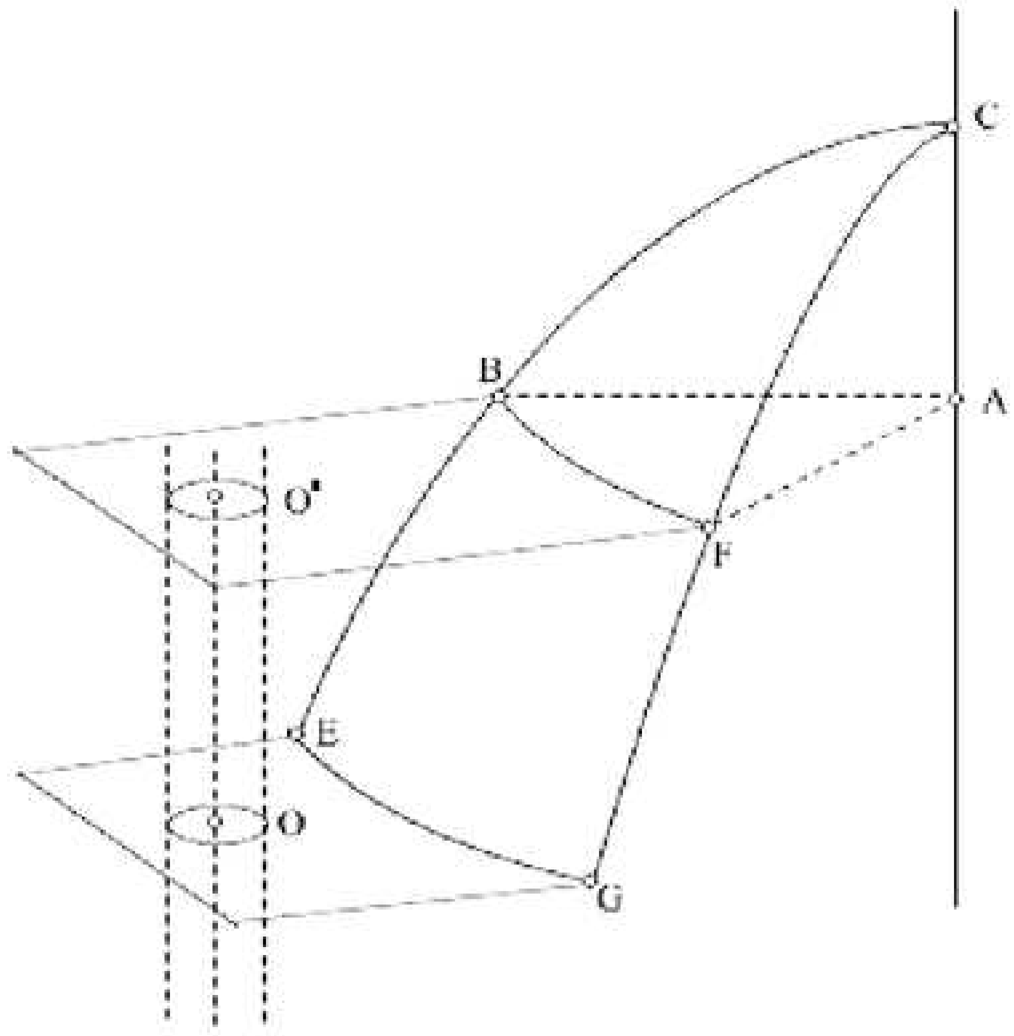
ملاحظات إضافيـــــة

ملاحظات حول كتابي ابن سهل، كتاب الحراقات والبرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء

1. حول أقسام "الآلة"

[1، ص. 81، 4] "هدف". هذه التسمية آتية من الأصطرلاب. تركب على ظهر "العضادة" وهي مسطرة مستطيلة رقيقة إلى حد ما عرضها مساو لقطر الآلة تقريباً. وتتحرك انطلاقاً من مركزها المنطبق على مركز الأصطرلاب، طرفاها مستدقا الرأس وقد ثبت فيهما "هدفان" أي صفيحتان صغيرتان متعامدتان مع المسطرة وعلى بعد واحد من المركز، مثقوبتان بحيث أن الأشعة تنفذ فيهما من الواحدة إلى الأخرى لتدقيق الرؤية. وهكذا يستعمل الأصطرلاب كآلة للرصد[1].

والهدفان هنا هما أيضاً صفيحتان في مستويين عموديين على محور مجسم القطع المكافئ AC. إحدى الصفيحتين ذات ثقب دائري مركزه O ورسمت على الأخرى دائرة مساوية للثقب مركزها 'O وخط المركزين 'OO موازٍ لـــ AC.



الشكل. 1. هدفا مرآة القطع المكافئ

يسمح هذا الجهاز بوضع مرآة القطع المكافئ (BEGF) بحيث تسقط أشعة الشمس عليها موازية لمحورها AC. وهذا يتم عندما تمر حزمة أشعة الشمس من الثقب O محدثة بقعة مضيئة تغطي الدائرة 'O.

---

[1] انظر:
S. Gibbs and G. Saliba, *Planispheric Astrolabes from the National Museum of American History* (Washington, 1984), pp. 4-6.

[2، ص. 107، 8] "البَلّور أو البِلّور" هذا التعبير هو نقل عن التعبير اليوناني βήρυλλος مع تبادل الحرفين ρ و λ وهو يدل على الزمرد الريحاني الشفاف أو الزمرد المصري Beryl والفص المقصود هنا هو البلور الصخري الشفاف (quartz) ذو قرينة الانكسار 1,553 - 1,554 وذو الثقل النوعي 2,65 والتركيب الكيميائي $Si\ O_2$[2].

نستعيد هنا أوصاف هذا البلور كما جاءت في الكتابات المعدنية العربية حيث لا نأخذ إلا شرح البيروني، خليفة ابن سهل ومعاصر ابن الهيثم وشرح التيفاشي الشامل الذي جاء بعده.

لقد خصص البيروني صفحات عدة من *الجماهر في معرفة الجواهر*[3] لهذا البلور، لاستعمالاته وخواصه. وهو حسب البيروني المها (أو المِها) أي مادة مركبة كما يدل الاسم العربي من عنصري الحياة الماء والهواء وهو كهاتين المادتين شفاف ولا لون له. ويذكر البيروني شاعرين من معاصريه، البحتري والصاحب بن عباد، ممن تغنوا بصفاء هذا البلور وشفافيته. ويشير كذلك إلى صناعة حرفية مزدهرة لهذا البلور الصخري في البصرة في هذا الزمان، وهو أمر يكتسي أهمية بالنسبة لمؤلفينا ابن سهل وابن الهيثم اللذين قضيا بعضاً من الوقت تارة في بغداد وتارة في البصرة.

يركز عالم المعادن التيفاشي (1184–1253) من بين خواص هذا البلور على منفعته:

أنه يُستقبل به الشمس ثم ينظر إلى موضع الشعاع الذي قد خرج من الحجر فيستقبل به خرقة سوداء فتحترق[4].

تؤكد شهادة التيفاشي وجود العدسات المستوية–المحدبة المصنوعة من البلور الصخري في ذلك العصر. إلا أننا ما نزال بحاجة إلى معطيات أثرية إضافية لنثبت بشكل قاطع هذا التخمين.

هناك نصوص أخرى تؤكد هذا التخمين ويذهب أحدها إلى تبيان اهتمام أصحاب الأرصاد أنفسهم بهذه العدسات للقيام بأرصادهم. وهكذا فقد كتب تقي الدين معروف في نهاية كتابه في المناظر بعنوان *كتاب نور حدقات الأبصار ونور حدقات الأنظار* الذي أتمه في 982 هـ (1574 م):

"ومن ههنا، استقام لنا أن نعمل بلورة نرى بها الأشياء التي تختفي من البعد كأدق الأهلة وقلوع المراكب الكائنة في أبعاد مسرفة ولا يدركها الطرف بأحدّ الأبصار كالتي عملها حكماء اليونان ووضعوها في منارة الإسكندرية؛ وإن من الله تعالى بفسحة من العمر، ألفت رسالة <في> عملها وطريقة الإبصار بها، إن شاء الله تعالى"[5].

[3، ص. 109، 8] وكما أشرنا سابقاً فالهدفان يقعان في مستويين عموديين على محور مجسم القطع الزائد. على الأول ثقب دائري وعلى الثاني رسمت دائرة مساوية للدائرة الأولى تصلها أشعة الشمس النافذة من الثقب؛ خط مركزي

---

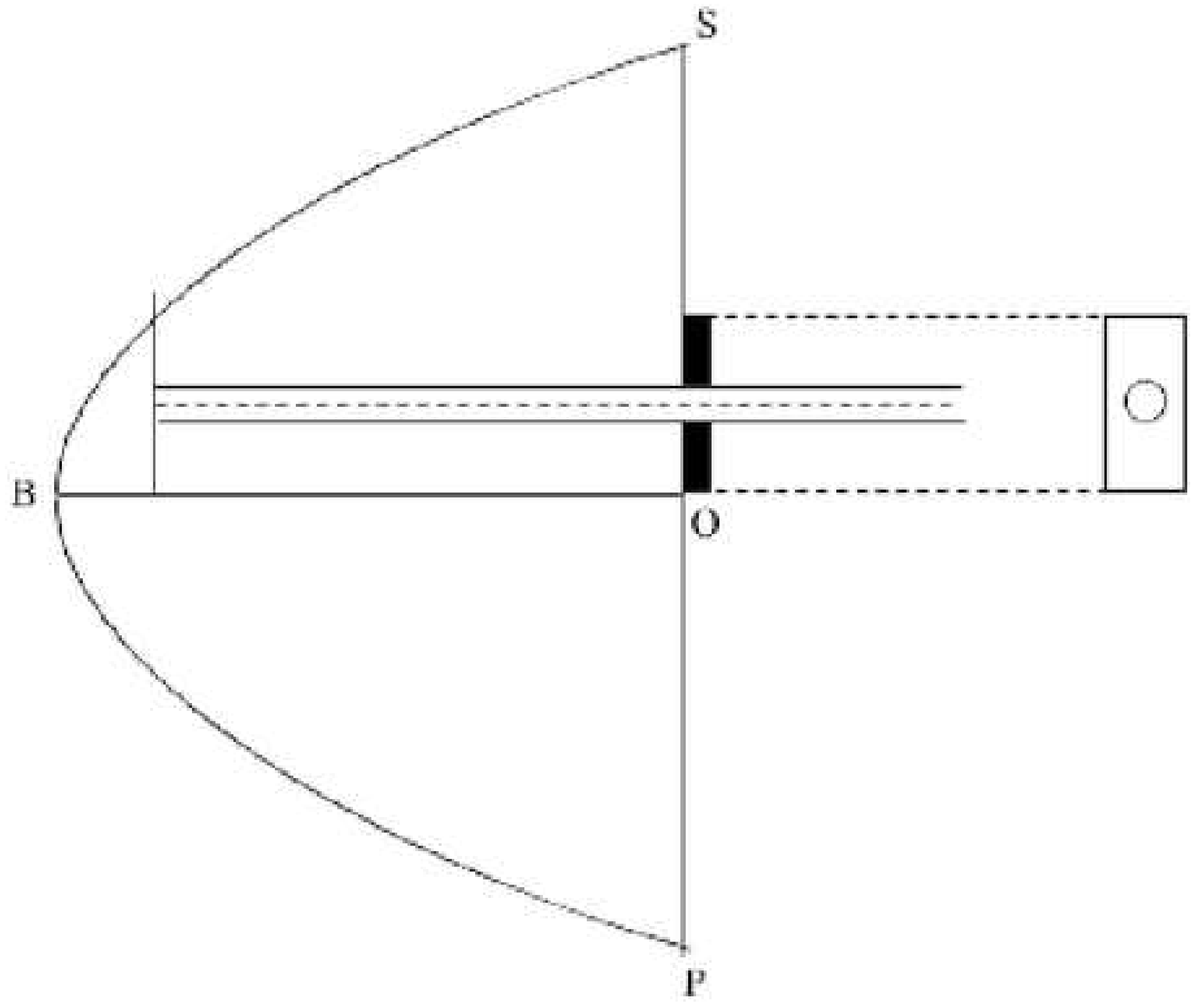
[2] انظر الجدوال المثبتة من م.ي حسن و م.ب خفاجي في آخر تحقيقهم لكتاب شرف الدين أو العباس أحمد بن يوسف التيفاشي كتاب *أزهار الأفكار في جواهر الأحجار* (القاهرة 1977).

[3] البيروني، *الجماهر في معرفة الجواهر*، Osmānia Oriental Publications Bureau (Hyderabad-Deccan, 1936), pp. 181-189.

[4] م.س نفس المصدر 2، ص. 203 مصححة عن المخطوطة دار الكتب، مجموعة طبيعيات مخطوطة تيمور 91، الورقة 92.

[5] MS Oxford, Bodleian Library, Marsh 119, fol. 83r.

الدائرتين يوازي محور مجسم القطع الزائد الذي يعطي اتجاه الشمس إذا شكلت الأشعة النافذة بقعة ضوئية تغطي تماماً دائرة الصفيحة الثانية.



الشكل. 2 – هدف على مجسم القطع الزائد

يجب إذاً أن نفترض أن هذه الأشعة لم تتعرض لأي انكسار في سيرها. فالمسار بين الدائرتين إما كله في الهواء أو كله في البلور. تستبعد بقية النص الفرضية الأولى، يبقى علينا إذا أن نتخيل الهدف الأول على السطح المستوي O والثاني مدمج في البلور بجوار B.

2. التجريب

[4، ص. 109، 10] يستعمل ابن سهل هنا، كما سيستعمل في سياق مماثل الفعل *اعتبر* بمعنى جرب[6]. إن أهمية هذا الفعل في التسميات المناظرية عند ابن الهيثم لاحقاً تستدعي الشرح.

تتفق المعاجم العربية مثل معجم ابن فارس، ابن سيده، ابن منظور والزبيدي كي لا نسمي إلا بعضها بين القرنين العاشر والثامن عشر مع أدب ما قبل الإسلام ومع الاستعمال القرآني أن الجذر "عبر" يدل على الانتقال من شيء ما إلى غيره، كما يتضمن الفعل اعتبر من بين معانيه العديدة: تفحص الشيء أو تفحص العمل لاستخلاص نتيجة ما أو للاستدلال على معنى لم يعط حرفياً. وبصورة عامة فاسم الفعل "اعتبار" كما جاء في معجم أبي البقاء – الكليات[7]: النظر في حقائق الأشياء وجهات دلالتها ليعرف بالنظر فيها شيء آخر من جنسها. وقيل الاعتبار هو التدبر وقياس ما غاب على ما ظّهر.

[6] انظر الصفحتين 127، 12 و 141، 4.

[7] *الكليات*، تحقيق أ. درويش و م. المصري، 5 أجزاء (دمشق 1974) الجزء 1 ص. 235.

ويقول أبو البقاء إن لهذا التعبير معنى الامتحان والاختبار إلا أنه تجدر الإشارة أن المعاجم والقواميس[8] تقر بوجود معاني عديدة لهذه الكلمة وباستعمالات متعددة لها في الفلسفة والفقه وفي السيرة النبوية الخ. ويقترب بعضها، ولو من بعيد، من معنى المحاكمة الاستنتاجية انطلاقاً مما لوحظ أو من حكم سابق. لنقل تجنباً للإطالة بشواهد أدبية أو معجمية إن تفحصها يدل على معنى فيه ما يكفي من العمومية لقبول عدة تأويلات. ولكن استعمال ابن سهل له يعطيه، على نقيض ذلك، معنى دقيقًا إلى حد بعيد، فهو يستعمله في سياق التجربة في المناظر. فبعد أن نحت قطعة من البلور الصخري الشفاف والمتجانس ذات السطح المستوي لإثبات قانون سينلليوس وتعيين قرينة الانكسار، عاد إلى استعمال هذا الفعل في المناسبتين الأوليتين المتعلقتين بالعدسة المستوية–المحدبة وفي المناسبة الثالثة بالعدسة محدبة الوجهين. وتطلب في كل مرة أن تكون العدسة المستخدمة منحوتة من نفس المادة التي استخدمت في تجربة تعيين قرينة الانكسار "من نفس الجوهر الذي اعتبرناه..." وواضح أن ابن سهل يستعمل هنا الفعل "اعتبر" بمعنى "جرب"، أي في المناسبات التي يبدو فيها استعماله لا غنى عنه. لكننا لا نملك، مع الأسف، نصوصاً أخرى للمؤلف تتيح لنا معرفة ما إذا كان هذا التعبير تعبيراً تقنياً شائع الاستعمال، هذا من جهة، ومن جهة ثانية معرفة الدور الذي أسنده ابن سهل لهذا التجريب في منهجيته العلمية. من المفهوم بطبيعة الحال ألا يلجأ ابن سهل إلى أي تجربة في رسالته الثانية عن صفاء الفلك.

تكتسي هذه التساؤلات أهميتها عندما نريد فهم أفكار النهج العلمي؛ ليست أفكار ابن سهل وحدها، وإنما أفكار خليفته ابن الهيثم أيضاً وهو الذي استعمل هذا التعبير مراراً وتكراراً بمعان عديدة بما فيها المعنى التقني.

لقد أشار مصطفى نظيف، منذ نصف قرن، إلى انتماء الفعل "اعتبر" ومشتقاته المتنوعة إلى قاموس المصطلحات التقنية في مناظر ابن الهيثم[9]. لقد أبدى فيدمان E. Weidemann ملاحظة مماثلة وبشكل مستقل، كما لم تغب عن أنظار مؤلفين عديدين الترجمة اللاتينية لهذه التعابير مشيرين إلى اعتبر، experiri اعتبار experimentatio، معتبِر experimentator. لقد كتب نظيف:

> ومما هو جدير بالذكر أنه له اصطلاحاً خاصاً عبر به عن معنى "Experiment" في الإصطلاح الحديث، هو يعبر عنه بلفظ "الاعتبار" ويقول عن الشخص الذي يجري "الاكسبيرمنت" المعتبر، ويقول عن الاستدلال على صحة أمر من الأمور أي مطابقته بالواقع بإجراء "الاكسبيرمنت" الإثبات بالاعتبار تمييزاً له عن الإثبات بالقياس، بل هو أدرك أن "للاعتبار" في البحث العلمي وظيفتين، الأولى استقراء الأحكام أو القوانين العامة، والثانية التحقق من صحة نتائجها القياسية[10].

---

[8] الطحناوي، *كشاف اصطلاحات الفنون*، تحقيق مولوي محمد وجيه، عبد الحق وغلام قادر، جزئين (كالكوتا، 1862) على سبيل المثال ج. 2، ص. 959.

[9] انظر الصفحات والأسطر 221، 13؛ 15؛ 223، 1؛ 225، 13.

[10] الحسن ابن الهيثم والناحية العلمية منه وأثره المطبوع على علم الضوء، محاضرة 12 أبريل 1939 في *منشورات الجمعية المصرية لتاريخ العلوم 2* (القاهرة 1958) ص. 203 في الصفحة 14.

ثم يعيد نظيف تفسيره بعد بضع سنين وبعبارات متطابقة[11]. لقد قبلت تأكيدات نظيف من لدن المؤرخين لابن الهيثم إما بدون تعديل أو بتغير طفيف[12].

ومن الواضح أننا في حالة ابن الهيثم أمام مصطلح تقني لا يعترض عليه أحد. ثم إن برهانا إضافياً يأتينا من القرنين الثاني عشر والثالث عشر، وأعني من مترجم كتاب *المناظر* إلى اللاتينية ومن شارح هذا الكتاب، كمال الدين الفارسي، في أواخر القرن الثالث عشر. لقد وضع الأول مصطلحاً آخر يعبر فيه بشكل متجانس عن التعابير experire، experimentator، experimentare، experimentatio... بينما استعمل الثاني هذا التعبير بكثرة معدلاً معناه من التقني إلى الاستعمال النسقي. والمهم إذاً أن هذا المصطلح لم يكرس خصيصاً للاستعمال التقني لا عند ابن الهيثم ولا عند كمال الدين الفارسي بل شمل دلالات أخرى بالمعنى الشائع. لقد أثار هذا المصطلح التقني، باختصار، مسألتين متلازمتين أولاهما فقه-لغوية والثانية منطقية علينا أن نتفهمها، ولو باقتضاب، كي نفهم المعاني التي يقصدها ابن الهيثم بهذه التعابير.

لقد بينا[13] أن لكلمة اعتبار طيف كامل من المعاني في مناظر ابن الهيثم والفارسي تتوقف على علاقات الهندسة بالفيزياء: أي على قدرة الأفكار الفيزيائية على التكيف مع الرياضيات. وهكذا يتغير معنى المصطلح عند ابن الهيثم وخلفائه بتغير الموضوع من المناظر الهندسية إلى المناظر الفيزيائية إلى مناظر الآثار العلوية إلى نظرية الإبصار. لقد استطعنا أن نبين أن التجربة في المناظر الهندسية هي مجموعة من الإجراءات التجريبية على درجة ما من التمام، الهدف منها التحقق تقنياً، بواسطة الهندسة، من دعاوى اختبرت على المستوى اللغوي. وعلى العكس من ذلك فنظراً لعدم التحديد الدلالي للمفاهيم والأفكار في المناظر الفيزيائية فإن ما يقصده ابن الهيثم بالتجربة هو الانتقال بهذه المفاهيم التي لم تتبلور بعد، وبفضل الهندسة، إلى مرتبة الوضع التجريبي الذي يكوّن بمفرده مستوى وجودها. هذه هي على سبيل المثال وظيفة النموذج الميكانيكي لتفسير الانعكاس والانكسار أو مهمة التجارب التي يراد منها تبيان انتشار الألوان مثل انتشار الضوء. بينما تشير كلمة تجربة في نظرية الإبصار أساساً إلى مجرد الرصد. يستمد هذا التنوع بالمعنى منشأه من العلاقات بين الرياضيات ونظرية الظاهرة. وهو تنوع لا غنى عنه لفهم قاموس مصطلحات العصر يمتد من الرصد إلى المعنى المعتاد، إلى التجربة بمعنى التحقق التجريبي وحتى إلى معنى استعادة نموذج يلخص

---

[11] الحسن ابن الهيثم بحوثه وكشوفه البصرية بجزئين (القاهرة 1943-1942) ص. 43-48.

[12] S. Omar, *Ibn al-Haytham's Optics*, Bibliotheca Islamica (Chicago, 1977); R. Rashed, Optique géométrique et doctrine optique chez Ibn al-Haytham', *Archive for History of Exact Sciences*, 6, 4 (1970), pp. 271-298; reprint in *Optique et Mathématiques* : *Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe*, Variorum reprints (Aldershot, 1992), II, and 'Lumière et vision : l'application des mathématiques dans l'optique d'Alhazen', in R. Taton (ed.), *Roemer et la vitesse de la lumière* (Paris, 1978), pp. 19-44; repr. In *Optique et Mathématiques : Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe*, Variorum Reprints (Aldershot, 1992), IV; M. Schramm, Ibn al-Haythams Weg zur Phyzik (Wiesbaden, 1963); A. Sabra, 'The Astronomical Origin of Ibn al-Haytham's Concept of Experiment', *Actes du Congrès International d'Histoire des Sciences, Paris, 1968*, t. IIIA (Paris, 1971), pp. 133-136.

[13] R. Rashed, 'Lumière et vision', in *Roemer et la vitesse de la lumière*.

الظاهرة، كما فعل الفارسي فيما بعد لتفسير ظاهرة قوس قزح. ولذا يجب علينا، إذا ما أردنا أن ننأى بأنفسنا عن الوهم الفيولوجي الذي يرى في دوام التعابير استقرار المعاني واستمرارها أن نكون شديدي الانتباه إلى تكون التعابير وإلى تحولاتها.

لنتساءل أولاً هل استعملت عبارات هذا القاموس أو الرئيسية منها على الأقل قبل ابن الهيثم وقبل ابن سهل أيضاً في المناظر في البدء ثم في فروع الرياضيات الأخرى، وهل شكلت أحد مصادر ابن سهل؟ إننا نعلم، وباعترافه، أنه أطلع على الترجمة العربية لكتابات لبعض الانعكاسيين الأوائل الذين لم يسمهم، وكذا على المقالة الخامسة من كتاب *المناظر* لبطلميوس. ولذا يجوز لنا أن نفترض معرفته بعمل سابقيه العرب في المناظر.

إن تفحص أعمال الانعكاسيين اليونان المترجمة إلى العربية أو التي عرفها العرب بشكل مباشر – أعمال أقليدس، ديوقليس، هيرون، تيون، آنتيميوس الترالي وديدموس وآخر يدعى دترموس – يثبت غياب هذا التعبير حتى في المواضع التي كان من الممكن توقع وجوده فيها. فقد كتب، على سبيل المثال، تيون الاسكندراني في مقدمة كتابه *تنقيح المناظر* *Rencensio*: "تلاحظ كل هذه الوقائع بالشكل الأكثر وضوحاً (ἐκφαωέστατα) في الظروف الاصطناعية ..."[14]. يرجع تيون هنا إلى الوقائع التي رصدت (الظلال على سبيل المثال) أو التي جربت (الضوء المار من فتحة) للتحقق من الانتشار المستقيم للضوء. ولم يكن لديه تعبير يشير به إلى هذه التجربة، حاله في ذلك حال الانعكاسيين الذين لم يجدوا، حين عرضوا صنع مرايا محرقة مؤلفة من شرائح مدروسة هندسياً، تعبيراً ملائماً عندما تكفلوا بالاحتراق؛ أي التحقق التجريبي؛ إن تفحص النصوص اليونانية الباقية أو الترجمة العربية لبعض منها – أو الترجمة لأخرى ضاعت باليونانية – يؤكد غياب الاصطلاح. وبالتالي يستحيل أن يكون ابن سهل قد أخذ كلمة التجربة من هذه المجموعة من النصوص الانعكاسية اليونانية.

ونصل الآن إلى كتابات سابقيه العرب. إن ضياع النص العربي الأصلي لكتاب الكندي *اختلاف المناظر* *De aspectibus* يحرمنا من مصدر مفردات مهم. ثم إن تفحص الترجمة اللاتينية لهذا النص يكاد لا يترك أي إمكانية لوجود اصطلاحات من هذا القبيل. كما لم يلجأ إلى هذا الاصطلاح حتى حين استعاد تجربة تيون الاسكندراني المشار إليها أعلاه. وكذلك لم تحتو كل كتب الكندي التي وصلت إلينا، وبصورة خاصة كتاب *المرايا المحرقة* على اصطلاحات مماثلة.

وعندما نأتي إلى لغة المناظر في القرن التاسع فإننا نجد أنفسنا أمام مفردات مختلفة كلياً، من المحتمل جداً أنها استعيرت من لغة تراجم كتب الفلك، المجسطي مثلاً ومن لغة أصحاب الأرصاد العرب أنفسهم. يستعمل قسطا بن لوقا، معاصر الكندي، في رسالته *في علل ما يعرض في المرايا*[15]، مرات عديدة الاصطلاحين *امتحن والمحنة* للتحقق تجريبياً من بعض المفاهيم الانعكاسية، وهكذا ولمعرفة ما إذا كانت المرآة مستوية تماماً، فإن الامتحان الأول يقوم على مراقبة

---

[14] Ed. Heiberg, p. 146, 6-7.

[15] R. Rashed, *Œuvres philosophiques et scientifiques d'al-kindī.* Vol. 1 : *L'Optique et la Catoptrique d'al-Kindi* (Leiden, 1997), Appendix.

بقاء شكل الجسم دون تغيير عند تغير المسافة التي تفصله عن المرآة. والامتحان الثاني فهو تفحص كيفية ارتداد أشعة الشمس عند المرآة. يشير الفعل "امتحن" والاسم محنه، في هذا المثل وفي أمثال كثيرة غيره مشابهة تنطبق على المرايا المحدبة والمقعرة، إلى نوع من التحقق – والمراقبة بالحواس للمفهوم قيد الاعتبار. لقد استعمل هذان التعبيران في ذلك الزمان وفي مناسبات متنوعة بهذا المعنى كما يشهد على ذلك عمل ثابت قرة في *الرسالة المشوقة إلى العلوم*[16].

يقودنا الاستقصاء الذي قمنا به، والذي لم نذكر إلا بعض عناصره هنا، انطلاقاً من النصوص الانعكاسية التي وصلتنا، إلى القول بعدم اللبس بين المصطلحين، *الاعتبار والامتحان*، وإن الأول لا ينتمي إلى المدرسة الانعكاسية اليونانية ولا إلى التقاليد الانعكاسية العربية حتى مطلع القرن العاشر، بل وإن غيابه بقي ملحوظاً في أعمال الانعكاسيين في القرن العاشر مثل عطارد[17] وفي أعمال المصنفين مثل أحمد بن عيسى: كتاب *المناظر والمرايا المحرقة على مذهب إقليدس في علل البصر*، وهو كتاب من القرن العاشر على الغالب لاقتباسه بعض القضايا من رسالة الكندي في المرايا المحرقة. يستعمل أحمد بن عيسى مرة واحدة كلمة اعتبر في معناها العام، أخذ بعين الاعتبار، (فكر واعتبر) وليس بمعناها التقني.

لنرجع الآن إلى كتاب *المناظر* لبطلميوس، والوضع هنا دقيق للغاية ذلك أن الكتاب قد وصلنا في ترجمة لاتينية مأخوذة عن ترجمة عربية – ما تزال مفقودة حتى الآن – للأصل اليوناني الضائع[18]. أو بعبارة أخرى لا يمكن لأي تحليل فقهي لغوي الادعاء بالوصول إلى بعض الاستنتاجات انطلاقاً من افتراض نقل المترجم العربي كلمة بطلميوس إلى نفس العبارة باللغة العربية وقيام المترجم اللاتيني بالشيء نفسه. لنلاحظ، بعد أن أبدينا هذا التحفظ، أننا نقرأ في مقطع من الكتاب الخامس أشار إليه ابن الهيثم ما يلي:

> "ثم يقول في آخر المقالة الخامسة: تعمل ثلاث أوان من زجاج صاف، ويجعل أحدها على شكل مكعب، والآخر منها أسطوانياً محدباً، والثالث جعل فيه سطحاً أسطوانياً مقصراً، ثم يقول: وتملأ ماء وتداخل فيها مساطر، وتعتبر خيالاتها"[19].

يبدو من الواضح تماماً أن *اعتبر* تعني تفحص بالتجربة المرتبطة بجهاز أعد لهذا الغرض؛ ومن الواضح كذلك أن ابن الهيثم يلخص هنا نص بطلميوس بتعابير من الترجمة العربية. ويأتي المترجم اللاتيني بدوره ليترجم الجملة التي تهمنا بـــ 'considerantes de diversitatibus formarum'[20]. فإذا كان المترجم قد ترجم اعتبر بـــ consider في هذا الموضع فإنه استعمل عبارة experimentum خمس مرات في ترجمته *لاعتبار*: مرة في دراسة الانعكاس والأربع

---

[16] MS Teheran, Malik 6188, fols. 7 ff.

[17] *Les Catoptriciens grecs*. I : *Les miroirs ardents*, textes établis, traduits et commentés par R. Rashed, Collection des Universités de France (Paris, 2000).

[18] انظر الملاحظة الإضافية [5].

[19] ابن الهيثم، *الشكوك على بطلميوس*، تحقيق عبد الحميد صبره ونبيل شهابي (القاهرة، 1971)، ص. 69.

[20] A. Lejeune, *L'Optique de Claude Ptolémée* (Louvain, 1956; new ed. with French translation Leiden, 1989), p. 261.

مرات الباقية في دراسة الانكسار. ومعناها المشترك في هذه المواضع الخمسة يتفق مع المعنى التي يعطيه استشهاد ابن الهيثم: تجربة أنجزت بواسطة آلة صممت لهذه الغاية.

وهكذا يكتب بطلميوس في *المناظر* "ولكن هذا سيزداد جلاءً ووضوحاً في الرؤية وسيبدو ما قلناه مؤكدا بهذه التجربة [experimentum]"[21]؛ "إن كمية الانكسار الحاصلة في الماء والتي يمكن رؤيتها تحدث وفق هذه التجربة التي تحدث بواسطة صفيحة من النحاس والتي أعددناها لمراقبة ما يقع في المرايا"[22]. إن التجربة[23] المطروحة هي التجربة المنجزة بواسطة الجهاز الشهير المصمم لدراسة الانكسار. يمكن القول إن هذا التعبير قد استعمل في كل هذه المناسبات في حالة استخدام الجهاز الشهير وإن أغلب هذه المناسبات تتعلق بدراسة الانكسار.

ولكن ما هو التعبير العربي الذي نقله المترجم الأمير أوجين الصقلي إلى experimentum؟ أغلب الظن أنه كان يريد ترجمة كلمة اعتبار. تؤيد هذا الظن اعتبارات عدة: أولها أن هذه الكلمة واردة في مفردات لغة الترجمة كما يتضح من استشهاد ابن الهيثم. وثانيها أعراف العصر: فقد استعان مترجم ابن الهيثم اللاتيني بهذا الاصطلاح لنقل الكلمات العربية. ومهما يكن فإن صحة هذا التخمين تعني أن الأمور سارت على النحو التالي: أخذ ابن سهل هذا المصطلح من *المناظر* لبطلميوس في المعنى الذي جاء في هذا الكتاب، أي مرتبطاً باستعمال أداة organon تتيح استعادة انتشار ضوئي، أو تجزيئها على الأقل، للتحقق من كيفية وقوعها، وهي الكيفية التي جرى تصورها بالاستعانة بالهندسة. لقد لجأ كل من ابن سهل وبطلميوس إلى هذا المصطلح في هذا الظرف وهو ما يفسر كثرة استعماله في الانكساريات. لقد استعار ابن الهيثم، المطلع على أعمال بطلميوس وابن سهل، هذا المصطلح في هذه الظروف وفي ظروف مماثلة. إلا أن التجريب، وقد ظهر في الإصلاح الذي أتى به كناظم وكجزء من نظرية البرهان، جعل ابن الهيثم يدخله في مختلف مناحي المناظر – الفيزيائية والإرصادية ونظرية الرؤية – أي في كل مرة لم تبلغ فيها العلاقات بين الرياضيات ونظرية الظواهر مستوى المناظر الهندسية. وهكذا تعددت معاني هذا المصطلح عنده تبعا لهذه العلاقات في مختلف فروع البصريات وأصبحت كلمة اعتبار experimentation بفضل هذا الواقع الجديد تعني عنده التجربة بالمعنى الخاص لهذه الكلمة، كما تعني أيضاً التجربة الذهنية أو الرصد المباشر الذي يثبت القانون. يمكننا عندئذ أن نفهم سبب كثرة ترداد هذا المصطلح في أعمال ابن الهيثم بشكل لم يسبق له مثيل عند أسلافه، كما نفهم في الوقت نفسه سبب عدم وجود هذا المصطلح قبل الترجمة العربية *لمناظر* بطلميوس. وقد رأينا أن الكندي ومعه قسطا بن لوقا لم يستعملا قط هذه المفردة.

[21] Ibid., p. 91, 13.

[22] Ibid., p. 227, 2.

[23] Here, as in *L'Optique de Claude Ptolémée*, p. 232, 1 and 236.

3. ترجمة مناظر بطلميوس

[5، ص. 145، 146] نكاد لا نعرف شيئا عن الترجمة العربية *لمناظر* بطلميوس، عن تاريخها ومؤلفها. إن لهذا العمل قدر فريد: ضاع الأصل اليوناني وما تزال الترجمة العربية له المنقولة عن اليونانية مفقودة وليس لدينا سوى الترجمة اللاتينية عن العربية التي ندين فيها إلى الأمير أوجين الصقلي في النصف الثاني من القرن الحادي عشر. وبحسب أقواله فقد حقق ترجمته مستعيناً بمخطوطتين عربيتين ينقصهما الفصل الأول وآخر المقالة الخامسة والأخيرة من *المناظر*[24]. تعزز شهادات عربية أخرى، كشهادات ابن الهيثم، أقوال الأمير أوجين هذه. وبما أن ما من شيء أتى لنقض هذه الأقوال فإن من واجبنا التساؤل عن سبب ضياع هذه الأجزاء من المخطوطة أو المخطوطات اليونانية التي وصلت إلى المترجم العربي. كل ما نعرفه عن هذا الأخير أنه عاش ما بين سبعينات القرن التاسع وسبعينات القرن العاشر. يذكر ابن سهل كتاب *المناظر* في عمله الواقع في الفترة 983–985، وهو تاريخ متأخر في نظر كل العارفين بتاريخ حركة ترجمة النصوص العلمية اليونانية. ومن جهة أخرى فإن تفحص الأعمال البصرية للكندي وابن لوقا تثبت، خلافاً لما ادعي به[25]، أنهما لم يكونا يعرفان *مناظر* بطلميوس – إن تفحص أعمالهما في الانكسار كاف لإقناعنا بذلك.

فالترجمة وقعت إذاً بين جيل الكندي وابن لوقا وجيل ابن سهل وبالتالي في الحقبة التي حددناها. على أن درجة عدم التحديد كبيرة ولا يمكننا اختصارها نظراً لوضع معرفتنا الآن.

ولنأت إلى ابن سهل، لقد كان في نيته، كما قال، كتابة شرح ما للمقالة الخامسة من *مناظر* بطلميوس لكي يجمع مختلف إسهاماته إبان "تصفحه" للكتاب كما يقول. يبدو أن موضوع رسالة *في صفاء الفلك* مرتبط بالمسائل المثارة في الفقرات 23–30 مع الفارق – وهو فارق هام – أن ابن سهل يستثني مسألة الرؤية ولم يذكر إطلاقاً "الشعاع البصري".

ملاحظات حول خطوط الساعات لابن الهيثم

[6، ص. 226] حققت هذه الرسالة *الرخامات* لابن الهيثم وترجمت في *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e et XI^e siècle*, vol. 5 وهي رسالة لم تدرس قبل. نذكر هنا تحليل المقدمة 3 من هذه الرسالة التي يستند إليها ابن الهيثم والتي يمكن إعادة صياغتها على النحو التالي:

المقدمة 3: لتكن لدينا النقط A، B، C على دائرة ما وليكن $\frac{\pi}{2} \geq \widehat{AB} > \widehat{BC}$ ، لتكن النقطتان D و E على $\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$ بالترتيب بحيث يكون $\frac{\widehat{BA}}{\widehat{BC}} = \frac{\widehat{BD}}{\widehat{BE}}$. إن

[24] Ibid., pp. 3 and 8.

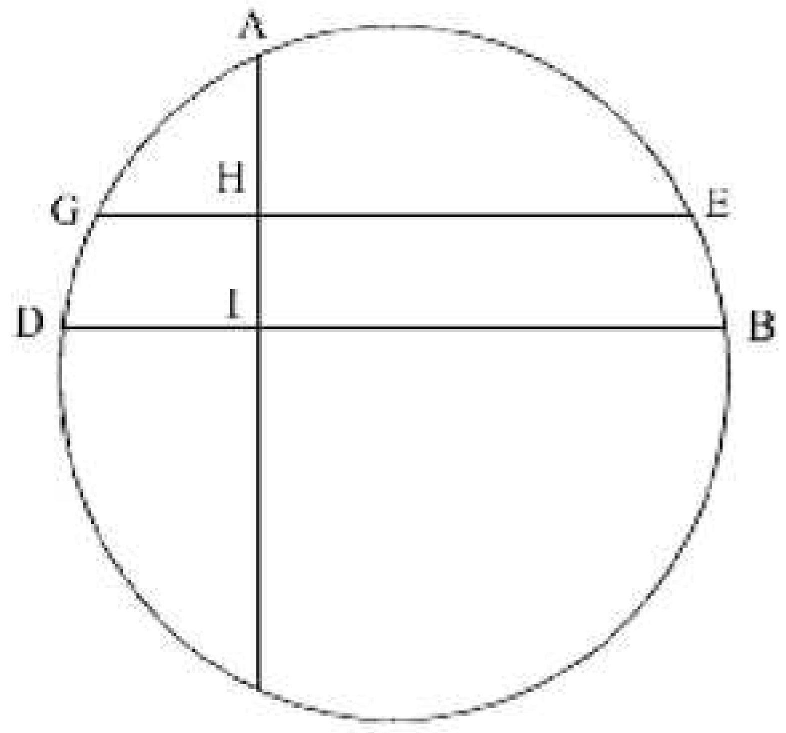
[25] 'Al-Kindi, Tideus und Pseudo-Euclid. Drei optische Werke', herausgegeben und erklärt von Axel A. Björnobo und Seb. Vogl, *Abdandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, Heft XXVI, 3 (Leipzig / Berlin, 1912), pp. 70 ff.; A. Lejeune, *L'Optique de Claude Ptolémée*, p. 29 of the Introduction.

$$\frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{BE}} > \frac{\sin \widehat{BA}}{\sin \widehat{BC}}$$

لبرهان هذه المقدمة يبدأ ابن الهيثم بإثبات مقدمتين أخريين هما:

المقدمة 1: ليكن لدينا على دائرة وتران متوازيان EG و BD على جهة واحدة من المركز، $\widehat{EG} < \widehat{BD} < \pi$. يقطع العمود عليهما القوس EG في A، الوتر EG في H والوتر BD في I، إن

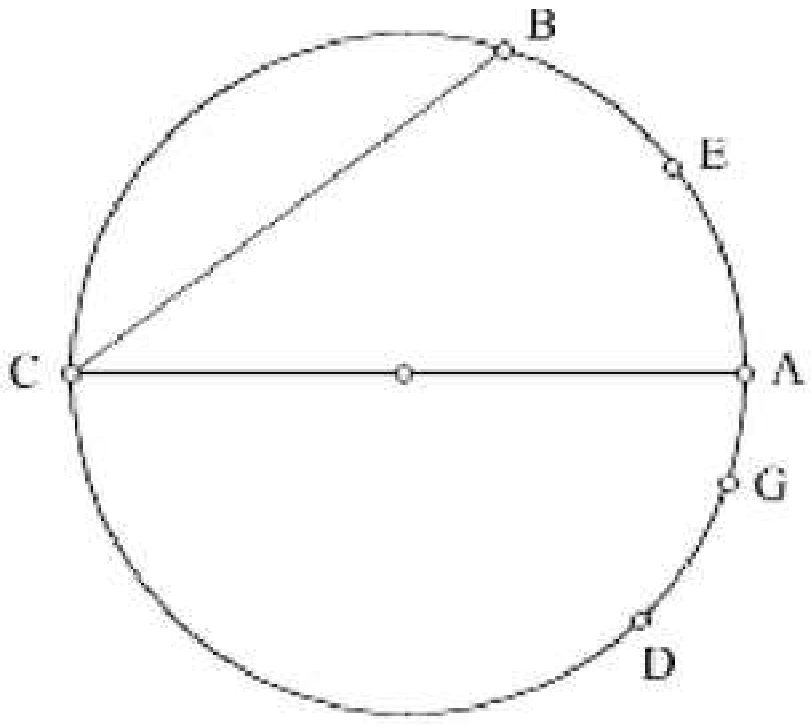
$$\frac{AI}{AH} > \frac{\widehat{AD}}{\widehat{AG}} \quad \text{و} \quad \frac{AI}{IH} < \frac{\widehat{AD}}{\widehat{DG}}$$



الشكل. 3

المقدمة 2: ليكن لدينا على دائرة ما قوسان AB و AD يحققان $\frac{1}{2}\widehat{AB} = \widehat{AD}$ و $\widehat{AB} \leq \frac{\pi}{2}$. فإذا كانت E على القوس AB و G على القوس AD نقطتين تحققان $\frac{\widehat{AD}}{\widehat{AG}} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AE}}$ فإن

$$\frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{AG}} > \frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{AE}}$$



الشكل. 4

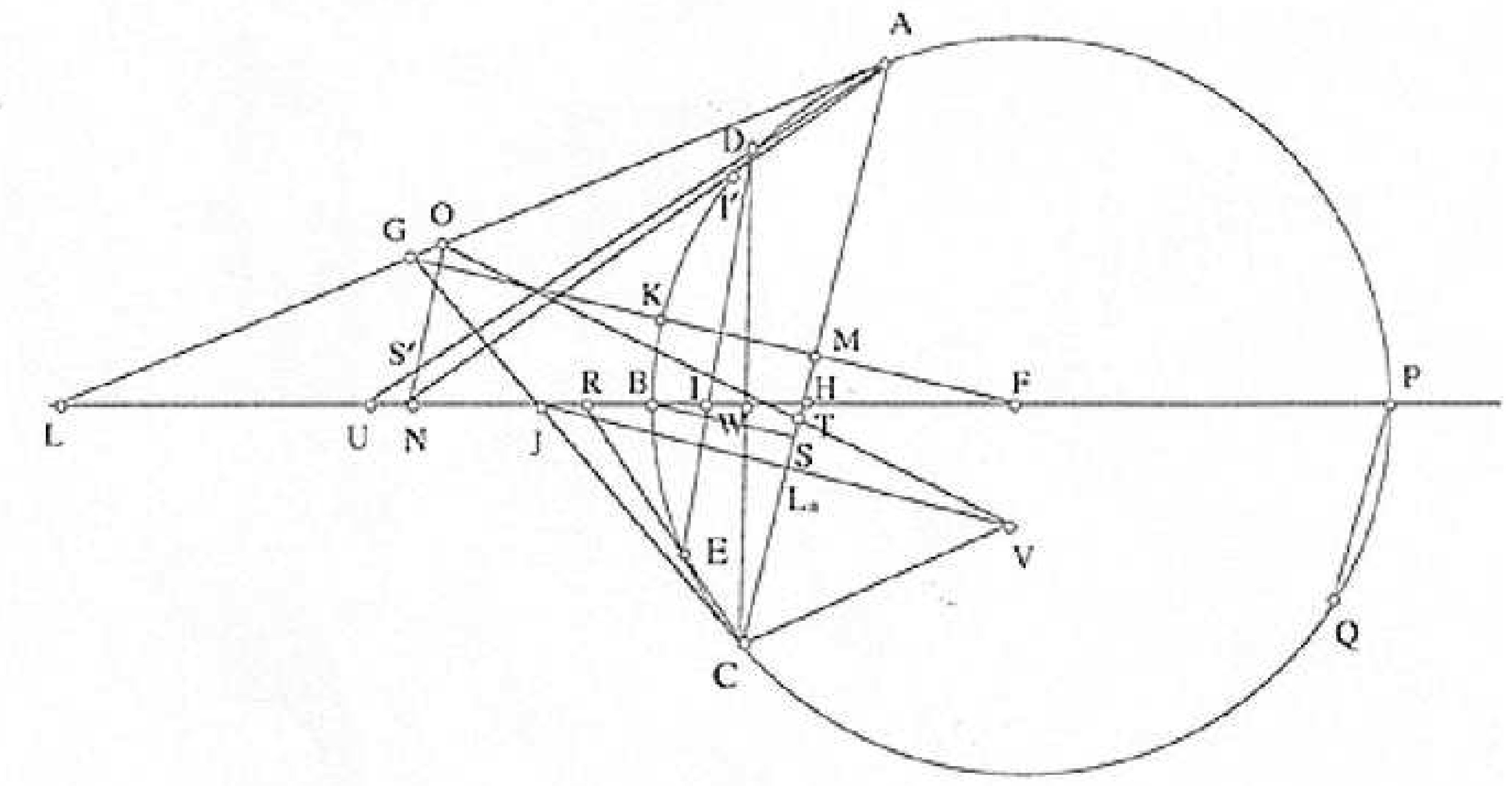
وهكذا إذا سمينا $\widehat{AD} = \alpha_1$ و $\widehat{AG} = \alpha_2$ وإذا كان $\alpha_2 < \alpha_1 < \frac{\pi}{4}$ فإن العلاقة السابقة تكتب على الشكل

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} > \frac{\sin\ 2\alpha_1}{\sin\ 2\alpha_2}$$

يمكن عندئذ كتابة برهان المقدمة 3 على النحو التالي:

لتكن F مركز الدائرة. يقطع المستقيم FB المستقيم AC في H والمستقيم DE في I كما يقطع الدائرة في P. يتقاطع مماسا الدائرة في A و C في النقطة G لأن $ABC < \pi$. لدينا حالتان.

الحالة الأولى: نفرض $\frac{\pi}{2} < \widehat{AB}$ وعندئذ $\widehat{AP} > \frac{\pi}{2}$.



الشكل. 5

نرسم FG الذي يقطع AC في وسطه M والقوس $\widehat{AC}$ في وسطه K. لدينا $\widehat{CP} > \widehat{AP}$ لأن $\widehat{BC} < \widehat{AB}$.
لتكن Q بحيث يكون $\widehat{CQ} = \widehat{AP}$ وبالتالي $PQ \parallel AC$ و $B\hat{H}C = B\hat{P}Q$. وبما أن $\widehat{QC} = \widehat{AP} > \widehat{AB}$ فإن $\widehat{QB} > \widehat{AC}$ و $B\hat{P}Q > G\hat{A}C$ (زوايا على المحيط) ومنه $B\hat{H}C > G\hat{A}C$ ولذا يقطع المستقيم AG امتداد HB في L ويقطع HL المماس GC في J. لدينا

$$\frac{AH}{HC} = \frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BC}} \quad و \quad \frac{DI}{IE} = \frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{BE}}$$

لكن

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} > \frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BC}}$$

ذلك أننا إذا أخذنا ضعف القوسين $\widehat{BA'} = 2\,\widehat{AB}$ و $\widehat{BC'} = 2\,\widehat{BC}$ والقوسين المقابلين فإن

$$\widehat{BC'} < \widehat{BA'} < \pi \quad \text{و} \quad \frac{\widehat{BA'}}{\widehat{BC'}} > \frac{BA'}{BC'}$$

وهي الخاصة التي برهنها بطلميوس[26].

لدينا إذاً $\frac{AH}{HC} > \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$ وعلى نفس النحو $\frac{DI}{IE} > \frac{\widehat{BD}}{\widehat{BE}}$.

ليكن $BS \perp AC$، لدينا إذاً $\frac{\widehat{KC}}{\widehat{BC}} > \frac{MC}{BC}$ حسب المقدمة 1، ومنه

$$\frac{\widehat{AC}}{\widehat{BC}} > \frac{AC}{CS} \quad \text{و} \quad \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} > \frac{AS}{CS}$$

لتكن T نقطة على AC تحقق $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} = \frac{AT}{TC}$ ولذا فإنها تقع بين H و S.

ليكن $JL_a \perp AC$، تقع L_a بين S و C، ومنه

$$\frac{AL_a}{L_aC} > \frac{AS}{SC} > \frac{AT}{TC}$$

ليكن AG ∥ CV، حيث V على JL_a؛ لدينا $A\hat{C}V = C\hat{A}G = A\hat{C}G$، ومنه $L_aV = L_aJ$ و $CV = CJ$. يقطع المستقيم VT المستقيم AG في O؛ ولدينا

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} = \frac{AT}{TC} = \frac{AO}{CV}$$

ومنه حسب فرض المقدمة 3

$$\frac{\widehat{AD}}{\widehat{CE}} = \frac{\widehat{BD}}{\widehat{BE}} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} = \frac{AO}{CJ}$$

يلقى الموازي لـــ AC المخرج من النقطة O المستقيم FL في N؛ بما أن $AT > TC$ فإن $AO > CJ$. وتقع N بالتالي خلف J. والزاويتان $A\hat{N}O = N\hat{A}C$ حادتان و $A\hat{O}N$ منفرجة.

لتكن 'I نقطة تقاطع AN مع الدائرة. لدينا ثلاث حالات ممكنة للنقطة D:

a) D بين A و 'I

يتقاطع المستقيم AD مع ON في 'S ومع FL في U. لدينا

$$AU > AS' > AO \quad \text{و} \quad \frac{AU}{CJ} > \frac{AO}{CJ}$$

[26] *Composition mathématique de Claude Ptolémée*, French transl. N. Halma, 2 vols. (Paris, 1813), vol. 1, pp. 34-35.

ومنه $\frac{AU}{CJ} > \frac{\overset{\frown}{AD}}{\overset{\frown}{CE}}$

يتقاطع المستقيمان CE و FL في R؛ الزاوية $C\hat{B}H$ حادة وبالتالي $C\hat{B}R$ منفرجة، $C\hat{R}J$ منفرجة أيضاً و $CJ > CR$

و

$\frac{AU}{CR} > \frac{AU}{CJ} > \frac{\overset{\frown}{AD}}{\overset{\frown}{CE}} > \frac{AD}{CE} \Rightarrow \frac{AU}{AD} > \frac{RE}{CE} \Rightarrow \frac{UD}{AD} > \frac{CR}{CE} \Rightarrow \frac{DU}{UA} > \frac{ER}{RC}$ يقطع المستقيم DC المستقيم BH في W. نطبق مبرهنة مينيلاوس Menelaus على المثلث ADC والمعترض UWH فنحصل على

$$\frac{HC}{HA} \cdot \frac{UA}{UD} \cdot \frac{WD}{WC} = 1$$

ويمكننا أن نكتب $\frac{CH}{HA} = \frac{CW}{WD} \cdot \frac{DU}{UA}$ و $\frac{CW}{WD} = \frac{CH}{HA} \cdot \frac{UA}{UD}$

وبتطبيق نفس المبرهنة على المثلث DEC والمعترض RIW نحصل على

$$\frac{WD}{WC} \cdot \frac{RC}{RE} \cdot \frac{IE}{ID} = 1$$

ومنه

$$\frac{WC}{WD} = \frac{IE}{ID} \cdot \frac{RC}{RE}$$

وإذاً

$$\frac{ID}{IE} \cdot \frac{ER}{RC} = \frac{AH}{HC} \cdot \frac{DU}{UA}$$

إلا أن $\frac{DU}{UA} > \frac{ER}{RC}$

ولذا

$$\frac{DI}{IE} > \frac{AH}{HC}$$

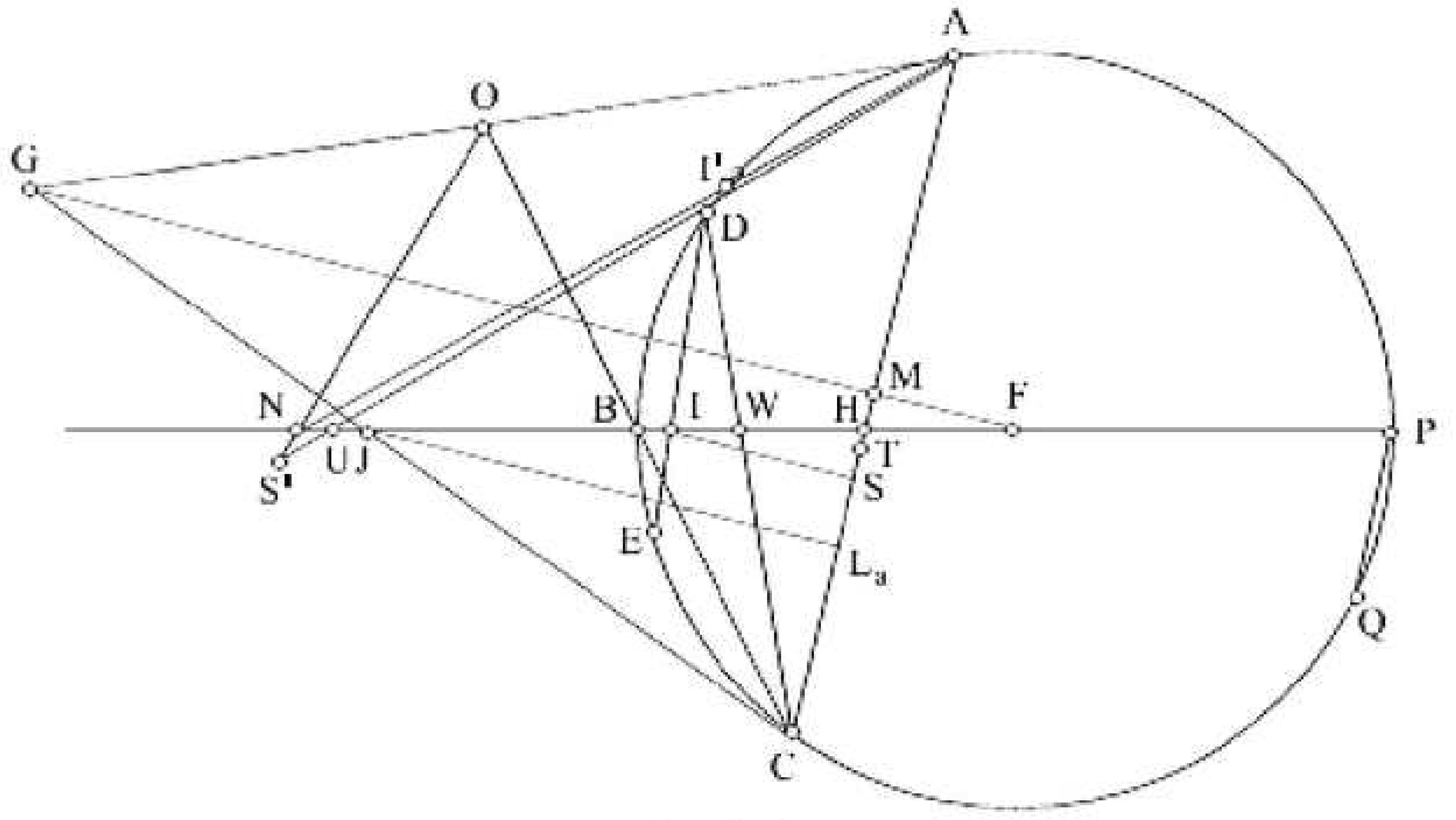
وبالنتيجة

$$\frac{\sin \overset{\frown}{DB}}{\sin \overset{\frown}{BE}} > \frac{\sin \overset{\frown}{BA}}{\sin \overset{\frown}{BC}}$$

b) D تنطبق على I'

إن $U = N = S'$ في هذه الحالة و $AN > AO$ ويجري البرهان بالطريقة نفسها.

c) D بين I' و B



الشكل. 6

نبحث في هذه الحالة عن عدد صحيح n بحيث إذا كان $\widehat{BD'} = 2^n \widehat{BD}$ فإن D' بين I' و A. نقرن بها E' بحيث $\widehat{AE'} = 2^n \widehat{BE}$. تنطبق المحاكمة السابقة على D' و E' فنحصل على

$$\frac{\sin \widehat{BD'}}{\sin \widehat{BE'}} > \frac{\sin \widehat{BA}}{\sin \widehat{BC}}$$

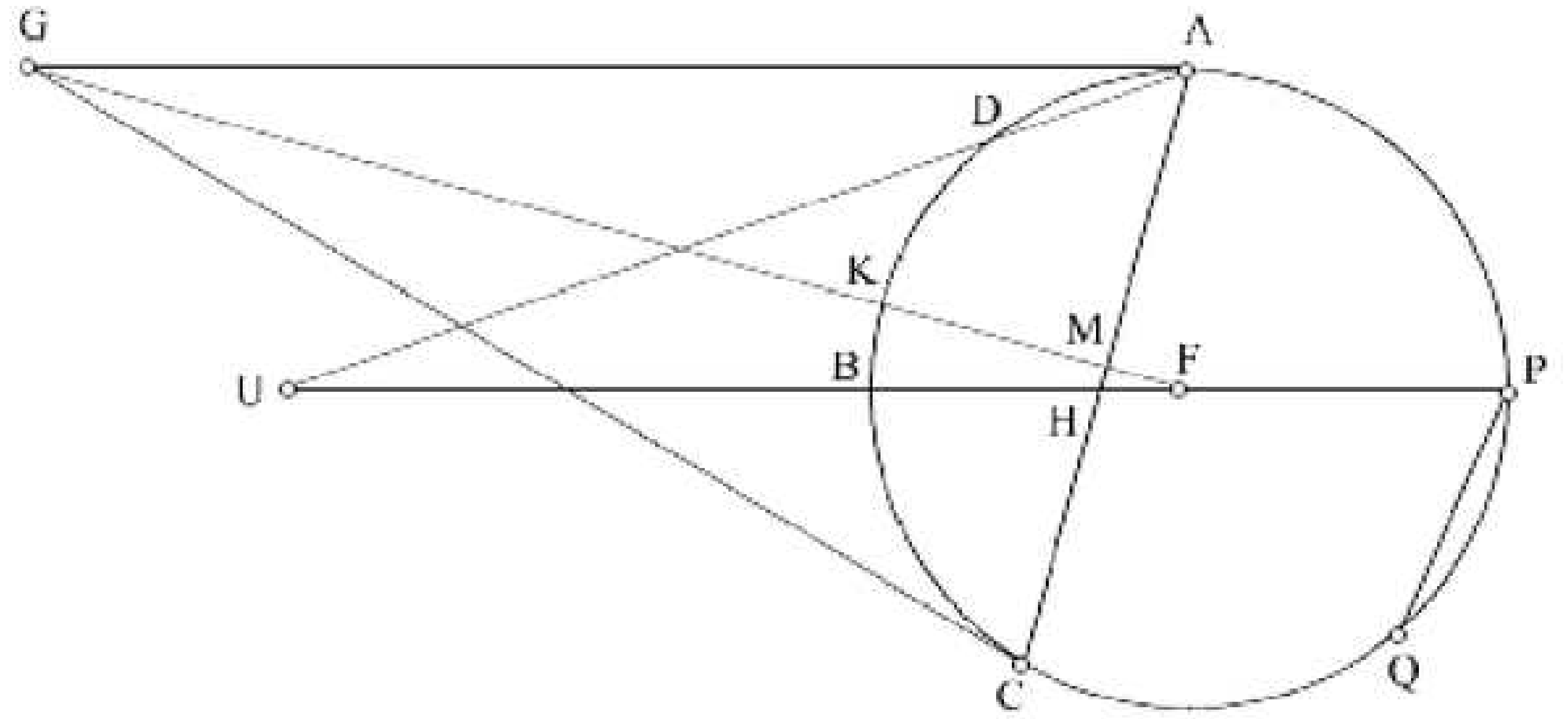
وبتطبيقنا المقدمة 2 نحصل على المتراجحات:

$$\frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{BE}} > \frac{\sin 2\widehat{BD}}{\sin 2\widehat{BE}} > \ldots > \frac{\sin 2^n \widehat{BD}}{\sin 2^n \widehat{BE}}$$

ولذا

$$\frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{BE}} > \frac{\sin \widehat{BD'}}{\sin \widehat{BE'}} > \frac{\sin \widehat{BA}}{\sin \widehat{BC}}$$

الحالة الثانية: إذا كان $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}$ فإن $\widehat{AP} = \widehat{QC} = \frac{\pi}{2}$.



الشكل. 7

إن المماس GA في هذه الحالة يوازي المستقيم FB. ويلقى المستقيم AD المستقيم FB في U، أياً كان وضع النقطة D. ويتابع البرهان عندئذ كالسابق.

هذا هو برهان ابن الهيثم للمقدمة 3. يمكننا أن نثبت من أجل أي نقطة D تحقق المتراجحة $\widehat{BA} > \widehat{BD}$ أن

$$\frac{ID}{IE} = \frac{RE}{RC} = \frac{HA}{HC} \cdot \frac{UD}{UA}$$

وعلينا لاستخلاص النتيجة أن نبين أن $\frac{UD}{UA} > \frac{RE}{RC}$.

ويميز ابن الهيثم عندئذ ثلاث حالات

$D \in \widehat{AI'}$، وفي هذه الحالة $AU > AO$.

$D = I'$ والمتراجحة مازالت محققة، $AU > AO$.

ويمكن في كلتا الحالتين استخلاص النتيجة.

أما إذا كان $D \in \widehat{I'B}$، فإن S' على امتداد ON وتقع U بين N و B و $AN > AO$. ويمكن في هذه الحالة أن يكون AU أكبر أو أصغر أو يساوي AO، ويستحيل تطبيق محاكمة الحالة الأولى. ولهذا حاول ابن الهيثم تذليل الصعوبة بما فعله في (c).

لنضف أن وجود العدد n يضعنا أمام صعوبة جديدة. لنفرض أن $\widehat{BA} = \alpha$ و $\widehat{BI'} = \beta \left(\beta < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ و $BD = \gamma$. إذا كان $\gamma < \beta$ فإننا نريد أن نجد عدداً صحيحاً n بحيث يكون $\gamma_n = 2^n . \gamma$ محققا المتراجحة المزدوجة.

$$\beta < \gamma_n < \alpha \ (2\pi \text{ مقاس})$$

خلافاً لما كان ابن الهيثم يظن فليس للمسألة حل دائماً. لنأخذ مثلاً $\gamma = 3°$ فالمتتالية $(\gamma_n)_{n \geq 0} = (3.2^n)$ تعطينا 3، 6، 12، 24، 48، 96، 192، 384... لدينا $\gamma_7 = 3.2^7 = 24$ (مقاس 2π) و بالتالي $\gamma_8 = 48$ (مقاس 2π). فإذا سمينا D_n النقطة المقرونة بـــ γ_n فإن

$$D_n = D_{n+4} \ldots, D_4 = D_8, D_3 = D_7$$

ولذا فإنه من المستحيل إيجاد D_n بين I' و A مهما يكن $\beta \in]48, \alpha[$ و $\alpha \leq 90°$ (من أجل $\beta = 50$ على سبيل المثال).

قد تسمح لنا هذه الصعوبات تفسير تلك التي لاقاها الفارسي لاحقاً أثناء كتابته لهذه القضية فكما كتب "ثم لما كانت النسخة سقيمة جداً، لم أقدر على حلها، فاكتفيت بإيراد الدعوى وإن اتفق حلها بعد أضيفها محررة إلى هذا المقام"[27]. والغريب في الأمر أن الفارسي نفسه قد وجه عناية خاصة في شرحه إلى شرط ابن الهيثم في رسالته في *الرخامات* ولكنه نسيه في رسالته في *الكرة المحرقة*.

[27] انظر ص. 259 السطرين 10-11.

$$\widehat{BC} < \widehat{AB} \leq \frac{\pi}{2}$$

وهو شرط غير لازم في الواقع. وأكثر من ذلك فقد طبق ابن الهيثم بالذات مقدمته الثالثة في القضيتين 3 و 4 في *الكرة المحرقة* حيث يمكن للقوس موضع الاعتبار $\widehat{TJ}$ أن يكون أكبر من $\frac{\pi}{2}$ من أجل بعض قيم i، من أجل $\widehat{TJ} > 4d$، وهو أمر يستحيل أن يكون قد خفي على ابن الهيثم.

لنعد فعلا إلى ما نص عليه ولنفرض $\widehat{BD} = \beta_1$، $\widehat{BE} = k\beta_1$، $\widehat{BA} = \alpha_1$، $\widehat{BC} = k\alpha_1$ و $k < 1$؛ نعيد كتابة شرط ابن الهيثم على الشكل $\beta_1 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$

إلا أنه يكفي أن نأخذ $\alpha_1 = 120°$، $\beta_1 = 90°$ و $k = \frac{1}{2}$ لنحصل على

$$\frac{\sin\ \alpha_1}{\sin k\alpha_1} = 1 \quad ، \quad \frac{\sin\ \beta_1}{\sin k\beta_1} = \sqrt{2}$$

وهو ما يرينا أن الشرط $\alpha_1 < \frac{\pi}{2}$ مقيد.

كما أنه يمكن إضافة إلى ذلك إثبات أن القضية تبقى محققة من أجل $\beta_1 < \alpha_1 < \pi$.

لنفرض $f(x) = \frac{\sin x}{\sin kx}$ ، $k < 1$

ولنبرهن أن الدالة المعرفة على $]0, \pi[$ دالة متناقصة على هذا المجال. لدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x \cdot \sin kx - k\cos kx \cdot \sin x}{\sin^2 kx} \\ &= \left\{\sin(kx - x) + \frac{1 - k}{2}\left[\sin(x + kx) - (\sin kx - x)\right]\right\} \frac{1}{\sin^2 kx} \\ &= \left[\frac{1 + k}{2} \sin(kx - x) + \frac{1 - k}{2} \sin(x + kx)\right] \frac{1}{\sin^2 kx} \\ &= \frac{1 - k^2}{2 \sin^2 kx} \left[\frac{\sin x(1 + k)}{1 + k} - \frac{\sin x(1 - k)}{1 - k}\right] \end{aligned}$$

لنضع $g(x) = \frac{\sin x(1+k)}{1+k} - \frac{\sin x(1-k)}{1-k}$

لدينا $g(0) = 0$ و $g'(x) = -2\sin x . \sin kx$.

وبما أن $x \in]0, \pi[$ و $k < 1$ فإن $kx \in]0, \pi[$ و $g'(x) < 0$ من أجل كل نقط المجال $]0, \pi[$؛ وبالتالي يتناقص g من $g(0) = 0$ ويبقى سالباً ومعه $f'(x) < 0$ وبالتالي تتناقص الدالة f على المجال $]0, \pi[$، وتتحقق بالتالي المتراجحة

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} > \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

من أجل $\pi \geq \alpha_1 > \beta_1$.

لنلاحظ في النهاية أن ابن الهيثم عمم القضية السابقة على قوسين متشابهين في دائرتين مختلفتين في رسالته في *الرخامات*. إلا أنه لم يأخذ بهذا التعميم في رسالته في *الكرة المحرقة* خلافاً للفارسي الذي يذكره في نسخته في هذا الموضوع.

ملاحظات حول كتاب الشني في التراكيب

[7، ص. 450] يمكن إعادة كتابة المقدمة 6 على النحو التالي: a معلومة أوجد x بحيث يكون

$$(a + x)\, x = H \qquad (1)$$

نفرض $a = AB$، $x = BE$، $BA \perp BC$ بحيث يكون $BC^2 = H$. وليكن لدينا قطع زائد محوره AB ورأسه B و*ضلعه القائم* يساوي AB. يقطع المستقيم المار بـــ C والموازي لـــ AB القطع الزائد في D ذات المسقط E على AB. لدينا إذاً

$$\frac{EB \cdot EA}{DE^2} = 1$$

وبما أننا أنشأنا $DE = BC$ فإن $DE^2 = H$، وبالتالي $EB . EA = H$؛ ولذا فالمقطع الذي نريده هو BE.

ملاحظة: لنضع $H = \alpha^2$، يمكن عندئذ كتابة المعادلة $(a + x)\, x = \alpha^2$ على الشكل

$$y = \alpha \qquad \text{(معادلة مستقيم)}$$

$$y^2 = x\,(a + x) \qquad \text{(معادلة قطع زائد قائم)}$$

المستقيم موازٍ للمحور ويقطع القطع الزائد القائم في نقطتين، لإحداهما فاصلة موجبة وهي التي تعطي الحل (شكل 2 ص. 450).

يوجد حل آخر لهذه المسألة في رسالة ابن الحسين في البركار التام[28] وهو كالتالي:

I وسط AB، نبحث عن نقطة E تحقق $AE . EB = BC^2$. إن أي نقطة E على المحور Bx تحقق العلاقة $AE . EB = IE^2 - IB^2$، ولذا فـــ $IE^2 = IB^2 + BC^2 = IC^2$ و E على الدائرة ذات المركز I والشعاع IC.

لنلاحظ إضافة إلى هذا أنه يمكن حل هذه المسألة، التي عالجها المؤلف بقطع قطع زائد قائم بخط مستقيم موازٍ للمحور، بواسطة قطع زائد لا على التعيين ومن ثم إيجاد بؤرتيه.

H و a معلومان، نعرف p بالعلاقة $H = a \cdot \frac{p}{4}$. ونأخذ حينئذ القطع الزائد ذا المحور المعترض $AB = a$ و*الضلع القائم* p؛ ومعادلته بدليل AB والمماس في B هي

$$y^2 = px + \frac{p}{a}x^2 = \frac{px}{a}(x + a) \qquad (2)$$

[28] F. Woepcke, 'Trois traités arabes sur le compas parfait', *Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Impériale et autres Bibliothèques*, 22 (1874), p. 26.

ونعيد كتابة المعادلة (1) على الشكل

$$x(x+a) = a \cdot \frac{p}{4} \qquad (3)$$

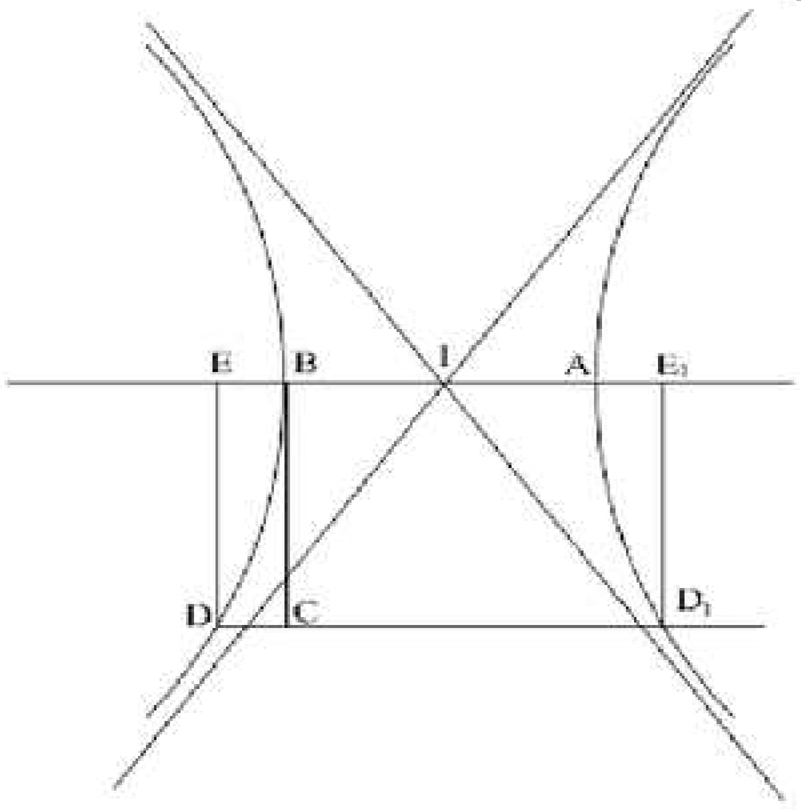
ونحصل من (2) و (3) على

$$y^2 = \frac{p^2}{4} \qquad \text{ومنه} \qquad y = \frac{p}{2}$$

يقطع المستقيم $y = \frac{p}{2}$ القطع الزائد في نقطتين D و D_1 تسقطان على المستقيم AB في E وE_1. ولدينا عندئذ $BE = x$ و $AE = x + a$.

إن النقطتين E و E_1 بؤرتا القطع الزائد والمعادلة (3) توافق التعريف الذي أعطاه أبلونيوس للبؤرة في *المخروطات* III.45.

$$(AB + BF) \cdot BF = AB \cdot \frac{1}{4} \text{ الضلع القائم}$$



الشكل. 8

لنلاحظ أن المؤلف يفرض في المقدمة 6 أن $H = BC^2$ كما يفرض $a = p$ وبذلك يكون

$$BC^2 = \frac{p^2}{4} \qquad \text{و} \qquad \frac{p}{2} = \frac{a}{2} = \frac{AB}{2}$$

ولنضف في النتيجة أن هذه المسألة هي في واقع الأمر مسألة تطبيق سطح بالزيادة. وهذا النوع من المسائل هو على وجه التحديد ما جعل أبلونيوس يسميها القطوع الزائدة للإشارة إلى القطوع المخروطية التي يقتضيها الإنشاء السابق. كان ابن سهل على وعي تام بإمكانية إنشاء هذا النوع من المسائل بواسطة المسطرة والبركار. وإذا كان قد استعمل القطع الزائد فلأن الإنشاءات بواسطة القطوع أصبحت ممكنة في المسائل المستوية والمجسمة على السواء.

[8، ص. 452] يمكن تلخيص المقدمة 8 بما يلي: لدينا مثلث مساحته معروفة D وكذلك النسبة $\frac{E}{G}$ والزاوية xAy والنقطة B على أحد ضلعي الزاوية. نخرج من B مستقيماً يقطع الضلع الآخر في C بحيث يكون

$$\frac{E}{G} = \frac{D}{\text{مـساحة } ABC}$$

ننشئ مستطيلاً مساحته H يحقق $\frac{D}{H}=\frac{E}{G}$، ثم ننشئ على المستقيم AB متوازي الأضلاع ABIC ذا الزاوية xAy وبحيث تكون مساحة (ABIC) = 2H؛ وبهذا تكون مساحة (ABC) = H، ومنه النتيجة.

لنلاحظ أن المؤلف لم يشر إلى طبيعة السطح H. ولكنه مستطيل في شكل المخطوطة. كما لم يشرح إنشاء H ولا إنشاء متوازي الأضلاع ABIC. لاشك أن هذين الإنشاءين كانا مألوفين عنده.

[9، ص. 454] ليكن $AC \perp BD$، إذا كانت الزاوية BAC معلومة (وهي الزاوية BAD أو مكملتها) لدينا

$$\text{مساحة } (ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BC$$

ولذا فإن

$$\frac{AB \cdot AC}{\text{مـساحة } (ABC)} = \frac{2\,AB \cdot AC}{AC \cdot BD} = 2 \cdot \frac{AB}{BD}$$

والنسبة الأخيرة معروفة لأن الزاوية BAD معلومة ومنه النتيجة.

لنلاحظ أن المؤلف وإن لم يكن قد سمى الجيب فإنه ميز هذه الزاوية بالنسبة $\frac{AB}{BD}$ أي عكس الجيب وهو ما يعطينا

$$\frac{1}{2}\sin \hat{A} = \frac{\text{مساحة } (ABC)}{AB \cdot AC}$$

[10، ص. 454] نحصل على النتيجة مباشرة من المقدمة 9.

$$\frac{1}{2}\sin \hat{A} = \frac{\text{مساحة } (ABC)}{AB \cdot AC} \quad ، \quad \frac{1}{2}\sin \hat{D} = \frac{\text{مساحة } (DEG)}{DE \cdot DG}$$

ثم إن $\sin \hat{A} = \sin \hat{D}$ ومنه

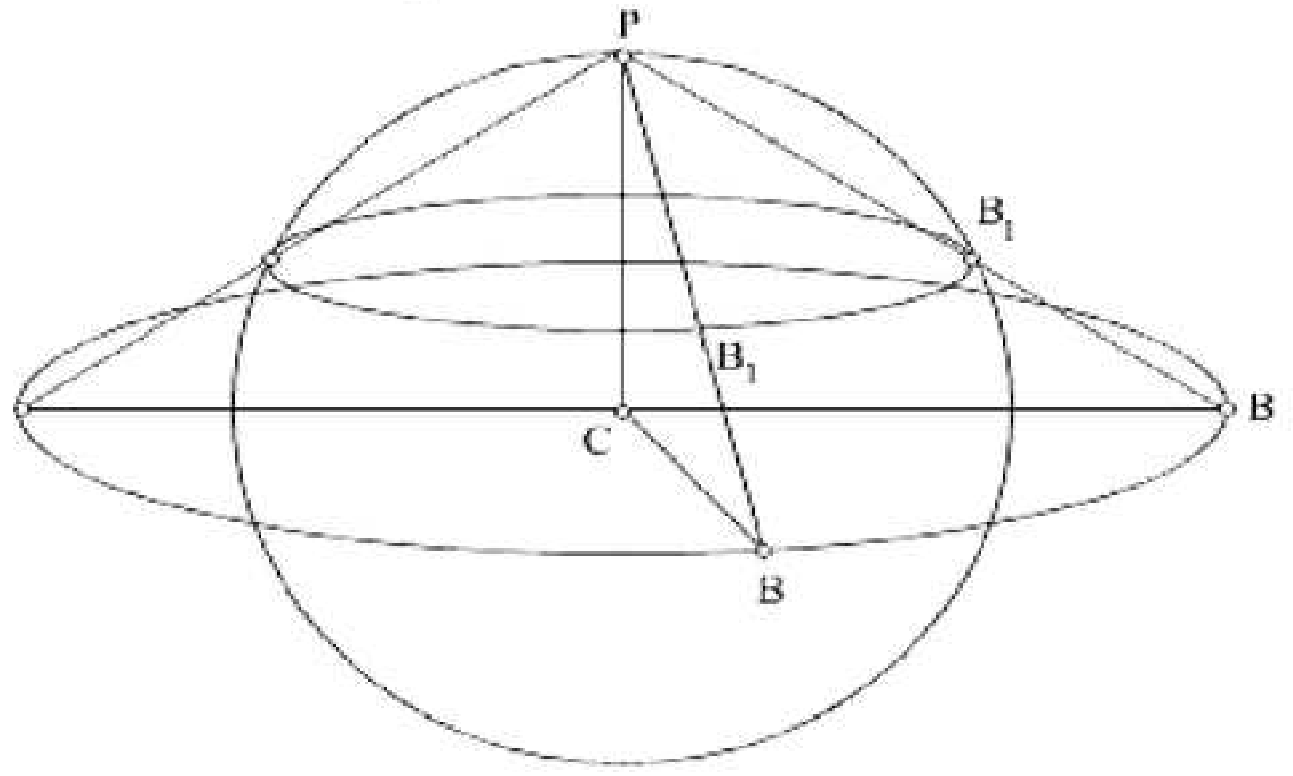
$$\frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DG} = \frac{\text{مـساحة } (ABC)}{\text{مـساحة } (DEG)}$$

ملاحظات حول الأصطرلاب

1. رسالة القوهي

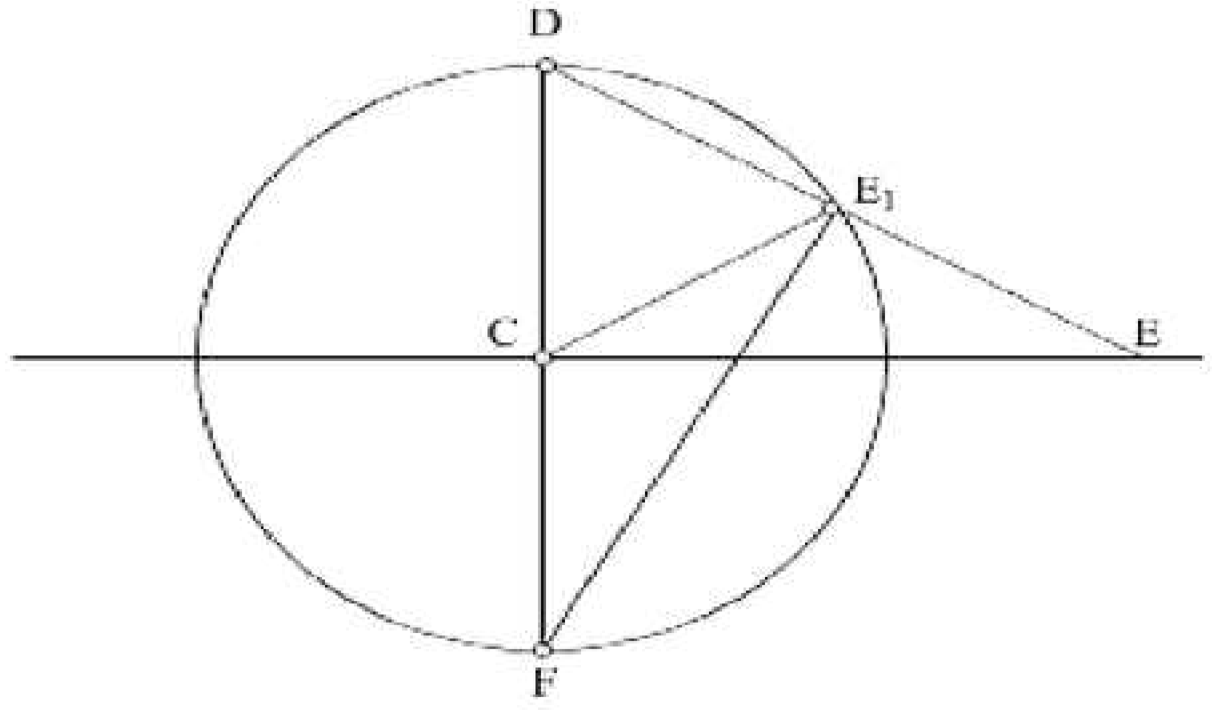
[11، ص. 907 سطر 6] إن أي نقطة B يبعد نظيرها مسافة معلومة عن قطب الكرة تقع على دائرة مركزها مركز الأصطرلاب. يمكننا أن نعتبر المسافة المعلومة BC هي المسافة بين مركز الأصطرلاب C وبين أي نقطة B من

الدائرة المقترنة بالبعد الزاوي المعلوم. فإذا كانت B_1 هي نظيرة B فإن القوس PB_1 هو البعد الزاوي المعلوم و PC هو نصف القطر المطلوب. وهذا ما يعيدنا إلى الإنشاء المساعد المستعمل في القضية 2 من هذا الفصل.



الشكل. 9

[12، ص. 921، 23–26] العناصر المعلومة هي : الدائرة ABC في مستوى الأصطرلاب، المسافة بين قطب نظيرها وقطب الكرة، و DE طول المستقيم الذي يصل قطب الكرة بالنقطة التي يقع نظيرها على بعد معلوم من القطب.

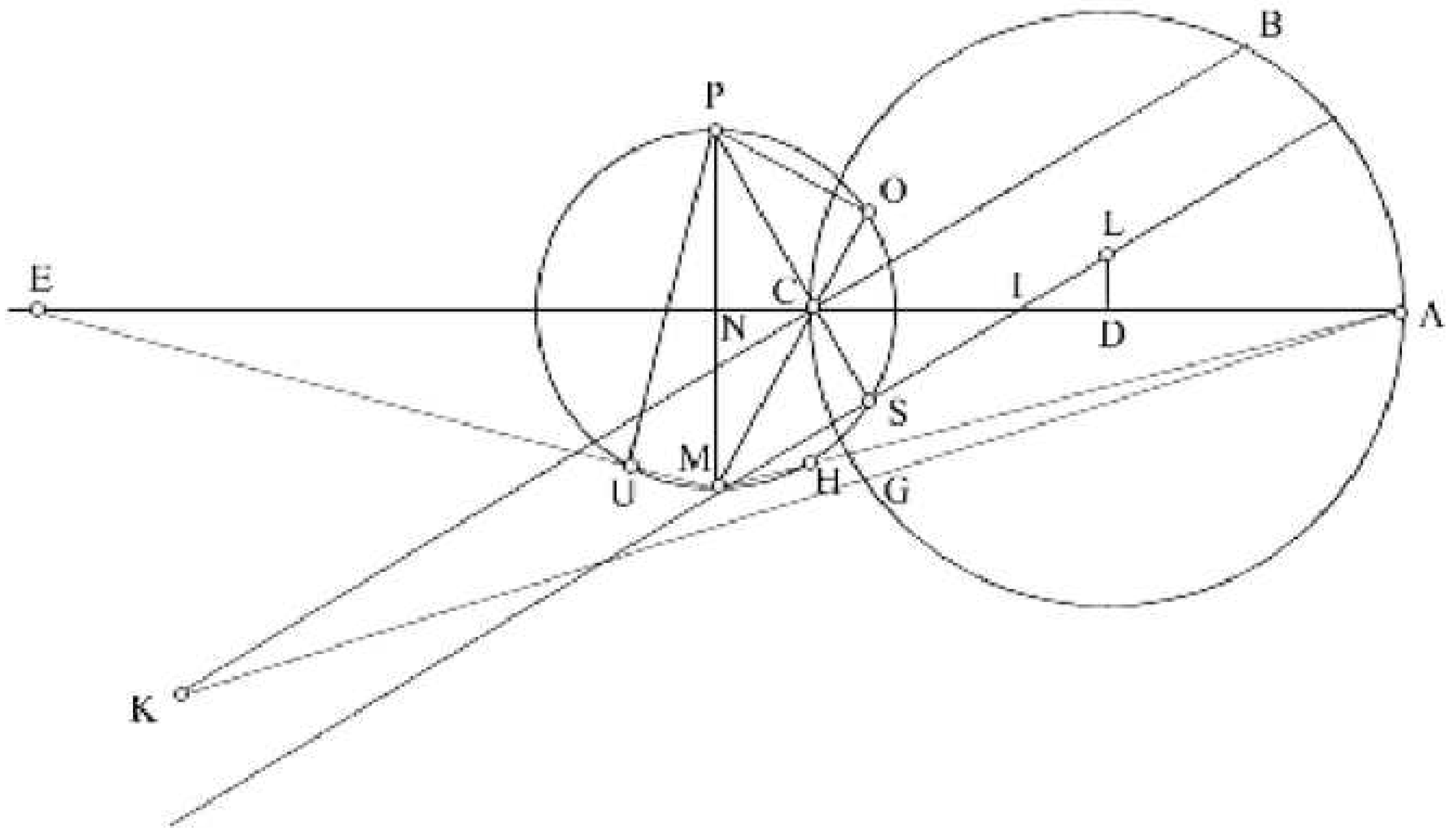


الشكل. 10

ليكن C مركز الكرة، D قطبها، E النقطة على الأصطرلاب و E_1 نظيرها. نعلم الطول DE كما نعلم القوس DE_1. نعلم بالتالي الزاويتين DCE_1 و CDE. إن نصف القطر المطلوب هو $CD = G$، الذي نحصل عليه بإنشاء المثلث قائم الزاوية ذي الوتر المعلوم DE والزاوية المعلومة CDE.

وإذا ما عرفنا الدائرة ABC، والمسافة بين قطب نظيرها وقطب الكرة ونصف قطر الكرة G فإننا نكون قد عدنا إلى المسألة السابقة.

[13، ص. 925، 1] إذا كانت المسافة الثانية المعلومة أصغر من الأولى فإننا نقبل أن تكون مساوية للفرق $\widehat{AB} - \widehat{CG}$. ونأخذ عندئذ B و G على طرفي AC؛ النقطة K خارج الدائرة ABC.



الشكل. 11

لا تتغير المحاكمة هنا: نبين أن $\widehat{MS}$ متشابه مع $\widehat{AB}$ وأن $\widehat{MU}$ مشابه لــ $\widehat{AB} - \widehat{CG}$:

$$M\hat{P}S = N\hat{I}M = B\hat{C}A$$

وبالتالي $\widehat{MS}$ مشابه لــ $\widehat{AB}$. ثم إن

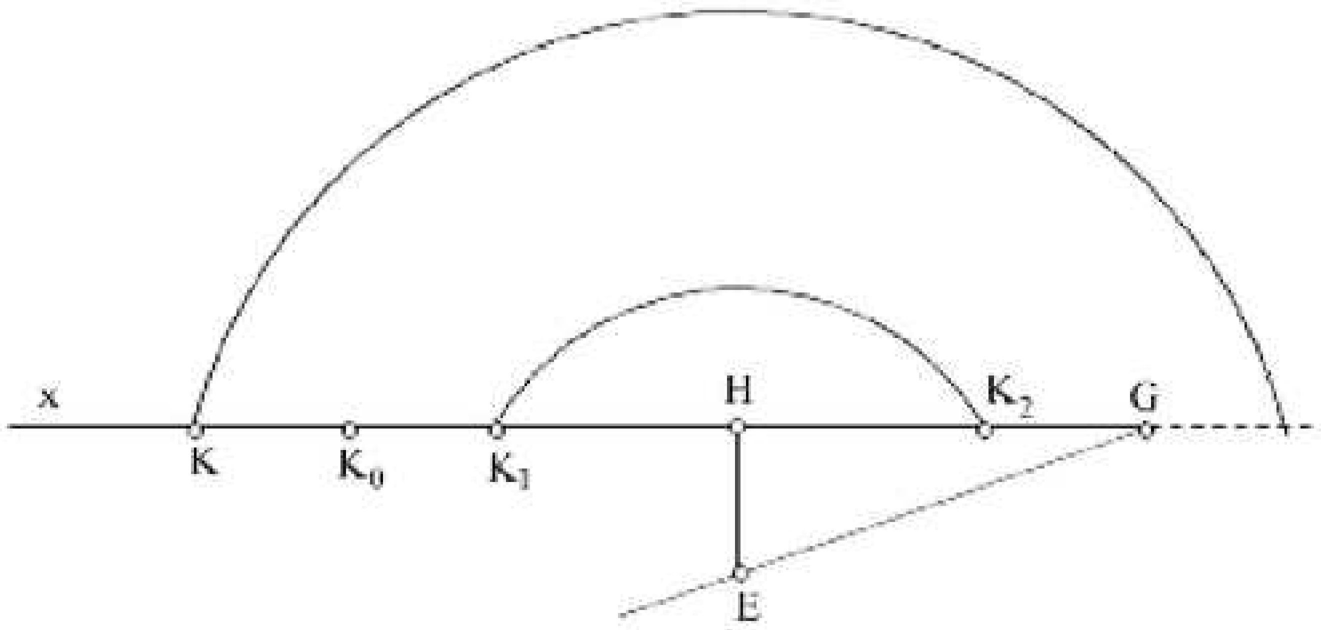
$$U\hat{P}M = \hat{E} = B\hat{K}A = B\hat{C}A - C\hat{A}G$$

وبالتالي $\widehat{MU}$ مشابه للفرق $\widehat{AB} - \widehat{CG}$.

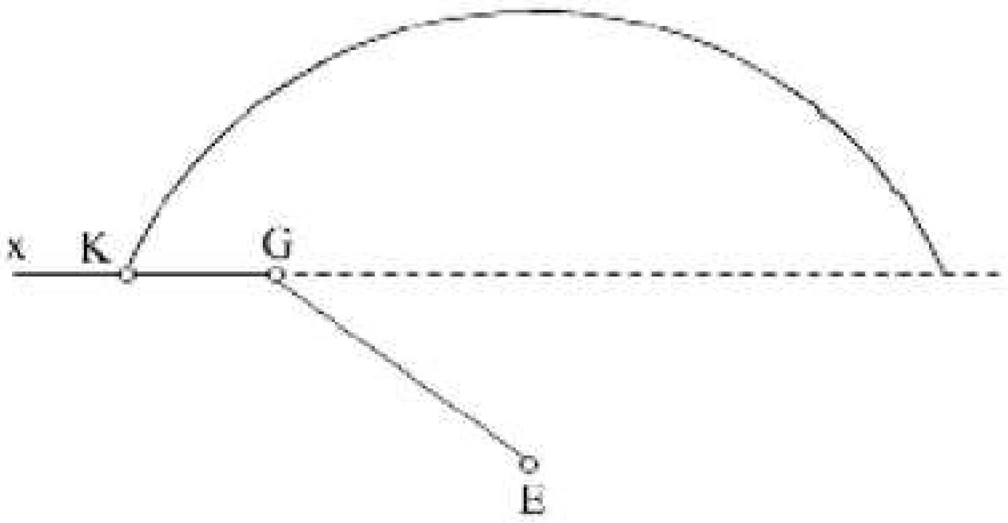
والكرة ذات المركز N ونصف القطر NM والقطب M هي الكرة المطلوبة.

[14، ص. 933، 17] إن معرفة $k = \dfrac{EG}{EK}$ و $\alpha = E\hat{G}K$ ($\alpha \in]0, \pi[$) لا تخولنا دائماً تعيين المثلث EGK بتقريب تشابه ما.

لنفرض المقطع المستقيم EG = a معلوماً وكذا نصف المستقيم Gx الذي يحدد الزاوية $E\hat{G}x = \alpha$. تقع النقطة K المطلوبة على نصف المستقيم Gx وعلى الدائرة ذات المركز E والشعاع $\dfrac{a}{k}$.



الشكل. 2.12 α منفرجة



الشكل. 1.12 α حادة

1) إذا كان $k < 1$ فـ $\frac{a}{k} > a$ وتتقاطع الدائرة $(E, \frac{a}{k})$ مع Gx في نقطة K وحيدة سواء كانت الزاوية α حادة أو منفرجة أو قائمة. EGK يحل المسألة.

2) إذا كان $k = 1$ فليس للمسألة حل، إذا كانت $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$. ولها حل $K = K_0$ من أجل α حادة والمثلث متساوي الساقين EGK_0 يحل المسألة.

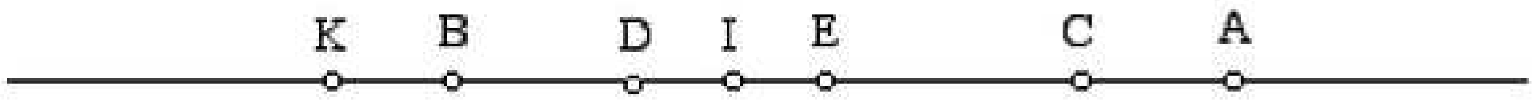
3) إذا كان $k > 1$، $\frac{a}{k} < a$. وليس للمسألة حل إذا كانت $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$. أما إذا كانت $\alpha < \frac{\pi}{2}$ فنسقط $Gx \perp EH$، $EH = a \sin \alpha$ و $k = \frac{1}{\sin \alpha}$ وتنطبق النقطة K على H والمثلث المطلوب هو المثلث قائم الزاوية EHG.

إذا كان $1 < k < \frac{1}{\sin \alpha}$ فالدائرة $(E, \frac{a}{k})$ تقطع المقطع GK_0 في نقطتين K_1 و K_2، لكن المثلثين EGK_1 و EGK_2 غير متشابهين لعدم تساوي الزاويتين EK_1G و GEK_2، ذلك أن $E\hat{K}_1G = K_1\hat{K}_2E > K_2\hat{E}G$

والخلاصة أن الدعوى صحيحة من أجل $k < 1$ أياً كانت قيمة α وأنها صحيحة من أجل $k = 1$ في حالة α حادة والمثلث متساوي الساقين عندئذ؛ أما من أجل $k > 1$ فهي صحيحة من أجل α حادة ومحققة في الوقت نفسه لـ $k \sin \alpha = 1$، والمثلث قائم الزاوية في هذه الحالة. تُرى هل اقتصر القوهي على فرض $k < 1$ بدون أن يعلنه صراحة؟ إنه يكتفي في النص بالقول إن k معلومة.

[15، ص. 934] لتكن لدينا النقطة C على المقطع المعلوم AB. نريد أن نجد على المقطع CB نقطة D تحقق

$$\frac{AC \cdot CD}{AD \cdot DB} = k$$ حيث k عدد معلوم



الشكل. 13

لدينا

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CA \cdot CD}{CB \cdot CD}$$

ومنه

$$\frac{BC \cdot CD}{DA \cdot DB} = k \cdot \frac{CB}{CA} = \frac{1}{k'}$$

لتكن E وسط المقطع AB و D بين A و B لدينا

$$DA \,.\, DB + ED^2 = EB^2 \qquad (1)$$

كما أن

$$BC \,.\, CD + BC \,.\, BD = BC^2 \qquad (2)$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار أن $\frac{DA \cdot DB}{BC \cdot CD} = k'$، فإننا نميز حالتين

a) إذا كان $\frac{EB^2}{BC^2} = k'$ فإن $\frac{ED^2}{BC \cdot BD} = k'$.

لكن $\frac{CB \cdot BD}{EB \cdot BD} = \frac{CB}{EB}$ معلوم، وبالتالي فـ $\frac{ED^2}{EB \cdot BD} = k' \cdot \frac{EB}{CB}$ معلوم أيضاً.

لتكن I وسط DE لدينا $ED^2 = 4ID^2$. وبما أن B خارج DE فإن $EB \,.\, BD + DI^2 = BI^2$ وبالتالي $\frac{ID^2}{IB^2}$ معلومة وكذلك $\frac{ID}{BD}$ ومعها $\frac{ID}{BE}$ و $\frac{ED}{BD}$؛ وإذاً فالنقطة D معلومة.

b) إذا كان $\frac{EB^2}{BC^2} \neq k'$ فإن $\frac{ED^2}{BC \cdot BD} \neq k'$.

لنفرض أن $EB^2 > k' \, BC^2$، إذاً $ED^2 > k' \, BC \,.\, BD$. ولدينا حسب (1) و (2)

$$ED^2 - k' \, BC \,.\, BD = EB^2 - k' \, BC^2$$

نعرف الآن النقطة K والمقطع BK بالعلاقة

$$EB^2 - k' \, BC^2 = k' \, CB \,.\, BK$$

حيث K على امتداد AB، لدينا

$$ED^2 = k' \, CB \,.\, KD \qquad \text{مع } KD > BD$$

إلا أن النسبة

$$\frac{BC}{EK} = \frac{BC \cdot KD}{EK \cdot KD} = k''$$

نسبة معلومة لأن EK معلوم، ولذا فإن

$$ED^2 = k' \, k'' \, EK \,.\, KD$$

وبما أننا رأينا أن $ED^2 = 4EI^2$

فإن

$$EK \,.\, KD = KI^2 - EI^2$$

ومنه

$$EI^2 (4 + k' k'') = k' k'' . KI^2$$

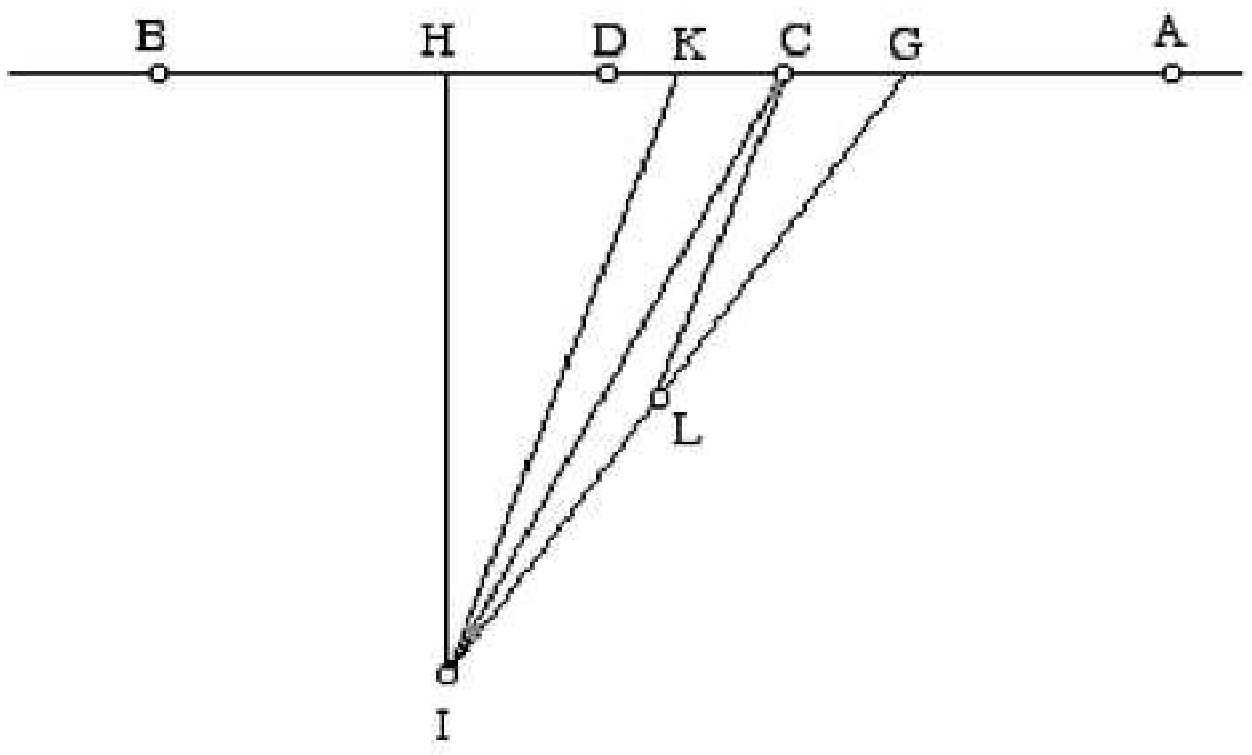
وهكذا فالنسبة $\frac{EI}{KI}$ معلومة وكذلك الأمر في النسبة $\frac{ED}{KE} = \frac{2EI}{KI+IE}$ و $\frac{KD}{KE}$.
النقطتان E و K معلومتان ولذا فـــ D معلوم أيضاً ومعها المستقيم KD.

2. شرح ابن سهل لكتاب القوهي

[16، ص. 958] نكتب هذه القضية على النحو التالي: لتكن C و D نقطتين من المقطع AB. نريد تعيين نقطة K على المقطع CD تحقق النسبة المعلومة

$$\frac{AK \cdot KD}{BK \cdot KC} = \frac{E}{F}$$

لتكن G وسط AD و H وسط BC. نأخذ على العمود المقام من H نقطة I تحددها العلاقة $\frac{DG^2}{CI^2} = \frac{E}{F}$ ثم نحدد على GI نقطة L تحقق العلاقة $\frac{CG^2}{CL^2} = \frac{E}{F}$.



الشكل. 14

نرسم من النقطة I الموازي لـــ CL الذي يقطع AB في K. إن K هي النقطة المطلوبة.
تفترض المحاكمة أن يكون ترتيب النقاط هو A، C، D، B؛ ولذا فإذا كانت $K \in]CD[$ فإنها تنتمي كذلك إلى]AD[و]BC[.

البرهان

$$IK \parallel CL \Rightarrow \frac{GK}{IK} = \frac{GC}{CL}$$

فلذا

$$\frac{GK^2}{IK^2} = \frac{E}{F}$$

ولما كانت G وسط AD و $K \in]AD[$ فإن

$$KA \, . \, KD + KG^2 = GD^2 \qquad (1)$$

وكذلك لما كانت H وسط BC و $K \in]BC[$، فإن

$$KB \, . \, KC + KH^2 = HC^2 \qquad (2)$$

وإذا أضفنا HI^2 إلى طرفي المعادلة (2) نحصل على

$$KB \, . \, KC + IK^2 = IC^2 \qquad (3)$$

نستخلص من (1) و (3)

$$\frac{KA \cdot KD + KG^2}{KB \cdot KC + IK^2} = \frac{E}{F}$$

إلا أن

$$\frac{GK^2}{IK^2} = \frac{E}{F}$$

فإذاً

$$\frac{KA \cdot KD}{KB \cdot KC} = \frac{E}{F}$$

و K هي النقطة التي نبحث عنها.

لنلاحظ أن نص القضية لا يعطينا المواضع النسبية لا للنقطة D ولا للنقطة H، هذا من جهة وكذا الأمر بالنسبة لـــ C و G.

حددت النقطة I على العمود المقام من H على AB بالعلاقة $\frac{DG^2}{CI^2} = \frac{E}{F}$. ولذا فمن الضروري لوجود I أن يكون $CI > CH$. وبما أن $DG = \frac{1}{2} AD$ و $CH = \frac{1}{2} BC$، يصبح الشرط اللازم عندئذ على الشكل $AD^2 > \frac{E}{F} \cdot BC^2$.

يمكننا في حال وجود I إيجاد L على CG وموضعها مرتبط بـــ $\frac{E}{F}$.

إن الإنشاء الذي أعطاه ابن سهل ليس ممكناً دوماً. لكن الحل موجود وهو وحيد إذا كان ترتيب النقاط هو A، C، D، B.

لنأخذ A كنقطة المبدأ على الخط المعلوم ولتكن c، d، b، x فواصل النقط C، D، B و K. لدينا فرضاً

$$b > d > x > c > 0$$

وتعود المسألة عندئذ إلى حل المعادلـــة

$$\frac{x(d-x)}{(b-x)(x-c)}=\frac{E}{F}\Leftrightarrow x^2(E-F)+x[Fd-E(b+c)]+Ebc=0$$

لنضع

$$f(x)=x^2(E-F)+x[Fd-E(b+c)]+Ebc$$

لدينا

$$f(c)=Fc(d-c)>0$$

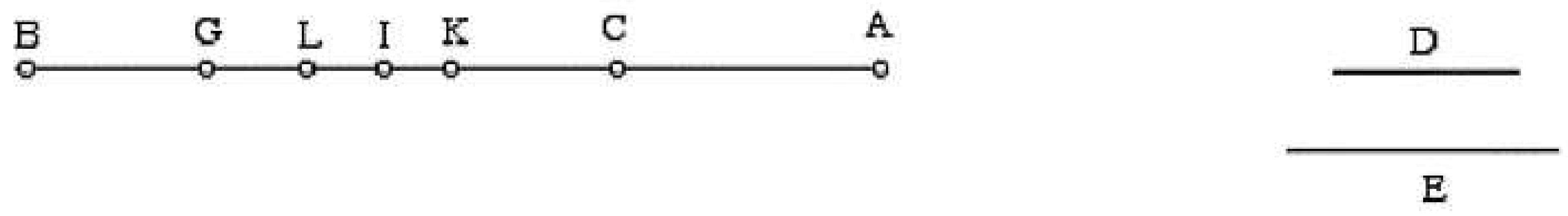
و

$$f(d)=E(d-b)(d-c)<0$$

وللمعادلة من الدرجة الثانية جذران يحقق أحدهما الشرط $c<x<d$. فللمسألة حل وحيد.

[17، ص. 960] يمكن إعادة كتابة هذه المسألة كما يلي: لتكن النقطة C على المقطع المعلوم AB. نريد أن نجد نقطة L على المقطع CB تحقق

$$\frac{D}{E}=\frac{CA\cdot CL}{AL\cdot BL}$$ أي نسبة معلومة



الشكل. 15

لتكن K وسط AB، نحدد بالترتيب النقطة G والمقطع H والنقطتين I و L بالعلاقات

$$IL=IK \text{ ، } \frac{GI^2}{KI^2}=\frac{H+\frac{E}{4}}{\frac{E}{4}} \text{ ، } \frac{AC}{KG}=\frac{D}{H} \text{ ، } \frac{AC\cdot CG}{BK^2}=\frac{D}{E}$$

لنبرهن أن L هي النقطة المطلوبة.

تبين العلاقة التي تعرف I أن $GI>IK$، وبالتالي تقع L بين G و I ويمكننا أن نكتب

$$GK\,.\,GL+KI^2=GI^2$$

ولدينا إذاً

$$\frac{GK\cdot GL+KI^2}{KI^2}=\frac{H+\frac{E}{4}}{\frac{E}{4}}$$

ومنه

$$\frac{GK\cdot GL}{KI^2}=\frac{H}{\frac{E}{4}}$$

و

$$\frac{GK \cdot GL}{KL^2} = \frac{H}{E}$$

إلا أن

$$\frac{D}{H} = \frac{AC}{KG} = \frac{AC \cdot GL}{GK \cdot GL}$$

وبالتالي

$$\frac{AC \cdot GL}{KL^2} = \frac{D}{E} \qquad (1)$$

بما أن K وسط AB، فإن وجود L بين A و B يعني أن

$$AL \,.\, BL + LK^2 = BK^2$$

ولذا فإن

$$\frac{D}{E} = \frac{AC \cdot CG}{AL \cdot BL + LK^2} = \frac{AC \cdot CL + AC \cdot GL}{AL \cdot BL + LK^2} \qquad (2)$$

ونستخلص من (1) و (2) أن

$$\frac{AC \cdot CL}{AL \cdot BL} = \frac{D}{E}$$

وتستجيب النقطة L إلى المطلوب في المسألة.

لنلاحظ أولاً أن الطول CG هو الذي يحدد وضع النقطة G، وهو الطول المرتبط بـ $\frac{D}{E}$. نستطيع افتراض G على امتداد AC، ويمكنها أن تكون عندئذ إما بين C و B إذا كان CG < CB أو خلف B إذا كان CB < CG. نستطيع افتراض I بين K و G، وتقع L عندئذ بين G و I .

يأخذ ابن سهل G بين C و B بحيث تقع L على المقطع BC. ولا تشوب المحاكمة أي شائبة حينها والنقطة L هي النقطة المستجيبة للمطلوب.

لكن المؤلف لم يبين أن L، الواقعة على المقطع GI، تقع بالضرورة على المقطع BC.

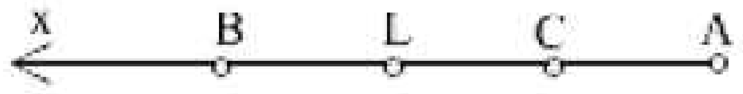
لنلاحظ ثانياً أنه يمكن حل هذه المسألة بمعادلة من الدرجة الثانية.

نأخذ على نصف المستقيم Ax النقط B، C، L، ذات الفواصل b، c، x على الترتيب التي تحقق $0 < c < x < b$. ونضع $\frac{D}{E} = k$ بحيث تصبح معادلة المسألة

$$\frac{c(x-c)}{x(b-x)} = k$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل

$$f(x) = kx^2 + x(c - bk) - c^2 = 0$$



لهذه المعادلة جذران $x'' < 0 < x'$. ويجب أن يحقق الجذر الموجب المتراجحة $c < x' < b$، لذا يجب أن يكون

$$f(c) < 0 \Leftrightarrow k\,c\,(c - b) < 0 \Leftrightarrow c < b$$
$$f(b) > 0 \Leftrightarrow c\,(b - c) > 0 \Leftrightarrow c < b$$

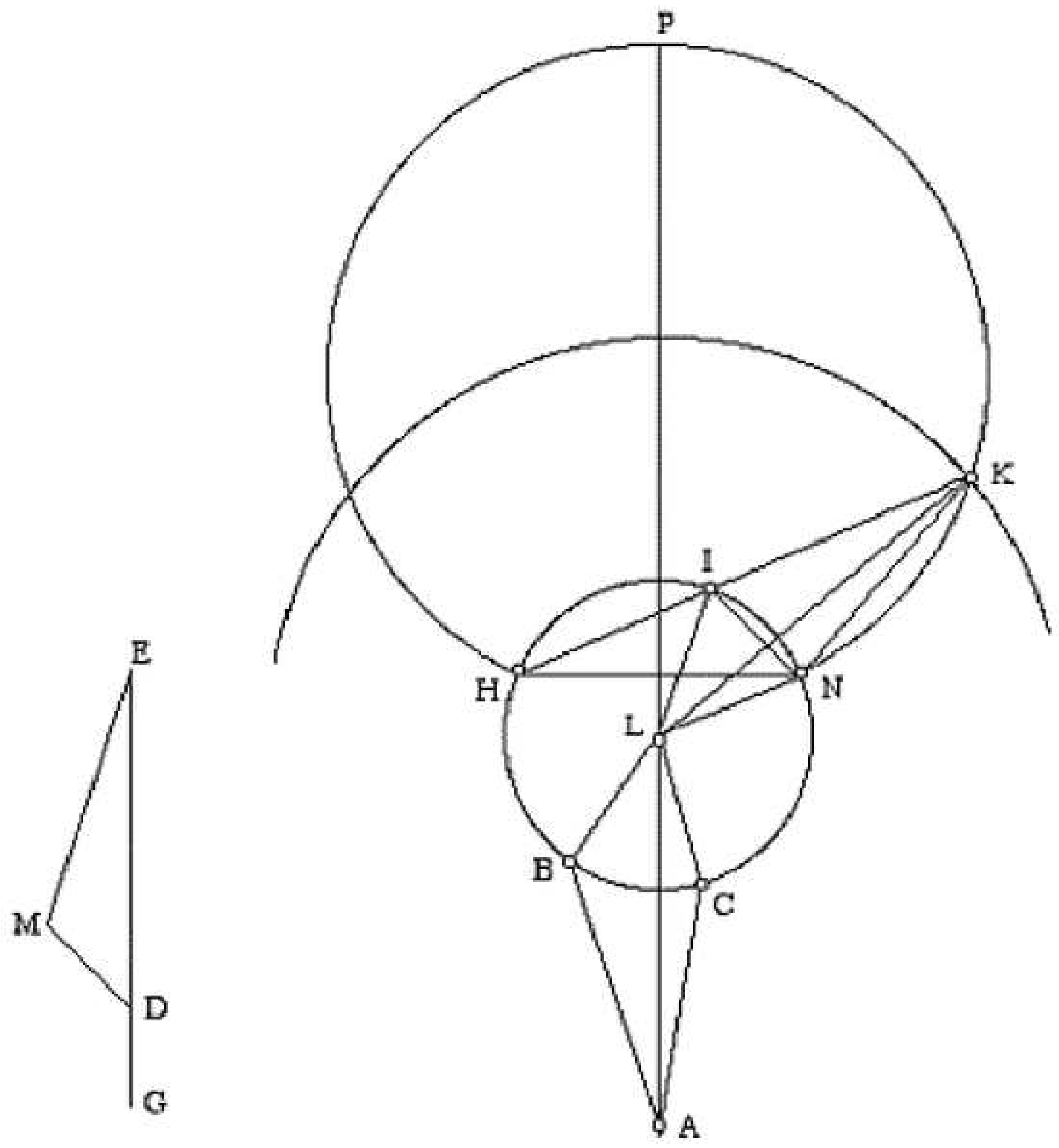
وهما شرطان محققان وللمسألة حل في كل الأحوال.

[18، ص. 962، 964] معطيات هذه المسألة هي دائرة L، نقطة A خارج الدائرة، زاوية DEM، النسبة $\frac{DE}{DM}$.

والمطلوب رسم خطين من A يلقيان الدائرة في B و C بحيث يتحقق

$$B\hat{A}C = D\hat{E}M \quad \text{و} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{EM}$$

لتكن G نقطة على امتداد ED. نفصل على الدائرة قوساً HIN كفؤاً للزاوية MDG، وننشئ على HN في نصف المستوى HIN قوساً كفؤاً للزاوية DEM.



الشكل. 16

لتكن K نقطة مشتركة بين هذا القوس وبين الدائرة (L, LA). يقطع المستقيم HK الدائرة L في I. نرسم من L نصفي مستقيم يقطعان الدائرة في B و C ويحققان $A\hat{L}B = K\hat{L}I$ و $A\hat{L}C = K\hat{L}N$.

وبما أن $LK = AL$ و $BL = IL$ فالمثلثان ALB و KIL متقايسان. وبالتالي $B\hat{A}L = I\hat{K}L$ و $AB = KI$.

ونبرهن وعلى النفس النحو أن $C\hat{A}L = N\hat{K}L$ و $AC = KN$.

نستخلص من ذلك أن $B\hat{A}C = I\hat{K}N = M\hat{E}D$.

ومن جهة ثانية $H\hat{I}N = M\hat{D}G$ فلذا $N\hat{I}K = M\hat{D}E$. والنتيجة أن المثلثين EMD و KNI متشابهان و

$$\frac{KI}{KN} = \frac{ED}{EM}$$

وبما أن $AB = KI$ و $AC = KN$، فإن $\frac{AB}{AC} = \frac{ED}{EM}$.

ولذا، فإن وجدت النقطة K، فإن هذا الإنشاء يعطينا النقطتين B و C المطلوبتين.

لتكن P نقطة تقاطع وسيط الوتر HN والقوس المكافئ له، ولذا

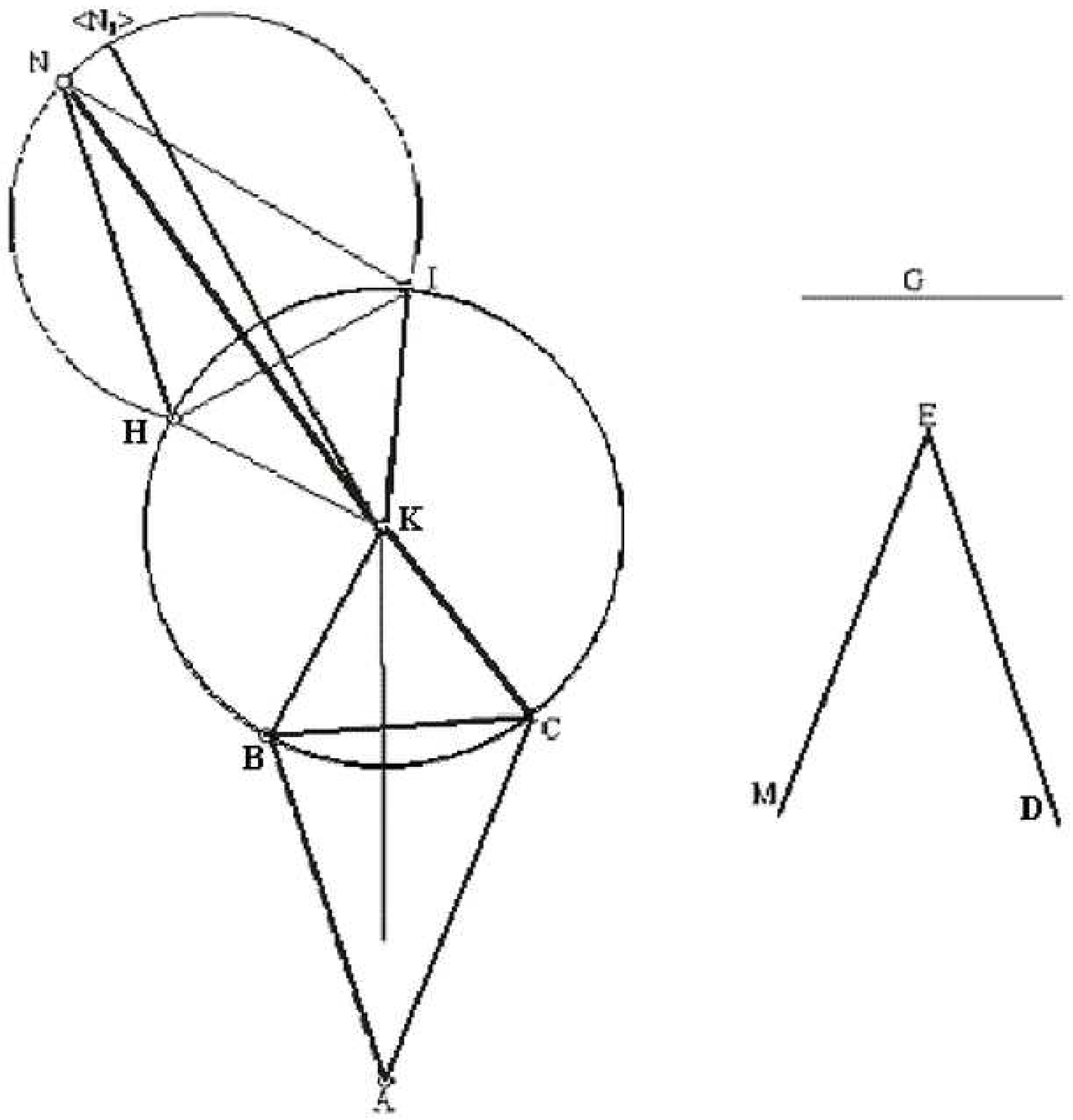
إذا كان $LA > LP$ فالنقطة K غير موجودة.

إذا كان LA = LP فإن K = P وللمسألة حل وحيد.

إذا كان LA < LP فللمسألة حلان.

نشير أنه يمكن لــ I، نقطة تقاطع HK والدائرة L، أن تكون على أحد القوسين اللذين يفصلهما HN أو أن تنطبق على H. الخط HK يمس الدائرة L في هذه الحالة الأخيرة. ولدينا في كل الأحوال $K\hat{I}N = M\hat{D}E$.

[19، ص. 964، 966] معطيات هذه المسألة هي الدائرة K، النقطة A خارج الدائرة، الزاوية DEM والطول G. نرسم من A خطين يلقيان الدائرة في B و C ويحققان $B\hat{A}C = D\hat{E}M$ و BC = G.



الشكل. 17

نخرج وتراً كيفما اتفق طوله HI = G، ونرسم عليه قوساً كفؤاً للزاوية $M\hat{E}D$. ونرسم الدائرة (K, AK). لتكن N نقطة، إن وجدت، مشتركة بين هذه الدائرة والقوس الكفؤ. ليكن KB و KC المستقمين المنشئين من K والمحققين لــ $A\hat{K}B = N\hat{K}H$ و $A\hat{K}C = N\hat{K}I$.

فالمثلثان NHK و ABK متقايسان ويصح الأمر نفسه على NIK و ACK من جهة وعلى HKI و BKC من جهة أخرى. نستخلص من ذلك أن BC = HI = G و $B\hat{A}C = H\hat{N}I = M\hat{E}D$.

لنلاحظ أن المنصف العمودي لـــ HI يقطع القوس الكفؤ في N_1.

إذا كان $AK > KN_1$ فليس للمسألة حل.

إذا كان $AK = KN_1$ فالمثلث HN_1I متساوي الساقين وكذلك ABC متساوي الساقين ومحوره AK. ينطبق N_1 على N في هذه الحالة وللمسألة حل وحيد.

إذا كان $AK < KN_1$ فالدائرة (K, AK) تقطع القوس المكافئ في نقطتين N و 'N متناظرتين بالنسبة للعمود المنصف KN_1 وللمسألة حلان متناظران.